На правах рукописи

УДК 517.984

КЛОЧКОВ МИХАИЛ АРАКАДЬЕВИЧ

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОГО РАНГА

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Ижевск 2004

Работа выполнена в ГОУВПО
"Удмуртский государственный университет".

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук, профессор Исламов Галимзян Газизович
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук, профессор Покорный Юлий Витальевич
		доктор физико-математических наук, профессор Чубурин Юрий Павлович
Ведущая организация	—	ГОУВПО "Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского"

Защита состоится "   "   2004 г. в   часов на заседании специализированного совета К 212.275.04 в ГОУВПО "Удмуртский государственный университет" (426034, Ижевск, ул. Университетская 1, корп. 4, аудитория 222).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Удмуртского государственного университета.

Автореферат разослан "   "   2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент   Н.Н. Петров

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена изучению задачи управления спектром дифференциальных операторов путём удаления заданного подмножества собственных значений.

Актуальность темы. Математическое описание многих физических процессов приводит к дифференциальным и интегральным уравнениям или даже к интегро-дифференциальным уравнениям. Широкий класс физических процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями-уравнение колебаний, диффузии, Пуассона, Максвелла, Шредингера, уравнения газо-гидродинамики и т.д. Изучение свойств таких математических объектов является важной и интересной задачей, как с практической, так и с теоретической точки зрения.

Спектральные задачи для линейных операторов давно привлекают внимание исследователей. Особый интерес представляет задача управления дискретным спектром дифференциальных операторов. Дискретный спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и описывает важные характеристики физических и химических объектов (квадраты частот собственных колебаний механических систем, энергетические уровни квантовых объектов и т.п.) Явления резонанса, энергетические сдвиги излучения и ряд других нежелательных явлений могут быть устранены путём введения блоков обратной связи, позволяющих изменить в заданном направлении спектральные характеристики операторов, описывающих динамику и статику изучаемых объектов.

Рассматриваемая в диссертации задача управления дискретным спектром касается изменения конечного числа точек дискретного спектра с помощью конечномерного возмущения, однако, преследует три важные цели, определяющие новизну исследования: исследуется роль возмущений минимально возможного ранга, поведение их норм при удалении n собственных значений при $n \to \infty$, а также получение оценок погрешности, допустимой при приближённом построении возмущений.

Общий характер влияния на спектр конечномерных возмущений достаточно хорошо изучен А. Вайнштейном, Н. Ароншайном, Ю.Н. Андреевым, А.Г. Бутковским, Е.Я. Смирновым и рядом других авторов. В работах Г.Г. Исламова впервые поставлена задача изучения возмущений минимального ранга, поведения их норм при большом числе изменяемых собственных значений и при приближённом построении возмущений. Мы углубляем эти исследования применительно к самосопряжённым операторам с чисто точечным спектром, а также несамосопряжённым операторам, подобным самосопряжённым.

Цель работы. Построение конечномерных возмущений, заданным образом изменяющих как простой так и кратный точечный спектр для конкретных классов дифференциальных операторов. Оценка нормы возмущения, её асимптотическое поведение при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений. Управление частотами собственных колебаний струны и прямоугольной мембраны по методу обратной связи. Построение наглядных примеров, иллюстрирующих процесс управления спектром.

Общие методы исследования. Использовались методы спектральной теории линейных операторов с чисто точечным спектром. Для построенных примеров проводился численный расчёт при помощи прикладных пакетов программ Mathematica 4.0 и Maple 7.0.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

1) Решена задача управления дискретным спектром неограниченных самосопряжённых операторов с простым чисто точечным спектром. Доказано, что необходимые изменения можно достичь одноран-

говым возмущением. Получено описание всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр надлежащим образом. Полученные результаты распространяются на несамосопряжённые операторы, подобные самосопряжённым.

2) Для задачи управления частотами собственных колебаний струны путём формирования внешнего воздействия по принципу обратной связи доказана теорема, описывающая все возможные виды одноранговых возмущений.

3) Найдена структура возмущённых решений в виде корней специального уравнения, рассмотрен пример, иллюстрирующий процесс сдвига и удаления пяти собственных значений, найдены собственные функции для добавленных в дискретный спектр собственных значений.

4) Описана область определения однорангового возмущения, для которой получена верхняя оценка нормы. Изучено её асимптотическое поведение при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений.

5) Получена оценка точности построения конечномерных возмущений для удаления из точечного спектра возмущаемых операторов заданного подмножества изолированных собственных значений единичной кратности. Эти результаты имеют большую ценность для решения практических задач, т.к. обычно на практике собственные значения и функции вычисляются с некоторой погрешностью.

6) Рассматривая задачу Трикоми для специального уравнения с вырождением порядка и типа, доказана теорема, описывающая все возможные виды одноранговых возмущений.

7) Построено одноранговое возмущение для частного случая уравнения Шрёдингера, приводится конкретный пример удаления из спектра "нежелательных" собственных значений.

8) Для неограниченных самосопряжённых операторов с кратным спектром доказана теорема построения всех возможных возмущений

минимального ранга.

9) Задана область определения, для которой получена верхняя оценка нормы многорангового возмущения.

10) Для задачи управления частотами собственных колебаний прямоугольной мембраны путём формирования внешнего воздействия по принципу обратной связи доказана теорема, описывающая все многоранговые возмущения.

11) Используя решение спектральной задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере, получена теорема, описывающая все возможные виды возмущений минимального ранга.

12) Построено большое количество примеров конечномерных возмущений дискретного спектра операторов математической физики, построены разнообразные графики функций, иллюстрирующие на примерах применение конечномерных возмущений.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит как теоретический, так и прикладной характер. Полученные в работе необходимые и достаточные условия существования конечномерных возмущений для самосопряжённых операторов с простым и кратным спектром могут быть использованы при решении задач управления линейными системами, задач реконструкции динамических систем. В технических устройствах для борьбы с явлением резонанса, удаления нежелательных свойств (частот, излучений).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались:

- Четвёртая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. (Ижевск, 1999)
- На научном семинаре кафедры вычислительной математики. (Ижевск, УдГУ, 1999-2003)
- VII Международная конференция студентов и аспирантов по фундаментальным наукам "Ломоносов-2000". (МГУ, 2000)

- "Понтрягинские чтения-XI,XV" на Воронежской весенней математической школе. (Воронеж, 2000,2004)
- Всероссийская конференция "Общие проблемы управления и их приложения к математической экономике". (Тамбов, 2000)
- Современные методы теории функций на Воронежской зимней математической школе. (Воронеж, 2001,2003)
- Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. (Ижевск, 2001)
- На семинаре проф. Хромова А.П. (Саратов, 2001)
- На семинаре проф. Покорного Ю.В. (Воронеж, 2001,2004)
- На Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям (2002).

Публикации. По результатам выполненных исследований опубликовано 10 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, изложена на 105 страницах. Список литературы содержит 55 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведён краткий обзор имеющихся работ по теме диссертации, описана постановка задачи управления точечным спектром. Задачу о построении возмущений минимального ранга будем рассматривать в следующей постановке.

Ограниченный оператор K, действующий в комплексном банаховом пространстве X, называется конечномерным, если он представим в виде

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x, b_i \rangle, \quad a_i \in X, \quad b_i \in X^*(i = \overline{1,n}),$$

где X^*—сопряжённое пространство, $\langle x, b_i \rangle$—значение функционала b_i на элементе x. Пусть замкнутый оператор $A : X \to X$ с областью определения $D(A)$ имеет собственные значения в некоторой "запрещённой" области Ω комплексной плоскости $\mathbf{C}(\Omega \neq \mathbf{C})$. Требуется указать такой конечномерный оператор $K : X \to X$, при котором оператор $V = A - K$ не будет иметь точек спектра $\sigma(V)$ в Ω, т. е. $\Omega \subset P(V)$, где $P(V)$— резольвентное множество оператора V. Ранг конечномерного возмущения должен быть равен максимальной геометрической кратности точек спектра Ω.

Сформулированная задача относится к классу задач управления спектром линейного оператора и возникает при анализе итерационных процессов решения уравнений, в управлении квантовыми объектами, исследовании колебательных систем и в ряде других проблем.

В первой главе диссертации рассматривается задача управления простым спектром линейных операторов одноранговыми возмущениями.

В **п.1.1.1** рассматривается произвольный самосопряжённый оператор T с простым спектром, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H по закону

$$Tu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, X_k \rangle X_k, \tag{1}$$

где $\{X_k\}_{k \geqslant 1}$—полная ортонормированная система элементов из H, $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$—однократные собственные значения, образующие точечный спектр $\sigma_p(T)$ оператора T. Область определения такого оператора имеет вид

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ u | u \in H, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle u, X_k \rangle|^2 < \infty \right\}. \tag{2}$$

В форме (1) может быть записан самосопряжённый оператор с чисто точечным простым спектром. В силу известной теоремы Вейля-фон Неймана любой самосопряжённый оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве можно превратить в самосопряжённый оператор с чисто точечным спектром, добавив к нему подходящий "малый" оператор.

Одноранговое возмущение $K : H \to H$ представимо в виде

$$Ku = a \langle u, b \rangle, \quad a \in H, \quad b \in H, \tag{3}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j, \quad b = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j, \tag{4}$$

причём $\{\nu_i\}_{i \geqslant 1}, \{\beta_i\}_{i \geqslant 1}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел. Приводимая ниже теорема даёт описание всех операторов вида (3), для которых имеет место равенство

$$\sigma_p(T - K) = \Theta \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega). \tag{5}$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, который по предположению состоит из однократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k \geqslant 1}$, Ω—заданное конечное подмножество изолированных собственных значений оператора T, которое надлежит удалить с помощью одноранговового возмущения (3), Θ—заданное конечное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 1. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_m}\}$ изолированных собственных значений оператора (1) в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \dots, \kappa_m\}$ ($\Theta \cap \Omega = \emptyset$) с помощью одноранговового возмущения вида (3) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*
а) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{k_1, \dots, k_m\}$;
б) $\nu_{k_i} \beta_{k_i} = \dfrac{P(\lambda_{k_i})}{\prod\limits_{j=1, j \neq i}^{m} (\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j})}, i = \overline{1, m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

В **п.1.2.1** используя каноническую форму для одного класса несамосопряжённых дифференциальных операторов n-го порядка с простым спектром, действующих в $L^2(0,1)$:

$$T = A(D+M)^n A^{-1}, \tag{6}$$

где $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$—линейный гомеоморфизм, $\alpha_k = O(|k|^{\frac{1}{2}})$, $\varphi_k(x) = e^{2k\pi \mathbf{i} x}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$—собственные функции оператора $Du = \dot{u}$, $u(0) = u(1)$, M—оператор, диагонализируемый в базисе $\varphi_k(x) = e^{2k\pi \mathbf{i} x}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ пространства $L^2(0,1)$. Собственные значения оператора $(D+M)^n$ и, следовательно, подобного ему оператора T, имеют вид

$$\{(2k\pi\mathbf{i} + \alpha_k)^n : \quad k = 0, \pm 1, \ldots\}.$$

Собственными функциями оператора $D+M$ будут функции φ_k, $k = 0$, $\pm 1, \ldots$, и, значит, собственными функциями оператора T будут функции $u_k = A\varphi_k$, $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Эта форма представления позволяет распространить результат теоремы 1 на указанный класс несамосопряжённых операторов. В самом деле, T подобен самосопряжённому оператору $(D+M)^n$ с простым спектром. Описание класса всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора $(D+M)^n$ требуемым образом, дано в теореме 1. Для получения всех одноранговых возмущений, изменяющих спектр оператора T надлежащим образом, достаточно применить преобразование подобия к одноранговым возмущениям оператора $(D+M)^n$.

Если элементы $\tilde{a} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \nu_k \varphi_k$ и $\tilde{b} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_k \varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для $(D+M)^n$, то $a = A\tilde{a} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \nu_k A\varphi_k$ и $b = \left(A^{-1}\right)^* \tilde{b} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_k \left(A^{-1}\right)^* \varphi_k$ порождают одноранговое возмущение для T. Итак, имеет место

Теорема 2. *Пусть T—дифференциальный оператор n-го порядка с простым спектром, определённый на классе функций с абсолютно непрерывной $(n-1)$-й производной и n-й производной из L^2 и имеющий регулярные по Биркгофу краевые условия. Для того чтобы задан-*

ное подмножество собственных значений $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_m}\}$ *оператора* T *с помощью одноранговго возмущения вида* (3), *где* $a = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \nu_j A\varphi_j$, $b = \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \bar{\beta}_j \left(A^{-1}\right)^* \varphi_j$, $\{\nu_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{\beta_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ *—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, переводилось в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *необходимо и достаточно, чтобы эти последовательности удовлетворяли следующим условиям:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ *для индексов* j, *не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_m\}$;

б) $\nu_{k_j}\beta_{k_j} = \frac{P\left(\lambda_{k_j}\right)}{\prod\limits_{l=1, l\neq j}^{m}\left(\lambda_{k_j} - \lambda_{k_l}\right)}, j = \overline{1, m}$, *где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

В **п.1.3.1** иллюстрируется применение теоремы 1 при изучении задачи управления частотой собственных колебаний конечной струны. Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний закреплённой струны длины l:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t),\ x \in (0,l),\ t \geqslant 0, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,$$

где неизвестная функция $u(x,t)$ характеризует величину отклонения струны от положения равновесия, c—константа, свободный член $F(x,t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения, которое предлагается формировать по закону обратной связи

$$F(x,t) \equiv Ku = a(x) \int_0^l u(s,t) b(s) ds. \tag{8}$$

Известно решение невозмущённой спектральной задачи

$$-c^2 X''(x) = \lambda X(x),\ \lambda = \omega^2,\ X(0) = X(l) = 0,$$

где ω—собственная частота колебания закреплённой струны:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi c}{l}\right)^2, \; X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Система функций $\{X_k\}_{k\geqslant 1}$ является полной, ортонормированной в $L^2(0,l)$ и образует полную систему собственных функций дифференциального оператора $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями $X(0) = X(l) = 0$. Дискретный характер спектра этого оператора позволяет записать спектральное разложение

$$TX(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k X_k(x) \int_0^l X(s) X_k(s) ds. \tag{9}$$

Область определения этого оператора допускает эквивалентное описание

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ X | X \in L^2((0,l)), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left| \int_0^l X(s) X_k(s) ds \right|^2 < \infty \right\}. \tag{10}$$

Теперь необходимая теорема об управлении частотами собственных колебаний струны получается в результате переформулировки теоремы1.

Теорема 3. *Пусть $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения* (10). *Чтобы перевести заданное подмножество квадратов собственных частот колебаний струны $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \ldots, \lambda_{l_m}\}$ в произвольно заданное подмножество $\Theta = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ с помощью однорангового возмущения вида $KX = a(x)\int\limits_0^l X(s)b(s)ds$, $a = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu_j X_j$, $b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j X_j$, где $\{\nu_i\}_{i\geqslant 1}, \{\beta_i\}_{i\geqslant 1}$—две квадратично суммируемые последовательности комплексных чисел, необходимо и достаточно выбрать эти последовательности так, чтобы выполнялись следующие условия:*

а) $\nu_j \beta_j = 0$ для индексов j, не принадлежащих множеству $\Lambda = \{l_1, \ldots, l_m\}$;

б) $\nu_{l_i}\beta_{l_i} = \frac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_j})}$, $i = \overline{1,m}$, где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

В **п.1.3.2** показано, что, если в теореме 3 длина струны $l = 2\pi$ и в качестве квадратично суммируемой последовательности $\{\nu_k\}$ взято $\{\frac{1}{k}\}$, то

$$a(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sin(jx) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\pi - x}{2}, \ 0 < x < 2\pi.$$

Нетрудно проверить, что если

$$\nu_k = \frac{1}{k^2}, \text{ то } a(x) = -\sqrt{\frac{1}{\pi}} \int_0^x \ln\left(2\sin(z/2)\right) dz, \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$

$$\text{и если } \nu_k = \frac{1}{k^3}, \text{ то } a(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \left(\frac{x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x}{12} \right), \ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

В **п.1.4.1** в качестве примера удаляется из спектра колебаний струны первые N частот. Согласно формулировке теоремы 3 зададим $\nu_k = \frac{1}{k}, \ c = 1$,

$$a(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} X_k(x), \quad b(x) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k X_k(x),$$

так как $\nu_k = 0, \quad \beta_k = 0$ для $k > N$. Из условия б) теоремы получим

$$\frac{1}{i}\beta_i = \frac{P\left(\lambda_i\right)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \left(\lambda_i - \lambda_j\right)}, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P(\mu)$ можно определить как $P(\mu) = \mu(\mu - \lambda_{N+1})^{N-1}$. Одноранговое возмущение выглядит так:

$$Ku = \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{kl} \sin\frac{k\pi x}{l} \sum_{i=1}^{N} \beta_i \int_0^l u(s) \sin\frac{i\pi s}{l} ds. \tag{11}$$

Данный пример показывает, что искомое возмущение можно построить самыми различными способами в рамках теоремы. С помощью пакета программ Mathematica v.4.1 были получены графики функций из образа оператора $Vu = (T - K)u$, где $T = -\frac{d^2}{dx^2}$, $u = X_k(x), \quad x \in [0, \pi]$.

В соответствии с приведённым выше примером удалялось $N = 5$ первых частот. На рис.1-2 видно, что построенные графики отличаются по форме от синусоиды. Таким образом, очевидно, что $\lambda_k X_k \neq (T-K)X_k$ при $k \in \overline{1,5}$ и $\lambda_k X_k = (T-K)X_k, \quad k > 5$, т. е. в спектре оператора $T-K$ отсутствует заданное количество частот согласно теореме 3.

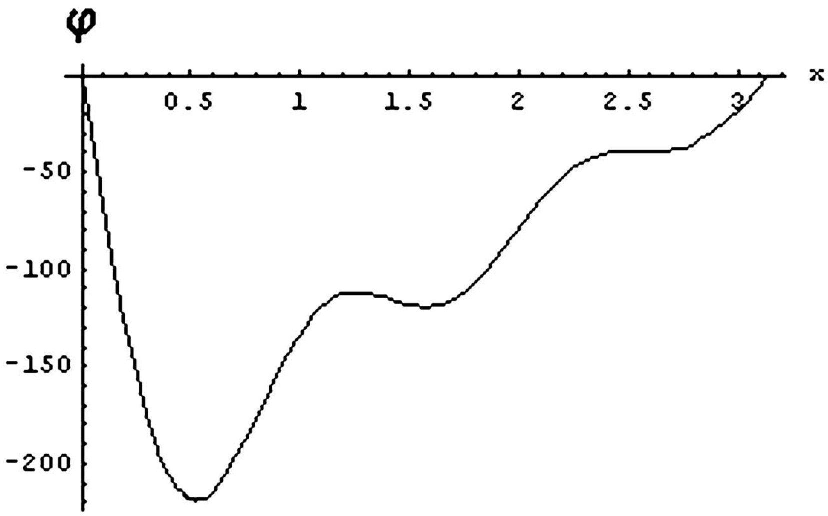

Рис. 1. $k = 1; \quad X_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x);\ \varphi = (T-K)X_k$

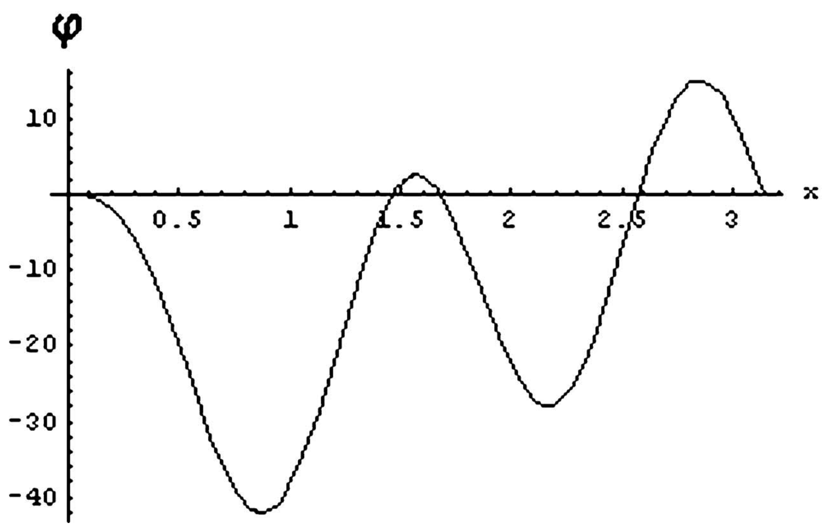

Рис. 2. $k = 5; \quad X_5(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(5x);\ \varphi = (T-K)X_k$

Дополнительно для данного примера вычислим детерминант Вайнште-

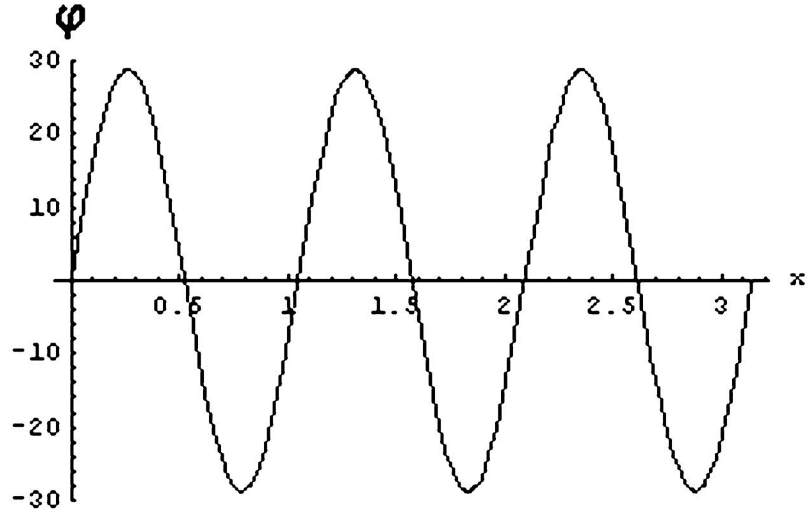

Рис. 3. $k = 6$; $X_6(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(6x)$; $\varphi = (T-K)X_k$

йна-Ароншайна

$$\omega(\mu) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{\beta_k}{k(\lambda_k - \mu)}.$$

Построим график $\omega(\mu)$ На графике четко видны полюса, соответствующие удаленным из спектра первых пяти собственных значений.

В **п.1.4.2** также описывается структура множества решений возмущённой задачи. Существует следующий способ его описания. Рассмотрим спектральную задачу

$$\lambda u = (T-K)u, \quad u(0) = u(l) = 0. \tag{12}$$

Запишем её решение через функцию Грина—$G(x, s, \lambda)$.

Теорема 4. *Все собственные значения из Ω являются нулями функции $SG(\lambda) = 1 - \int\limits_0^l b(\tau)\tilde{a}(\tau,\lambda)d\tau$, где $\tilde{a}(x,\lambda) = \int\limits_0^l G(x,\tau,\lambda)a(\tau)d\tau$.*

В **п.1.4.3** рассматривается следующая задача. Допустим, необходимо добавить к спектру колебаний струны следующее подмножество собственных значений $\Theta = \{5,\ 6,\ 7\}$. Для этого заменим подмножество $\Omega = \{1,\ 4,\ 9\}$ на Θ. Таким образом, $\kappa_1 = 5$, $\kappa_2 = 6, \kappa_3 = 7$, $\lambda_{l_1} = 1$, $\lambda_{l_2} = 4, \lambda_{l_3} = 9$.

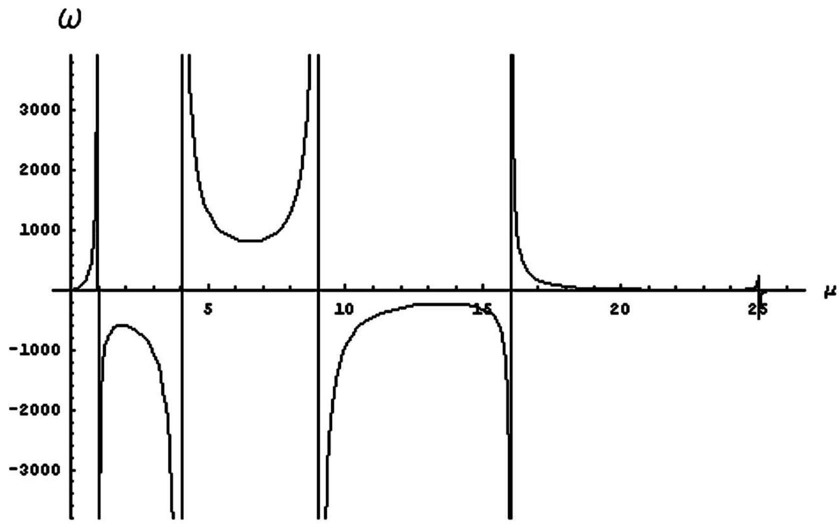

Рис. 4. $\omega = \omega(\mu)$.

Согласно теореме 3 построим одноранговое возмущение вида

$$Ku = a(x) \int_0^\pi u(s)b(s)ds,$$

где

$$a(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k} X_k(x), \quad b(x) = \sum_{k=1}^{3} \beta_k X_k(x),\ X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx),$$

$$\frac{1}{i}\beta_i = \frac{P\left(\lambda_{l_i}\right)}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{3} \left(\lambda_{l_i} - \lambda_{l_j}\right)}, \quad i = \overline{1,3},\ P(\mu) = (\mu - \kappa_1)(\mu - \kappa_2)(\mu - \kappa_3).$$

Тогда

$$(T-K)u = -\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}\sin(kx)\right) \times$$

$$\times \left(-5\int_0^\pi u(s)\sin(s)ds + \frac{4}{5}\int_0^\pi u(s)\sin(2s)ds + \frac{9}{5}\int_0^\pi u(s)\sin(3s)ds\right).$$

В **п.1.4.4** для рассмотренного выше примера найдём решение следующей спектральной задачи

$$-u'' - Ca(x) = \lambda u(x),\ u(0) = u(\pi) = 0, \tag{13}$$

где

$$a(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}\sin(kx),\ b(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=1}^{3}\frac{kP\left(\lambda_{l_k}\right)}{\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{3}\left(\lambda_{l_k}-\lambda_{l_j}\right)}\sin(kx),$$

$$P(\mu)=(\mu-5)(\mu-6)(\mu-7),$$

$$C=\int_0^{\pi}b(s)u(s)ds. \tag{14}$$

Запишем решение (13) в виде

$$u(x)=-\frac{C\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(3(\lambda-9)(\lambda-1)\cos(x)+2(\lambda-4)\left(2(\lambda-7)+(\lambda-1)\cos(2x)\right)\right)}{3(\lambda-9)(\lambda-4)(\lambda-1)}\times$$

$$\times\sin(x).$$

Подставив $u(x)$ в (14), получим уравнение

$$\frac{2(87+\lambda(2\lambda-29))}{(\lambda-9)(\lambda-4)(\lambda-1)}-1=0,$$

его решения $\lambda=\{5,6,7\}$. Таким образом, мы убедились, что в точечном спектре оператора T присутствуют собственные значения из Θ.

Для каждого собственного значения из множества Θ можно найти собственную функцию. Подставив в (13) $\lambda\in\Theta$, определим следующие собственные функции

$$\lambda=5,\ X_{\kappa_1}=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\left(-3\sin(x)-6\sin(2x)+\sin(3x)\right),$$

$$\lambda=6,\ X_{\kappa_2}=\frac{1}{90\sqrt{2\pi}}\left(-36\sin(x)-45\sin(2x)+20\sin(3x)\right),$$

$$\lambda=7,\ X_{\kappa_3}=-\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left(\sin(x)+\sin(2x)-\sin(3x)\right).$$

В **п.1.5.1** получена оценка нормы одноранговго возмущения и изучено её поведение при удалении бесконечно большого числа точек спектра. Норма однорангового возмущения $K : H \to H$ может неограниченно расти при удалении из спектра оператора T бесконечно большого числа собственных значений, как в случае их сгущения в точке ноль, так и в случае их стремления к бесконечно удалённой точке. Поэтому, мы пробуем сузить область определения наших операторов с целью получения конечных оценок нормы оператора K и рассмотреть случаи, когда возможно достижение нашей цели.

Согласно теореме 1 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = a\left\langle u, b\right\rangle, \; a = \sum_{i=1}^{m} \nu_{k_i} X_{k_i}, \; b = \sum_{i=1}^{m} \bar{\beta}_{k_i} X_{k_i}, \tag{15}$$

где m—число удаляемых собственных значений оператора T, X_{k_i}—соответствующие удаляемым собственным значениям собственные функции. Пусть оператор T действует из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \Big\{u|u \in H, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\left\langle u, X_k\right\rangle|^2 < \infty\Big\}$ в H. Выберем следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\left\langle u, X_j\right\rangle|^2\right)^{1/2}, \; \lambda_j \neq 0, \; j = \overline{1, \infty}. \tag{16}$$

Если в спектре оператора T имеется собственное значение $\lambda_k = 0$, тогда поменяем λ_1 и λ_k местами, получим $\lambda_1 = 0$, X_1—собственная функция, соответствующая нулевому собственному значению. В этом случае норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ запишем в виде

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\varepsilon^2 |\left\langle u, X_1\right\rangle|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |\lambda_j|^2 |\left\langle u, X_j\right\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Здесь λ_1 заменили на малое значение $0 < \varepsilon < 1$. Норму (16) можно использовать, если оператор T обратим, иначе необходимо брать норму (17). Тогда имеет место

Теорема 5. *Пусть задано подмножество $\Omega = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_m}\}$ удаляемых однократных собственных значений оператора T, конечное подмножество Θ добавляемых точек к спектру оператора T и норма* (17). *Пусть среди удаляемых собственных значений имеется $\lambda_{k_1} = 0$, $X_{k_1} = X_1$. Тогда имеет место следующая оценка нормы для возмущения* (??) *с условием, что $\nu_{k_i} = 1$ для всех $i = \overline{1, m}$*

$$\|K\|_{\mathcal{D}\to H} \leqslant \frac{\sqrt{m}|P(0)|}{\varepsilon \prod\limits_{j=2}^{m} |\lambda_{k_j}|} + \sum_{i=2}^{m} \frac{\sqrt{m}|P(\lambda_{k_i})|}{|\lambda_{k_i}| \prod\limits_{j=1, i\neq j}^{m} |\lambda_{k_i} - \lambda_{k_j}|},$$

где $P(\lambda)$—некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из Θ.

При $m \to \infty$ в **п.1.5.2** изучено асимптотическое поведение данной оценки, получены некоторые условия существования конечного предела. Возьмём $\lambda_{k_i} = i^2$. В качестве нормы, по аналогии с (16), выберем

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{2m} m^{2m+6} |\left\langle u, X_j \right\rangle|^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Имеет место новая оценка $\|K\|$: $\|K\| \leqslant \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!}$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{2m^{m+1/2}}{e^m m!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$—конечен.

Данный результат важен по той причине, что, выбрав определённым образом норму для функций из области определения оператора T, имеем конечное значение верхней оценки нормы одноранговаго возмущения K при неограниченном увеличении количества выводимых из спектра собственных значений.

В **п.1.5.4** получены две теоремы, позволяющие оценить точность вычисления возмущений минимального ранга. В качестве возмущаемого рассматривается обратимый самосопряженный оператор T вида (1), действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\}$— заданное подмножество однократных собственных значений оператора T.

Теорема 6. *Всякий одноранговый оператор $\tilde{K}$, удовлетворяющий условию*

$$||K-\tilde{K}|| < \min_{k=\overline{1,m}} \left(\frac{1}{\nu_{l_k}^2} \sum_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left(\left| \frac{\nu_{l_k}}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right|^2 + \left| \frac{\nu_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right|^2 + \frac{2|\nu_{l_k}||\nu_i|}{|\lambda_i - \lambda_{l_k}|^2} \right) + \right.$$

$$+ \left(\left| \frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}} \right| + \left| \frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, i\notin\Lambda}^{\infty} \frac{\beta_i}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right| + \left| \frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, l_i\in\Lambda, i\neq k}^{m} \frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}} \right| + \right. \tag{19}$$

$$\left. \left. + \left| \frac{1}{\nu_{l_k}\beta_{l_k}} \sum_{i=1, l_i\in\Lambda, i\neq k}^{m} \frac{\nu_{l_i}\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}} \right| \right)^2 \right)^{-1/2}$$

также будет вносить в точечный спектр возмущаемого оператора необходимые изменения, а именно $\sigma_p(T-\tilde{K}) = \{0\} \cup (\sigma_p(T) \setminus \Omega)$.

Теорема 7. *Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы, Ω содержит только m положительных однократных собственных значений. Пусть имеется пара одноранговых возмущений K и $\tilde{K}$, определяющихся следующим образом $Ku = a\langle u, b\rangle$, где $a = \sum\limits_{j=1}^{m} X_{l_j}$, $b = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\beta}_{l_j} X_{l_j}$, $\beta_{l_i} = \frac{P(\lambda_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\lambda_{l_i} - \lambda_{l_j})}$, $i = \overline{1,m}$, $\tilde{K}u = \tilde{a}\langle u, \tilde{b}\rangle$, где $\tilde{a} = \sum\limits_{j=1}^{m} X_{l_j}$, $\tilde{b} = \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\tilde{\beta}}_{l_j} X_{l_j}$, $\tilde{\beta}_{l_i} = \frac{P(\tilde{\lambda}_{l_i})}{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} (\tilde{\lambda}_{l_i} - \tilde{\lambda}_{l_j})}$, $i = \overline{1,m}$, где $P(\mu)$ — некоторый многочлен степени m со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого образуют подмножество $\sigma_p(T) \setminus \Omega$, дополненное нулём, $\tilde{\lambda}_{l_j} = \lambda_{l_j} + \varepsilon$.*
Если

$$M = \min_{k=\overline{1,m}} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1, i\neq l_k}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_i - \lambda_{l_k}} \right|^2 + 3 \sum\limits_{i=1, l_i\neq l_k}^{m} \left| \frac{1}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}} \right|^2 + \right.}$$

$$\frac{1}{+\left(\left|\frac{1}{\beta_{l_k}}\right| + 2\left|\frac{1}{\beta_{l_k}} \sum_{i=1, l_i \in \Lambda, i \neq k}^{m} \frac{\beta_{l_i}}{\lambda_{l_i} - \lambda_{l_k}}\right|\right)^2\Bigg)^{1/2}}$$

и $||K - \tilde{K}|| < M$, *тогда*

$$\varepsilon \leqslant \frac{M}{m\sqrt{m}\left|\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\lambda_{l_j}^{m-1}}{\prod\limits_{i=1, j\neq i}^{m} \left|\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}\right|}\right|}.$$

Итак, мы доказали две теоремы, позволяющие оценить точность построения конечномерных возмущений для удаления из точечного спектра возмущаемых операторов заданного подмножества собственных значений. Эти результаты полезны для решения практических задач, т.к. обычно на практике собственные значения и функции вычисляются с некоторой погрешностью.

В **п.1.7.1** исследуется задача управления спектром уравнения Шрёдингера для гармонического осциллятора вида

$$\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + (E - U)\psi = 0,$$

где $U = \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, ω_0—собственная частота осциллятора. Известно решение задачи отыскания стационарных состояний, т.е. спектра собственных значений энергии E и соответствующих собственных функций ψ из уравнения

$$\psi'' + \frac{2\mu}{h^2}\left(E - \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi = 0 :$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \ E_n = h\omega_0(n + 1/2), \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $H_n(x)$—полином Чебышева-Эрмита. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть имеется дифференциальный оператор вида* $T\psi = -\frac{h^2}{2\mu}\psi'' + \frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\psi$ *с дополнительным условием нормировки* $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx = \frac{1}{x_0}$*, действующий в пространстве* $L^2(-\infty,\infty)$*. Для того чтобы перевести заданное подмножество собственных значений* $\Omega = \left\{E_{l_1},\ldots,E_{l_m}\right\}$, $l_1 < l_2 < \cdots < l_m$ *в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_1,\ldots,\kappa_m\}$ $(\Theta\cap\Omega = \emptyset)$ *с помощью одноранговогo возмущения вида* (3)*, где*

$$a(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\nu_j\psi_j(x), \quad b(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\bar\beta_j\psi_j(x) \tag{20}$$

здесь $\{\nu_i\}_{i\geqslant 0}, \{\beta_i\}_{i\geqslant 0}$*–две квадратично суммируемые последова-* (21)

тельности комплексных чисел, необходимо и достаточно, чтобы последовательности (21) *удовлетворяли следующим условиям:*

а) $\nu_j\beta_j = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1,\ldots,l_m\}$;

б) $\nu_{l_i}\beta_{l_i} = \frac{P\left(E_{l_i}\right)}{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{m}\left(E_{l_i}-E_{l_j}\right)}$, $i = \overline{1,m}$*, где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ*.*

В **п.2.1.1** для самосопряжённого оператора с кратным спектром, имеющего следующее спектральное представление в виде ряда:

$$Tu = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l}\lambda_l\left\langle u,\varphi_{l,i}\right\rangle\varphi_{l,i}, \tag{22}$$

где λ_l—собственные значения оператора T кратности m_l, $1\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant\ldots$, действующего из

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(T) = \left\{h|h\in H, \quad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_l}\lambda_l^2|\left\langle h,\varphi_{l,i}\right\rangle|^2 < \infty\right\} \tag{23}$$

в H, H—сепарабельное гильбертово пространство, получена теорема, описывающая все многоранговые возмущения вида

$$Ku = \sum_{s=1}^{m}\sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si}\left\langle u,b_{si}\right\rangle, \quad m_{l_0}=0, \quad a_{si}\in H, \quad b_{si}\in H, \tag{24}$$

где $m_{l_1} \leqslant m_{l_2} \leqslant \dots \leqslant m_{l_m}$, для которых выполнено соотношение

$$\sigma_p(T-K) = \Theta \cup \left(\sigma_p(T) \setminus \Omega\right). \tag{25}$$

Здесь $\sigma_p(T)$—точечный спектр оператора T, Ω—заданное непустое подмножество собственных значений оператора T, Θ—заданное подмножество точек, добавляемых в спектр оператора T, или другими словами, точек, в которые переводятся собственные значения из Ω.

Теорема 9. *Для того чтобы можно было перевести заданное подмножество* $\Omega = \{\lambda_{l_1}, \dots, \lambda_{l_m}\}$ *изолированных собственных значений оператора* (22) *в произвольно заданное подмножество* $\Theta = \{\kappa_{l_1}, \dots, \kappa_{l_m}\}$ $(\Theta \cap \Omega = \emptyset)$ *с помощью многорангового возмущения вида* (24) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*
а) $\nu_{sij}\beta_{sij} = 0$ *для индексов* j*, не принадлежащих множеству* $\Lambda = \{l_1, \dots, l_m\}$;
б) $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \nu_{sil_j}\beta_{sil_j} = \dfrac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k})}, \quad j=\overline{1,m}$*, где* $P(\lambda)$*—некоторый многочлен степени* m *со старшим коэффициентом, равным единице, корни которого совпадают со значениями из* Θ.

В **п.2.2.1** также, как в случае оценки нормы одноранговою возмущения, получена оценка для многорангового возмущения. Согласно теореме 9 рассмотрим одноранговое возмущение K для оператора T в следующем виде

$$Ku = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} a_{si} \langle u, b_{si} \rangle, \quad m_{l_0} = 0,$$

$$a_{si} = \sum_{j=s}^{m} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}}, \quad b_{si} = \sum_{j=s}^{m} \bar{\beta}_{sil_j} \varphi_{l_j, i+m_{s-1}},$$

где $\sum\limits_{s=1}^{j} \sum\limits_{i=1}^{m_{l_s}-m_{l_{s-1}}} \beta_{sil_j} = \dfrac{P(\lambda_{l_j})}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m}(\lambda_{l_j}-\lambda_{l_k})}, \quad j=\overline{1,m}$. Оценим норму оператора K, действующего из $\mathcal{D}$ в H. Возьмём следующую норму для функций из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$

$$\|u\|_{\mathcal{D}} = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_l} |\lambda_l|^2 |\langle u, \varphi_{l,i} \rangle|^2 \right)^{1/2}, \ \lambda_l \neq 0, \ l = \overline{1, \infty}. \qquad (26)$$

Имеем следующее выражение для нормы

$$\|K\|_{\mathcal{D} \to H} = \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant 1} \|Ku\|_H = \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{m_{l_s} - m_{l_{s-1}}} \|a_{si}\|_H \sup_{\|u\|_{\mathcal{D}} \leqslant 1} |\langle u, b_{si} \rangle|,$$

тогда справедлива оценка $\|K\|_{\mathcal{D} \to H} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{m-j+1} |P(\lambda_{l_j})|}{|\lambda_{l_j}| \prod\limits_{i=1, i \neq j}^{m} |\lambda_{l_j} - \lambda_{l_i}|}$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Клочков М.А. Одноранговые возмущения одного класса дифференциальных операторов // Тезисы докладов 4-й Российской университетско-академической научно-практической конференции. Часть 6. Ижевск: Изд-во Удм. Ун-та, 1999. С. 23.

2. Клочков М.А. Возмущения минимального ранга для оператора Бельтрами // "Понтрягинские чтения-XI." Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2000. С.82.

3. Клочков М.А. Оценка нормы возмущений минимального ранга// Вестник Тамбовского университета. Т.5, вып.4, 2000. С.459.

4. Клочков М.А. Возмущения минимального ранга для обыкновенных дифференциальных уравнений // Удм. гос. ун-т.-Ижевск, 2001.- 18с. Деп. в ВИНИТИ. 23.01.01, № 196-В01.

5. Клочков М.А. Конструкции конечномерных возмущений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2001, № 3. С.59-64.

6. Клочков М.А. Управление колебаниями прямоугольной мембраны // Пятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция. Ижевск, 2001. Т.10. С.11-13.

7. Клочков М.А. Управление колебаниями струны // Современные

методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2001. С.136-137.

8. Клочков М.А. Управление колебаниями струны // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2002, №1. С.33-42.

9. Клочков М.А. Оценка точности вычисления конечномерных возмущений// Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции.—Воронеж, ВГУ, 2003. С.125-126.

10. Клочков М.А. Описание класса всех одноранговых возмущений дискретного спектра // Современные методы теории краевых задач. Тезисы докладов. Воронеж, ВГУ, 2004. С.111-112.