# 16

# НАЦИОНАЛЬНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИСКУССТВЕННОМУ ИНТЕЛЛЕКТУ

# КИИ–2018


Российская ассоциация искусственного интеллекта

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

The Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences


## ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ

## ТОМ 2


Москва
2018

УДК 004.8+004.89+004.82+004.032.26(045)
ББК 32.813(2А/Я)я43

**Организаторы конференции:**
Российская ассоциация искусственного интеллекта
ФГБУ Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
The Institute of Information and Communication Technologies at the Bulgarian Academy of Sciences

Конференция проводится при финансовой поддержке
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-20067)

**Шестнадцатая Национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2018** (24–27 сентября 2018 г., г. Москва, Россия). Труды конференции. В 2-х томах. Т 2. – М.: РКП, 2018. – 287 с.

Во втором томе трудов публикуются доклады участников конференции, представленные на следующих секциях:
Секция 6. «Классификация, распознавание и диагностика»,
Секция 7. «Когнитивные исследования и психологические аспекты искусственного интеллекта»,
Секция 8. «Моделирование рассуждений и неклассические логики»,
Секция 9. «Нечеткие модели и мягкие вычисления»,
Секция 10. «Нейросетевые методы и нейроинформатика»,
Секция 11. «Прикладные интеллектуальные системы».

ISBN 978-5-600-02247-8

УДК 519.766.2

# ПРИЛОЖЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ВЕРИФИКАЦИИ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

Ю.М. Сметанин (*gms1234gms@rambler.ru*)
Удмуртский государственный университет, Ижевск

Рассматриваются приложения неклассической многозначной логики $L_{S_2}$ с областью интерпретации в множествах неотрицательных целых чисел. Семантика ее правильно построенных формул определяется моделью в форме алгебраической системы. Элементы носителя этой алгебраической системы однозначно сопоставляются с формальными контекстами для семейства модельных множеств (признаков). Установлено, что для логики предикатов первого порядка с одно и двуместными предикатами верификацию логического следования в семантическом смысле можно проводить, используя $L_{S_2}$ и соответствия Галуа релевантные двуместным предикатам.

**Ключевые слова**: конституенты, формальный контекст, логическое следование в семантическом смысле, алгебраическая онтология, соответствия Галуа

## Введение

В работе показано, что для некоторых случаев, когда постановка задач верификации рассуждений на естественном языке использует понятие соответствия, можно значительно уменьшить сложность логического вывода. Для этого нужно использовать исчисление конституентных множеств, построенное в алгебраической системе (0.1) и неклассическую многозначную логику $L_{S_2}$ [Сметанин, 2017].

$$\langle B(\tilde{X}_n), \quad \mathrm{W}_F, \quad \mathrm{W}_R \rangle. \tag{0.1}$$

В (0.1) операциями являются операции алгебры множеств, а отношениями строгое включения и равенство множеств. Опорное множество является семейством множеств, которые можно построить из номеров конституент модельных множеств $\tilde{X}_n = X_1, X_2, ..., X_n \subseteq U$, $U = \{0, 1, ..., 2^n - 1\}$.

В работе предлагается постановка задач верификации рассуждений с использованием объемных соотношений и соответствий между модельными множествами. На примерах показано, что для логики предикатов первого порядка с одно и двуместными предикатами верификацию логического следования можно проводить, используя соответствия Галуа.

## 1. Исчисление конституентных множеств

Атомарные суждения (1.1) логики $L_{S_2}$ выражают объемные отношения множеств в универсуме $U$ , семантика которых определена как:

$$NOB_S = \langle A(X,Y), Eq(X,Y), IO(X,Y), X \subset U, X = U \rangle. \qquad (1.1)$$

$$A(X,Y) \equiv (X \subset Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U). \qquad (1.2)$$

$$Eq(X,Y) \equiv (X = Y) \cdot (X \subset U) \cdot (X' \subset U) \cdot (Y \subset U) \cdot (Y' \subset U). \qquad (1.3)$$

$$IO(X,Y) \equiv (X \cdot Y \subset U) \cdot (X \cdot Y' \subset U) \cdot (X' \cdot Y \subset U) \cdot (X' \cdot Y' \subset U). \qquad (1.4)$$

Здесь множество $X \cdot Y'$ – пересечение $X$ и дополнения $Y'$ до универсума. Вместо $X$ и $Y$ можно подставить любые правильно построенные формулы (ППФ) $F_1(\tilde{X}_n)$, $F_2(\tilde{X}_n)$ алгебры множеств.

В логике используются три логических операции: отрицание, дизъюнкция и конъюнкция. Из атомарных суждений (1.1) можно составить конъюнктивные формулы (КФ). Остальные правильно построенные формулы $L_{S_2}$ являются неконъюнктивными формулами (НКФ). Показано, что любая НКФ может быть представлена как дизъюнкция КФ, являющихся попарно противоречивыми.

Алгебраическая система (0.1) определяет дискретный аналог модельных схем В.А. Бочарова и В.И. Маркина, которые можно задать диаграммами Венна. Дискретная модельная схема $I_n = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ называется алгебраической онтологией (А-онтологией). Она, с точностью до нумерации модельных множеств, представляет алгебраическую систему (0.1) смотри рис. 1.

**Единицей** А-онтологии $I_n = \langle U, X_1, X_2, ..., X_n \rangle$ называется множество номеров ее непустых конституент, обозначение – $M(I_n)$.

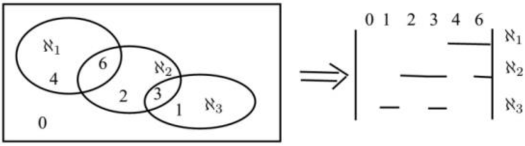


Рис. 1 Переход от диаграммы Венна к А-онтологии

А-онтология $I = \left\langle U, X_1^{\,0}, X_2^{\,0}, \ldots, X_n^{\,0} \right\rangle$ называется канонической, если $U = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. Все конституенты канонической А-онтологии есть непустые множества.

А-онтология по своему строению является формальным контекстом [Ganter, 1999]. Рис. 2 иллюстрирует неаристотелевское строение понятия, смысловое содержание которого всегда выявляется на фоне контекста. Например, тигры – хищные млекопитающие, не живущие в воде и не приспособленные к жизни в условиях Крайнего Севера»:

$$T \subset X \cap M \cap B' \cap C' \equiv A(T, X \cdot M \cdot B' \cdot C').$$

Контекст понятия можно изменять.

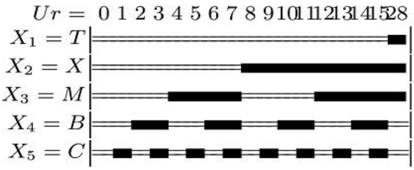


Рис. 2 Понятие «тигры-Т» в формальном контексте А-онтологии

Список всех атомных логических отношений (1.1) между модельными множествами, для заданной А-онтологии $I_n$, будем называть **полным бинарным инвариантом** $BIN(I_n)$. Конъюнкцию (КФ), составленную из бинарных отношений входящих в $BIN(I_n)$, обозначим $FBIN(I_n)$. Для сокращения в конъюнкции бинарных отношений составляющих $FBIN(I_n)$ не будем указывать $IO(X_i, X_j)$ – отношения независимости пары модельных множеств. Установлено, что каждому $BIN(I_n)$, соответствует не менее одной А-онтологии. **Максимальной** среди них называется та, которая имеет единицу с наибольшим числом номеров непустых конституент. При этом добавление к единице максимальной А-онтологии любого не входящего в нее номера выводит эту А-онтологию из данного $BIN(I_n)$ [Сметанин, 2010, 2017]. Единица задает семантическое значение конъюнктивной ППФ, которая определятся бинарным инвариантом А-онтологии. Значением НКФ является семейство А-онтологий. Доказано, что модельные множества $\tilde{X}_n$ А-онтологии $I = \langle U,\ X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n \rangle$ полностью определяются ее единицей $M(I_n) = U$ по формуле $X_i = U \cdot X_i^0$.

Логическое содержание максимальной А-онтологии выражается ее $FBIN(I_n)$. Логическое содержание немаксимальной А-онтологии с данным $BIN(I_n)$ выражается конъюнкцией суждений ее $BIN(I_n)$ с суждениями $NOB_S$, выражающими пустоту констиуент, которые не входят в данную А-онтологию по сравнению с максимальной.

Например, бинарные инварианты у А-онтологий рис. 3 совпадают.

$$FBIN = A(X_{1'}, X_2) \cdot IO(X_1, X_3) \cdot A(X_{1'}, X_4) \cdot A(X_{2'}, X_{3'}) \cdot IO(X_2, X_3) \cdot A(X_3, X_4).$$

Здесь один $BIN$ определяет две А-онтологии, одна из которых максимальная.

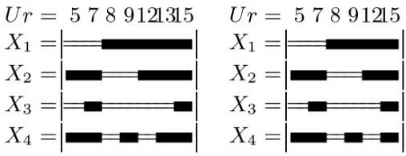


Рис.3. Две А-онтологии с одинаковым $FBIN(I_4)$

КФ для правой А-онтологии выражена в виде КФ (1.5).

$$F(\tilde{X}_4) = A(X_{1'}, X_2) \cdot A(X_{1'}, X_4) \cdot A(X_{2'}, X_3) \cdot A(X_3, X_4) \cdot (K(13)' = U) \qquad (1.5)$$

Последним элементом конъюнкции является утверждение о пустоте конституенты с номером 13. $(X_1{'} + X_2{'} + X_{3'} + X_4{'}) = U$. Формула алгебры множеств, двойственная к конститунте, названа дизституентой и имеет естественную нумерацию (инверсию номера конституениты). Семантическим значением КФ является множество натуральных чисел либо пустое множество. В качестве семантического значения НКФ принимается семейство множеств из натуральных чисел либо пустое множество [Сметанин, 2017]. В работе [Smetanin, 2016] введено релевантное (непарадоксальное) логическое следование ($\vDash_N$) между ППФ $L_{S_2}$. Единица А-онтологии $I_n$ позволяет выразить ее логическое содержание в виде в виде атомарного суждения $F(\tilde{X}_n) = M(I_n)$ называемого далее МЛ-уравнением, здесь $F(\tilde{X}_n)$ есть ППФ алгебры множеств равносильная совершенной нормальной форме Кантора SNFK. Она построена по номерам конституент из единицы – $M(I_n)$.

Например, максимальная А-онтология (рис. 3) представляется как МЛ-уравнения с левой частью в форме *SNFK:*

$$\underbrace{X_1{}'X_2{\cdot}X_3{}'{\cdot}X_4}_{5}+\underbrace{X_1{}'{\cdot}X_2{\cdot}X_3{\cdot}X_4}_{7}+\underbrace{X_1{\cdot}X_2{}'{\cdot}X_3{}'{\cdot}X_4{}'}_{8}+$$

$$\underbrace{X_1{\cdot}X_2{}'{\cdot}X_3{}'{\cdot}X_4}_{9}+\underbrace{X_1{\cdot}X_2{\cdot}X_3{}'{\cdot}X_4{}'}_{12}+\underbrace{X_1{\cdot}X_2{\cdot}X_3{}'X_4}_{13}+\underbrace{X_1{\cdot}X_2{\cdot}X_3{\cdot}X_4}_{15}=U,$$

либо равносильной ей ППФ $-X_1{\cdot}X_3{}'+X_2{\cdot}X_4=U$ .

Вычислять семантические значения КФ и НКФ позволяет М-алгоритм [Сметанин, 2010, 2017], реализованный программно.

Он сопоставляет А-онтологию $I(Q)$ конъюнкции $Q$ суждений $NOB_S$. Доказано, что А-онтология, получаемая по $M$ -алгоритму для КФ, является **максимальной** по числу номеров непустых конституент.

**Теорема 1**. Имеет место функциональная полнота атомарных суждений (1.1), то есть любая А-онтология может быть выражена КФ в $L_{S_2}$ .

Рассмотрим совершенную нормальную форму Кантора

$$SNFK(\tilde{X}_n)=\bigcup_{i\in M(I_n)\subset\{0,\,1,\,2,\,\ldots,\,2^n-1\}}\mathbf{K}(i),$$

построенную по единице $M(I_n)$ неканонической А-онтологии $I_n$. Все ППФ алгебры множеств $F_i(\tilde{X}_n)$ такие, что

$$F_i(\tilde{X}_n)\equiv SNFK(\tilde{X}_n),\ i=\overline{1,\,m} \qquad (1.6)$$

образуют класс эквивалентности. Из них можно составить $m$ МЛ-уравнений вида $F_i(\tilde{X}_n)=U,\ i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,m\}$. Класс эквивалентности из левых частей называется **общим решением**, определяющим все равносильные следствия любого МЛ-уравнения из (1.6). **Частными решениями** называются его нетождественные следствия (МЛ-уравнения), которые не равносильны исходному и несут только часть его логического содержания. Логическое содержание можно выразить различными способами. Применим способ Порецкого. Для установления логического следования. А-онтологии $I_n$ можно сопоставить МЛ-уравнение $SNFK(M(I_n))=U$ . Выразим равносильное ему МЛ-уравнение через нуль $N(I_n)=\{0,1,\,\ldots,\,2^n-1\}\setminus M(I_n),$ т.е. через дизъюнкцию пустых конституент.

$M(I_n)=U^0\setminus N(I_n)$ можно представить в виде КФ суждений (1.1)

$$\left(D(i_1{}')=U\right)\cdot\left(D(i_2{}')=U\right)\cdot\ldots\cdot\left(D(i_k{}')=U\right). \qquad (1.7)$$

Здесь $\{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_k\}=N(I_n),\ i_j{}'=2^n-1-i_j;\ j=\overline{1,\,k}$ , $j$ -й элемент конъюнкции (1.7) выражает множество $U\setminus\{i_j\}$ или пустоту конституенты

$K(i_j)$. Конъюнкция (1.7) равносильна утверждению $\left(\bigcap_{i\in N(I_n)} D(i')\right)=U$, где $i'=2^n-i-1$. Левая часть равенства выражает единицу А-онтологии.

$$M(I_n)=\bigcap_{i\in N(I_n)} D(i').$$

Назовем ее канонической формой логического содержания А-онтологии $I_n$ – $Log(I_n)$.

**Теорема 2**. Логическое содержание А-онтологии $I_2$ – $Log(I_2)$ является частью логического содержания А-онтологии $I_1$ – $Log(I_1)$, тогда и только тогда, когда их единицы (объемы универсумов) находятся в соотношении $M(I_1)\subseteq M(I_2)$. Отношение $\subset$ имеет место, если и только если $\left(Log(I_1)\vDash_N Log(I_2)\right)\cdot\left(Log(I_2)\nvDash Log(I_1)\right)$.

Утверждение теоремы 2 [Smetanin, 2015] следует из сравнения логических содержаний $I_1$ и $I_2$, представленных в каноническом виде.

Теорема 2 позволяет проверять, является ли данное МЛ-уравнение частным решением другого МЛ-уравнения в случае совпадения у них наборов модельных множеств. Уравнения с разными наборами приводят к уравнениям с одинаковыми наборами модельных множеств.

Реализована программа верификации для 22 модельных множеств. Проводятся эксперименты по распараллеливанию алгоритма [Сметанин, 2016, 2017] и увеличению числа модельных множеств.

## 2. Примеры верификации логического следования

1. Доказать, что $A\equiv p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)\Rightarrow w$. Обозначим через $U, P, Q, S, T, W$ универсум множества, сопоставленные $1, p, q, s, w$. Пусть $F_1(p, q, s, t, w)=p\cdot(p\Rightarrow q)\cdot(s\Rightarrow t)\cdot(t\Rightarrow w)$ есть посылка, а заключение есть $F_2(p, q, s, t, w)=w$. Верифицируем $F_1\vDash_N F_2$.

Исключим импликацию $F_1(p, q, s, t, w)\equiv p\cdot(p'+q)\cdot(s'+t)\cdot(t'+w)$. Проверим имеет ли место $F_1=1\vDash_N F_2=1$. Для этого перейдем к МЛ-уравнениям, которые являются ППФ логики $L_{S_2}$ и найдем их единицы $P\cdot(P'+Q)\cdot(S'+T)\cdot(T'+W)=U$ и $(W=U)$, и применим теорему 2:

$$M(P\cdot(P'+Q)\cdot(S'+T)\cdot(T'+W)=U)=\{24, 25, 27, 31\}\not\subseteq$$
$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}=M(W=U).$$

Отсюда заключаем, что следования нет. Также видим, что $\models_N$ будет иметь место, если добавить к посылке утверждение о пустоте конституенты $K(24)$.

2. Проблема Гилмора (Gilmoreproblem). Пусть требуется доказать логическое следование:

$$\forall x \exists y \Big[\underbrace{[\{F(y) \to G(y)\} \leftrightarrow F(x)]}_{1} \cdot \underbrace{[\{F(y) \to H(y)\} \leftrightarrow G(x)]}_{2} \cdot$$
$$\underbrace{\Big[[\{F(y) \to G(y)\} \to Y(y)] \leftrightarrow H(x)\Big]\Big]}_{3} \models_N \forall z\{F(z) \cdot G(z) \cdot H(z)\}.$$

Избавимся от импликации и эквиваленции

$$\forall x \exists y \Big[[\big(F(y)' + G(y)\big) \cdot F(x) + F(y) \cdot G(y)' \cdot F(x)'] \cdot$$
$$[\big(F(y)' + H(y)\big) \cdot G(x) + F(y) \cdot H(y)' \cdot G(x)'] \cdot$$
$$\Big[[\big(F(y)' + G(y)\big) \cdot H(y) + F(y) \cdot G(y)' \cdot H(x)']\Big] = 1\Big] \models_N$$
$$\forall z\{F(z) \cdot G(z) \cdot H(z) = 1\}.$$

Подготовительная работа для представления исходного утверждения в виде конъюнктивной формулы логики $L_{S_2}$ проделана. Для ее получения нужно заменить предикаты одноименными модельными множествами $F, G, H$ и ввести еще одно непустое, одно- или многоэлементное модельное множество $Y$, существование которого предопределено квантором существования. Конъюнкция, дизъюнкция и отрицание между одноместными предикатами заменяется пересечением объединением и дополнением до универсума между сопоставленными им модельными множествами. Равенство единице заменяется на равенство универсуму

$$(Y \subseteq U) \cdot \Big(\Big[[(Y \cdot F' + Y \cdot G) \cdot F + Y \cdot F \cdot G' \cdot F'] \cdot [(Y \cdot F' + Y \cdot H) \cdot G + Y \cdot F \cdot H' \cdot G'] \cdot$$
$$\Big[(Y \cdot F' + Y \cdot G) \cdot Y \cdot H + Y \cdot F \cdot Y \cdot G' \cdot H'\Big]\Big] = U\Big) \models_N \{F \cdot G \cdot H\} = U.$$

В результате преобразований $(Y \subseteq U) \cdot \big(Y \cdot G \cdot F \cdot H = U\big) \models_N \big(F \cdot G \cdot H = U\big)$. Единица посылки $M(F \cdot G \cdot G \cdot Y = U) = \{13\} \subset \{13, 15\} = M(F \cdot G \cdot G = U)$ включена в единицу заключения в случае $Y \subset U$ и совпадает с ней в случае $Y = U$.

3. Доказать, что в общем универсуме

$$\forall x \exists y\, F(x, y), \forall x \exists y\, G(x, y), \forall x \exists y \big(F(x, y) + G(x, y)\big) \to$$
$$\forall z \big(F(y, z) + G(y, z) \to H(x, z)\big) \models_N \forall x \exists y\, H(x, y).$$

Перепишем в терминах соответствий и избавимся от одной импликации в третьей посылке. Множества $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ являются непустыми подмножествами универсума $U$.

$$\begin{aligned}
&\exists Y_1(F(U,Y_1)\neq\varnothing)\cdot(D_F(U)=U),\\
&\exists Y_2(G(U,Y_2)\neq\varnothing)\cdot(D_G(U)=U),\\
&\exists Y_3\,\underbrace{(F(U,Y_3)+G(U,Y_3)\neq\varnothing)}_{A}\cdot\underbrace{(F(Y_3,U)+G(Y_3,U)=\varnothing)}_{B}\to\\
&(H(U,U)\neq\varnothing)\cdot(D_H(U)=U)\vDash_N\\
&\exists Y_4(H(U,Y_4)\neq\varnothing)\cdot(D_H(U)=U),
\end{aligned}$$

где $F, G, H$ – соответствия, $D_F$, $D_G$, $D_H$ – их области определения. Для доказательства указываются множества $Y_i$, для которых истинность посылок влечет истинность следствия. Также рассматривается решение задачи о паровом катке и другие примеры, в которых следование устанавливается с помощью релевантных двуместным предикатам соответствий и свойств соответствий Галуа [Сметанин, 2017]

## Заключение

В работе рассмотрены приложения использования неклассической многозначной логики для верификации логического следования и принципиальная возможность сравнения логических содержаний формальных понятий, принадлежащих различным контекстам. В связи с этим важно увеличить число модельных множеств в программе, реализующей М-алгоритм. Это необходимо для вычисления объема формального контекста по его логическому описанию. В [Сметанин, 2016] указаны способы эффективного распараллеливания вычислений.

## Список литературы

**[Сметанин, 2010]** Сметанин Ю.М. Алгоритм решения полисиллогизмов в ортогональном базисе посредством исчисления конституентных множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2010, Вып. 4.

[**Сметанин, 2016**] Сметанин Ю.М. Непарадоксальное логическое следование и проблема решения МЛ-уравнений // Программные системы: теория и приложения, 2016, 7:1(28).

**[Сметанин, 2017]** Сметанин Ю. М. Верификация логического следования в неклассической многозначной логике // Известия Института математики и информатики УдГУ, 2017, Вып. 2 (50).

**[Ganter, 1999]** Ganter B., Wille R. Formal concept analysis: Mathematical foundations. Springer, Berlin. 1999.

**[Smetanin 2015]** Smetanin Iu. Syllogistical system on the basis of the propositional multivalued logic // 2015 International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP), St. Petersburg. 2015.

# СОДЕРЖАНИЕ

## СЕКЦИЯ 6. **КЛАССИФИКАЦИЯ, РАСПОЗНАВАНИЕ И ДИАГНОСТИКА**



## СЕКЦИЯ 7. **КОГНИТИВНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**



## СЕКЦИЯ 8. **МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССУЖДЕНИЙ И НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ**

## СЕКЦИЯ 9. **НЕЧЕТКИЕ МОДЕЛИ И МЯГКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ**



## СЕКЦИЯ 10. **НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МЕТОДЫ И НЕЙРОИНФОРМАТИКА**

СЕКЦИЯ 11. **ПРИКЛАДНЫЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ**