Министерство науки и высшего образования Российской Федерации ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» Институт математики, информационных технологий и физики Кафедра теоретической физики

# В. Г. Лебедев, Т. Б. Иванова, В. В. Васькин

## УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Учебно-методическое пособие



Ижевск 2018 УДК 536.2(075.8) ББК 22.365.55я73 Л 33

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом УдГУ. Рецензент: д-р физ.-мат. наук М. Г. Васин.

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (1.2404.2017/4.6), а также при поддержке гранта РФФИ 18-42-180002.

### Л 33 Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В.

Уравнения теплопереноса: учеб.-метод. пособие / В. Г. Лебедев, Т. Б. Иванова, В. В. Васькин. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2018. — 104 с.

ISBN 978-5-4312-0638-2

В данном пособии изложены некоторые аналитические и численные методы решения линейного и нелинейного уравнений теплопроводности. Представлены аналитические решения модельных задач, алгоритмы построения автомодельных решений, в том числе для задач теплообмена при фазовых превращениях. В каждом разделе приведены основные понятия и законы, расчетные уравнения, контрольные задачи, методические рекомендации для их решения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для широкого круга исследователей при первоначальном ознакомлении с предметом.

> УДК 536.2(075.8) ББК 22.365.55я73

ISBN 978-5-4312-0638-2 (© В. Г. Лебедев, Т. Б. Иванова, В. В. Васькин, 2018 (© ΦΓБΟУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2018

# Содержание

Пре	цислови	Ie	5									
Введ	цение .		7									
1.	Автом	юдельное решение уравнений в частных производных	10									
	1.1.	Линейное уравнение теплопроводности	11									
	1.2.	Нелинейное уравнение теплопроводности	24									
	1.3.	Задача Стефана										
	1.4.	Решение типа бегущих волн										
		1.4.1. Линейное уравнение теплопроводности с то-										
		чечным источником	48									
2.	Численное решение одномерного уравнения теплопровод-											
	ности		55									
	2.1.	Решение нелинейного уравнения методом пристрелки 5:										
	2.2.	Решение линейного уравнения с граничными усло-										
		виями III рода	63									
	2.3.	Решение уравнения теплопроводности в неоднород-										
		ной области	69									
3.	Решение уравнения теплопроводности в двумерной и трех-											
	мерной областях											
	3.1.	Решение уравнения теплопроводности для круглой										
		пластинки	78									
		3.1.1. Однородные граничные условия	78									
		3.1.2. Стационарное решение	81									
	3.2.	Решение уравнения теплопроводности для цилиндра	85									
		3.2.1. Однородные граничные условия	85									
		3.2.2. Стационарное решение	89									
	3.3.	Решение уравнения теплопроводности для шара	94									

	3.3.1.	Однородные	гра	ан	ИЧ	HI	ые	y	CJ	10	₿ŀ	1Я	•			•	94
Приложени	е А. Поли	номы Эрмита															99
Приложени	е Б. Функ	ции Бесселя															100
Список рек	омендуем	ой литературы	[														102

### Предисловие

Содержание данного учебно-методического пособия составляют некоторые разделы, изучаемые студентами Удмуртского государственного университета (УдГУ) при освоении дисциплины «Уравнения тепломассопереноса», рекомендации для практических расчетов процессов переноса теплоты. При написании преследовалась цель продемонстрировать методы исследования сложных явлений теплопередачи, по возможности в наиболее простой и ясной форме, при сохранении необходимой научной строгости.

Материал в пособии разделен на три основные части. Первая посвящена аналитическим методам построения автомодельных решений уравнений теплопроводности. Во второй части изложены некоторые численные методы решения одномерного уравнения теплопроводности. В третьей части анализируется решение уравнения теплопроводности в многомерных областях. Кроме краткого изложения теоретического материала, в данном пособии представлены примеры решения типовых задач по каждому разделу, а также перечень аудиторных и контрольных задач и задач для самостоятельного решения. Для некоторых примеров приведены решения с графическими иллюстрациями, что способствует лучшему пониманию предмета. Каждый раздел сопровождается наглядными примерами, демонстрирующими использование компьютерной программы для аналитических и численных вычислений Maple.

Пособие предназначено для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для неспециалистов в областях уравнений теплопереноса в частных производных для первоначального ознакомления с предметом. Отдельные разделы пособия будут полезны научным сотрудникам в области математики, химии, биохимии и т. д.

Для изучения некоторых разделов данного пособия читателю будет полезно ознакомиться с содержанием ранее изданных учебно-методических пособий [1, 2, 3], в которых изложены теоретические основы и приведено значительное количество примеров решения дифференци-

альных уравнений в частных производных первого и второго порядков. В частности, рассмотрены методы построения автомодельных решений, которые в некоторых случаях являются альтернативой методу разложения по базису для линейного уравнения теплопроводности, рассматриваемого в данном пособии.

Необходимость издания данного пособия обусловлена отсутствием современных задачников по данной тематике в библиотечном фонде УдГУ. Предыдущие сборники и пособия, изданные более 20 лет назад, не отвечают современным условиям и требованиям образовательных стандартов. В основу пособия положены лекции, читаемые в Институте математики, информационных технологий и физики в УдГУ для студентов направлений «Физика», «Химия, физика и механика материалов» и «Прикладные математика и физика». Содержание данного пособия соответствует первой части учебной программы дисциплины «Уравнения тепломассопереноса», касающейся процессов переноса тепла.

В пособии учтены требования Федерального государственного образовательного стандарта к содержанию курса для направлений подготовки бакалавров «Физика», «Химия, физика и механика материалов» и «Прикладные математика и физика». Методическое пособие рассчитано на средний уровень физико-математической подготовки студентов и необходимо для освоения следующих компетенций:

 способность использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей;

 – способность использовать базовые теоретические знания для решения профессиональных задач;

 – способность применять на практике базовые общепрофессиональные знания и умения теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки).

### Введение

Разум есть способность видеть связь общего с частным.

Иммануил Кант

Изучить какое-либо явление — значит установить зависимость между величинами, характеризующими это явление. Для сложных явлений, в которых определяющие величины меняются во времени и в пространстве, установить зависимость между переменными очень трудно. В таких случаях, применяя общие законы физики, ограничиваются установлением связи между переменными (координатами, временем и физическими свойствами), которая охватывает небольшой промежуток времени и элементарный объем пространства.

Полученная таким образом зависимость является, как правило, дифференциальным уравнением (или системой уравнений). Так, при изучении явлений макроскопической физики окружающая нас природа описывается как некоторая непрерывная среда, обладающая набором параметров, характеризующих распределение в пространстве и времени величин плотности, температуры, скорости и т. д. Поэтому естественным языком для описания поведения такой непрерывной среды являются дифференциальные уравнения в частных производных.

Уравнения, описывающие перенос тепла, являются уравнениями в частных производных второго порядка и могут быть получены, например, феноменологически из закона сохранения количества теплоты для выбранной замкнутой системы [2, 3].

Наиболее часто в различных физических приложениях встречаются линейные уравнения (неизвестная функция, например, температуры  $T(\vec{r},t)$  входит в уравнение линейно), поскольку многие явления связаны с малыми отклонениями от некоторого равновесного (стационарного) состояния. При таких малых отклонениях обычно бывает достаточно ограничиться линейным приближением, а высшими поправками пренебречь.

Для линейных уравнений имеются развитые общие методы решения и анализа, доказаны теоремы существования и единственности. Поэтому, как правило, общие курсы по изучению методов решения уравнений в частных производных второго порядка ограничиваются изучением линейных уравнений. Тем не менее на практике часто мы имеем дело с неравновесными процессами или с материалами, тепловые характеристики которых зависят от текущего состояния. В этом случае процессы теплообмена могут быть описаны нелинейными уравнениями второго порядка в частных производных.

Для решения нелинейных уравнений в настоящее время все более значительную роль приобретает численное моделирование. Полученные численные результаты имеют важное прикладное значение для современной науки и техники, так как их экспериментальное изучение в натурных условиях очень сложно, а в некоторых случаях просто невозможно.

Но важно знать, насколько точным и правильным является используемый численный алгоритм. Для этого строятся численные решения модельных задач, для которых можно построить точное аналитическое решение и сравнить с полученным численно.

Наиболее простыми классами точных решений, которые сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, являются автомодельные решения. Существование этих решений обусловлено инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения-сжатия. Построению автомодельных решений посвящена первая глава данного учебно-методического пособия.

Во второй главе рассматриваются некоторые численные методы решения уравнения теплопроводности в областях, для которых существенным является распространение тепла вдоль какого-либо одного направления (одномерные задачи). В частности, рассматривается метод пристрелки, позволяющий построить решение краевой задачи для нелинейного уравнения.

Также во второй главе приведены примеры построения решения в случае граничных условий третьего рода, когда задается взаимосвязь между потоком тепла за счет теплопроводности от тела и тепловым потоком из окружающей среды за счет температурного напора (закон

Ньютона–Рихмана). В этом случае возникает трансцендентное уравнение, для решения которого необходимо использовать численные методы поиска его корней. Данные задачи усложняются, если рассматривается составная конструкция, тепловое взаимодействие происходит не только на границах с воздухом, но и между элементами, имеющими различные теплофизические характеристиками. Такого рода задачи рассмотрены в третьей части второй главы пособия.

В практике теплотехнических расчетов часто возникают одномерные задачи с цилиндрической или сферической симметрией. Например, цилиндрическая симметрия имеется в задачах об остывании длинного цилиндра или при анализе теплового состояния в трубчатых каналах. Естественной системой координат в таких задачах является, соответственно, цилиндрическая или сферическая, соответствующее уравнение теплопроводности является дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка для функции, зависящей только от одной пространственной переменной.

Но если начальное распределение или граничные условия для тел с цилиндрической или сферической симметрией зависят от двух/трех пространственных координат, температура в каждый момент времени также будет зависеть от двух/трех пространственных переменных. В этом случае при аналитическом решении уравнения теплопроводности на первый план выходит метод разделения переменных, позволяющий свести многомерное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Такого рода задачи подробно рассматриваются в третьей главе пособия.

# 1. Автомодельное решение уравнений в частных производных

Для некоторых уравнений в частных производных существуют такие частные решения, которые при некоторых преобразованиях независимых переменных (координат и времени) переходят в себя, то есть остаются неизменными с точностью до умножения на константу. Такие решения называют *автомодельными*.

Существование автомодельного решения обусловлено инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований симметрии (масштабирование или сдвиг). Другими словами, автомодельность особая симметрия системы, состоящая в том, что преобразование симметрии независимых переменных может быть скомпенсировано преобразованием подобия решения.

Такая симметрия уравнения в конечном итоге приводит к сокращению числа независимых переменных, которые после всех подстановок входят в уравнение не в произвольном виде, а только в виде определенной комбинации (автомодельной переменной). При этом автомодельное решение уравнения в частных производных сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что существенно упрощает исследование исходной задачи.

Иногда преобразование симметрии, приводящее к автомодельному решению, удается найти с помощью анализа размерности физических величин, входящих в уравнение. Но, как правило, удобнее напрямую анализировать преобразования неизвестных функций и независимых переменных и искать, какую группу преобразований допускает уравнение, то есть оставляет их неизменными.

В данном разделе будут продемонстрированы методы построения автомодельных решений для уравнений в частных производных второго порядка (линейного и нелинейного уравнения теплопроводности) при наличии масштабной (п. 1.1–1.3) и трансляционной (п. 1.4) симметрии.

### 1.1. Линейное уравнение теплопроводности

Дифференциальный закон сохранения какой-либо величины может быть записан в виде [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = -{\rm div}\,\vec{j} + q(\vec{r},t),$$

где  $\rho(\vec{r},t)$  — плотность сохраняющейся величины,  $\vec{j}(\vec{r},t)$  — плотность потока величины  $\rho$  (количество величины  $\rho$ , проходящей через единицу поверхности за единицу времени),  $q(\vec{r},t)$  — плотность источника (q > 0) или (q < 0) стока.

Если в качестве сохраняющейся величины  $\rho$  рассмотреть количество тепла, тогда  $d\rho = \rho_0 C dT$ , где  $\rho_0$  — плотность вещества, C — удельная теплоемкость, T — температура.

Из экспериментов нам известно, что тепло всегда переходит от более нагретого тела к менее нагретому. Поэтому поток тепла между двумя близкими точками будет пропорционален разности температур в этих точках и направлен от более нагретой точки к менее нагретой.

В дифференциальном виде это утверждение записывается в виде закона Фурье:

$$\vec{j} = -\lambda \operatorname{grad}(T),$$

где  $\lambda$  — некоторый феноменологический коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности. Подставляя закон Фурье в закон сохранения, получим уравнение, которое называется *уравнением теплопроводности*:

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q(\vec{r}, t).$$
(1)

В случае однородной среды феноменологические коэффициенты  $\rho_0$ ,  $\lambda$  и C являются константами. Если ввести новую величину  $a = \lambda/(\rho_0 C)$ , которая называется коэффициентом температуропроводности, то уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + Q(\vec{r}, t), \tag{2}$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $Q(\vec{r},t) = q(\vec{r},t)/(\rho_0 C)$ . Размерность величины a равна [a] = длина<sup>2</sup>/время.

В случае когда один из характерных масштабов рассматриваемой области много больше других (например, тонкий стержень, в котором можно пренебречь поперечным сечением), оператор Лапласа удобнее записать в декартовых координатах. Выбирая ось *Ох* вдоль стержня, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tilde{Q}(x, t), \tag{3}$$

где  $\widetilde{Q}(x,t) = Q(x,t)/(
ho_0 C) - функция источника.$ 

Введем безразмерные координаты и время, сделав подстановку

$$x \to x_0 x, \quad t \to t_0 t, \quad x_0^2 = \frac{\lambda t_0}{\rho_0 C}$$

получим безразмерное линейное уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q(x,t), \quad q(x,t) = \widetilde{Q}t_0.$$
(4)

Исследуем свойства симметрии (4) и найдем автомодельную подстановку для *однородного* (без источника) линейного одномерного уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности (4) при q(x,t) = 0 допускает масштабные преобразования вида

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \mu t. \end{cases}$$
(5)

При этом необходимо учитывать, что при данном преобразовании должны сохраняться в неизменном виде границы рассматриваемой области. Поэтому масштабное преобразование (5) имеет место только при решении задачи в неограниченной или полуограниченной области.

Потребуем, чтобы масштабирование функции

$$T(x',t') = C(\lambda,\mu)T(x,t)$$
(6)

не меняло вида уравнения (4). Подставляя (5), (6) в (4), получим

$$\frac{\partial T(x',t')}{\partial t'} = \frac{\partial^2 T'(x',t')}{\partial x'^2} \Rightarrow \frac{C}{\mu} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{C}{\lambda^2} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2},\tag{7}$$

то есть  $\mu = \lambda^2$ .

Из соотношений (7) видно, что коэффициент C может быть произвольным. Представим его в виде  $C = \lambda^{\beta}$ , константа  $\beta$  может быть выбрана произвольно.

Таким образом, условие симметрии (6) запишется в виде

$$T(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^\beta T(x, t)$$

ИЛИ

$$T(x,t) = \lambda^{\beta} T\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^{2}}\right).$$
(8)

Это функциональное соотношение будет справедливо при любом  $\lambda$ . В частности, можно записать его для  $\lambda = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$ . Тогда

$$T(x,t) = (1 + \beta \varepsilon + \dots)T(x(1 - \varepsilon + \dots), t(1 - 2\varepsilon + \dots)).$$

Раскладывая это выражение в ряд по степеням малости  $\varepsilon$ , приходим к выражению

$$T(x,t) = (1 + \beta\varepsilon + \ldots)T(x,t) - \varepsilon x \frac{\partial T}{\partial x} - 2\varepsilon t \frac{\partial T}{\partial t} =$$
$$= T(x,t) + \beta\varepsilon T - \varepsilon x \frac{\partial T}{\partial x} - 2\varepsilon t \frac{\partial T}{\partial t} + \ldots$$

Для того чтобы такое преобразование было преобразованием симметрии, нужно, чтобы  $\delta T = T(x,t) - \lambda^{\beta}T(x/\lambda, t/\lambda^2) = 0$ . В результате получим уравнение первого порядка в частных производных:

$$\beta T = x \frac{\partial T}{\partial x} + 2t \frac{\partial T}{\partial t}.$$
(9)

Соответствующее уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{2t} = \frac{dT}{\beta T}.$$
(10)

Из первого равенства (10) следует

$$\ln x = \ln \left( 2c_1 \sqrt{t} \right),$$

где  $c_1 = \frac{x}{2\sqrt{t}}$  — первый интеграл движения. Аналогично из второго равенства (10)

$$\beta \frac{dT}{T} = \frac{dt}{2t}$$

находим второй интеграл движения:

$$c_2 = t^{-\beta/2}T.$$

Следовательно, общее решение уравнения (9) имеет вид

$$F\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{T}{t^{\beta/2}}\right) = 0$$

разрешив которое относительно T(x, t), получим

$$T(x,t) = t^{\beta/2} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),\tag{11}$$

где  $f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$  — произвольная функция своего аргумента.

Таким образом, наличие симметрии фиксирует вид решения с точностью до произвольной функции, зависящей от определенной комбинации независимых переменных. Чтобы определить вид этой функции, введем соответствующую *автомодельную переменную* 

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$$

и подставим решение (11) в уравнение теплопроводности.

Вычисляя производные

$$\begin{split} \dot{T} &= \frac{\beta t^{\beta/2-1}}{2} f\left(z\right) - \frac{x t^{\beta/2}}{4 t^{3/2}} f_z'\left(z\right),\\ T'' &= \frac{t^{\beta/2-1}}{4} f_{zz}''\left(z\right), \end{split}$$

получим уравнение

$$f''(z) + 2zf'(z) - 2\beta f(z) = 0.$$
 (12)

Таким образом, исходная задача сводится к *обыкновенному* дифференциальному уравнению (12), решение которого при целочисленном  $\beta$  можно получить с помощью рекуррентных соотношений. В этом случае уравнение (12) является гипергеометрическим и его частное решение имеет полиномиальный вид (полиномы Эрмита, см. приложение A).

Чтобы масштабное преобразование было преобразованием симметрии, необходимо, чтобы начальные и граничные условия также удовлетворяли масштабным преобразованиям (8).

Легко показать, что *однородные* начальные или граничные условия являются инвариантными относительно масштабирования (8):

$$T(0,\lambda^2 t) = \lambda^\beta T(0,t) = 0, \quad T(\lambda x,0) = \lambda^\beta T(x,0) = 0$$

при любом значении  $\beta$ .

Для начальных условий вида  $T(x, 0) = T_0(x)$  имеем

$$T_0(x) = \lambda^{\beta} T\left(\frac{x}{\lambda}\right). \tag{13}$$

При  $x \in (-\infty, +\infty)$  считаем, что на бесконечности выполняются однородные граничные условия *I* рода. Таким образом, если условие (13) выполняется, уравнение (4) имеет автомодельное решение.

При  $x \in [0, +\infty)$  необходимо, чтобы граничное условие при x = 0 удовлетворяло автомодельной подстановке. Таким образом, при однородных начальных условиях автомодельное решение существует в следующих случаях:

— в случае неоднородных граничных условий I рода $T(0,t)=\varphi(t),$ если функция  $\varphi$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(\lambda^2 t) = \lambda^\beta \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) \sim t^{\beta/2}, \tag{14}$$

— в случае неоднородных граничных условий II рода  $T'(0,t) = \psi(t)$ , если функция  $\psi$  удовлетворяет условиям

$$\psi(\lambda^2 t) = \lambda^{\beta - 1} \psi(t) \quad \Rightarrow \quad \psi(t) \sim t^{(\beta - 1)/2}.$$

Кроме того, если уравнение теплопроводности (4) содержит неоднородность в виде источника Q(x, t), то автомодельное решение будет иметь место, если

$$Q(x,t) = \lambda^{\beta-2} Q\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^2}\right).$$

Наличие указанных дополнительных условий позволяет определить значение параметров преобразования (в данном случае  $\beta$ ).

Пример 1.1. В качестве примера рассмотрим задачу о нагревании полубесконечного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью. Начальная температура стержня равна нулю, а на торце стержня установлен нагреватель с постоянной температурой  $T_0$ .

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, +\infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = T_0, & t > 0. \end{cases}$$

Подставляя граничные условия в (14), находим  $\beta = 0$ . При этом однородные начальные условия, как было отмечено выше, не накладывают никаких дополнительных условий на  $\beta$ .

Решение (11) запишется в виде

$$T(x,t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),\tag{15}$$

Функция f удовлетворяет уравнению (12) при  $\beta = 0$ :

$$f'' + 2zf' = 0, (16)$$

которое после замены  $f_1 = f'$  приводится к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После несложных вычислений получим

$$f_1 = f' = C e^{-z^2}$$

и, так как  $f \to 0$ , при  $x \to \infty$ , с учетом (15) получим

$$T(x,t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = C \int_{-\infty}^{x/2\sqrt{t}} e^{-z^2} dz = -C \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

Константа С может быть определена из граничных условий:

$$T(0,t) = T_0 = -C\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erfc}(0) \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{2T_0}{\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$T(x,t) = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$
(17)

Графики зависимости температуры (17) в различные моменты времени представлены на рисунке 1, а.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу о нагревании полубесконечного стержня с нулевой начальной температурой и неоднородными нестационарными граничными условиями вида T(0,t) = At, A = const.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0,\infty), \\ T(x,0) = 0, \\ T(0,t) = At, & t > 0. \end{cases}$$

Для того чтобы при неоднородных граничных условиях выполнялись преобразования симметрии (8), необходимо выполнение условия

$$A(\lambda^2 t) = \lambda^\beta(At),$$

откуда получаем  $\beta = 2$ . Следовательно, решение (11) имеет вид

$$T(x,t) = tf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$
(18)

Уравнение (12) запишется в виде

$$f'' + 2zf' - 4f = 0. (19)$$

Дифференцируя (19) по z и делая замену  $f_1 = f'$ , получим аналогичное уравнение:

$$f_1'' + 2zf_1' - 2f_1 = 0. (20)$$

Соответственно, если снова продифференцировать (20) по z и сделать замену  $f_2 = f'_1$ , получим уравнение вида (16), решение которого (с учетом  $f_2(\infty) \to 0$ ) имеет вид

$$f_2 = f'_1 = f'' = C \int_{\infty}^{z} e^{-\tilde{z}^2} d\tilde{z} = -\frac{C\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(z).$$

Следовательно,

$$f_1 = f' = -\frac{C\sqrt{\pi}}{2} \int_{\infty}^{z} \operatorname{erfc}(z) dz = \frac{C}{2} \left( e^{-z^2} - \sqrt{\pi} z \operatorname{erfc}(z) \right),$$

$$f = -\frac{C\sqrt{\pi}}{8}(1+2z^2)\operatorname{erfc}(z) + \frac{C}{4}ze^{-z^2}.$$
 (21)

Константу C найдем из граничных условий. С одной стороны, T(0,t) = At. С другой стороны, из (18) с учетом (21) получаем T(0,t) = tf(0). Следовательно, f(0) = A. Несложно показать, что  $C = -8A/\sqrt{\pi}$ .

Возвращаясь к исходным переменным, окончательно получим

$$T(x,t) = At\left(1 + \frac{x^2}{2t}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{Ax\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4t}.$$
 (22)

Графики зависимости температуры (22) в различные моменты времени представлены на рисунке 1, б.

*Пример 1.3.* Рассмотрим задачу об остывании бесконечного стержня с точечным начальным распределением температуры  $T(x, 0) = T_0 \delta(x)$ .

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x). \end{cases}$$

Для того чтобы при неоднородных начальных условиях выполнялись преобразования симметрии (8), необходимо выполнение условия

$$\delta(\lambda x) = \lambda^{\beta} \delta(x),$$

откуда получаем  $\beta = -1$ . Следовательно, решение (11) имеет вид

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Уравнение (12) запишется в виде

$$f'' + 2zf' + 2f = 0. (23)$$

Легко показать, что в отличие от предыдущего примера дифференцирование (23) по z приведет не к уменьшению, а к увеличению множителя около f. Но, с другой стороны, уравнение (23) можно получить, дифференцируя уравнение (16):

$$f_1''' + 2zf_1'' + 2f_1' = 0$$

и делая замену  $f'_1 = f$ . Функция  $f_1$  является решением исходного уравнения (16), которое мы уже находили в примере 1.1 :



Рис. 1. Автомодельное решение T(x,t) линейного уравнения теплопроводности (а) с однородными и (б) неоднородными нестационарными граничными условиями в различные моменты времени

Следовательно, дифференциру<br/>я $f_1,$ получим решение исходной задачи в виде

$$T(x,t) = \frac{C}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}.$$

Константу C найдем из начальных условий, используя предельное представление  $\delta$ -функции:

$$\delta(x) = \lim_{k \to 0} \frac{e^{-x^2/k}}{\sqrt{\pi k}}.$$

Так как $T(x,0)=T_0\delta(x),$ то

$$\lim_{t \to 0} C \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}} = T_0 \lim_{k \to 0} \frac{e^{-x^2/k}}{\sqrt{\pi k}} \Rightarrow C = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi}}.$$



$$T(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$
(24)

Графики зависимости температуры (24) в различные моменты времени представлены на рисунке 2.

В рассмотренном примере начальное условие (на всей оси *x*) задано в виде дельта-функции. Для начальных условий конечной ширины, например для

$$T(x,0) = Q_0 e^{-x^2/a^2},$$

в задаче появляется второй масштаб *a*, и автомодельное

решение не имеет места. Однако на больших временах, когда расстояние, на которое распространился тепловой фронт  $l(t) \gg a$ , можно пренебречь a по сравнению с характерной шириной решения, при этом решение асимптотически приближается к автомодельному.



Рис. 2. Автомодельное решение T(x,t) линейного уравнения теплопроводности с точечными начальными условиями в различные моменты времени при  $T_0=1$ 

Также отметим, что полученное решение представляет собой функцию Грина (см., например, [2, 12])

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

для уравнения теплопроводности (4), решение которого имеет вид

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t)T(y,0)dy.$$

Очевидно, что результат (24) можно было получить, используя метод разделения переменных, но автомодельное решение получается существенно проще.

Далее получим автомодельное решение (24) с помощью компьютерной программы для аналитических вычислений Maple<sup>1</sup>. Для начала нового вычисления без выхода из системы начинаем с команды

> restart;

Подключаем библиотеки.

> with(PDETools): with(ODETools): with(plots):

Задаем дифференциальное уравнение — одномерное уравнение теплопроводности (4).

> PDE :=diff(T(x,t),t) = diff(T(x,t),x2);

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)$$

Задаем автомодельную подстановку и запишем уравнение теплопроводности (4) с использованием автомодельной подстановки.

;

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Здесь и далее команды Maple, вводимые пользователем, начинаются знаком > и набраны шрифтом, имитирующим печатную машинку. Формула, следующая непосредственно за командой и набранная курсивом, является результатом выполнения команды. Весь остальной текст и формулы являются комментариями.

$$tr := \left\{ t = \tau, x = 2z\sqrt{\tau}, T(x,t) = \frac{\partial f(z)}{\partial\sqrt{\tau}} \right\}$$
$$ODEA := -\frac{1}{2} \frac{z\left(\frac{d}{dz}f(z)\right) + f(z)}{\tau^{3/2}} = \frac{1}{4} \frac{\frac{d^2}{dz^2}f(z)}{\tau^{3/2}}$$

Автомодельная подстановка привела к тому, что вместо дифференциального уравнения в частных производных мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение. Знаменатель в виде  $\tau^{3/2}$  интереса не представляет. Избавимся от него.

> ODE1:= ODEA\*tau<sup>(3/2)</sup>;

$$ODE1 := -\frac{1}{2}z\left(\frac{d}{dz}f(z)\right) + -\frac{1}{2}f(z) = \frac{1}{4}\frac{d^2}{dz^2}f(z)$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение с помощью функции dsolve и упрощаем решение с помощью функции simplify.

>ODE2:=simplify(dsolve(ODE1));

$$ODE2 := f(z) = (erf(Iz)_C1 + C2)e^{-z^2}$$

Первую постоянную интегрирования найдем из условия, что на бесконечности решение и его первая производная должны обращаться в 0. Таким образом,  $_C1 = 0$ . Вторая константа, как было показано выше, может быть определена из предельного представления  $\delta$ -функции,  $_C2 = 1/(\sqrt{2\pi})$ .

> ODE3:= subs(\_C1=0,\_C2=T0/(2\*Pi^(1/2)), ODE2);

$$ODE3 := f(z) = \frac{T0}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$$

Вернемся к исходным переменным. Делаем обратную замену переменных с помощью функции subs.

$$SOL := T(x,t)\sqrt{t} = \frac{T0}{2} \frac{e^{-\frac{x}{4t}}}{\sqrt{\pi}}$$

Решаем полученное уравнение с помощью функции solve.

> T := unapply(solve(SOL,T(x,t)),[x,t])

$$T := (x,t) \to \frac{T0}{2} \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}},$$

что соответствует решению (24).

Автомодельное решение (24) описывает диффузионное расплывание. На рисунке 2 представлены графики зависимости температуры от координаты для различных моментов времени, построенные с помощью функции plot. Характерная ширина решения растет как  $\sqrt{t}$ , максимальное значение уменьшается как  $\sqrt{t}$ , а площадь под графиком сохраняется.

> plot([T(x,0.05),T(x,0.5),T(x,5)], x=-4..4,T=0..1.5, color=[red,blue,green], linestyle=[1,2,3]);

На компьютере можно посмотреть эволюцию решения с помощью функции animate.

> animate(plot, [T(x,t),x=-4..4, T=0..1.5, axes=boxed], t=0.01..5);

### Задачи

Найти автомодельные решения следующих уравнений и построить графики решений в различные моменты времени, считая все коэффициенты постоянными.

1.1. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = Q_0 \delta(x). \end{cases}$$
  
1.2. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = Q_0 \delta'(x). \end{cases}$$
  
1.3. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + Q \delta'(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} \dot{T} = T'' + qt^{1/2}\delta(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x,0) = 0. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} \dot{T} = T'' - HT, & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x,0) = 0, & H = \text{const.} \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x,0) = 0, & \\ T(0,t) = At^{1/2}, t > 0. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x,0) = 0, & \\ T(0,t) = At, t > 0. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x,0) = 0, & \\ T(0,t) = At^{3/2}, t > 0. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x,0) = 0, & \\ T(0,t) = At^{2}, t > 0. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x,0) = 0, & \\ T(0,t) = At^{2}, t > 0. \end{cases}$$

### 1.2. Нелинейное уравнение теплопроводности

Важную роль играют автомодельные решения (и вообще подход, основанный на симметрии) для нелинейных задач, так как он позволяет при определенного вида начальных и граничных условиях построить решение задачи в аналитическом виде, что, вообще говоря, невозможно, например, при использовании метода разложения по базису. Нелинейное уравнение теплопроводности описывает теплоперенос в случае нелинейной среды, то есть когда ее характеристики (плотность, теплоемкость или коэффициент теплопроводности) нелинейно зависят от температуры.

Далее мы рассмотрим два частных случая, для которых можно построить автомодельное решение.

В первом случае будем считать, что в уравнении (1)

$$\rho = \text{const}, C \sim T^{n-1}, \lambda \sim T^{m-1}.$$

Во втором случае рассмотрим частный пример первого при n=1, то есть будем считать, что  $\rho = {\rm const}, \, c = {\rm const}, \, \lambda \sim T^{\alpha}.$ 

В первом случае из (1) получим уравнение

$$T^{n-1}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^{m-1}\frac{\partial T}{\partial x}\right),$$

которое после замены  $U = T^m$  сводится к уравнению вида

$$U^{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \alpha = (n-m)/m.$$
 (25)

Проверим его инвариантность относительно масштабных преобразований

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \lambda^{\delta} t, \\ U(x', t') = \lambda^{\gamma} U(x, t). \end{cases}$$
(26)

Запишем уравнение (25) в новых штрихованных переменных. С учетом (26) получим

$$\lambda^{\gamma(\alpha+1)-\delta} U^{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \lambda^{\gamma-2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

следовательно,

$$\delta = \alpha \gamma + 2.$$

Таким образом, уравнение (25) инвариантно относительно преобразования

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \lambda^{\alpha\gamma+2}t, \\ U(\lambda x, \lambda^{\alpha\gamma+2}t) = \lambda^{\gamma}U(x, t), \end{cases}$$
(27)

причем  $\alpha$  изначально известно из вида уравнения (25),  $\gamma$  — независимая константа.

Для того чтобы найти автомодельную переменную и вид решения, аналогичный (11), заметим, что при замене переменных на штрихованные не меняет своего вида комбинация

$$z = \frac{x'}{t'^{1/\delta}} = \frac{\lambda x}{(\lambda^{\delta} t)^{1/\delta}} = \frac{x}{t^{1/\delta}},$$
(28)

которая и является автомодельной переменной. Воспользуемся этим соотношением, чтобы найти общий вид решения. Заметим, что переход к автомодельной переменной, с учетом (27), (28), может быть выполнен при  $\lambda = at^{1/\delta}$  (a = const введена для удобства):

$$U(x,t) = \lambda^{\gamma} U\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{t}{\lambda^{\delta}}\right) = a^{\gamma} t^{\gamma/\delta} U\left(\frac{x}{at^{1/\delta}}, a^{-\delta}\right).$$

Таким образом, наличие симметрии (27) фиксирует вид решения с точностью до произвольной функции, зависящей от автомодельной переменной  $z = \frac{x}{at^{1/\delta}}$ :

$$U(x,t) = t^{\gamma/\delta} f\left(\frac{x}{at^{1/\delta}}\right).$$
(29)

Чтобы определить вид функци<br/>иf(z),подставим (29) в уравнение (25). Пр<br/>и $a^2=2\delta$ получим

$$f'' + 2zf^{\alpha}f' - \frac{4\beta}{1 - \alpha\beta}f^{\alpha+1} = 0,$$

где для удобства введено обозначение  $\beta = \gamma/\delta$ . Данное уравнение является нелинейным и не решается в общем случае аналитически, тем не менее достаточно просто решается численно (подробно численное решение будет рассмотрено в главе 3).

Во втором случае в уравнении (1) только коэффициент теплопроводности  $\lambda$  зависит от температуры,  $\lambda \sim T^{\alpha}$ . Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \right),\tag{30}$$

оно инвариантно относительно масштабных преобразований

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \lambda^{\delta} t, \\ T(x', t') = \lambda^{\beta \delta} T(x, t). \end{cases}$$
(31)

Несложно показать, что  $\delta = \frac{2}{1 + \alpha \beta}$ , где  $\alpha$  изначально известно из вида уравнения,  $\beta$  – независимая константа.

Автомодельная переменная и общее решение, аналогично первому случаю, имеют вид

$$z = \frac{x}{at^{1/\delta}}, \quad T(x,t) = t^{\beta} f\left(\frac{x}{at^{1/\delta}}\right). \tag{32}$$

Чтобы определить вид функци<br/>иf,подставим (32) в уравнение (30). Пр<br/>и $a^2=2/(1+\alpha\beta)$ получим

$$(f^{\alpha}f')' + zf' - \frac{2\beta}{1+\alpha\beta}f = 0.$$
 (33)

Данное уравнение также является нелинейным и не решается в общем виде аналитически, но при некоторых  $\alpha \neq 0$  имеет линейное решение (случай  $\alpha = 1$  будет рассмотрен ниже в примере 1.4).

Рассмотрим решение уравнения (33) в общем случае (при произвольных  $\alpha$ ) более подробно. В частности, нас будет интересовать численное решение, так как аналитически можно решить данное уравнение только при очень ограниченном наборе параметров.

Уравнение (33) имеет особенность в виде коэффициента  $f^{\alpha}$  при старшей производной, который стремится к нулю при  $z \to \infty$ . То есть возникает так называемая *проблема малого параметра*, из-за которой возникает неопределенность при поиске решения при больших z.

Проблема заключается том, что нет четкого критерия, при каких z можно пренебречь слагаемым  $f^{\alpha}f''$  и, соответственно, привести исходное уравнение к дифференциальному уравнению первого порядка.

Для устранения указанной особенности введем параметр s, который в дальнейшем станет новой независимой переменной, и функцию U(s):

$$U = f^{\alpha} \frac{df}{dz}, \quad \frac{d}{ds} = f^{\alpha} \frac{d}{dz}.$$

Подставляя замены в уравнение (33), получим систему трех уравнений первого порядка для функций z(s), f(s), U(s):

$$\begin{cases} \frac{dU}{ds} = -zU + \frac{2\beta}{1+\alpha\beta} f^{\alpha+1}, \\ \frac{dz}{ds} = f^{\alpha}, \\ \frac{df}{ds} = U. \end{cases}$$
(34)

Указанная параметризация привела к тому, что все коэффициенты при производных равны единице, а в правых частях — непрерывные функции. Полученную систему можно решить численно, например методом пристрелки (см. п. 2.1), дополнив ее начальными условиями z(0) = 0 и краевыми условиями для функции f(f(0) = A, f = 0 при  $s \to \infty$ ).

Пример 1.4. Найдем решение нелинейной задачи (30) о нагревании с торца стержня с изолированной боковой поверхностью при  $\alpha = 1$ .

Для того чтобы автомодельное решение существовало, необходимо, чтобы граничное условие также удовлетворяло условию симметрии (32), то есть должно выполняться соотношение

$$T(0, \lambda^{\delta} t) = \lambda^{\beta \delta} T(0, t).$$

При  $\alpha = 1$  данному соотношению удовлетворяет функция  $\varphi = q_0 t^{\beta}$ ,  $q_0 = \text{const.}$  Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = (TT')', x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = q_0 t^{\beta}, t > 0. \end{cases}$$

Как было показано выше, данная задача инвариантна относительно масштабных преобразований (31), что приводит к автомодельному решению вида (32), где неизвестная функция f(z) при  $\alpha = 1$  удовлетворяет уравнению

$$(ff')' + zf' - \frac{2\beta}{1+\beta}f = 0.$$
 (35)

Будем искать решение (35) в виде

$$f = (A - Bz)^k,$$

где *А*, *B*, *k* – некоторые константы. Подставляя решение в (35), получим

$$B^{2}k(2k-1)(A-Bz)^{2(k-1)} - Bkz(A-Bz)^{k-1} - \frac{2\beta}{1+\beta}(A-Bz)^{k} = 0,$$

откуда видно, что можно найти соотношение между коэффициентами A и B, например, при k = 1. В этом случае получим полином первой степени

$$B^2 - Bz - \frac{2\beta}{1+\beta}(A - Bz) = 0,$$

из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, исходя из условия  $f(z) \ge 0$ , получим два решения, соответствующие разным значениям z:

$$f = \begin{cases} B^2 \left( 1 - \frac{z}{B} \right), \ \beta = 1, \quad z \le B, \\ 0, \quad z > B. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным (z = x/t), с учетом (32) и граничных условий  $f(0) = q_0$  получим решение в виде

$$T(x,t) = \begin{cases} q_0\left(t - \frac{x}{\sqrt{q_0}}\right), & x \le \sqrt{q_0}t, \\ 0, & x > \sqrt{q_0}t. \end{cases}$$

Решение данной задачи в различные моменты времени представлены на рисунке 3, а. Из рисунка видно, как движется тепловой фронт со скоростью  $\sqrt{q_0}$ , при x = 0 значение растет линейно по времени.

Для сравнения на рисунке 3, б представлено решение линейной задачи ( $\alpha = 0, \beta = 1$ ) при начальных условиях  $T(x, 0) = q_0 \sqrt{t}$ , удовлетворяющих условию симметрии, качественно отличающееся от решения нелинейного уравнения.

Пример 1.5. Найдем численное решение нелинейной задачи (30) при  $\alpha = 1$  с точечным начальным условием.

Математическая формулировка задачи имеет вид



Рис. 3. Автомодельное решение нелинейной задачи (30) о нагреве полуограниченного стержня в различные моменты времени: (а) при  $\alpha = 1$ , (б) при  $\alpha = 0$ 

$$\begin{cases} \dot{T} = (TT')', \quad x \in (-\infty, +\infty), \\ T(x,0) = T_0 \,\delta(x). \end{cases}$$

Автомодельное решение существует, если уравнение и начальные условия инвариантны относительно масштабирования (32). Подстановка условия симметрии в уравнение, как было показано выше, приводит к соотношению  $\delta = 2/(1 + \beta)$ . Подставим (32) в начальное условие:

$$T(\lambda x, 0) = \lambda^{\beta \delta} T(x, 0) \quad \Rightarrow \quad T_0 \delta(\lambda x) = \lambda^{\beta \delta} T_0 \delta(x),$$

откуда, с учетом свойств  $\delta$ -функции, получаем  $\delta = -1/\beta$ .

Следовательно,  $\delta=3,\,\beta=-1/3.$  Автомодельная переменная и автомодельное решение имеют вид

$$z = \frac{x}{a\sqrt[3]{t}}, a = \text{const}, \quad T(x,t) = t^{-1/3} f\left(\frac{x}{a\sqrt[3]{t}}\right), \tag{36}$$

где функция f(z) при  $a^2=3$ удовлетворяет уравнению

$$(ff')' + zf' + f = 0. (37)$$

Уравнение (37) является нелинейным, но тем не менее его можно проинтегрировать аналитически. Сделаем это с помощью программы Maple.

> restart;

> with(PDETools): with(ODETools): with(plots):

Задаем дифференциальное уравнение — нелинейное уравнение теплопроводности (30) при  $\alpha = 1$ .

> PDE:=diff(T(x,t),t)=

diff(T(x,t)\*diff(T(x,t),x),x);

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right)^2 + T(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)\right)$$

Задаем автомодельную подстановку и запишем уравнение с использованием автомодельной подстановки, сразу упростим, домножив на  $3\tau^{4/3}$ . Получим уравнение (37).

> tr:={t=tau, x=sqrt(3)\*z\*tau^(1/3), T(x,t)=f(z)/tau^(1/3)};

> ODEA:= simplify(dchange(tr, PDE))\*3\*tau<sup>(4/3)</sup>;

$$tr := \left\{ t = \tau, x = \sqrt{3} \, z \, \tau^{1/3}, T(x,t) = \frac{\partial f(z)}{\partial \tau^{1/3}} \right\}$$

$$ODEA := -z \left(\frac{d}{dz}f(z)\right) - f(z) = f(z) \left(\frac{d^2}{dz^2}f(z)\right) + \left(\frac{d}{dz}f(z)\right)$$

Полученное уравнение один раз интегрируем.

> ODE1:=int(lhs(ODEA)-rhs(ODEA),z);

$$ODE1 := -f(z)\left(\frac{d}{dz}f(z)\right) - zf(z)$$

Пакет Maple не отображает постоянную интегрирования. При  $t \to 0$ и  $x \neq 0$  решение должно исчезать, поэтому функция f(z) вместе со своей производной должна обращаться в нуль при  $z \to \infty$ . Из этого условия находим, что постоянная интегрирования равна нулю.

Решаем с помощью функции dsolve полученное дифференциальное уравнение.

> ODE2:=dsolve(ODE1);

$$ODE2 := f(z) = 0, \ f(z) = -\frac{1}{2}z^2 + C1$$

Имеется два решения: первое -f(z) = 0, которое должно быть справедливо при больших по абсолютной величине z, второе  $-f(z) = -\frac{1}{2}z^2 + -C1$ , которое справедливо при  $z^2 < 2\_C1$  (так как  $f(z) \ge 0$ ).

Найдем постоянную интегрирования из начального условия. Для этого приведем аргумент δ-функции к *z*:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{3} t^{1/3}} \,\delta\left(\frac{x}{\sqrt{3} t^{1/3}}\right).$$

Учитывая (36), получаем при  $t \to 0$ :  $f(z) = T_0 \, \delta(z) / \sqrt{3}$ . Следовательно,

$$T_0 / \sqrt{3} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \int_{-\sqrt{2} - C1}^{\sqrt{2} - C1} \left( -\frac{1}{2} z^2 + C1 \right) dz.$$

Из данного соотношения находим константу \_C1:

> C1:= simplify(solve(int(-(1/2)\*z^2+\_C1, z=-sqrt(2\*\_C1)..sqrt(2\*\_C1))= T\_0/sqrt(3),\_C1)[1]);

$$C1 := \frac{1}{4} \, 6^{1/3} T_0^{2/3}$$

Подставим найденное значение постоянной интегрирования в решение и вернемся к исходным переменным.

> SOL:=subs({\_C1=C1, f(z)=T(x,t)\*t^(1/3), z=x/t^(1/3)/sqrt(3)}, ODE2[2]);

> T1:=solve(SOL, T(x, t));

$$SOL := T(x,t)t^{1/3} = -\frac{1}{6}\frac{x^2}{t^{2/3}} + \frac{1}{4}6^{1/3}T_0^{2/3}$$

$$T1 := \frac{6^{1/3} T_0^{2/3}}{4t^{1/3}} - \frac{x^2}{6t}$$

Конечное решение склеивается из двух:

$$T(x,t) = \begin{cases} \frac{6^{1/3}T_0^{2/3}}{4t^{1/3}} - \frac{x^2}{6t}, & \frac{x^2}{t^{2/3}} \le \frac{6^{4/3}T_0^{2/3}}{4}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

- > T:=unapply(piecewise(x<sup>2</sup>/t<sup>(2/3)/3 <=2\*C1,T1, 0),[x,t]);</sup>
- > plot([T(x,0.01),T(x,0.05),T(x,0.5)], x=-2..2, linestyle=[1,5,3,2]);
- > animate(plot, [T(x,t),x=-2..2], t=0.01..1);

На рисунке 4 показано полученное нелинейного уравнения (30) с точечным начальным условием в различные моменты времени. В отличие от линейной задачи (см. пример 1.3, рисунок 2) решение имеет резкий край — фронт тепловой волны. Расширение нагретой области (смещение фронта) в данном случае происходит по закону  $t^{1/3}$ .



Рис. 4. Автомодельное решение нелинейной задачи (30) при  $\alpha = 1$ , с точечными начальными условиями в различные моменты времени

#### Задачи

Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопровод-

ности в общем виде 
$$(a, b, n, m - \text{const})$$
  
1.11.  $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( e^T \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ .  
1.12.  $\frac{\partial T}{\partial t} = a x^{-n} \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + b T^m$ .  
1.13.  $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + b T^m$ .

Найти автомодельные решения нелинейных уравнений теплопроводности (a, b, n, m - const), удовлетворяющие начальным и граничным условиям.

1.14. 
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 2, \\ T(0, t) = 1, t > 0. \end{cases}$$
  
1.15. 
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = t, t > 0. \end{cases}$$
  
1.16. 
$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial x} \left( T^n \frac{\partial T}{\partial x} \right), x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = bt^m, t > 0. \end{cases}$$

### 1.3. Задача Стефана

В данном разделе рассмотрим решение задачи Стефана, которая представляет собой особый вид краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Задача описывает изменение фазового состояния вещества, при котором положение границы раздела фаз изменяется со временем. Скорость смещения межфазных границ определяется дополнительным условием на границе раздела фаз, что приводит задачу к нелинейному виду.

Классическая задача о фазовых переходах, сформулированная австрийским инженером-металлургом Й. Стефаном в 70-х гг. XIX в., — это задача определения поля температуры и границы фазового перехода в чистом, то есть не содержащем примесей, веществе.



Рис. 5. Схематичная зависимость количества теплоты U от температуры T, выделяемого при кристаллизации вещества, q — скрытая теплота кристаллизации

Примером такого фазового перехода может служить процесс затвердевания (кристаллизации) воды при ее охлаждении. Особенностью процесса превращения воды в лед является то, что при таком переходе при замерзании единицы вещества выделяется некоторое количество тепла q, которое называют скрытой теплотой кристаллизации (см. рисунок 5). Такой процесс можно считать квазистатическим, так что тепло, выделившееся при кристаллизации, успевает распределиться в некоторой окрестности фронта кристаллизации. В результате фазовый переход происходит всегда при одной и той же температуре кристаллизации  $T_c$ .

Будем считать, что задача является одномерной и фронт фазового перехода является плоскостью, расположенной в некото-

рой неизвестной точке  $x_c = x(t)$ , разделяющей твердую и жидкую фазы и передвигающейся по мере замерзания жидкости.

Математическая постановка может быть получена следующим образом. Поскольку количество теплоты в единице объема пропорционально температуре (dU = CdT), теплоемкость равна  $C = \partial U / \partial T$ . Тогда из закона сохранения тепла

$$C\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0, \qquad (38)$$

где  $j(x,t) = -\lambda \, \partial T / \partial x$  — поток тепла,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводно-

сти, следует, что должно быть справедливо уравнение вида

$$\frac{\partial U(T)}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

где *а* — коэффициент температуропроводности, который для воды и льда практически одинаков.

Из-за конечного скачка функции U(T) при  $T = T_c$  (см. рисунок 5) частная производная  $\partial U/\partial T$  будет иметь особенность в виде  $\delta$ -функции в этой точке. В безразмерных переменных производная запишется в виде:

$$\frac{\partial U(T)}{\partial T} = 1 + q\delta(T - T_c).$$

Будем считать, что при  $0 < x < x_c$  находится жидкая фаза с начальной температурой  $T_0$ . При  $x > x_c$  находится твердая фаза при температуре холодильника  $T_H$ , причем  $T_H < T_c < T_0$ . То есть на границе x = 0 выполняются условия первого рода. Таким образом, математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{cases} (1+q\delta(T-T_c))\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & x \in [0,\infty), \\ T(0,t) = T_0, & T(x,0) = T_H. \end{cases}$$
(39)

Воспользуемся тем, что область изменения переменной x при масштабировании переходит сама в себя, и проверим выполнение условий, при которых существует автомодельное решение (39); а именно, проверим инвариантность (39) относительно масштабных преобразований

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \lambda^{\alpha} t, \\ T(x', t') = \lambda^{\beta} T(x, t). \end{cases}$$

При подстановке в уравнение (39) штрихованных переменных приходим к соотношению

$$(1 + q\delta(\lambda^{\beta}T - T_c))\lambda^{\beta - \alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda^{\beta - 2}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$
Но поскольку

$$\delta(\lambda^{\beta}T - T_c) = \frac{1}{\lambda^{\beta}}\delta(T - T_c\lambda^{\beta}),$$

необходимо выполнение следующих условий:

$$\lambda^{\beta-\alpha} = \lambda^{\beta-2} = \lambda^{-\alpha} \quad \Rightarrow \qquad \beta-2 = -\alpha = \beta - \alpha,$$

откуда находим

$$\beta = 0, \quad \alpha = 2.$$

Таким образом, получаем условие симметрии в виде

$$\begin{cases} x' = \lambda x, \\ t' = \lambda^2 t, \\ T(x', t') = T(x, t). \end{cases}$$

В п. 1.1 было показано, что при таких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  общее решение и автомодельная переменная имеют вид

$$T(x,t) = f(z), \qquad z = \frac{x}{2\sqrt{t}}.$$
 (40)

Кроме того, поскольку T(x, 0) = const и T(0, t) = const, граничные и начальные условия также инвариантны относительно масштабных преобразований координат и времени.

Подставляя (40) в уравнение (39) и вычисляя частные производные по времени и координате, получим уравнение для определения f(z):

$$f''(z) + (1 + q\delta(f(z) - T_c)) 2zf'(z) = 0.$$
(41)

Обозначим  $z_0$  корень уравнения  $f(z) - T_c = 0$ . Это значение (граница фазового перехода) делит область существования решения на две области, в каждой из которых (при  $z \neq z_0$ )  $\delta$ -функция равна нулю. Поэтому для каждой из областей уравнение (39) совпадает с (17), решение для которого было найдено в примере 1.1. Таким образом, общее решение запишется в виде

$$f(z) = \begin{cases} f_1 = a_1 \operatorname{erf}(z) + a_2, & z < z_0, \\ f_2 = b_1 \operatorname{erfc}(z) + b_2, & z > z_0. \end{cases}$$
(42)

Для определения констант  $a_1, a_2, b_1, b_2$  воспользуемся условиями сшивания решения в точке  $z = z_0$ . Первое условие соответствует тому, что функция T(x,t) и, соответственно, функция f(z) являются непрерывными на границе фазового перехода:

$$f_1(z_0) = f_2(z_0) = T_c. (43)$$

Особенность в уравнении (39) в виде  $\delta$ -функции соответствует конечному скачку первой производной f' в точке  $z_0$ . Для его определения преобразуем  $\delta$ -функцию к аргументу  $(z - z_0)$  и проинтегрируем уравнение (41) в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $z_0$  ( $\varepsilon \to 0$ ):

$$\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} 2zqf'(z)\delta(f(z)-T_c)dz = -\int_{z_0-\varepsilon}^{z_0+\varepsilon} 2zqf'(z)\frac{\delta(z-z_0)}{|f'(z_0)|}dz = -2z_0q.$$

Знак минус появляется в связи с тем, что при кристаллизации температура T(x,t) и, соответственно, функция f(z) убывают, то есть производная f'(z) < 0.

Таким образом, интегрируя (41), получаем условие скачка производной в виде

$$(f_2' - f_1')|_{z_0} - 2z_0 q = 0.$$
(44)

Кроме этого, учтем начальные и граничные условия

$$T(0,t) = T_H \Rightarrow f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\Big|_{x=0} = f_1(0) = T_0,$$
  

$$T(x,0) = T_0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\Big|_{t=0} = f_2(\infty) = T_H.$$
(45)

Подставляя решение (42) в условия (43) и (45), найдем

$$a_1 = \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}(z_0)}, \qquad a_2 = T_0, \qquad b_1 = \frac{T_c - T_H}{\operatorname{erfc}(z_0)}, \qquad b_2 = T_H.$$

Таким образом, получаем решение как функцию от положения границы раздела фаз  $z_0$ :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{T_c - T_0}{\operatorname{erf}(z_0)} \operatorname{erf}(z) + T_0, & z < z_0, \\ \frac{T_c - T_H}{\operatorname{erfc}(z_0)} \operatorname{erfc}(z) + T_H, & z > z_0. \end{cases}$$
(46)

Для определения  $z_0$  необходимо воспользоваться условием (44). При подстановке решения в это условие получим уравнение, которое аналитически не решается, но может быть решено численно, например с помощью программы Maple. Значение  $z_0$  зависит от констант  $T_0, T_H, T_c, Q$  и определяет точку фазового перехода, координата которой меняется со временем как  $x = 2z_0\sqrt{t}$ .

Ниже приведем решение задачи Стефана в программе Maple и построенные с ее помощью графики зависимости температуры от координаты x в различные моменты времени (см. рисунки 6, 7).

> PDE:=diff(f(z),
$$z^2$$
)+2\*z\*diff (f(z),z):

> SOL:=dsolve(PDE):

$$T0 - \frac{\operatorname{erf}(z)(T0 - Tc)}{\operatorname{erf}(z0)}$$
$$TH - \frac{(TH - Tc)\operatorname{erfc}(z)}{TH}$$

$$TH - \frac{(TH - Tc)\operatorname{enc}(z)}{\operatorname{erfc}(z0)}$$

> T0:=1.2: Q:=1.5: Tc:=1: TH:=0:

> Stef\_p:=proc(t1)

global Tc, T0, TH, Q; local z,z0,T1,T2,s1,p1T,p2T,x,x0; T1:=T0-erf(z)\*(T0-Tc)/erf(z0); T2:=TH-(TH-Tc)\*erfc(z)/erfc(z0); s1:=subs(z=z0,diff(T2-T1,z)-2\*z\*Q);

> display({Stef\_p(0.005),Stef\_p(0.05),Stef\_p(0.5)});



Рис. 6. Зависимость (46) f(z) при параметрах  $T_0 = 1.2, Q = 2.5, T_c =$  $= 1, T_H = 0$ . Граница раздела фаз соответствует  $z_0 = 0.11$ . В данной точке функция непрерывна, но имеет излом, обусловленный скачком производной (44)



Рис. 7. Решение задачи Стефана (39) при параметрах  $T_0 = 1.2, Q = 2.5, T_c =$  $= 1, T_H = 0$  в моменты времени  $t_1 =$  $= 0.005, t_2 = 0.05, t_3 = 0.5$ . Значения  $x_1, x_2, x_3$  — соответствующие границы раздела фаз

### Задачи

1.17. При кристаллизации вещества с примесью выделяется скрытая теплота q(T), которая является линейной функцией температуры (см. рисунок 8). То есть процесс кристаллизации происходит не при какой-то

конкретной температуре, а в интервале температур: от  $T_s$  до  $T_l$  (индексы l и s от слов liquidus (жидкий) и solidus (твердый). При этом отсутствует четкая граница раздела фаз, фазовый переход происходит в интервале температур.

Считая, что задача одномерна, покажите существование ее автомодельного решения. Найдите границы области фазового перехода и постройте графики зависимости температуры T(x,t) от координаты в различные моменты времени (рисунок 9).



Рис. 8. Схематичная зависимость количества теплоты U(T), выделяемого при кристаллизации вещества с примесью, q — скрытая теплота кристаллизации является линейной функцией

Указание к решению. При математической формулировке задачи необходимо учитывать, что вся область изменения температуры делится на три:

- 1) область жидкой фазы:  $T < T_l$ , теплоемкость  $C_0 = \text{const}$ ;
- 2) область фазового перехода:

$$T_s < T < T_l,$$

теплоемкость  $C_2 = \frac{q}{T_l - T_s};$ 3) область твердой фазы:  $T > T_s,$ теплоемкость  $C_0 = \text{const.}$ 

Так как в отличие от предыдущего примера количество тепло-

ты U(T), выделяемое при кристаллизации, является хоть и не гладкой, но непрерывной функцией, уравнение теплопроводности, описывающее процесс, будет линейным вида (3), но с различными коэффициентами теплоемкости C для каждой из областей. Это приводит к тому, что при переходе к безразмерным переменным координата x в первой и третьей областях будет иметь масштаб, отличный от второй области:

$$x_2 = \gamma x_{1,3},$$
 где  $\gamma^2 = \frac{C_2(T)}{C_0} = \frac{q}{C_0(T_l - T_s)} = \frac{Q}{T_l - T_s}$ 

Отметим, что область кристаллизации, ограниченная некоторыми неизвестными точками  $x_{c1}$  и  $x_{c2}$ , передвигается как целое по мере замерзания жидкости, поэтому наличие масштаба  $x_{c2} - x_{c1}$  не препятствует наличию автомодельного решения.

Уравнения теплопроводности необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Считаем, что при  $0 < x < x_{c1}$  находится жидкая фаза с начальной температурой  $T_0$ . При  $x > x_{c2}$  находится твердая фаза при температуре холодильника  $T_H$ . Фазовый переход начинается в точке  $x_{c1}$  при  $T = T_l$ , вторая граница области перехода соответствует точке  $x_{c2}$  при  $T = T_s$ , причем  $T_H < T_s < T_l < T_0$ .

Таким образом, общее решение представляет собой три функции, сшиваемые в точках  $x_{c1}$  и  $x_{c2}$ , зависимость от времени которых изначально также неизвестна. Условиями сшивания являются непрерывность функции T(x,t) и ее первой производной в указанных точках (так как коэффициенты исходного уравнения не имеют особенностей).

После подстановки всех граничных условий и условия непрерывности функции в точках  $x_{c1}$  и  $x_{c2}$  общее решение будет зависеть от автомодельной переменной  $z = x/(2\sqrt{t})$  и положения границ области фазового перехода  $z_{c1} = x_{c1}/(2\sqrt{t})$  и  $z_{c2} = x_{c2}/(2\sqrt{t})$ :

$$T(z) = \begin{cases} T_0 - \frac{\operatorname{erf}(z)(T_0 - T_l)}{\operatorname{erf}(z_{c1})} & \text{при } z < z_{c1}, \\ \frac{T_l \operatorname{erf}(\gamma z_{c2}) - T_s \operatorname{erf}(\gamma z_{c1}) - (T_l - T_s) \operatorname{erf}(\gamma z)}{\operatorname{erf}(\gamma z_{c2}) - \operatorname{erf}(\gamma z_{c1})}, z \in (z_{c1}, z_{c2}), \\ T_H - \frac{(T_H - T_s) \operatorname{erfc}(z)}{\operatorname{erfc}(z_{c2})} & \text{при } z > z_{c2}. \end{cases}$$

Для определения  $z_{c1}$ ,  $z_{c2}$  необходимо воспользоваться условием непрерывности производной T(x,t) в этих точках. При этом получатся уравнения, которые можно решить численно, например с помощью Maple.

На рисунке 9 представлены графики зависимости температуры от времени, полученные при решении рассматриваемой задачи при  $T_0 = 1.2, T_l = 1, T_s = 0.5, T_H = 0, Q = 2.5$ . Границы области фазового перехода обозначены  $x_{c1}, x_{c2}$ .



Рис. 9. График зависимости температуры T(x, t), соответствующей решению задачи (1.17), при параметрах  $T_0 = 1.2, T_l = 1, T_s = 0.5, T_H = 0, Q = 2.5$  в моменты времени (a) t = 0.05, (б) t = 0.5. Значения  $x_{c1}, x_{c2}$  – границы области фазового перехода

### 1.4. Решение типа бегущих волн

В разнообразных проблемах математической физики важную роль играют инвариантные решения типа бегущих волн. Так называют решения, для которых распределения характеристик движения в разные моменты времени получаются одно из другого сдвигом, а не преобразованием подобия, как в случае автомодельных решений уравнений теплопроводности, рассмотренных выше. Другими словами, всегда можно выбрать подвижную декартову систему координат так, что распределение характеристик движения типа бегущей волны в этой системе будет стационарно [11]. К рассмотрению бегущих волн сводится исследование структуры фронта ударных волн в газодинамике и магнитной гидродинамике, уединенных и периодических волн в плазме и на поверхности тяжелой жидкости, а также многие другие задачи [4].

Решениями типа бегущей волны называются решения вида

$$u(x,t) = W(z), \ z = x - Vt,$$
 (47)

где V — скорость распространения волны (может быть любого знака), x

и t — пространственная и временная независимые переменные. Значение V = 0 соответствует стационарному решению.

Поиск решений типа бегущей волны проводится прямой подстановкой выражения (47) в исходное уравнение с учетом равенств

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dW}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -V\frac{dW}{dz}$$

Решения типа бегущей волны допускают уравнения, которые не зависят явно от независимых переменных x и t и, следовательно, инвариантны относительно преобразований сдвига

$$\begin{cases} t' = t + \varepsilon, \\ x' = x + \delta, \end{cases}$$
(48)

где  $\varepsilon, \delta$  — произвольные постоянные. Наличие симметрии (48) приводит к тому, что решения типа бегущей волны могут быть определены как решения функционального уравнения [5]

$$u(x,t) = u(x + \varepsilon, t + \delta).$$

### Линейное уравнение теплопроводности

В качестве примера исследуем свойства симметрии и найдем автомодельную подстановку для линейного одномерного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$
(49)

Легко показать, что данное уравнение является инвариантным относительно трансляционных преобразований (48). При этом само решение, в силу линейности уравнения, допускает преобразование симметрии

$$T(x',t') = \mu(\varepsilon,\delta)T(x,t).$$
(50)

Построим решение (49), являющееся автомодельным в классе преобразований (48), (50). Для этого заметим, что при  $\varepsilon = \delta = 0, \mu = 1$  преобразование тривиально, поэтому запишем его при  $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$  и разложим (50) в ряд по их малости.

$$T(x,t) + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} + \delta \frac{\partial T}{\partial x} + \dots = (1 + \varepsilon a + \delta b + \dots)T(x,t),$$

где  $a = \partial \mu / \partial t$ ,  $a = \partial \mu / \partial x$  при  $\varepsilon = \delta = 0$ . В силу произвольности  $\varepsilon$  и  $\delta$  получим два уравнения:

$$aT + \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad bT + \frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

откуда получаем общий вид *автомодельного* решения в классе преобразований (48), (50):

$$T(x,t) = Ae^{-at-bx}$$

Кроме того, если подставить полученное решение в исходное уравнение, получим  $b^2 = -a$ . Таким образом, наличие трансляционной симметрии фиксирует вид решения с точностью до константы и зависит от комбинации независимых переменных (автомодельной переменной) вида z = -b(x - bt).

В качестве константы b может выступать скорость V распространения тепловой волны (фронта распространения тепла). Полученное решение является функцией одной переменной z и представляет собой решение типа *бегущей волны*, один из важных частных случаев автомодельных решений. При переходе в систему отсчета, движущуюся со скоростью V, получим решение, не зависящее от времени.

### Нелинейное уравнение теплопроводности

Найдем решение типа бегущей волны нелинейного уравнения теплороводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( f(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right).$$
(51)

Для этого подставим (47) в (51), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(f(W)W')' + VW' = 0,$$

где штрих соответствует полной производной по z = kx - Vt. Интегрируя дважды, получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{f(W)dW}{VW+C_1} = -z + C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные.

Пример 1.6. В качестве конкретного примера найдем решение типа бегущей волны нелинейной задачи (30) (при  $\alpha = 1$ ) о нагревании полуограниченного стержня с нестационарными граничными условиями

$$\begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial T}{\partial x} \right), \ x \in [0, +\infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = q_0 t, \ t > 0 \end{array}$$

с помощью программы Maple.

> restart;

> with(PDETools): with(ODETools): with(plots):

Задаем рассматриваемое дифференциальное уравнение.

> PDE:=diff(T(x,t),t)= diff(T(x,t)\*diff(T(x,t),x),x);

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t}T(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}T(x,t)\right)^2 + T(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t)\right)$$

Зададим автомодельную подстановку и запишем уравнение с ее использованием, указав, что V — параметр.

> tr:={t=tau, x=(z+V\*tau), T(x,t)=W(z)};

ODEA:= simplify(dchange(tr, PDE, params='V'));

$$tr:=\{t=\tau, x=V\tau+z, T(x,t)=W(z)\}$$

$$ODEA := -V\left(\frac{d}{dz}W(z)\right) = \left(\left(\frac{d}{dz}W(z)\right)^2 + W(z)\left(\frac{d^2}{dz^2}W(z)\right)\right)$$

Полученное уравнение один раз интегрируем.

> ODE1:=int(lhs(ODEA)-rhs(ODEA),z);

$$ODE1 := -VW(z) - W(z) \left(\frac{d}{dz}W(z)\right)$$

Пакет Maple не отображает постоянную интегрирования. При  $t \to 0$  и  $z \neq 0$  решение должно исчезать, поэтому функция W(z) вместе со своей производной должна обращаться в нуль при  $z \to \infty$ . Из этого условия находим, что постоянная интегрирования равна нулю.

Решаем с помощью функции dsolve полученное уравнение.

> ODE2:=dsolve(ODE1);

$$ODE2 := W(z) = 0, W(z) = -Vz + C1$$

Константа \_C1 имеет смысл начала отсчета координаты z. Без ограничения общности выберем \_ $C_1 = 0$ . Таким образом, мы получили два решения, соответствующие разным значениям z:

$$W(z) = \begin{cases} -Vz, & z \ge 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным (z = x - Vt, T(x, t) = W(z)), с учетом граничных условий  $W(-Vt) = V^2t = q_0t$ , получаем скорость распространения волны  $V = \sqrt{(q_0)}$  и решение в виде

$$T(x,t) = \begin{cases} q_0\left(t - \frac{x}{\sqrt{q_0}}\right), & x \le \sqrt{q_0}t, \\ 0, & x > \sqrt{q_0}t. \end{cases}$$

То есть, несмотря на изначально различные подстановки, мы пришли к решению, полученному в примере 1.4 (с. 28; см. рисунок 3). Данное решение представляет собой волну в виде линейной функции, которая движется как целое со скоростью V вдоль оси z. С системе отсчета, которая также движется со скоростью V вдоль оси z, решение является стационарным.

### Задачи

Найти решения типа бегущей волны нелинейных уравнений теплопроводности (a = const).

1.18. 
$$\frac{\partial T}{\partial t} + a \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

1.19. 
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial T}{\partial x} \right) + a.$$

## 1.4.1. Линейное уравнение теплопроводности с точечным источником

**1. Без фазового перехода.** Рассмотрим однородный стержень, вдоль которого со скоростью V движется точечный источник тепла с мощностью Q. Начальное распределение температуры в стержне имеет вид  $T(x,0) = T_0(x)$ . Кроме того, имеется боковой теплоотвод от поверхности (с коэффициентом теплоотвода H). Температура в каждый момент времени для каждой точки стержня меньше температуры фазового перехода.

Покажем, что данная задача имеет квазистационарное решение типа бегущей волны, то есть распределение температуры не меняется в системе отсчета, движущейся вместе с источником со скоростью V.

При нагревании (охлаждении) вещества без фазового перехода количество теплоты в единице объема пропорционально температуре

$$dU(T) \sim C dT$$
,

где *С* — коэффициент теплоемкости вещества (постоянный). В этом случае уравнение непрерывности (38) имеет вид линейного уравнения тепло-проводности:

$$C\rho \dot{T} = \lambda T'' - H(T - T_H) + Q\delta(x + Vt), x \in (-\infty, +\infty),$$
(52)

где слагаемое  $H(T - T_H)$  определяет теплоотвод с боковых стенок,  $T_H$  – температура окружающей среды.

Будем искать решение (52) в виде в виде бегущей волны

$$T(x,t) = T(x+Vt),$$

что соответствует переходу в систему отсчета, которая движется со скоростью V в направлении, противоположном направлению оси x. В этом случае частная производная по времени запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial z}.$$

В новой системе отсчета источник неподвижен и находится в точке z = 0. Получим уравнение

$$C\rho(\dot{T} + VT') = \lambda T'' - H(T - T_H) + Q\delta(z), \quad z \in (-\infty, +\infty).$$
(53)

Стационарное решение уравнения (53) (при  $\dot{T} = 0$ ) соответствует искомому распределению температуры, которое не меняется в системе отсчета, движущейся вместе с источником со скоростью V.

Введем для удобства безразмерные переменные и характерные масштабы  $z_0, t_0, T_0$  так, чтобы коэффициенты перед второй производной и источником равнялись единице:

$$z = z_0 y, \ t = t_0 \tau, \ T = T_0 f(z) + T_H,$$
  

$$z_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{H}}, \ t_0 = \frac{C\rho}{H}, \ T_0 = \frac{Q}{\sqrt{\lambda H}}.$$
(54)

Кроме того, обозначим безразмерную скорость как 2*ν*.

Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с разрывной правой частью:

$$f'' - 2\nu f' - f = -\delta(y),$$

решение которого удовлетворяет нулевым граничным условиям первого рода при  $y \to \pm \infty$  и условиям сшивания при y = 0 ( $\varepsilon \to 0$ ):

$$f(0-\varepsilon) = f(0+\varepsilon), \quad f'(0+\varepsilon) - f'(0-\varepsilon) = -1.$$

Несложно показать, что решение имеет вид (см. рисунок 10)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\nu^2 + 1}} e^{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 1})y}, & y < 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{\nu^2 + 1}} e^{(\nu - \sqrt{\nu^2 + 1})y}, & y \ge 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$T(x,t) = T_0 f\left(\sqrt{\lambda/H} \left(x - Vt\right)\right) + T_H.$$

Напомним, что данное решение представляет собой распределение температуры, которое движется как волна со скоростью V (вместе с источником) относительно стержня.



Рис. 10. График зависимости f(y) при  $\nu = 1$ 

**2.** Фазовый переход происходит при температуре  $T = T_c$ . Рассмотрим однородный стержень, вдоль которого со скоростью V движется точечный источник тепла с мощностью Q. Учтем боковой теплоотвод от поверхности (с коэффициентом теплоотвода H). Предположим, что при температуре  $T = T_c$  происходит фазовый переход первого рода с выделением скрытой теплоты кристаллизации q (см. п. 1.3). Стержень считаем неограниченным,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Данная задача имеет квазистационарное решение типа бегущей волны, то есть распределение температуры не меняется в системе отсчета, движущейся вместе с источником со скоростью V. В данном случае при  $T = T_c$  имеется  $\delta$ -образный скачок теплоемкости (см. с. 36), уравнение теплопроводности имеет вид

$$C\rho\left(1+q\delta(T-T_c)\right)\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - H(T-T_H) + Q\delta(x+Vt).$$
(55)

Аналогично предыдущему примеру будем искать решение (56) в виде бегущей волны:

$$T(x,t) = T(x+Vt).$$

То есть перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с источником. Напомним, что после такого перехода стержень движется влево относительно источника, который находится в точке z = 0.

Для стационарного решения ( $\dot{T} = 0$ ) получим

$$C\rho\left(1+q(T-T_c)\right)VT' = \lambda T'' - H(T-T_H) + Q\delta(z), \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

Введем для удобства безразмерные переменные и характерные масштабы (54), безразмерную скорость обозначим 2*ν*. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$f'' - 2\nu(1 + q_0\delta(f - \alpha))f' - f = -\delta(y),$$
(56)

где  $q_0 = q/T_0, \, \alpha = (T_c + T_H)/T_0.$ 

Обозначим  $y_1, y_2$  пока неизвестные корни уравнения

$$f(y) - \alpha = 0. \tag{57}$$

Значениям  $y_1$  и  $y_2$  соответствуют точки, в которых происходит фазовый переход. Очевидно, что  $y_1, y_2$  имеют разный знак (стержень нагревается по обе стороны от источника, находящегося в точке y = 0). Для определенности будем считать, что  $y_1 < 0$  (точка, в которой происходит плавление, слева от источника) и  $y_2 > 0$  (точка, в которой происходит кристаллизация, справа от источника). Схема протягивания стержня через зону плавления с обозначением точек фазового перехода представлена на рисунке 11.



Рис. 11. Слева — схема протягивания стержня через зону плавления, справа — деление на четыре области, соответствующие разным фазовым состояниям

Особенности в виде  $\delta$ -функций делят всю область возможных значений аргумента y на четыре области (см. рисунок 11), в каждой из которых искомая функция удовлетворяет однородному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$f'' - 2\nu f' - f = 0.$$
(58)

С учетом (57) однородных граничных условий  $f(\pm\infty) \to 0$  решение уравнения (58) удобно представить в виде

$$f = \begin{cases} f_{\mathrm{I}} = \alpha e^{(\nu + \sqrt{\nu^2 + 1})(y - y_1)} \operatorname{пpu} & -\infty < y < y_1; \\ f_{\mathrm{II}} = e^{\nu y} \left( A_1 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\nu^2 + 1} y \right) + B_1 \operatorname{sh} \left( \sqrt{\nu^2 + 1} y \right) \right) \operatorname{пpu} & y_1 < y < 0; \\ f_{\mathrm{III}} = e^{\nu y} \left( A_2 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\nu^2 + 1} y \right) + B_2 \operatorname{sh} \left( \sqrt{\nu^2 + 1} y \right) \right) \operatorname{пpu} & 0 < y < y_2; \\ f_{\mathrm{IV}} = \alpha e^{(\nu - \sqrt{\nu^2 + 1})(y - y_2)} \operatorname{пpu} & y_2 < y < \infty. \end{cases}$$

Таким образом, имеется шесть неизвестных  $(y_1, y_2, A_1, B_1, A_2, B_2)$ , для определения которых проинтегрируем уравнение (56) в  $\varepsilon$ -окрестности  $(\varepsilon \to 0)$  точек  $y = y_1, y = y_2, y = 0$ . Получим условия скачка производных функции f в этих точках (см. с. 38):

$$f'_{\rm II}(y_1) - f'_{\rm I}(y_1) = -2\nu q_0, \quad f'_{\rm III}(0) - f'_{\rm II}(0) = -1, \quad f'_{\rm IV}(y_2) - f'_{\rm III}(y_2) = 2\nu q_0$$

Кроме того, выполняются условия непрерывности функци<br/>и f(y) в точках  $y=0,y_1,y_2 {\rm :}$ 

$$f_{\rm I}(y_1) = f_{\rm II}(y_1), \quad f_{\rm II}(0) = f_{\rm III}(0), \quad f_{\rm III}(y_2) = f_{\rm IV}(y_2).$$

Итак, из условий в нуле получаем  $A_1 = A_2, B_1 = B_2 - 1/\sqrt{\nu^2 + 1}$ . Далее из условий при  $y = y_1$  можно выразить константы  $A_2$  и  $B_2$  и подставить в оставшиеся два условия при  $y = y_2$ . Получим два нелинейных уравнения с неизвестными  $y_1$  и  $y_2$ , для определения которых можно воспользоваться функцией fsolve (полученные уравнения имеют громоздкий вид, и здесь мы их приводить не будем).

График решения уравнения (56), построенный при  $\nu = 0.5, \alpha = 0.2$  и  $q_0 = 0.05$ , представлен на рисунке 12.



Рис. 12. График зависимости f(y) при  $\nu = 0.5, \alpha = 0.2$  и  $q_0 = 0.05$ . В точках  $y_1 = -0.38, y_2 = 1.58$  функция f(y) непрерывна и равна  $\alpha$ , но имеется излом, соответствующий скачку производной

Полученное решение представляет собой «профиль» волны, которая движется как целое вместе с источником со скоростью V влево.

3. Фазовый переход происходит в интервале  $T_l < T < T_s$ . В рассмотренной выше задаче предполагалось, что фазовый переход происходит как в чистом веществе — при постоянной температуре  $T = T_c$ .

Читателю предлагается самостоятельно построить решение следующей аналогичной задачи.

Вдоль однородного стержня движется со скоростью V точечный источник тепла с мощностью Q. Имеется боковой теплоотвод от поверхности (с коэффициентом теплоотвода H). В отличие от задачи, рассмотренной в предыдущем пункте, фазовый переход происходит в интервале температур  $T_l < T < T_s$ , то есть, кроме жидкой и твердой фазы, имеется область со смешанной фазой (см. рисунок 13, см. также задачу 1.17,

с. 40). При этом внутренняя энергия является всюду непрерывной функцией, но при  $T = T_l$  и  $T = T_s$  имеет излом, соответствующий изменению теплоемкости (постоянная величина для каждой из фаз, см. рисунок 8).



Рис. 13. Слева — схема протягивания стержня через зону плавления, справа — деление на области, соответствующие разным фазовым состояниям

В этом случае (после перехода в подвижную систему координат и введения безразмерных переменных) вся область значений переменной y будет разделена на шесть интервалов, в каждом из которых решение будет зависеть от двух констант. Для их определения необходимо учесть однородные граничные условия первого рода  $f(\pm\infty) \rightarrow 0$  и условия сшивания в точках, соответствующих границам фаз (см. рисунок 13): так как при фазовом переходе нет скачков внутренней энергии (см. рисунок 8), непрерывной будет не только сама функция f, но и ее первая производная при  $y = y_1 \dots y_4$ .

# 2. Численное решение одномерного уравнения теплопроводности

### 2.1. Решение нелинейного уравнения методом пристрелки

В данном разделе рассмотрим *метод пристрелки* (стрельбы) — численный метод решения краевой задачи (задачи с граничными условиями), заключающийся в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши для того же дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений).

В п. 1.2 было показано, что при наличии масштабной симметрии существует автомодельное решение нелинейной задачи теплопереноса. При этом уравнение теплопроводности (*в частных производных*) сводится к нелинейному *обыкновенному* дифференциальному уравнению второго порядка с граничными условиями, аналитическое решение которого может быть найдено при ограниченном количестве параметров. В общем случае (при произвольных значениях параметров) решение может быть найдено численно, например методом пристрелки.

Рассмотрим указанный метод на примере обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2f}{dx^2} = F(x, f, f')$$

с граничными условиями  $f(a) = f_a, f(b) = f_b.$ 

Метод пристрелки сводится к замене решения краевой задачи решением последовательности задач Коши. В начальной точке x = a, помимо строго заданного граничными условиями значения функции  $f_a$ , задается значение производной f'(a). После этого производится «выстрел»: при сформированных начальных условиях решается задача Коши до точки x = b. В этой точке происходит проверка, удалось ли при заложенной производной удовлетворить заданному граничному условию  $f(b) = f_b$ . Если не удалось, задается другое значение производной в точке x = a, снова решается задача Коши и т.д. При анализе характера получаемых решений и их зависимости от закладываемого значения производной в начальной точке находится решение, удовлетворяющее одновременно обоим заданным граничным условиям.

Замечание. Если исходное уравнение – линейное, то есть имеет вид

$$f'' = a_1(x)f' + a_2(x)f + a_3(x),$$

то для поиска истинного решения достаточно всего двух «прицелочных выстрелов». Действительно, пусть найденные два решения  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  дают  $f_1(b) = \beta_1, f_2(b) = \beta_2$ , тогда искомым решением является

$$f(x) = \frac{f_b - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} f_1(x) + \frac{\beta_1 - f_b}{\beta_1 - \beta_2} f_2(x).$$

Пакет аналитических вычислений Maple позволяет упростить общий подход к численной реализации метода пристрелки. С помощью функции dsolve можно построить процедуру, возвращающую значение в конечной точке решения задачи Коши исходного дифференциального уравнения в зависимости от значения производной в начальной точке. Если коэффициенты уравнения в рассматриваемой области не имеют особенностей, то результатом будет непрерывная функция значений в конечной точке в зависимости от значения производной в начальной точке (для наглядности можно построить график).

Таким образом, выбирая значение этой функции, соответствующее заданным граничным условиям в конечной точке, получим соответствующее значение производной в начальной точке, при котором решение задачи Коши будет соответствовать решению краевой задачи. То есть нет необходимости делать «пробные выстрелы» и последовательно возвращаться к решению задачи Коши, пока не будут достигнуты необходимые граничные условия в конечной точке (количество итерраций может быть достаточно большим для нелинейных уравнений). Задача Коши решается на начальном этапе для целого интервала значений производной в начальной точке и затем анализируется.

*Пример 2.1.* Найдем численное решение линейной задачи, рассмотренной в примере 1.2 (с. 17):

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0,\infty), \\ T(x,0) = 0, \\ T(0,t) = At, & t > 0. \end{cases}$$

Выше было показано, что существует автомодельное решение этой задачи

$$T(x,t) = tf(z), \quad z = x/(2\sqrt{t}),$$
 (59)

где функция f(z) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f'' + 2zf' - 4f = 0 \tag{60}$$

с граничными условиями  $f(0) = A, f(\infty) = 0$ . Найдем решение уравнения (60) методом пристрелки, который реализуем в пакете Maple.

> restart; with(plots):

Зададим значения границ интервала  $\left[a,b\right]$ и значение функции в точкеz=a.

> a:=0: b:=5: A:=1:

Несмотря на то что в задаче граничное условие справа соответствует  $z = \infty$ , функция f(z) достаточно быстро убывает до  $\sim 10^{-8}$  при z = 5 (в этом можно убедиться в ходе решения, меняя b в широких пределах). Далее напишем процедуру, возвращающую значение f(z = b) в зависимости от значения производной в точке z = a.

Построим график полученной функции F. Наша задача — определить значение параметра p, при котором f(b) = F(p) = 0 (область построения определяется экспериментально, ищем пересечение графика с осью абсцисс).

> plot(F,-3..-1);

Получим график, представленный на рисунке 14. Из графика видно, что искомый корень лежит в выбранном интервале  $p \in (-3, -1)$ , найдем его точное значение  $p_0$ .



Рис. 14. График зависимости значений искомой функции в конечной точке от значения производной в начальной точке

$$p0 := -2.256758238$$

Это и есть искомое значение производной в начальной точке, при котором решение задачи Коши совпадает с решением краевой задачи. Для того чтобы в этом убедиться, построим решение задачи Коши при  $f'(a) = p_0$  и сравним его с аналитическим решением  $f_{an}$ , полученным в примере 1.2, построив разность этих функций.

> dsol := dsolve({diff(f(z), z\$2)+2\*z\*diff(f(z), z)-4\*f(z)=0, f(a) = A ,D(f)(a)=p0},numeric, output=listprocedure); fz0 := eval(f(z),dsol); > f\_an:= A\*(1+2\*z^2)\*erfc(z)-2\*A/sqrt(Pi)\*z\*exp(-x^2));  $f_an := (2z^2 + 1) \operatorname{erfc}(z) - \frac{2ze^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}$ 



Рис. 15. График функции, являющейся решением уравнения (59)

Полученный график решения представлен на рисунке 15. Отклонение численного решения от аналитического в данном случае составляет  $\sim 10^{-7}$ , что соответствует точности алгоритма решения задачи Коши, используемого по умолчанию в функции dsolve.

Пример 2.2. Найдем численное решение нелинейного уравнения, к которому приводится автомодельная нелинейная тепловая задача (30) при  $\alpha = 2, \beta = 1,$ 

$$\left(f^{2}f'\right)' + zf' - \frac{2}{3}f = 0 \tag{61}$$

методом пристрелки. Выберем граничные условия аналогично предыдущему примеру в виде  $f(0) = 1, f(\infty) = 0.$ 

Напомним, что решения нелинейных уравнений, представленные в примерах 1.4 (с. 28) и 1.5 (с. 29), представляют собой функции, которые становятся равными нулю при некоторых  $z = z_0$ , причем в этих точках решение является негладкой функцией (см. рисунок 3). Такая особенность решения связана с наличием коэффициента  $f^{\alpha}$  при старшей производной (см. с. 28). Поэтому в отличие от предыдущего примера в данном случае мы не можем напрямую решать задачу Коши для уравнения (61), заменив граничное условие на правом конце «пристрелочным» начальным условием для производной в левой точке.

Чтобы обойти указанную особенность, введем параметрsи функцию U(s):

$$U = f^2 \frac{df}{dz}, \quad \frac{d}{ds} = f^2 \frac{d}{dz}.$$

Подставляя замены в уравнение (61), получим систему трех уравне-

ний первого порядка для функций z(s), f(s), U(s):

$$\frac{dU}{ds} = -zU + \frac{2}{3}f^3, \quad \frac{dz}{ds} = f^2, \quad \frac{df}{ds} = U$$
(62)

с начальными условиями s = 0, z = 0, f = 1, U = p, где p — параметр пристрелки, то есть некоторое пока неизвестное значение, при котором  $f(\infty) \to 0$ .

Если пристрелочный параметр будет найден правильно (обозначим это значение  $p_0$ ), то при  $s \to \infty$  получим  $z \to z_0$ . При всех других значениях  $p \neq p_0$  функция z(s) будет неограниченно расти, что противоречит условию  $f(z_0 + \varepsilon) = 0$  ( $\varepsilon$  — малая величина).

Продемонстрируем данное утверждение, построив с помощью Maple функцию z(s) при различных значениях пристрелочного параметра p.

> restart; with(plots):

Зададим значения  $\alpha, \beta$ , границ интервала [a, b] и значение функции f(a) = A.

> a:=0: b:=10: A:=1: alpha:=2: beta:=1:

Далее запишем процедуру, с помощью которой при различных p построим z(s) (см. рисунок 16).

```
> Zp:=proc(p)
global alpha,beta,b,A;
local syst, eq, zs;
syst:=([diff(U(s),s)=-z(s)*U(s)+
2*beta/(1+alpha*beta)* f(s)^(alpha+1),
diff(z(s),s)=f(s)^(alpha), diff(f(s),s)=U(s),
f(0) = A, z(0)=0,U(0)=p]);
eq:= dsolve(syst, [z(s), f(s), U(s)],
type=numeric,output=listprocedure,method=rkf45);
zs:=eval(z(s),eq);
return plot(zs,0..5);
end proc;
> display(Zp(-1), Zp(-0.75), Zp(-0.5));
```

Из рисунка 16 видно, что при значении p = -0.75 функция z(s) растет значительно медленнее, чем при других значениях p, и, возможно, асимптотически стремится к какому-то конечному  $z_0$ . Для того чтобы более точно определить необходимое значение  $p_0$ , выберем достаточно большое значение  $s = s_0$  и найдем, при каком p функция  $z(s_0)$  имеет минимальное значение. Таким способом мы можем определить  $p_0$  численно лишь с заданной точностью, которая увеличивается с увеличением  $s_0$ .

Построим функцию, которая будет возвращать значение z(p) при фиксированном значении  $s_0$ , и построим соответствующий график (рисунок 17)<sup>2</sup>.

> F:=proc(p)
global alpha,beta, b, A;
local syst, eq, s, z, f, U, s0:=100;
syst:=([diff(U(s),s)=-z(s)\*U(s)+
2\*beta/(1+alpha\*beta)\* f(s)^(alpha+1),
diff(z(s),s)=f(s)^(alpha), diff(f(s),s)=U(s),
f(0)=A, z(0)=0, U(0)=p]);
eq:= dsolve(syst, [z(s), f(s), U(s)],
type=numeric,output=listprocedure,method=rkf45);
return eval(z(s),eq);
end proc;
> plot(F,-0.765..-0.755);

, proc(r, o., oo., o., oo,, )

Локальному минимуму функции на рисунке 17 соответствует <sup>3</sup>

$$p_0 = -0.7595.$$

При данном значени<br/>и $z(s_0) \to z_0 = 0.6878.$ Построим решение системы (62) и исходной задачи (61) при полученном <br/>  $p_0$  (см. рисунки 18, 19).

> syst:=([diff(U(s),s)=-z(s)\*U(s)+

 $<sup>^{2}</sup>$ В данном случае выбрано  $s_{0} = 100$ . Читателю предлагается самостоятельно изучить, как изменяется решение исходной задачи при уменьшении или увеличении данного значения.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Более точно это значение можно определить с помощью отдельной процедуры для определения минимума функции, которую читатель может написать самостоятельно.





Рис. 16. График зависимости функции z(s) при различных значениях пристрелочного параметра p

Рис. 17. График зависимости функции z(p) при  $s_0 = 100$ 





Рис. 18. Графики зависимости функций z(s), f(s) <br/>иU(s) при p=-0.7595



Рис. 19. График зависимости функции f(z) — решение нелинейного уравнения (61)

#### Задачи

Найти автомодельное решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dot{T} = (T^{\alpha}T')', x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = q_0 t^{\beta}, t > 0, \end{cases}$$

методом пристрелки и построить график зависимости решения T(x,t) от координаты в различные моменты времени, если

2.1.	$\alpha = 2,$	$\beta = 2;$	2.4. $\alpha = 1$ ,	$\beta = 4;$
2.2.	$\alpha = 2,$	$\beta = 3;$	2.5. $\alpha = 2$ ,	$\beta = 4.$
2.3.	$\alpha = 3,$	$\beta = 1;$	2.6. $\alpha = 3$ ,	$\beta = 2.$

2.7. Показать, что уравнение (33) после параметризации (34) допускает класс решений  $f(s) = e^{-as}$ , где a — некоторая константа, зависящая от  $\alpha$ . Построить графики решения f(z) при  $\alpha = 1, 2$  и  $\beta = 1, 2$ .

### 2.2. Решение линейного уравнения с граничными условиями III рода

В данном разделе рассмотрим решение линейного уравнения теплопроводности в ограниченной области в случае, когда через концы стержня (границы области) происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

Физический закон теплообмена со средой (закон Ньютона) состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Тогда, например, для левой границы (при x = 0) будет справедливо соотношение

$$T'(0,t) = h_0(T(0,t) - T_0),$$

где  $h_0$  — коэффициент теплообмена между телом и окружающей средой,  $T_0$  — температура окружающей среды. Коэффициенты теплообмена с окружающей средой на левом и правом концах в общем случае могут быть не равны.

Для линейного однородного уравнения с помощью замены  $U(x,t) = T(x,t) - T_0$  граничное условие приведется к однородному виду

$$U'(0,t) - h_0 U(0,t) = 0,$$

поэтому далее будем считать, что температура окружающей среды равна нулю.

Итак, найдем решение одномерного линейного уравнения теплопроводности с граничными условиями III рода.

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + Q(x,t), x \in [0,1], \\ T(x,0) = T_0(x), \\ T'(0,t) - h_0 T(0,t) = 0, \\ T'(1,t) + h_1 T(1,t) = 0, t > 0, \end{cases}$$

где  $h_0, h_1$  — постоянные коэффициенты теплообмена с окружающей средой через границы области.

Будем искать решение T(x,t) в виде разложения в ряд по базису, который представляет собой набор собственных функций эрмитового оператора  $\partial^2/\partial x^2$  (см. п. 3.1 [1]). Так как область ограничена, соответствующий набор собственных функций (базис) и собственных значений  $\lambda_k$  дискретный.

Таким образом, решение T(x,t) представляет собой сумму по  $k = 0 \dots \infty$ , где  $k \in \mathbb{Z}$  нумерует собственные функции  $\{e_k(x)\}$  оператора  $\partial^2/\partial x^2$ :

$$T(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) e_k(x),$$
(63)

где  $T_k(t)$  — коэффициенты разложения, которые в общем виде могут быть определены как решение неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения (подробный вывод см. в [2]):

$$\dot{T}_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) - q_k(t) = 0,$$
(64)

где  $q_k(t)$  — коэффициенты разложения функции источника Q(x,t) по базисным функциям:

$$q_k(t) = \langle e_k(x) | Q(x,t) \rangle = \int_0^1 e_k^*(x) Q(x,t) \, dx.$$
 (65)

Функции  $\{e_k(x)\}$  могут быть найдены как решение уравнения на собственные функции и собственные значения оператора  $\partial^2/\partial x^2$  с заданными граничными условиями:

$$e_k'' = -\lambda_k^2 e_k, \quad x \in [0, 1],$$
  

$$e_k'(0) - h_0 e_k(0) = 0, \quad e_k'(1) + h_1 e_k(1) = 0.$$
(66)

Общее решение уравнения (66) имеет вид

$$e_k(x) = A_k \sin(\lambda_k x) + B_k \cos(\lambda_k x).$$

Из первого условия на функцию  $e_k(x)$  при x = 0 выражаем одну из констант:

$$A_k\lambda_k - h_0B = 0 \Rightarrow B_k = A_k\lambda_k/h_0.$$

Подставляя найденное выражение во второе граничное условие, получим соотношение для определения собственных значений  $\lambda_k$ :

$$f(\lambda_k) = (h_0 h_1 - \lambda_k^2) \sin(\lambda_k) + \lambda_k (h_0 + h_1) \cos(\lambda_k) = 0.$$
 (67)

Это трансцендентное уравнение, которое имеет бесконечное число корней. Корни можно определить как нули функции  $f(\lambda_k)$  (см. рисунок 20), которые можно определить численно, например методом половинного деления или методом Ньютона. Или можно воспользоваться встроенной функцией fsolve в программе аналитических вычислений Maple.



Рис. 20. График функции  $f(\lambda_k)$  (67), построенный при  $h_0 = 0.1$ ,  $h_1 = 1$ . Точки пересечения с осью абсцисс соответствуют собственным значениям  $\lambda_k$  (66)

ЗАМЕЧАНИЕ. Разложение (63) имеет бесконечное количество слагаемых, но коэффициенты разложения  $T_k(t) \sim e^{-\lambda_k^2 t}$ , причем  $\lambda_k \to \infty$  при  $k \to \infty$ . Поэтому для качественной оценки и понимания процесса при численном исследовании, как правило, достаточно учитывать N < 100 слагаемых.

Найдем N = 20 корней уравнения (67), определяя интервал поиска корня как отрезок  $[x, x + \delta]$ , на концах которого функция имеет противоположные знаки.

> restart; with(plots):

- > h0:=.1: h1:=1: N:=20: i:=0; delta:=.1;
- > f:=(lambda) >(h0\*h1-lambda<sup>2</sup>)\*sin(lambda)+
  lambda\*(h0+h1)\*cos(lambda):
  for x from 0 by delta while i<N do
  if (f(x)\*f(x+delta)<0) then
  Lambda[i]:=fsolve(f(t),t=x..x+delta):</pre>

Каждому корню  $\lambda_k$  = Lambda[k] соответствует собственная функция

$$e_k(x) = A_k \left( \sin(\lambda_k x) + \lambda_k \cos(\lambda_k x) / h_0 \right).$$
(68)

Для определения константы  $A_k$  воспользуемся условием нормированности базисных функций  $\langle e_n(x)|e_k(x)\rangle = \int_0^1 e_n^*(x)e_k(x)dx = \delta_{nk}$ .

> A[i]:= sqrt(1/int((sin(Lambda[i]\*x)+ Lambda[i]/h0\*cos(Lambda[i]\*x))<sup>2</sup>,x=0..1)): i:=i+1; end if; end do;

Далее, зная собственные значения  $\lambda_k$ , нормировочные константы и, следовательно, N первых собственных функций, можно найти коэффициенты разложения источника  $q_k(x)$ . Решая уравнение (64), можно найти коэффициенты  $T_k(t)$  и построить приближенно решение исходной задачи (63).

Пример 2.3. В качестве примера построим решение уравнения теплопроводности для ограниченного стержня с периодическим по времени точечным источником и граничными условиями III рода на концах ( $h_0 = h_1$ ). Начальная температура T(x,0) = 0.

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q_0 \cos(\omega t)\delta(x - 1/2), x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = 0, \\ T'(0, t) - h_0 T(0, t) = 0, \\ T'(1, t) + h_0 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
(69)

Базисные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям, можно определить как решение (66) с помощью описанного выше алгоритма. На рисунке 21 приведены графики  $e_k(x)$  (68) для k = 0, 1, 2 и соответствующие (найденные численно) собственные значения  $\lambda_k$  и нормировочные константы  $A_k$ .



Рис. 21. Графики функции  $e_k(x)$ , построенные при  $h_0 = h_1 = 1$ 

Коэффициенты разложения функции источника Q(x,t) по базисным функциям (65) имеют вид

$$q_k(t) = D_k \cos(\omega t), \quad D_k = q_0 A_k \left( \sin(\lambda_k/2) + \lambda_k \cos(\lambda_k/2)/h_0 \right).$$

Учитывая однородные начальные условия, решение уравнения (64) можно представить в виде

$$T_k(t) = D_k \int_0^t e^{-\lambda_k^2(t-\tau)} \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Подставляя найденные собственные значения  $\lambda_k$  в функцию  $T_k(t)$  и базисные функции, с учетом нормировки, можно построить решение в виде суммы (63). На рисунке 22 представлены графики функции T(x, t),

удовлетворяющие уравнению (69) (для N = 20) в различные моменты времени.



Рис. 22. Графики функци<br/>иT(x,t),удовлетворяющие уравнению (69), построенные пр<br/>и $h_0=h_1=1,\,\omega=1$ дляN=20 первых слагаемых

### Задачи

Найти решения линейного уравнения теплопроводности и построить графики зависимости решения T(x,t) от координаты в различные моменты времени  $(h_0, h_1, T_0, q_0, \omega - \text{const}).$ 

2.8. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q_0 \cos(\omega t), x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \\ T'(0, t) = 0, \\ T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.9. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'', x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0 x(1 - x), \\ T'(0, t) - h_0 T(0, t) = 0, \\ T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.10. 
$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q_0 e^{-t}, x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = 0, \\ T(0, t) = T_0, \\ T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \dot{T} = T'', x \in [0, 1], \\ & T(x, 0) = T_0 \sin(\pi x), \\ & T'(0, t) - h_0 T(0, t) = q_0, \\ & T(1, t) = 0, t > 0. \end{aligned}$$

$$2.12. \begin{cases} & \dot{T} = T'', x \in [0, 1], \\ & T(x, 0) = T_0 \delta(x - 1/2), \\ & T'(0, t) - h_0 T(0, t) = q_0, \\ & T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} & \dot{T} = T'' + q_0 \sin(\pi x), x \in [-1, 1], \\ & T(x, 0) = T_0, \\ & T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} & \dot{T} = T'' + q_0 \sin(\pi x), x \in [-1, 1], \\ & T(x, 0) = T_0, \\ & T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} & \dot{T} = T'' + q_0 \sin(\pi x), x \in [-1, 1], \\ & T(x, 0) = T_0, \\ & T'(-1, t) = 0, \\ & T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} & \dot{T} = T'' + q_0 \sin(\pi x), x \in [-1, 1], \\ & T(x, 0) = T_0, \\ & T'(-1, t) = 0, \\ & T'(-1, t) - h_0 T(-1, t) = 0, \\ & T'(1, t) = q_0, t > 0. \end{cases}$$

## 2.3. Решение уравнения теплопроводности в неоднородной области

В данном разделе рассмотрим решение одномерного линейного уравнения теплопроводности с разрывной правой частью

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q(x, t), x \in [a, b], \\ T(x, 0) = T_0(x), \\ \hat{L}_a T(a, t) = 0, \quad \hat{L}_b T(b, t) = 0, \end{cases}$$
(70)

где  $\hat{L}_a, \hat{L}_b$  — операторы граничных условий,  $\alpha(x)$  — коэффициент температуропроводности среды, в которой распространяется тепло, является кусочно-постоянной функцией:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 = \text{const}, x \in [a, c], \\ \alpha_2 = \text{const}, x \in [c, b]. \end{cases}$$

Физически эта задача соответствует тому, что тепло распространяется в двух разных однородных средах, соприкасающихся при x = b.

Граничные условия в данном случае записаны в самом общем виде, и, в зависимости от условий задачи, оператор  $\hat{L}$  определяет граничные условия первого ( $\hat{L} = 1$ ), второго ( $\hat{L} = \partial/\partial x$ ) или третьего рода ( $\hat{L} = \partial/\partial x \pm h_0$ ,  $h_0$  – коэффициент теплообмена через границу между телом и окружающей средой). Будем считать граничные условия однородными (в случае неоднородных условий см. п. 6.1 [2]).

Особенность данной задачи заключается в построении базисных функций  $e_k(x)$ , по которым раскладывается решение:

$$T(x,t) = \sum_{k}^{N} T_{k}(t)e_{k}(x),$$
(71)

где  $T_k(t)$  — коэффициенты разложения.

В данном случае более удобно использовать в качестве базисных функций набор собственных функций оператора  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x} \right)$ , который (несложно показать) является эрмитовым при однородных граничных условиях I, II или III рода.

Собственные функции рассматриваемого оператора удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial e_k}{\partial x} \right) = -\lambda_k^2 e_k, \quad \hat{L}_a e_k(a) = 0, \quad \hat{L}_b e_k(b) = 0.$$
(72)

Представим функцию  $e_k(x)$  в виде кусочной функции:

$$e_k(x) = \begin{cases} e_{k1}, & x \in [a, c], \\ e_{k2}, & x \in [c, b]. \end{cases}$$
(73)

Тогда функци<br/>и $e_{k1}, e_{k2}$ будут удовлетворять уравнению (72), которое можно представить виде

$$e_{k1}'' = -\frac{\lambda_k^2}{\alpha_1} e_{k1}, \quad x \in [a, c], \qquad e_{k2}'' = -\frac{\lambda_k^2}{\alpha_2} e_{k2}, \quad x \in [c, b].$$
(74)

Общее решение (74) имеет вид

$$e_{k1}(x) = A_k \sin(\lambda_k x / \sqrt{\alpha_1}) + B_k \cos(\lambda_k x / \sqrt{\alpha_1}),$$
  

$$e_{k2}(x) = C_k \sin(\lambda_k x / \sqrt{\alpha_2}) + D_k \cos(\lambda_k x / \sqrt{\alpha_2}),$$
(75)

где  $A_k, B_k, C_k, D_k$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий

$$\hat{L}_a e_{k1}(a) = 0, \quad \hat{L}_b e_{k2}(b) = 0,$$

условий сшивания на границе (получаем как результат интегрирования уравнения (72) в окрестности x = b)

$$e_{k1}(b) = e_{k1}(b), \quad \alpha_1 e'_{k1}(b) = \alpha_2 e'_k(b)$$

и условия нормированности базисных функций

$$\langle e_n(x)|e_k(x)\rangle = \int_a^c e_{n1}^*(x)e_{k1}(x)dx + \int_c^b e_{n2}^*(x)e_{k2}(x)dx = \delta_{nk}.$$

При подстановке (73) в граничные условия и условия сшивания получим трансцендентное уравнение для определения  $\lambda_k$ , решение которого можно найти численно, например с помощью функции fsolve в программе аналитических вычислений Maple. Аналогичный пример подробно разобран на с. 67, поэтому здесь мы не будем приводить алгоритм определения собственных значений  $\lambda_k$  и константы интегрирования, определяемой из условия нормированности базисных функций.

После построения базиса, подставляя (71) в исходное уравнение, с учетом (72), и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{T}_k(t) + \lambda_k^2 T_k(t) - q_k(t) = 0,$$
(76)

где  $q_k(t)$  — коэффициенты разложения функции источника Q(x,t) по базисным функциям:

$$q_k(t) = \langle e_k(x) | q(x,t) \rangle = \int_a^b e_k^*(x) Q(x,t) \, dx.$$

Константа интегрирования, получаемая при решении (76), определяется подстановкой в начальные условия.

Пример 2.4. Найдем решение уравнения теплопроводности (73) для ограниченного стержня, составленного из двух однородных стержней длиной  $l_1 = ac, l_2 = cb$  с различными коэффициентами температуропроводности  $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$ , с граничными условиями I рода слева и III рода справа. Начальная температура во всей области одинакова и равна  $T_0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), x \in [a, b], \\ T(x, 0) = T_0, \\ T(0, t) = 0, \\ T'(1, t) + h_1 T(1, t) = 0, t > 0, h_1 - \text{const.} \end{cases}$$
(77)

Будем искать решение в виде разложения (71) по функциям (73), удовлетворяющим уравнениям (74), граничным условиям и условиям сшивания на границе раздела сред:

$$e_{k1}(a) = 0, \quad e'_{k2}(b) + h_1 e_{k2}(b) = 0,$$
  
 $e_{k1}(c) = e_{k1}(c), \quad \alpha_1 e'_{k1}(c) = \alpha_2 e'_k(c).$ 

Подставляя общее решение в виде (75) в граничные условия, получим

$$e_{k1}(x) = A_k \sin \frac{\lambda_k(x-a)}{\sqrt{\alpha_1}},$$

$$e_{k2}(x) = C_k \left(\sqrt{\alpha_2}h_1 \sin \frac{\lambda_k(x-b)}{\sqrt{\alpha_2}} - \lambda_k \cos \frac{\lambda_k(x-b)}{\sqrt{\alpha_2}}\right).$$
(78)

Подставляя (78) в условия сшивания, получим связь констант:

$$A_k = C_k \left( \sqrt{\alpha_2} h_1 \sin \frac{\lambda_k (c-b)}{\sqrt{\alpha_2}} - \lambda_k \cos \frac{\lambda_k (c-b)}{\sqrt{\alpha_2}} \right) / \sin \frac{\lambda_k (c-a)}{\sqrt{\alpha_1}}$$
и уравнение для определения  $\lambda_k$ :

$$f(\lambda_k) = h_1 \alpha_2 \left[ \sqrt{\alpha_1} \cos \frac{\lambda_k (a-c)}{\sqrt{\alpha_1}} \sin \frac{\lambda_k (b-c)}{\sqrt{\alpha_2}} - \sqrt{\alpha_2} \cos \frac{\lambda_k (b-c)}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\lambda_k (a-c)}{\sqrt{\alpha_1}} \right] + \lambda_k \sqrt{\alpha_2} \left[ \sqrt{\alpha_1} \cos \frac{\lambda_k (a-c)}{\sqrt{\alpha_1}} \cos \frac{\lambda_k (b-c)}{\sqrt{\alpha_2}} + \sqrt{\alpha_2} \sin \frac{\lambda_k (b-c)}{\sqrt{\alpha_2}} \sin \frac{\lambda_k (b-c)}{\sqrt{\alpha_1}} \right] = 0.$$

Это трансцендентное уравнение, решение которого можно найти численно, например с помощью функции fsolve. Мы не будем приводить здесь алгоритм (см. с. 67), приведем лишь график функции  $f(\lambda_k)$ , несколько первых корней  $\lambda_k$  и констант  $C_k$  (см. рисунок 23, а), а также графики соответствующих базисных функций (см. рисунок 23, б).



Рис. 23. (а) График функции  $f(\lambda_k)$ , нули которой определяют собственные значения  $\lambda_k$ ; (б) графики базисных функций  $e_k(x), k = 0, 1, 2$ , построенные при  $a = 0, c = 0.5, b = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.1$  и  $h_1 = 1$ 

На рисунке 23, б при x = c на каждом графике  $e_k(x)$  виден излом, связанный со сменой коэффициента температуропроводности, при этом функция является непрерывной.

Учитывая неоднородные начальные условия и однородный источник, решение уравнения (76) можно представить в виде

$$T_k(t) = C_{0k} e^{-\lambda_k^2 t}, \quad C_{0k} = \langle e_k(x) | T(x,0) \rangle.$$

Подставляя найденные (численно) собственные значения в выражение для  $T_k(t)$  и базисные функции, с учетом нормировки, можно построить решение в виде суммы (71). На рисунке 24 представлены графики функции T(x,t) (для N = 20) в различные моменты времени.



Рис. 24. Графики функции T(x,t), удовлетворяющие уравнению (77), построенные при при  $a = 0, c = 0.5, b = 2, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.1$  и  $h_1 = 1$  для N = 20 первых слагаемых. Начальное распределение температуры обозначено пунктирной линией

#### Задачи

Найти решение уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + Q(x, t), x \in [a, b], \\ \alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 = \text{const}, x \in [a, c], \\ \alpha_2 = \text{const}, x \in [c, b], \end{cases} \end{cases}$$

и построить графики зависимости решения T(x,t) от координаты в различные моменты времени при представленных ниже начальных, граничных условиях  $(a, b, c, h_0, h_1, T_0, q_0, \omega - \text{const})$ .

2.16. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = q_0, & T(x,0) = T_0(x-a)(b-x), \\ T(a,t) = 0, & T(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.17. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = q_0, & T(x,0) = T_0(x-a), \\ T(a,t) = 0, & T'(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

2.18. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = 0, \quad T(x,0) = T_0(x-a)(b-x), \\ T'(a,t) = 0, \quad T'(b,t) + h_1T(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.19. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = q_0 \cos(\omega t), \quad T(x,0) = T_0, \\ T'(a,t) - h_0T(a,t) = 0, \quad T(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.20. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = q_0\delta(x - (c-a)/2), \quad T(x,0) = T_0, \\ T'(a,t) = 0, \quad T'(b,t) + h_1T(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$
  
2.21. 
$$\begin{cases} Q(x,t) = 0, \quad T(x,0) = \begin{cases} T_0, x \in [a,c], \\ T_0/2, x \in [c,b], \\ T'(a,t) - h_0T(a,t) = 0, \quad T'(b,t) = 0, t > 0. \end{cases}$$

# 3. Решение уравнения теплопроводности в двумерной и трехмерной областях

В данном разделе рассмотрим решение линейного уравнения теплопроводности (2) в случае нескольких пространственных переменных с неоднородными начальными условиями (в безразмерном виде):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + q(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r})$$
(79)

и граничными условиями I, II или III рода.

Будем искать решение методом разложения по базису в виде

$$T(\vec{r},t) = \sum_{n} T_n(t)e_n(\vec{r}), \qquad (80)$$

где  $T_n(t)$  – коэффициенты разложения по базисным функциям  $\{e_n(\vec{r})\}$ .

В качестве базиса могут быть выбраны собственные функции какоголибо эрмитового оператора. В предыдущих разделах было показано, что в качестве такого оператора удобнее выбрать оператор, стоящий в правой части (79), — оператор Лапласа  $\Delta$ , который является эрмитовым при *однородных* граничных условиях I, II или III рода<sup>4</sup>.

Собственные функции оператора Лапласа  $e(\vec{r})$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta e_n(\vec{r}) = -\lambda_n^2 e_n(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega,$$
(81)

где оператор Лапласа может быть записан в декартовых или криволинейных координатах в зависимости от геометрии рассматриваемой области  $\Omega$ . Если пространственных переменных несколько, уравнение (81) представляет собой уравнение в частных производных, которое, как правило, допускает разделение переменных (подробнее о методе см. с. 67 [2]).

После построения базиса, подставляя (81) в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{T}_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - q_n(t) = 0,$$
(82)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>См. с. 70, в случае неоднородных условий см. п. 6.1 [2].

где  $q_n(t)$  — коэффициенты разложения функции источника  $q(\vec{r}, t)$  по базисным функциям:

$$q_n(t) = \langle e_n(\vec{r}) | q(\vec{r}, t) \rangle = \int_{\Omega} e_n^*(\vec{r}) q(\vec{r}, t) \, d\Omega.$$

Интегрируя (82), получим

$$T_n(t) = C_{0n} e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t q_n(\tau) e^{-\lambda_n^2 (t-\tau) d\tau},$$

где  $C_{0n}$  — константа интегрирования, которая определяется из начальных условий:

$$C_{0n} = \langle e_n(\vec{r}) | T_0(\vec{r}) \rangle$$

Таким образом, аналогично решению одномерной задачи, для построения решения исходного уравнения теплопроводности необходимо построить базис как набор собственных функций оператора Лапласа, удовлетворяющих уравнению (81), и найти коэффициенты разложения по этому базису как решение уравнения (82).

Согласно принципу суперпозиции [2], если условия задачи содержат несколько неоднородностей (имеются источник, неоднородные граничные и/или начальные условия), можно разделить исходную задачу на несколько подзадач, каждая из которых содержит только одну из неоднородностей.

Поэтому далее будет рассмотрено отдельно два типа задач. Первый тип — с неоднородными начальными условиями и однородными граничными условиями. В этом случае основная часть решения — это построение базиса как набора собственных функций оператора Лапласа.

Второй тип — с неоднородными граничными условиями. В этом случае значение имеет стационарное решение, наблюдаемое через большой промежуток времени, когда влияние начальных условий становится незначительным. Поэтому при поиске стационарного решения можно считать начальные условия нулевыми.

#### 3.1. Решение уравнения теплопроводности для круглой пластинки

#### 3.1.1. Однородные граничные условия

Рассмотрим однородную круглую пластинку, начальное распределение температуры в которой зависит от расстояния от центра  $\rho$  и полярного угла  $\varphi$ . Вдоль края пластинки установлен холодильник с нулевой температурой, то есть выполняются однородные граничные условия I рода.

Изменение температуры со временем  $T(\rho, \varphi, t)$  будет удовлетворять однородному уравнению теплопроводности:

$$\begin{cases} \dot{T}(\rho,\varphi,t) = \Delta T(\rho,\varphi,t), & \rho \in [0,R], \varphi \in [0,2\pi], \\ T(\rho,\varphi,0) = T_0(\rho,\varphi), \\ T(R,\varphi,t) = 0. \end{cases}$$
(83)

Поскольку задача является плоской и в системе есть аксиальная симметрия, будем искать решение методом разложения по собственным функциям  $e(\rho, \varphi)$  оператора Лапласа в полярной системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$
(84)

Уравнение (81) на собственные функции и собственные значения оператора (84) имеет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}e(\rho,\varphi)\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}e(\rho,\varphi) = -\lambda^2 e(\rho,\varphi). \tag{85}$$

Данное уравнение допускает разделение переменных [2], поэтому будем искать решение (85) в виде

$$e(\rho,\varphi) = F(\rho)\psi(\varphi). \tag{86}$$

Подставляя (86) в уравнение (85), получим

$$\frac{\rho}{F(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}F(\rho)\right) + \lambda^2\rho^2 = -\frac{1}{\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = \nu^2, \qquad (87)$$

где  $\nu$  — константа, которая может быть определена при решении второго уравнения (87) для функции  $\psi(\varphi)$ :

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = -\nu^2\psi(\varphi).$$

Функция  $\psi(\varphi)$  должна быть периодична с периодом  $2\pi$ , поэтому с учетом нормировки получим

$$\psi(\varphi) = \psi_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad \nu^2 = n^2, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда первое уравнение (87) запишется в виде

$$\frac{d^2}{d\rho^2}F_n(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F_n(\rho) + \left(\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)F_n(\rho) = 0$$

и после замены переменной  $x = \rho \lambda$  сведется к уравнению Бесселя (см. приложение Б):

$$F_n''(x) + \frac{1}{x}F_n'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)F_n(x) = 0.$$

Решение можно записать в виде

$$F_n(x) = C_{1n}J_n(x) + C_{2n}Y_n(x),$$

где  $J_n(x)$  — функции Бесселя I рода, регулярные в x = 0 (рисунок 25, а),  $Y_n(x)$  — функции Бесслеля II рода, обращаются в точке x = 0 в бесконечность (рисунок 25, б).

Поскольку собственные функции должны быть регулярны при  $x \to 0$ , положим  $C_{2n} = 0$ . Таким образом,

$$F_n(x) = C_n J_n(x).$$

Кроме того, должны выполняться граничные условия  $F_n(\lambda R)=0,$  то есть  $J_n(\lambda R)=0.$ 

Обозначим  $X_n^{(m)}$  точки, в которых функции  $J_n(x)$  обращаются в нуль (n, m = 0, 1, 2...). Тогда собственные значения  $\lambda_n^{(m)}$  и собственные функции  $e_{mn}(\rho, \varphi)$  запишутся в виде

$$\lambda_n^{(m)} = \frac{X_n^{(m)}}{R}, \quad e_{nm}(\rho, \varphi) = C_{nm} e^{in\varphi} J_n\left(\lambda_n^{(m)}\rho\right). \tag{88}$$



Рис. 25. Функции Бесселя  $J_n(x)$  и  $Y_n(x)$ 

Нормировочные константы Стп могут быть найдены из условия

$$< e_{mn}|e_{mn}> = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, e_{nm}^* e_{nm} \, d\rho d\varphi = 1.$$

На рисунке 26 представлены графики собственных функций (88) и приведено несколько первых собственных значений и нормировочных констант при n = 0 и n = 1 для  $\varphi = 1, R = 1$ .

Решение (80) однородного уравнения теплопроводности с неоднородными начальными условиями запишется в виде

$$T(\rho,\varphi,t) = \sum_{nm} T_{nm}(t) C_{nm} e^{in\varphi} J_n\left(\lambda_n^{(m)}\rho\right),$$

где  $T_{nm}(t)$  — решение уравнения (82) (при  $q_n = 0$ ):

$$T_{nm}(t) = A_{nm} e^{-(\lambda_n^{(m)})^2 t}, \quad A_{nm} = < T_0(\rho, \varphi) |e_{nm}(\rho, \varphi) > .$$

*Пример 3.1.* Найдем решение уравнения теплопроводности (83) для начального распределения температуры

$$T(\rho,\varphi,0) = T_0\left(1 - \frac{\rho}{R}\right), T_0 = \text{const.}$$
(89)



Рис. 26. Собственные функции оператора Лапласа в полярных координатах  $e_{0m}(\rho, 1), e_{1m}(\rho, 1)$ , соответствующие собственные значения и нормировочные константы при m = 0, 1, 2

Так как начальное распределение температуры не зависит от  $\varphi$ , ненулевыми будут только коэффициенты разложения, соответствующие n = 0:

$$T(\rho,\varphi,t) = \sum_{m} T_m(t)C_{0m}J_0\left(\lambda_0^{(m)}\rho\right),$$
$$T_m(t) = e^{-\left(\lambda_0^{(m)}t\right)^2} \int_0^R T(\rho,\varphi,0)C_{0m}J_0\left(\lambda_0^{(m)}\rho\right)\rho\,d\rho.$$

Соответствующие графики зависимости температуры от координаты  $\rho$  в различные моменты времени, полученные для  $R = 1, T_0 = 1$ , представлены на рисунке 27, а.

Для сравнения на рисунке 27, б представлено решение, полученное при тех же начальных условиях, но при однородных граничных условиях II рода. Из рисунка видно, что со временем решение стремится к стационарному: равному нулю при граничных условиях I рода и ненулевой константе при граничных условиях II рода.

#### 3.1.2. Стационарное решение

Рассмотрим однородную круглую пластинку, вдоль края которой установлен нагреватель с температурой  $T_1 \cos \varphi$ , то есть выполняются



Рис. 27. Зависимость  $T(\rho)$  в различные моменты времени, полученная при решении (83) с начальными условиями (89) и граничными условиями I (а) и II (б) рода,  $R = 1, T_0 = 1$ . Решение получено при  $m = 0 \dots 10$ 

неоднородные граничные условия I рода. Найдем стационарное распределение температуры ( $\dot{T} = 0$ ).

Стационарное решение (83) не зависит от времени и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta T(\rho,\varphi) = 0, \quad \rho \in [0,R], \quad \varphi \in [0,2\pi], \\ T(R,\varphi) = T_1 \cos \varphi. \end{cases}$$
(90)

Решение уравнения (90) может быть найдено методом разделения переменных. Представим функцию  $T(\rho, \varphi)$  в виде

$$T(\rho,\varphi) = F(\rho)\psi(\varphi). \tag{91}$$

Подставляя (91) в уравнение (90), получим уравнение (87) при  $\lambda = 0$ :

$$\frac{\rho}{F(\rho)}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}F(\rho)\right) = -\frac{1}{\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = \nu^2,\tag{92}$$

где  $\nu$  — константа (действительная), которая будет определена далее при решении второго уравнения (92) для функции  $\psi(\varphi)$ .

Найдем решение первого уравнения (92):

$$\frac{d^2}{d\rho^2}F_n(\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}F_n(\rho) - \frac{\nu^2}{\rho^2}F_n(\rho) = 0.$$
(93)

Уравнение (93) является уравнением Эйлера, решение которого необходимо искать в виде

$$F(\rho) = C\rho^{\alpha}.$$

Подставляя в (93), получим  $\alpha = \pm \nu$ . И, так как решение должно быть регулярно при  $\rho = 0$ ,

$$F_{\nu}(\rho) = C_{\nu}\rho^{\nu},$$

где  $C_{\nu}$  — константа, которая может быть найдена из заданных граничных условий.

Второе уравнение (92) имеет вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi_\nu(\varphi) = -\nu^2\psi_\nu(\varphi).$$

Функция  $\psi_{\nu}(\varphi)$  должна быть периодична с периодом  $2\pi$ , поэтому получим

$$\psi_{\nu}(\varphi) = \psi_n(\varphi) = A_n e^{in\varphi}, \quad \nu^2 = n^2, \quad n = 0, 1, \dots,$$
 (94)

где  $A_n$  — константа, определяемая из граничных условий.

Но так как в граничные условия входит функция  $\cos(\varphi)$ , удобнее представить функцию (94) в виде

$$\psi_n(\varphi) = B_n \cos(n\varphi), \quad n = 0, 1, \dots$$
 (95)

Таким образом, стационарное решение (91) запишется в виде

$$T(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{0n} \rho^n \cos(n\varphi), \quad T_{0n} = B_n C_n,$$
(96)

где  $T_{0n}$  — коэффициенты, определяемые из неоднородных граничных условий.

Для того чтобы их найти, подставим  $\rho = R$  в (96):

$$T(R,\varphi) = T_1 \cos \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} T_{0n} R^n \cos(n\varphi).$$

В силу ортогональности функций (95) очевидно, что ненулевым является только коэффициент  $T_{01} = T_1/R$ , откуда получаем

$$T(\rho,\varphi) = T_1 \frac{\rho}{R} \cos \varphi.$$

### Задачи

Найти изменение распределения температуры с течением времени в круглой пластинке радиусом R при заданных начальном распределении температуры  $T(\rho, \varphi, 0)$  и граничном условии  $T(R, \varphi, t)$  ( $T_0, T_1, q, Q, h = = \text{const}$ ).

$$\begin{aligned} 3.1. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0\delta(\rho), \\ T(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.2. &\begin{cases} T_0(\rho,\varphi,0) = T_0e^{\rho/R-1}, \\ T'(R,\varphi,t) = Q. \end{cases} \\ 3.3. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0\sin(\rho/R-1), \\ T'(R,\varphi,t) - hT(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.4. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0(\rho^2 - R^2), \\ T'(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.5. &\begin{cases} T_0(\rho,\varphi,0) = T_0e^{(\rho/R-1)\sin\varphi}, \\ T(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.6. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0\sin(\rho/R-1)\cos(\varphi/2), \\ T'(R,\varphi,t) - hT(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.7. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0(\rho^2\cos\varphi/R^2 - 1), \\ T'(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.8. &\begin{cases} T_0(\rho,\varphi,0) = T_0\sin(\rho/R-1)\cos(\varphi/2), \\ T'(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \\ 3.9. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0\sin(\rho/R-1)\cos(\varphi/2), \\ T(R,\varphi,t) = T_1. \end{cases} \\ 3.9. &\begin{cases} T(\rho,\varphi,0) = T_0\sin(\rho/R-1)\cos(\varphi/2), \\ T'(R,\varphi,t) = 0. \end{cases} \end{aligned} \end{aligned}$$

#### 3.2. Решение уравнения теплопроводности для цилиндра

#### 3.2.1. Однородные граничные условия

Найдем изменение распределения температуры в однородном цилиндре высотой H и радиусом основания R, начальное распределение температуры в котором  $T_0(r,\varphi,z)$ . Боковые поверхности и торцы поддерживаются при нулевой температуре.

Краевая задача для функции  $T(r,\varphi,z,t)$  запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{T} = \Delta T, \\ T(r,\varphi,z,0) = T_0(r,\varphi,z), \\ T(R,\varphi,z) = 0, \quad T(r,\varphi,0) = 0, \quad T(r,\varphi,H) = 0. \end{cases}$$
(97)

Будем искать решение (97) в виде (80), в качестве базиса будем использовать набор собственных функций оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение (81) на его собственные функции  $e(r,\varphi,z)$  и собственные значения  $\lambda$  имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}e(r,\varphi,z)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}e(r,\varphi,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}e(r,\varphi,z) = -\lambda^2 e(r,\varphi,z) \quad (98)$$

и допускает разделение переменных, то есть решение  $e(r,\varphi,z)$  может быть представлено в виде

$$e(r,\varphi,z) = F(r)\psi(\varphi)Z(z).$$
(99)

Действительно, подставляя (99) в (98), получим:

$$\frac{1}{rF(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}F(r)\right) + \frac{1}{r^2\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) + \lambda^2 = -\frac{1}{z}\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = \nu^2,$$
(100)

где  $\nu$  — константа, которая может быть определена при решении второго уравнения (100) для функции Z(z):

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = -\nu^2 Z(z).$$
(101)

Уравнение (101) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого, согласно (97), должно удовлетворять однородным граничным условиям

$$Z(0) = 0, \quad Z(H) = 0.$$

Получаем бесконечное число решений, зависящих от целочисленного n:

$$Z_n(z) = A_n \sin\left(\frac{\pi n}{H}z\right), \quad \nu_n = \frac{\pi n}{H}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для каждого *n* первое уравнение (100) можно представить в виде

$$\frac{r}{F_n(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}F_n(r)\right) + (\lambda_n^2 - \nu_n^2)r^2 = -\frac{1}{\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = \mu^2, \quad (102)$$

где  $\mu$  — некоторая константа, которая может быть определена из решения второго уравнения (102):

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = -\mu^2\psi(\varphi).$$
(103)

Функция  $\psi(\varphi)$  периодична с периодом  $2\pi$ , поэтому с учетом нормировки получим бесконечное число решений, зависящих от целочисленного m:

$$\psi(\varphi) = \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad \mu_m^2 = m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда первое уравнение (102) для каждого n, m запишется в виде

$$\frac{d^2}{dr^2}F_{nm}(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}F_{nm}(r) + \left(\lambda_{nm}^2 - \nu_n^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_{nm}(r) = 0.$$

Делая замену переменной  $x = \eta_n r$ , где  $\eta_n^2 = \lambda_{nm}^2 - \nu_n^2$ , получим уравнение Бесселя:

$$F_{nm}''(x) + \frac{1}{x}F_{nm}'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)F_{nm}(x) = 0$$

Учитывая, что решение должно быть регулярно при x = 0, получаем

$$F_{nm}(x) = C_{nm}J_m(\eta_n r), \qquad (104)$$

где  $J_m$  — функции Бесселя I рода (см. рисунок 25, а),  $C_{nm}$  — нормировочная константа, которая будет определена далее.

Кроме того, при r = R должно выполняться граничное условие I рода, которое после подстановки решения (99) с учетом (104) для каждого mзапишется в виде

$$J_m(\eta_{nm}R) = 0. \tag{105}$$

Обозначим как  $\eta_{nm}^{(k)}$  значения  $\eta_n$  (определяются численно), удовлетворяющие уравнению (105) с номером m, где k = 0, 1, ... – номер корня.

Тогда для каждого k получаем

$$F(r) = F_{nm}^{(k)}(r) = C_{nm}^{(k)} J_m\left(\eta_{nm}^{(k)}r\right).$$

Собственные значения  $\lambda_{nm}^{(k)}$  и собственные функции  $e_{nmk}(\rho,\varphi,z)$ за-пишутся в виде

$$\lambda_{nm}^{(k)} = \sqrt{(\eta_{nm}^{(k)})^2 + \nu_n^2}, e_{nmk}(r, \varphi, z) = \frac{B_{nm}^{(k)}}{2\pi} e^{im\varphi} J_m\left(\eta_{nm}^{(k)}r\right) \sin(\nu_n z),$$
(106)

где  $B_{nm}^k = C_{nm}^{(k)} A_n$  — нормировочная константа, которая может быть найдена из условия нормировки:

$$\langle e_{mnk}|e_{mnk}\rangle = \int_{0}^{H} \int_{0}^{R} r e_{mnk}^{*} e_{mnk} \, dr dz = 1.$$
 (107)

В качестве примера на рисунке 28 представлены графики собственных функций (106) и приведено несколько первых собственных значений и нормировочных констант при n = 1 и m = 0, 1 для  $\varphi = 0, R = 1$  и z = H/2.

Решение однородного уравнения теплопроводности с начальными условиями (97) запишется в виде

$$T(r,\varphi,t) = \sum_{nmk} T_{nm}^{(k)}(t) e_{nmk}(r,\varphi,z),$$

где  $T_{nm}(t)$  — решение уравнения (82):

$$T_{nm}^{(k)}(t) = A_{nm}^{(k)} e^{-(\lambda_{nm}^{(k)})^2 t}, \quad A_{nm}^{(k)} = \langle T_0(r,\varphi,z) | e_{nmk}(r,\varphi,z) \rangle.$$



Рис. 28. Собственные функции оператора Лапласа в цилиндрических координатах  $e_{10k}(r, 0, H/2), e_{11k}(r, 0, H/2)$ , соответствующие собственные значения и нормировочные константы при k = 0, 1, 2

*Пример 3.2.* Найдем решение (97) для начального распределения температуры

$$T(r,\varphi,0) = T_1 \frac{(R-r)z}{RH}.$$
(108)

Так как начальное распределение температуры не зависит от  $\varphi$ , ненулевыми будут только коэффициенты разложения, соответствующие m = 0 (см. рисунок 28 при m = 0). Решение исходной задачи имеет аксиальную симметрию и не зависит от  $\varphi$ :

$$T(r,t) = \sum_{nk} T_n^{(k)}(t) e_{nk}(r,z), \quad e_{nk}(r,z) = \frac{B_n^{(k)}}{2\pi} J_0\left(\eta_n^{(k)}r\right) \sin(\nu_n z),$$
$$T_n^{(k)}(t) = e^{-\left(\lambda_n^{(k)}\right)^2 t} \int_0^R \int_0^H T(r,\varphi,0) e_{nk}^*(r,z) r \, dr dz,$$

где коэффициенты  $B_n^{(k)}$  определяются из условия нормировки (107),  $\eta_n^{(k)}$  удовлетворяют уравнению (105) при  $m = 0, k = 0, 1, \ldots$  – номер корня.

Соответствующие графики зависимости температуры от координаты r и z в различные моменты времени, полученные для  $R = 1, H = 1, T_1 = 5$ , представлены на рисунке 29.



Рис. 29. Зависимость T(r, z) в различные моменты времени, полученная при решении (97) с начальными условиями (108) и граничными условиями I рода,  $R = 1, H = 1, T_1 = 5$ 

#### 3.2.2. Стационарное решение

Найдем стационарное распределение температуры в однородном цилиндре высотой H и радиусом основания R. Боковые поверхности и нижнее основание (z = 0) поддерживаются при нулевой температуре. Температура верхнего основания является функцией от r и  $\varphi$ .

Математическая постановка задачи для функции  $T(r, \varphi, z)$  имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \\ T(r,\varphi,z,0) = 0, \\ T(R,\varphi,z) = 0, \quad T(r,\varphi,0) = 0, \quad T(r,\varphi,H) = T_H(r,\varphi). \end{cases}$$
(109)

Аналогично предыдущим примерам будем искать решение (109) методом разделения переменных в виде

$$T(r,\varphi,z) = F(r)\psi(\varphi)Z(z).$$

Подставляя в исходное уравнение Лапласа, получим

$$\frac{1}{rF(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}F(r)\right) + \frac{1}{r^2\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = -\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = -\alpha^2,$$
(110)

где  $\alpha$  — константа (действительная), которая будет определена далее при решении второго уравнения (110) для функции Z(z).

Первое уравнение (110) можно представить в виде

$$\frac{r}{F(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}F(r)\right) + \alpha^2 r^2 = -\frac{1}{\psi(\varphi)}\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = \mu^2, \quad (111)$$

где  $\mu$  — некоторая константа, которая может быть определена из решения второго уравнения (111):

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\psi(\varphi) = -\mu^2\psi(\varphi).$$

Функция  $\psi(\varphi)$  периодична с периодом  $2\pi$ , поэтому с учетом нормировки получим бесконечное число решений, зависящих от целочисленного m:

$$\psi(\varphi) = \psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad \mu_m^2 = m^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда первое уравнение (102) для каждого *т* запишется в виде

$$\frac{d^2}{dr^2}F_m(r) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}F_m(r) + \left(\alpha_m^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)F_m(r) = 0.$$

Делая замену переменной  $x = \alpha_m r$ , получим уравнение Бесселя:

$$F_m''(x) + \frac{1}{x}F_m'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)F_m(x) = 0.$$

Учитывая, что решение должно быть регулярно при x = 0, получаем

$$F_m(x) = C_m J_m(\alpha_m r), \tag{112}$$

где  $J_m-$ функции Бесселя I рода (см. рисунок 25, <br/>а),  $C_m-$ нормировочная константа.

По условию задачи при r = R должно выполняется граничное условие I рода, которое с учетом (112) для каждого m запишется в виде

$$J_m(\alpha_m R) = 0. \tag{113}$$

Обозначим как  $\alpha_{mk}$  значения  $\alpha_m$  (определяются численно), удовлетворяющие уравнению (113) с номером m, где  $k = 0, 1, \ldots$  – номер корня.

Тогда для каждого k получаем

$$F(r) = F_{mk}(r) = C_{mk}J_m\left(\alpha_{mk}r\right).$$

Второе уравнение (110) для каждого m, k,

$$\frac{d^2}{dz^2}Z_{mk}(z) - \alpha_{mk}^2 Z_{mk}(z) = 0,$$

представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого, согласно (97), должно удовлетворять граничным условиям вида Z(0) = 0:

$$Z_{mk}(z) = B_{mk} \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_{mk}}{H}z\right),$$

где  $B_{mk}$  — произвольные постоянные.

Решение исходной задачи представляется рядом

$$T(r,\varphi,z) = \sum_{mk} \frac{A_{mk}}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} J_m\left(\alpha_{mk}r\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_{mk}}{H}z\right).$$
(114)

где  $A_{nk} = B_{mk}C_{mk}$  — константы, которые могут быть найдены из граничного условия при z = H:

$$T(r,\varphi,H) = T_H(r,\varphi) = \sum_{mk} \frac{A_{mk}}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} J_m(\alpha_{mk}r) \operatorname{sh}(\alpha_{mk}).$$

Умножая обе части полученного равенства на  $re^{im\varphi}J_m(\alpha_{mk}r)/\sqrt{2\pi}$ и интегрируя результат по  $r \in [0, R]$  и  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , в силу ортогональности данных функций получим коэффициенты  $A_{mk}$ .

*Пример 3.3.* В качестве примера рассмотрим самый простой вид неоднородности на верхнем торце цилиндра:  $T_H(r, \varphi) = T_0 = \text{const.}$ 

Так как граничные и начальные (нулевые) условия не зависят от угла  $\varphi$ , решение задачи также будет иметь аксиальную симметрию, то есть в решении (114) ненулевыми будут константы  $A_{mk}$  при m = 0:

$$T(r,\varphi,z) = \sum_{k} \frac{A_{0k}}{\sqrt{2\pi}} J_0\left(\alpha_k r\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k}{H} z\right),\tag{115}$$

где  $\alpha_k$  определяется из решения уравнения  $J_0(\alpha_k R) = 0$ . На рисунке 30, а представлен график функции  $J_0(\alpha_k R)$  при R = 1 и приведены несколько первых значений  $\alpha_k$ .

Подставляя граничные условия на верхнем торце в (115), получим

$$T(r,\varphi,H) = T_0 = \sum_k \frac{A_{0k}}{\sqrt{2\pi}} J_0(\alpha_k r) \operatorname{sh}(\alpha_k).$$
(116)

Умножая обе части полученного равенства на  $rJ_0(\alpha_k r) / \sqrt{2\pi}$  и интегрируя результат по  $r \in [0, R]$ , в силу ортогональности данных функций получим коэффициенты  $A_{0k}$ , первые три значения приведены на рисунке 30, а.

На рисунках 30, б, в представлены графики зависимости стационарного распределения температуры в разных сечениях, построенные при  $T_0 = 2, R = 1, H = 1.$ 



Рис. 30. (а) График функции  $J_0(\alpha_k R)$  при R = 1; (б) графики зависимости стационарного распределения температуры от вертикальной координаты z при r = 0, R/3, 2R/3, R; (в) графики зависимости стационарного распределения температуры от расстояния от оси симметрии r при z = 0, H/3, 2H/3, H

#### Задачи

Найти изменение температуры с течением времени в круглом цилиндре с радиусом основания R и высотой H при заданных начальном и граничном распределении температуры ( $T_0, T_1, h = \text{const}$ ).

$$\begin{aligned} & 3.10. \begin{cases} T_0(r,\varphi,z,0) = T_0 e^{r/R-1}, \\ T(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; \ T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases} \\ & 3.11. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0 \sin(r/R-1), \\ T'(R,\varphi,z,t) - hT(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; \ T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases} \\ & 3.12. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0(r^2 - R^2), \\ T'(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; \ T(r,\varphi,H,t) = T_1. \end{cases} \\ & 3.13. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0 \sin(r/R-1)\cos(\varphi/2), \\ T'(R,\varphi,z,t) - hT(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; \ T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases} \\ & 3.14. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0(1-z/H), \\ T'(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = T_1; \ T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Найти изменение температуры с течением времени в неоднородном цилиндре радиусом R и высотой H при заданных начальном и граничном распределении температуры ( $T_0, T_1, h = \text{const}$ ).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha(r)\nabla T\right), \quad \alpha(r) = \begin{cases} \alpha_1 = \operatorname{const}, \ r \in [0, R/2], \\ \alpha_2 = \operatorname{const}, \ r \in [R/2, R]. \end{cases}$$

Построить графики зависимости решения T(r,t) в различные моменты

времени при представленных ниже начальных и граничных условиях.

$$3.15. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0 r(R-r), \\ T'(R,\varphi,z,t) - hT(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases}$$
$$3.16. \begin{cases} T(r,\varphi,z,0) = T_0 r, \\ T(R,\varphi,z,t) = 0; \\ T(r,\varphi,0,t) = 0; T(r,\varphi,H,t) = 0. \end{cases}$$

#### 3.3. Решение уравнения теплопроводности для шара

#### 3.3.1. Однородные граничные условия

Найдем изменение распределения температуры в однородном шаре радиусом R, начальное распределение температуры в котором является функцией расстояния от центра шара  $T_0(r)$ . Поток температуры на поверхности шара пропорционален текущей температуре (h — коэффициент пропорциональности), температура окружающей среды нулевая.

Очевидно, что при решении задачи необходимо использовать сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ . Краевая задача для функции  $T(r, \theta, \varphi, t)$  запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{T} = \Delta T, \\ T(r, \theta, \varphi, 0) = T_0(r), \\ T'(R, \theta, \varphi) = -hT(R, \theta, \varphi). \end{cases}$$
(117)

Будем искать решение (117) в виде (80), в качестве базиса будем использовать набор собственных функций оператора Лапласа в сферических координатах.

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right).$$

Но так как в начальный момент времени температура одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии *r* от центра шара, будем предполагать, что данная симметрия будет сохраняться со временем.

Поэтому уравнение (81) на его собственные функции  $e(r,\theta,\varphi)$  и собственные значения  $\lambda$  будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial e(r)}{\partial r}\right) = -\lambda^2 e(r).$$
(118)

Подстановкой e(r) = F(r)/r уравнение (118) приводится к виду

$$F'' + \lambda^2 F = 0.$$

Так как при r = 0 у искомой функции не должно быть особенностей, необходимо выполнение дополнительного условия

$$F(0) = 0,$$

откуда получаем

$$F = A\sin(\lambda r) \Rightarrow e(r) = \frac{A\sin(\lambda r)}{r}.$$
 (119)

Собственные значения  $\lambda$  найдем, подставляя (119) в граничные условия при r = R:

$$f = \lambda \cos(\lambda R) - \frac{\sin(\lambda R)}{R} + h \sin(\lambda R) = 0.$$
(120)

Это трансцендентное уравнение. Мы не будем здесь останавливаться на поиске его решения, так как оно подробно обсуждалось в п. 2.2. Напомним только, что спектр собственных значений дискретный, будем их нумеровать индексом n = 1, 2, ...

Для примера на рисунке 31, а представлен график функции f (120) и приведены несколько первых собственных значений, соответствующих R = 1. На рисунке 31, б представлены графики первых трех собственных функций (119), построенные с учетом нормировки

$$\langle e_n(r)|e_n(r)\rangle = \int_0^R r^2 e_n^*(r)e_n(r)dr = 1.$$



Рис. 31. (а) График функции f при R = 1; (б) графики первых трех собственных функций (119)

Решение исходной тепловой задачи запишется в виде

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{A_n \sin(\lambda_n r)}{r},$$
(121)

где  $T_n(t)$  – коэффициенты разложения решения по базисным функциям.

Для их определения подставим (121) в исходное уравнение теплопроводности и приравняем коэффициенты при одинаковых базисных функциях. Получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{T}_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$T_n(t) = C_{0n} e^{-\lambda_n^2 t}, \quad C_{0n} = \langle e_n(r) | T_0(r) \rangle.$$

Пример 3.4. Найдем распределение температуры в однородном шаре радиусом R, на границе которого выполняются однородные граничные условия III рода, с начальным распределением

$$T(r,0) = T_0 \frac{(R-r)}{R}.$$

Алгоритм поиска коэффициентов разложения и базисных функций приведен выше. Графики зависимости температуры в шаре от расстояния

от центра в различные моменты времени приведены на рисунке 32, а. Для сравнения на рисунке 32, б приведены те же графики, полученные при граничных условиях I рода.



Рис. 32. Зависимость T(r) в различные моменты времени, полученная при решении примера 3.4 с граничными условиями (а) III рода и (б) I рода, R = 1, h = 1

### Задачи

Найти изменение температуры с течением времени в однородном шаре радиусом R при заданных начальном и граничном распределении температуры ( $T_0, T_1, h = \text{const}$ ).

3.17. 
$$\begin{cases} T_0(r,0) = T_0 e^{r/R-1}, \\ T(R,t) = 0. \end{cases}$$
  
3.18. 
$$\begin{cases} T(r,0) = T_0 \sin(r/R-1), \\ T'(R,t) - hT(R,t) = 0. \end{cases}$$
  
3.19. 
$$\begin{cases} T(r,0) = T_0(r^2 - R^2), \\ T'(R,t) = 0. \end{cases}$$
  
3.20. 
$$\begin{cases} T(r,0) = T_0 \sin(r/R-1), \\ T(R,t) = 0. \end{cases}$$

Найти изменение температуры с течением времени в неоднородном шаре радиусом *R*.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\alpha(r)\nabla T\right), \quad \alpha(r) = \begin{cases} \alpha_1 = \operatorname{const}, r \in [0, R/2], \\ \alpha_2 = \operatorname{const}, r \in [R/2, R]. \end{cases}$$

Построить графики зависимости решения T(r,t) в различные моменты времени при представленных начальных, граничных условиях ( $h_0, T_0 - -$  const).

3.21. 
$$\begin{cases} T(r,0) = T_0 r(R-r), \\ T(R,t) = 0. \end{cases}$$
  
3.22. 
$$\begin{cases} T(r,0) = T_0 r, \\ T'(r,t) = 0. \end{cases}$$
  
3.23. 
$$\begin{cases} T(x,0) = T_0, \\ T'(R,t) + h_0 T(R,t) = 0. \end{cases}$$

### Приложение А. Полиномы Эрмита

Уравнение (12) с помощью подстановки z = ix при  $\beta = n/2$  приводится к виду

$$f''(x) - 2xf'(x) + nf(x) = 0.$$
 (A.1)

Несложно показать, что уравнение (А.1) может быть представлено в виде

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left(\rho\frac{d}{dx}f(x)\right) = nf(x),$$

то есть как уравнение на собственные функции и собственные значения оператора

$$\hat{L} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dx} \left( \rho \frac{d}{dx} \right),$$

который является эрмитовым на интервале  $x \in (-\infty, +\infty)$  с весовой функцией  $\rho = e^{-x^2}$ . Собственные значения этого оператора  $-\lambda = n$ .

Если n — целые числа, то соответствующие функции оператора  $\hat{L}$  и, следовательно, частное решение уравнения (А.1) — полиномы Эрмита, определяемые из соотношения

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \sum (-1)^j \frac{n!}{j!(n-2j)!} (2x)^{n-2j}$$

Также напомним, что полиномы Эрмита, как собственные функции эрмитового оператора, создают полную ортогональную систему базисных функций на интервале  $x \in (-\infty, +\infty)$  с весом  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n ! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$$

где  $\delta_{nm}$  — дельта-символ Кронекера. Производная k-го порядка от многочлена Эрмита  $H_n(x), n \ge k$ , также является многочленом Эрмита:

$$\frac{d^k}{dx^k}H_n(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)H_{n-k}(x).$$

Отсюда получается рекуррентное соотношение между тремя последовательными полиномами:

$$H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) = 0, n \ge 2.$$

## Приложение Б. Функции Бесселя

Уравнением Бесселя называется уравнение [7] вида

$$y''(x) + \frac{1}{r}y'(x) + \left(1 - \frac{l^2}{x^2}\right)y(x) = 0.$$
 (5.1)

Решения этого уравнения можно разделить на те, которые регулярны в нуле  $(J_l(x))$ , и те, у которых в нуле есть особенность  $(Y_l(x))$ . Регулярное в нуле решение можно получить с помощью ряда

$$J_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+2k},$$
(B.2)

а исследовать общие свойства решений — с помощью *производящей функции* (см. [7, 9])

$$F(x,h) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(h - \frac{1}{h}\right)\right] = \sum_{l=0}^{\infty} h^l J_l(x).$$
 (5.3)

Зная производящую функцию, легко получить интегральное представление Шлефли:

$$J_{l}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t^{l+1}} dt,$$
(Б.4)

из которого, после замены  $t = \exp(i\theta)$ , можно получить представление для функций Бесселя через *интеграл Бесселя*:

$$J_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(n\theta - z\sin\theta\right) \, d\theta,\tag{5.5}$$

часто используемый в различных приложениях.

Дифференцируя соотношение (Б.3) по x и сравнивая коэффициенты разложения по h слева и справа, получим одно *рекуррентное соотношение*, а дифференцируя по h — получим другое. В наиболее удобном виде

два этих рекуррентных соотношения можно записать следующим образом:

$$J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} J_l(x), \qquad J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x) = 2J'_l(x).$$
(B.6)

Используя уравнения (Б.1) для функций Бесселя  $J_l(kx)$  и  $J_l(px)$  и комбинируя их так, чтобы сократить вторые производные, нетрудно получить *соотношения ортогональности*:

$$\int_{a}^{b} J_{l}(kx) J_{l}(px) x \, dx =$$

$$= \frac{1}{k^{2} - p^{2}} \left[ px J_{l}(kx) J_{l}'(px) - kx J_{l}(px) J_{l}'(kx) \right]_{a}^{b},$$
(B.7)

то есть функции  $J_l(kx)$  и  $J_l(px)$  при  $k \neq p$  будут ортогональны, если будут удовлетворять граничным условиям I, II или III рода.

Таким образом, функции Бесселя при конкретном значении l и различных собственных значениях образуют полный (поскольку являются собственными функциями эрмитового оператора) и ортонормированный (в силу (Б.7)) набор функций, который может быть использован в качестве базиса на интервале  $[0, \infty)$ .

Соотношения ортогональности (Б.7) обычно используются для определения коэффициентов разложения функции в ряд по функциям Бесселя. Для функции f(x), заданной на интервале 0 < x < a, можно записать

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_l(k_n x),$$

где  $k_n$  определены, к примеру, условием  $J_l(k_n a) = 0$ . Тогда из соотношения

$$\int_{0}^{\infty} J_{l}(kx) J_{l}(px) x \, dx = \frac{1}{2} \delta_{np} a^{2} \left[ J_{l+1}(k_{p}a) \right]^{2}$$
(5.8)

нетрудно найти

$$c_n = \int_0^a f(x) J_l(k_n x) x \, dx \, \Big/ \frac{1}{2} a^2 \left[ J_{l+1}(k_n a) \right]^2. \tag{5.9}$$

### Список рекомендуемой литературы

- Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Гиперболические уравнения: учеб.-метод. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. – 80 с.
- Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Параболические уравнения: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. — 96 с.
- Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Уравнения в частных производных: введение: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. — 64 с.
- Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика (теория и приложения к геофизической гидродинамике). Изд. 2-е. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 256 с.
- Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005. — 256 с.
- Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1972. 712 с.
- Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1979. — 685 с.
- Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. М.: Атомиздат, 1972. — 392 с.
- Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики М.: Наука, 1975. — 125 с.

- Тарасевич Ю. Ю. Нахождение и визуализация автомодельных решений дифференциальных уравнений в частных производных средствами Maple. Методические рекомендации. — Астрахань, 2010. — 23 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. — 798 с.
- Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — 176 с.

Учебное издание

Лебедев Владимир Геннадьевич Иванова Татьяна Борисовна Васькин Владимир Васильевич

### УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 15.05.17. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72. Уч.-изд. л. 3,98. Тираж 50 экз. Заказ №

Издательский центр «Удмуртский университет» 426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207. Тел./факс: + 7 (3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru