

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
**Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова**  
Российской академии наук

**УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**  
*(конференция Пятницкого)*

Материалы XIV Международной  
научной конференции

*30 мая – 1 июня 2018 г.*

**Москва  
ИПУ РАН  
2018**

**УДК 681.51**  
**ББК 32.96**  
**У81**

**Устойчивость и колебания нелинейных систем управления:**  
Материалы XIV Международной научной конференции (30 мая – 1 июня 2018г., Москва) / [Ред. В.Н. Тхай]. – М.: ИПУ РАН, 2018. – 499 с.  
– ISBN 978-5-91450-214-7.

В научное издание включены материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). Рассматриваются вопросы устойчивости, стабилизации, управления, колебаний, нелинейной динамики в различных областях.

Издание предназначено для научных работников и специалистов в области фундаментальной теории управления, теории устойчивости, теории колебаний, прикладных задач управления.

**Утверждено к печати Программным комитетом конференции**

Программный комитет конференции: В. Ажмяков, А.Ю. Александров, И.М. Ананьевский, А.С. Андреев, И.Н. Барабанов, Н.Н. Болотник, С.Н. Васильев, А.В. Карапетян, А.М. Ковалев, А.П. Крищенко, А.Б. Куржанский, Ю.С. Ледаев, Г.А. Леонов, А.А. Мартынюк, Л.Б. Рапопорт, Е.Я. Рубинович, А.А. Тихонов, В.Н. Тхай, Т.Ф. Филиппова, Ф.Л. Черноусько

**Конференция проводится при поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(проект № 18-01-20029-г)**

**О назначении спектра посредством статической обратной связи по выходу для линейных систем с непрерывным и дискретным временем с запаздываниями по состоянию**

*В. А. Зайцев, И. Г. Ким*

Удмуртский ГУ, Ижевск, Россия  
verba@udm.ru (Зайцев В.А.)

Для линейных стационарных управляемых систем с непрерывным или дискретным временем с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в состоянии исследуется задача назначения спектра посредством линейной статической обратной связи по выходу с запаздываниями. Получены достаточные условия разрешимости задачи назначения произвольного спектра.

**Ключевые слова:** линейные системы с запаздываниями, задача назначения спектра, обратная связь по выходу

Рассмотрим линейную стационарную дифференциальную систему с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в состоянии

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^s A_j x(t - h_j) + Bu(t), \quad t > 0,$$

$$(2) \quad y(t) = C^* x(t)$$

с начальными условиями  $x(\tau) = \mu(\tau)$ ,  $\tau \in [-h_s, 0]$ ; здесь  $A, A_j \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ ,  $j = \overline{1, s}$ ;  $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$ ;  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_s$  — постоянные запаздывания,  $\mu: [-h_s, 0] \rightarrow \mathbb{K}^n$  — непрерывная функция;  $x \in \mathbb{K}^n$  — фазовый вектор,  $u \in \mathbb{K}^m$  — вектор управления,  $y \in \mathbb{K}^k$  — вектор выходных величин,  $M_{m,n}(\mathbb{K})$  — пространство  $m \times n$ -матриц с элементами из поля  $\mathbb{K}$ ;  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Пусть управление в системе (1), (2) строится в виде линейной статической обратной связи по выходу с запаздыванием

$$(3) \quad u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_{\rho} y(t - \tau_{\rho}), \quad t > 0, \quad y(\tau) = 0, \quad \tau < -h_s.$$

Здесь  $\theta \geq 0$  — некоторое целое число,  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\theta}$  — постоянные запаздывания,  $Q_{\rho} \in M_{m,k}(\mathbb{K})$ ,  $\rho = \overline{0, \theta}$ , — постоянные матрицы.

Замкнутая система (1), (2), (3) принимает вид

$$(4) \quad \dot{x} = (A + BQ_0C^*)x(t) + \sum_{j=1}^s A_j x(t - h_j) + \sum_{\rho=1}^{\theta} BQ_{\rho}C^* x(t - \tau_{\rho}).$$

Обозначим через  $\psi(\lambda, e^{-\lambda}) = \det \left[ \lambda I - \left( (A + BQ_0C^*) + \sum_{j=1}^s e^{-\lambda h_j} A_j + \sum_{\rho=1}^{\theta} e^{-\lambda \tau_{\rho}} BQ_{\rho}C^* \right) \right]$  характеристический квазиполином замкнутой системы (4).

**Определение 1.** Для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3), если для любого целого числа  $\ell \geq 0$ , для любых наперед заданных чисел  $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{\ell}$  и для любых наперед заданных  $\delta_{ij} \in \mathbb{K}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{0, \ell}$ , найдутся число  $\theta \geq 0$ , числа  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\theta}$  и матрицы  $Q_0, \dots, Q_{\theta} \in M_{m, k}(\mathbb{K})$  такие, что характеристический квазиполином  $\psi(\lambda, e^{-\lambda})$  замкнутой системы (4) удовлетворяет равенству

$$\psi(\lambda, e^{-\lambda}) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{\ell} \delta_{ij} \lambda^{n-i} e^{-\lambda \sigma_j}.$$

**Теорема 1.** Предположим, что коэффициенты системы (1), (2) имеют следующий вид:

$$(5) \quad \begin{aligned} A &= \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad a_{ij} = 0, \quad j > i + 1; \\ B &= \{b_{ij}\}, \quad C = \{c_{is}\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, k}; \\ b_{ij} &= 0, \quad i = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{1, m}; \quad c_{is} = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \quad s = \overline{1, k}; \\ A_{\nu} &= \{a_{ij}^{\nu}\}_{i,j=1}^n, \quad a_{ij}^{\nu} = 0 \quad (i < p) \vee (j > p), \quad \nu = \overline{1, s}; \quad p \in \{\overline{1, n}\}. \end{aligned}$$

Тогда равносильны следующие утверждения.

1. Матрицы  $C^*B$ ,  $C^*AB$ ,  $\dots$ ,  $C^*A^{n-1}B$  линейно независимы.
2. Для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3).

*Замечание 1.* Для системы (1), (2) с соизмеримыми запаздываниями теорема 1 была доказана в [1].

Построим по системе с запаздываниями (1), (2) систему без запаздываний, положив  $A_j = 0$ ,  $j = \overline{1, s}$ , в (1). Назовем такую систему «усеченной» (по отношению к системе (1), (2)). В работе [2] было исследовано свойство согласованности такой линейной управляемой системы без запаздываний.

**Теорема 2.** *Предположим, что коэффициенты системы (1), (2) имеют вид (5). Пусть усеченная система согласованна. Тогда для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3).*

Получены следствия о стабилизации системы (1), (2) регулятором (3).

Аналогичные утверждения имеют место для систем с дискретным временем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 16-01-00346-а) и Минобрнауки России (Проект 1.5211.2017/8.9).

### Список литературы

1. *Зайцев В.А., Ким И.Г.* О назначении произвольного спектра в линейных стационарных системах с соизмеримыми запаздываниями по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вест. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Комп. науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 315–325.
2. *Зайцев В.А.* Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифф. уравнения. 2012. Т. 48. № 1. С. 117–131.

## On Spectrum Assignment by Static Output Feedback for Linear Continuous-Time or Discrete-Time Systems with Time Delays in State Variables

*V. A. Zaitsev, I. G. Kim*

Udmurt State University, Izhevsk, Russia  
verba@udm.ru (V.A. Zaitsev)

For linear time-invariant continuous-time or discrete-time control systems with several non-commensurate delays in state, we study a spectrum assignment problem by linear static output feedback with delays. Sufficient conditions are obtained for solvability of the arbitrary spectrum assignment problem.

## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Garziera R.	285	Бутырин С. А.	408 404
Hwang S. S.	118	Волковицкий А. К.	201
Lin C. H.	118	Волокитин Д. А.	363
Su F. -С.	144	Гавриков А. А.	7
Yeh C. -H.	144	Гаджиян В. А.	98
Аверина Т. А.	4	Галяев А. А.	101
Акуленко Л. Д.	7	Гарбуз М. А.	104
Александров А. Ю.	10 13	Гелиг А. Х.	174
Алесова И. М.	16	Генералов А. А.	422
Алферов Г. В.	177	Глазков Т. В.	108
Ананьев Б. И.	20	Глумов В. М.	112 115
Ананьевский И. М.	24	Голуб А. П.	118 104
Анашкин О. В.	27	Голубев А. Е.	108
Андреев А. С.	30	Голубев Ю. Ф.	121 125
Андрианова О. Г.	33	Горовенко П. А.	177
Антипов А. С.	36	Грезина А. В.	128
Антоновская О. Г.	39	Губар А. Е.	131
Ахметзянов А. В.	43	Гусев М. И	271
Баладин Д. В.	50 47	Димова А. С.	134
Банников А. С.	53	Дмитрук А. В.	138
Банщикова И. Н.	339	Долгий Ю. Ф.	141 486
Барabanов И. Н.	57	Досаев М. З.	144
Барсегян В. Р.	60	Дружинина О. В.	148
Батхин А. Б.	63	Елфимов А. Н.	151
Белов А. А.	33	Епифанов Р. Ю.	226
Белова И. А.	67	Желонкина Н. И.	154
Берсенев Н. В.	70	Житкова Е. М.	131
Бильченко Г. Г.	77 73	Завалищн Д. С.	158
Бильченко Н. Г.	77	Зайцев В. А.	161 164
Бирюков Р. С.	47	Зимовщиков А. С.	167
Бойченко В. А.	81	Зиновьев Г. С.	67
Болотник Н. Н.	84	Золотухин Ю. Н.	170
Бортаковский А. С.	87	Зубер И. Е.	174
Булгакова М. А.	91	Иванов Г. Г.	177
Буре В. М.	264 318	Игумнов Л. А.	181
Буркин И. М.	94	Изместьев И. В.	448

Исанькин М. А.	184	Ложкин А.	264
Ишханян Т. А.	24	Локшин Б. Я.	204
Каледина Е. А.	148	Лысенко П. В.	101
Каленова В. И.	295	Лычагин В. В.	43
Калинин А. И.	187	Лычев С. А.	267
Калитин Б. С.	191	Макаренко А. В.	274
Каменецкий В. А.	194	Малафеев О. А.	277
Канатников А. Н.	197	Маликов А. И.	184 281
Карелин В. В.	151	Мартыненко А. В.	433
Карцев Н. М.	208	Масина О. Н.	148
Каршаков Е. В.	201	Мастерова А. А.	285
Ким И. Г.	164	Матвийчук О. Г.	288
Климина Л. А.	104 204	Мелкумова Е. В.	121
Коган М. М.	50 47	Метрикин В. С.	181
Коньков А. Е.	208 212	Митришкин Ю. В.	208 291
Коренев П. С.	291	Морозов В. М.	295
Корнеев В. А.	84 215	Морозов Ю. В.	298
Королев В. С.	167	Мухарьямов Р. Г.	301
Корянов В. В.	125	Мырзаев Р. С.	439
Костин Г. В.	219 267	Нефедов Г. А.	305
Костоусова Е. К.	222	Никифорова И. В.	181
Котов К. Ю.	170 226	Окунев Ю. М.	308
Кочетков С. А.	229	Омарова У. Ш.	439
Красинский А. Я.	232	Онегин Е. Е.	311
Краснов Д. В.	234	Павлов Б. В.	201
Краснова С. А.	36 237	Пак Э. Е.	395
Крищенко А. П.	241	Панасенко А. Г.	128
Кугушев Е. И.	244	Панкратова Я. Б.	334
Кудашкина И. В.	324	Пантелеев А. В.	314
Кузенков О. А.	247	Парилина Е. М.	318
Кузнецов Е. А.	250	Перегудова О. А.	321 324
Кузнецова О. И.	94	Пестерев А. В.	328
Кулешов А. С.	254	Петров Н. Н.	331
Кумакшев С. А.	257	Петрова М. С.	415
Кумачева С. Ш.	131	Петросян Л. А.	91 334
Курдюков А. П.	476	Погодаев Н. И.	337
Кушнер А. Г.	43	Поляхова Е. Н.	167
Лавринович Л. И.	187	Попова С. Н.	339
Левин М. А.	244	Попова Т. В.	244
Ли Инь	261	Привалова О. Г.	308

Провоторов В. В.	342	Теклина Л. Г.	426
Прохоров А. А.	291	Тимин В. Н.	429
Пучков А. М.	115	Тимофеева Г. А.	433
Рапопорт Л. Б.	346 349	Тимошин С. А.	368
Рассадин Ю. М.	353	Тихонов А. А.	13
Рединских Н. Д.	277	Толкачев Д. Е.	372
Решмин А. И.	356	Томилина Г. А.	131
Решмин С. А.	356 359	Тормагов Т. А.	346
Родионова Д. А.	314	Трофимова И. В.	436
Рукавишникова А. С.	232	Турешбаев А. Т.	439
Румянцев Д. С.	363	Тхай В. Н.	57 442
Рутковский В. Ю.	112	Утина Н. В.	395
Рыбаков К. А.	4	Уткин А. В.	234 445
Палис С.	267	Уткин В. А.	70 445
Сальникова Т. В.	366	Ухоботов В. И.	448
Самсонов В. А.	308	Федюков А. А.	451
Самсонок О. Н.	368 372	Фетисов Д. А.	455
Самыловский И. А.	138	Филиппова Т. Ф.	459
Саурин В. В.	267 375	Халина А. С.	462
Свитова А. М.	170	Хасанова Р. И.	324
Седаков А. А.	379	Хлебников М. В.	466
Седова Н. О.	381	Хрусталёв М. М.	311 462
Селюцкий Ю. Д.	144 285	Хрящев С. М.	469
Сергеев В. С.	385	Царьков К. А.	363 472
Сергеев И. Н.	388	Чайковский М. М.	476
Сесекин А. Н.	154	Черноусько Ф. Л.	479
Симонов П. М.	392	Чжэнь М.	379
Смирнова В. Б.	395	Чэнь Я.	10
Соболев М. А.	170	Шамолин М. В.	482
Соколов Б. В.	436	Шевченко Р. И.	486
Соколов В. Ф.	398	Шинкарьюк А. Г.	353
Соловьев А. С.	115	Шматков А. М.	257
Солодуша С. В.	401	Щенников В. Н.	148
Сомов Е. И.	408 404	Щенникова Е. В.	148
Сомов С. Е.	404	Щербакова Е. В.	98
Сомова Т. Е.	408	Юркевич В. Д.	67 489
Староверова К. Ю.	411	Юрченков А. В.	429 492
Стребуляев С. Н.	415		
Талагаев Ю. В.	418		
Татарников Д. В.	422		