Предисловие

Настоящее учебное пособие является и курсом лекций и решебником и задачником одновременно. Оно содержит 14 параграфов, в каждом из которых приводится необходимый теоретический материал вместе с подробным решением тестовых задач. Пособие написано на основе многолетнего опыта работы автора со студентами гуманитарного профиля обучения. Оно может служить студентам руководством к самостоятельной работе и как задачник для домашней работы при подготовке к экзамену, а так же может быть полезным начинающему преподавателю, работающему со студентами гуманитарного профиля обучения.

В отличие от известных пособий по теории вероятности, автор сознательно жертвует некоторым материалом ради того, чтобы акцентировать внимание читателя на основном материале, подлежащим полному усвоению. Руководствуясь стремлением научить студента логическому мышлению, автор намеренно избегает использования некоторых стандартных формул и формулировок некоторых результатов, которые не найдут применения при решении основных задач, а способны лишь отвлечь внимание обучающегося от основного материала.

Пособие учитывает особенности восприятия материала студентами гуманитарного профиля обучения, а так же уровень их подготовки. Изложение предмета не переполнено сложной математической терминологией, некоторые рассуждения и результаты сознательно приводятся не в самой наибольшей общности, как это принято при работе со студентами инженерного профиля. Использован индуктивный подход к изложению материала, при котором рассматриваются подготовительные задачи, наводящие соображения и правдоподобные рассуждения, стремление открывать, а не доказывать истины.

Глава 1. Случайные события.

§1. Классическое определение вероятности.

Предметом изучения теории вероятности являются случайные события и случайные величины.
Развитию теории вероятности способствовал интерес представителей игорного бизнеса, продиктованный желанием оценить степень риска игрока при тех или иных правилах игры. Учитывая это обстоятельство и тот факт, что игорная постановка задачи характерна ясностью формулировки, а также способна пробудить больший интерес учащегося, в настоящем пособии задачи формулируются, по возможности, в такой постановке.

К понятию вероятности нас приведет

Задача №1. В урне находятся 5 белых и 3 чёрных шара.

Правило игры. Наудачу будет извлечен один шар.

В этой ситуации игроку предлагается выбрать одну из возможных ставок:

- извлеченный шар окажется белым, то есть произойдет случайное событие Б,
- извлеченный шар окажется чёрным, то есть произойдет случайное событие Ч.

При этом предполагается, что все шары находятся в одинаковых условиях, то есть независимо от цвета ни какому из них не может быть отдано предпочтение. Очевидно, что случайному событию Б благоприятствуют пять исходов из восьми возможных, а случайному событию Ч благоприятствуют три исхода из восьми возможных, следовательно, выигрыш по ставке Б можно характеризовать числом 5/8, а выигрыш по ставке Ч − числом 3/8, иначе говоря, вероятность события Б равна 5/8, а вероятность события Ч равна 3/8.

При этом пишут Р(Б) = 5/8, Р(Ч) = 3/8. Итогом нашему рассуждению является

Классическое определение вероятности. Пусть А – случайное событие, которому благоприятствуют k исходов из общего числа N исходов. Тогда вероятность события А определяется по формуле:

$$P(A) = k/N \qquad (1)$$

Поскольку число k не может принимать значения большего, чем число N, то из формулы (1) следует, что **вероятность события не может быть больше единицы**. Вероятность события, которое непременно произойдет, равна единице, а само событие называют достоверным. При выводе формулы (1) мы предполагали, что число N всевозможных исходов – конечное, в противном случае формула (1) требует уточнения (см. **§9**).

О п р е д е л е н и е . *Случайное событие В называется противоположным событию A*, если ему благоприятствуют остальные $N - k$ исходов.

В рассмотренном нами примере случайные события Б и Ч являются взаимно противоположными. При этом очевидно, что справедливо равенство: Р(Б) + Р(Ч) = 1

З а м е ч а н и е . В дальнейшем пару взаимно противоположных событий мы будем обозначать, например, символами А и $\bar{A}$. Для таких событий выполняется очевидное равенство:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \qquad (2)$$

§2. Правило суммы и правило произведения.

Задача №2.

Правило игры: будут брошены две игральные кости. Наша ставка: сумма очков будет не менее 10-ти (событие А). Найти вероятность события А.

Р е ш е н и е . Исходом опыта являются пары чисел, составленные из цифр от “1” до “6”. Определяем число k исходов, благоприятствующих событию А, подразделяя их на группы:

1) сумма очков окажется равной 10 (3 исхода: (6;4), (5;5), (4;6)), 2) сумма очков будет 11 (2 исхода: (6;5), (5;6)), 3) сумма очков будет 12 (1 исход: (6;6)). Всего получаем $k = 3+2+1 = 6$ благоприятствующих выигрышу исходов.

Вычисляя общее число N исходов при бросании двух игральных костей, заметим, что каждый элементарный исход опыта представляет собой упорядоченную пару чисел: $(k_1; k_2)$, где k_1 – число исходов при бросании 1-й игральной кости, k_2 – число исходов при бросании 2-й игральной кости. Разобьем эти пары на группы:

1-я: (1;1); (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6).

2-я: (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6).

3-я: (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6).

4-я: (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6).

5-я: (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6).

6-я: (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6).

Получили 6 групп по 6 пар в каждой группе. Итого оказалось $N = 6 \cdot 6 = 36$ исходов. Теперь по формуле (1) находим искомую вероятность $P(A) = 1/6$.

Анализируя способы рассуждения при решении задачи №2, выводим

Правило суммы: Если событие А происходит одновременно с каждым из взаимоисключающих событий A_1, A_2, A_3, которым благоприятствуют k_1, k_2, k_3 исходов соответственно, то событию А благоприятствует число $k = k_1 + k_2 + k_3$ исходов.

Правило произведения. Пусть имеется k множеств: $A_1, A_2, \dots, A_к$, причём 1-е состоит из m_1 элементов, 2-е – из m_2 элементов ,…, k-е – из m_k элементов. Из элементов множеств $A_1, A_2, \dots, A_к$ составляются упорядоченные наборы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_к$, где $\alpha_1 \in A_1$; $\alpha_2 \in A_2$, …, $\alpha_к \in A_к$. **Множество Ω всевозможных упорядоченных наборов состоит из $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ элементов, обозначается в виде равенства $\Omega = A_1 x A_2 x \dots x A_k$** и **называется декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_к$.** Элементы этого множества, т.е. упорядоченные наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_к)$, называют **кортежами**.

Задача №3

Кодовый замок содержит четыре диска, на каждом из которых нанесены цифры от нуля до девяти. Секретная комбинация составляется как четырехзначное число: 1-я цифра этого числа набирается на 1-м диске, 2-я – на втором диске и т.д.

Найти вероятность вскрытия этого замка с первой попытки.

Р е ш е н и е . Очевидно, что выигрышная комбинация одна, а каждая из комбинаций представляет собой упорядоченный набор из четырех чисел взятых по одному из множества $A = \{0,1,2,\ldots,9\}$ в котором содержится 10 элементов. По правилу произведения находим $N = 10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10000$ всевозможных исходов. По формуле (1) находим: $P = 0{,}0001$ − искомая вероятность.

В качестве упражнения предлагается

Задача №4.

Школу бальных танцев посещают 5 юношей и 8 девушек. Определить, сколькими способами учитель танцев может выставить на конкурс а) одну танцевальную пару, б) две танцевальные пары.

§3. Алгебра случайных событий.

Правило сложения и умножения вероятностей.

К новым, для нас полезным понятиям приведет

Задача №5

В 1-й урне содержится 5 белых и 7 черных шаров, во 2-й – 9 белых и 4 черных. Правило игры: из каждой урны наудачу будет извлечено по одному шару. Найти вероятности событий:

C – извлеченные шары окажутся белыми,
D – шары окажутся черными,
S – шары будут одинакового цвета.

Р е ш е н и е . Чтобы произошло событие C, должны произойти события: $Б_1$ – из 1-й урны будет извлечен белый шар, $Б_2$ – из 2-й урны будет извлечен белый шар. Событию $Б_1$ благоприятствуют 5 исходов, событию $Б_2$ – 9 исходов. Таким образом, благоприятствующие событиям $Б_1$ и $Б_2$ исходы образуют пару, число которых, согласно правилу произведения, равно $k_1 = 5\cdot 9 = 45$. Это и есть число исходов, благоприятствующих событию C.

Аналогично, случайному событию D: из 1-й урны будет извлечен черный шар и из 2-й урны будет извлечен черный шар, благоприятствуют $k_2 = 7\cdot 4 = 28$ исходов. Наконец, по правилу суммы находим, что событию S благоприятствуют $k = k_1 + k_2 = 45 + 28 = 73$ исхода, при общем числе $N = 12\cdot13 = 156$ исходов, найденного по правилу произведения. На основании классического определения находим вероятности событий:

$P(C) = \frac{15}{156}$, $P(D) = \frac{28}{156}$, $P(S) = \frac{73}{156}$.

Извлекая пользу из решенной нами задачи, заметим, что случайные события C, D, S – составлены из элементарных событий $Б_1$, $Б_2$, $Ч_1$, $Ч_2$, и могут быть записаны в виде:
$C = Б_1$ и $Б_2$, $D = Ч_1$ и $Ч_2$, $S = C$ или D, точнее, $S = Б_1$ и $Б_2$ или $Ч_1$ и $Ч_2$. При этом событие $C = Б_1$ и $Б_2$ называется произведением событий $Б_1$ и $Б_2$, а событие $S = C$ или D – суммой событий C и D. Перепишем процесс вычисления вероятностей в следующем виде:

$$P(Б_1 \text{ и } Б_2) = \frac{5}{12}\cdot\frac{9}{13} = P(Б_1)\cdot P(Б_2) \qquad (3)$$

$$P(Ч_1 \text{ и } Ч_2) = \frac{7}{12}\cdot\frac{4}{13} = P(Ч_1)\cdot P(Ч_2) \qquad (4)$$

$P(S) = P(Б_1$ и $Б_2$ или $Ч_1$ и $Ч_2) = \frac{5}{12} \cdot \frac{9}{13} + \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{13} = P(Б_1) \cdot P(Б_2) + P(Ч_1) \cdot P(Ч_2)$ (5)

Формулы (3) и (4) иллюстрируют правило умножения вероятностей, а формула (5) – правило сложения и умножения вероятностей.

Полученные результаты побуждают нас принять следующие
О п р е д е л е н и я .
Составное событие С, означающее появление событий $Б_1$ и $Б_2$ называется **произведением этих событий** и выражается в виде равенства $C = Б_1Б_2$.

Составное случайное событие S, означающее, что происходит событие С или событие D, называется **суммой этих событий** и обозначается символом С + D.

Теперь правило сложения и умножения вероятностей предстает в следующем виде:

$$P(Б_1Б_2 + Ч_1Ч_2) = P(Б_1) \cdot P(Б_2) + P(Ч_1) \cdot P(Ч_2) \quad (6)$$

Возвращаясь к идее игровой постановки задачи правило (5) удобно представлять в виде двух равенств: в виде формулы выигрыша, **составленной в виде суммы всевозможных цепочек событий, обеспечивающих выигрыш**

$$S = Б_1Б_2 + Ч_1Ч_2 \quad (7)$$

и формулы для вычисления вероятности выигрыша:

$$P(S) = P(Б_1) \cdot P(Б_2) + P(Ч_1) \cdot P(Ч_2)\ . \quad (8)$$

По поводу написания формул (7) и (8) сделаем весьма важное

З а м е ч а н и е . Рассмотренные в нашей задаче случайные события $Б_1Б_2$ и $Ч_1Ч_2$ исключают друг друга (такие события еще называют несовместимыми). **Именно несовместимость событий С и D позволяют от формулы выигрыша в виде суммы: S = C + D перейти к вычислению вероятности по формуле: P(S) = P(C) + P(D).**

Чтобы предупредить возможность ошибки, мы уточним правило составления формулы выигрыша, которое можно именовать как принцип полноты информации. Важность этого принципа иллюстрирует

Задача №6:

Стрелки А, Б, и С делают один залп по мишени. При этом, вероятности попадания стрелков (их квалификация) соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6.
Ставка. Будет ровно одно попадание.
Р е ш е н и е . Введем случайные события: А – стрелок А попадет в мишень, В – стрелок В попадет в мишень, С – стрелок С попадет в мишень. Записывая формулу выигрыша в виде: S = A+B+C и переходя к вычислению по правилу (8) получаем P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = = 0,8 + 0,7 + 0,6 = 2,1 нелепый результат, ибо вероятность любого события заключена в пределах [0;1]. Такой результат получен потому, что событие А не исключает ни появления события В, ни появления события С.

Однако, если **в формуле выигрыша отражать результат выстрела каждого из стрелков, то все слагаемые в ней непременно окажутся взаимоисключающими. В этом и состоит принцип полноты информации.**

В связи с этим нам необходимо ввести события противоположные введенным ранее:
$\bar{A}$ – стрелок А промахнется, $\bar{B}$ – стрелок В промахнется, $\bar{C}$ – стрелок С промахнется.

Тогда, согласно принципу полноты информации, первый способ выигрыша следует представить в виде: $S_1 = A\bar{B}\bar{C}$, второй – в виде $S_2 = \bar{A}B\bar{C}$ и 3-й – в виде $S_3 = \bar{A}\bar{B}C$ и тогда в формуле выигрыша $S = A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$ слагаемые окажутся взаимоисключающими.
Поскольку сумма взаимно-противоположных событий равна единице (см. (2)), находим: $P(\bar{A}) = 1 – P(A) = 1 – 0,8 = 0,2$, $P(\bar{B}) = 1 – 0,7 = 0,3$, $P(\bar{C}) = 1 – 0,6 = 0,4$. Теперь, на основании правила сложения и умножения вероятностей, находим искомую вероятность.

$$P(S) = 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,6 = 0,2.$$

З а м е ч а н и е . Существует формула, позволяющая вычислять вероятность суммы совместимых событий, но в нашем курсе мы сочли ее использование нецелесообразным.

§4. Решение задач на применение правила сложения и умножения вероятностей.

Классификация задач.

а) Задачи под условным наименованием “залповая стрельба.”

Задача№7.

Правила игры: каждый из стрелков А и В делает по два выстрела в мишень. Вероятности попадания стрелков при каждом выстреле равны, соответственно, 0.8, 0.7. Ставка: произойдет ровно два попадания.

Р е ш е н и е . Как и прежде (см. задачу №6) вводим случайные события:
А – стрелок А попадет в мишень, $\bar{A}$ – стрелок А промахнется и т.д. по условию, имеем: $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,7$ Логика здравого смысла подсказывает, что выигрыш по сделанной ставке не зависит от порядка стрельбы. В**о избежание повторения в формуле выигрыша одних и тех же исходов игры, выбираем такую последовательность стрельбы, которая продиктована соображениями удобства**. Пусть сначала 2 раза стреляет стрелок А, потом – стрелок В.

Заметим, что всякой новой выигрышной цепочке событий соответствует способ распределения двух черточек над символами А и В. Получаем следующую формулу выигрыша:
$S = AA\bar{B}\bar{B} + A\bar{A}B\bar{B} + \bar{A}AB\bar{B} + \bar{A}A\bar{B}B + A\bar{A}\bar{B}B + \bar{A}\bar{A}BB$. На основании правила (7) сложения и умножения вероятностей находим:

$$P(S)=0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,3+0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,3+0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,3+0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,7+0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,7+$$
$$+0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,2116$$

З а м е ч а н и е . В дальнейшем изложении в случае, когда величина вероятности искомого события не имеет для нас принципиального значения, мы будем опускать результат вычислений.

Задача№8.

Из урны состава 7 черных и 10 белых шаров вынимают три шара без возврата.

Наша ставка: среди извлеченных шаров окажутся не менее двух белых.

Р е ш е н и е . Мы вправе полагать, что шары будут извлекаться по одному. Вводим случайные события: Б – очередной извлечённый шар окажется белым, Ч – окажется черным.

Очевидно, что выигрышными окажутся четыре цепочки случайных событий, т.е. формула выигрыша, составленная согласно правилу (7), имеет вид:

S = ББЧ + БЧБ + ЧББ + БББ.

Теперь по правилу сложения и умножения вероятностей находим:

$$P(S) = \frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{7}{15}+\frac{10}{17}\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{15}+\frac{7}{17}\cdot\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}+\frac{10}{17}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{87}{136}.$$

З а м е ч а н и е . При вычислении вероятностей цепочек мы учли тот факт, что **состав урны в процессе игры изменялся;** например, второму звену цепочки ББЧ событий (второму событию “Б”) предшествует состав урны: 7 черных и 9 белых шаров и т.д.
При подробной записи формулу вычисления вероятности цепочки ББЧ обычно пишут в виде: Р(ББЧ) = Р(Б) Ṕ(Б) · Ṕ(Ч). При этом о величинах Ṕ(Б) и Ṕ(Ч) говорят, как об условных вероятностях событий Б и Ч соответственно, при условии, что произойдут предшествующие им события, а события, составляющие цепочку называют зависимыми. Рассмотренная в данной задаче ситуация типична для излагаемого здесь курса , не претендующего на полноту изложения. Поэтому нет необходимости углубляться в тонкости затронутых понятий.

б) Задачи под условным названием “**стрельба до первого попадания**”.

Задача №9.

Имея четыре патрона, стрелок А стреляет до 1-го попадания, с вероятностью попадания при каждом выстреле равной 0.8.

Наша ставка: стрелок сделает не менее 3-х выстрелов.

Р е ш е н и е **.** Согласно правилу составления формулы выигрыша, выписываем все выигрышные цепочки событий, соединяя их знаками “+”.

Получаем $S = \bar{A}\bar{A}A+\bar{A}\bar{A}\bar{A}A+\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}$,

$P(S) = 0.2\cdot 0.2\cdot 0.8+0.2\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.8+0.2\cdot 0.2\cdot 0.2\cdot 0.2 = 0.04$

Полученную формулу выигрыша можно существенно упростить, если заметить, что
$\bar{A}\bar{A}\bar{A}A + \bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A} = \bar{A}\bar{A}\bar{A}(A + \bar{A}) = \bar{A}\bar{A}\bar{A}$, ибо событие $A + \bar{A}$ – достоверное, т.е. $P(A + \bar{A}) = 1$.
Продолжая процесс упрощения, получаем сокращенную формулу выигрыша:

$S = \bar{A}\bar{A}A + \bar{A}\bar{A}\bar{A} = \bar{A}\bar{A}(A + \bar{A}) = \bar{A}\bar{A}$ и тогда $P(S) = 0.2\cdot 0.2 = 0.04$.

Отметим, что формула выигрыша в виде $S = \bar{A}\bar{A}$ имеет легкое и вполне логичное объяснение, ибо после первых двух промахов выигрыш по нашей ставке уже гарантирован независимо от вариантов продолжения игры.

Задача№10.

Первая урна содержит 2 белых и 3 черных шара, вторая – два белых и 6 черных. Правила игры: из каждой урны шары будут извлекаться до тех пор, пока не будет извлечено по одному черному шару из каждой урны.
Ставка. Среди всех извлеченных шаров окажется ровно два белых.

Ре ш е н и е **.** Сознавая, что порядок изъятия шаров из урн безразличен, выберем следующий порядок, продиктованный соображениями удобства: Сначала из 1-й урны шары извлекаются до появления черного, а потом – из 2-й.

Получаем следующую формулу выигрыша:

$S = Б_1 Б_1 Ч_1 Ч_2 + Б_1 Ч_1 Б_2 Ч_2 + Ч_1 Б_2 Б_2 Ч_2$.

Находим искомую вероятность

$P(S) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{6} = \cdots$

При этом, как и в задаче №7, при вычислении вероятности произведения событий мы учитывали, что состав урн изменяется.

в) “**Задачи смешанного типа.”**

Задача №11.

Стрелок А должен стрелять по мишени до 1-го попадания из 3-х патронов, а стрелок В должен сделать два выстрела. Вероятности попадания стрелков при каждом выстреле равны, соответственно, 0.8, 0.7.

Наша ставка. Всего будет два попадания в мишень.

Р е ш е н и е . Следуя правилу составления формулы выигрыша, мы тщательно перебираем все варианты выигрыша в виде произведений цепочек событий, соединенных знаками “+”.

$S = A\overline{B}B + AB\overline{B} + \overline{A}A\overline{B}B + \overline{A}AB\overline{B} + \overline{A}\,\overline{A}A\overline{B}B + \overline{A}\,\overline{A}AB\overline{B} + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}BB =$

$= (A + \overline{A}A + \overline{A}\,\overline{A}A + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A})\ (\overline{B}B + B\overline{B}) + \overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}BB.$

Теперь находим $P(S) = (0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8) \cdot (0{,}3 \cdot 0{,}7+0{,}7 \cdot 0{,}3) = 0{,}417$

Задача №12

По узкой тропинке к водопою следуют три зайца А, В и С, в такой очередности: впереди заяц А, затем – заяц В, а последним – заяц С. На их пути браконьер расположил два капкана, каждый из которых может сработать лишь один раз с вероятностью Р = 0.8.

Наша ставка. Заяц С избежит попадания в капканы.

Р е ш е н и е . Сразу отметим, что выживание зайца С может сопровождаться одной жертвой (4 варианта), двумя жертвами (2 варианта) и отсутствием каких либо жертв. Следовательно, формула выигрыша будет состоять из семи слагаемых.
Введем случайные события: A_1 – заяц А преодолел 1-й капкан, A_2 – заяц А преодолел 2-й капкан и т.д. Соответствующие им противоположные события, как и ранее, снабдим «черточками». Получаем формулу выигрыша с учетом, что после срабатывания капкан становится безопасным.

$S = \overline{A}_1 B_2 C_2 + A_1 B_1 C_1 \overline{A}_2 + A_1 \overline{B}_1 A_2 C_2 + A_1 B_1 C_1 A_2 \overline{B}_2 + \overline{A}_1 \overline{B}_2 + A_1 \overline{B}_1 \overline{A}_2 + A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2.$

Находим $P(S) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2+0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2+0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8+0{,}8 \cdot 0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8+0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = \ldots$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В первой урне находится 7 белых и 3 черных шара, во второй – 5 белых и 2 черных. Из каждой урны наудачу будут извлечены по 2 шара. Найти вероятности событий:

а) среди извлеченных шаров будет 1 белый,
б) среди извлеченных шаров будет 3 белых.

2. В урне 5 белых и 3 черных шара. Наудачу будут извлекаться шары по одному до тех пор, пока не будут извлечены 2 белых (всего). Найти вероятности событий:

а) среди извлеченных шаров окажется 2 черных,
б) среди извлеченных шаров окажется 3 черных.

3. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Шары будут извлекаться по одному до тех пор, пока не появятся шары разного цвета. Найти вероятности событий:

а) среди извлеченных шаров будет больше 2-х белых, б) всего будет извлечено 5 шаров.

4. В первой урне 3 белых и 2 черных шара, во второй – 7 белых и 2 черных. Сначала из 1-й урны шары будут перекладываться наудачу во 2-ю до тех пор, пока не будет переложен черный шар. После этого из 2-й урны будут извлечены наудачу два шара. Найти вероятность события: \оба извлеченных из второй урны шара окажутся белыми.

5. В первой урне 7 белых и 3 черных шара. Во второй – 6 белых и 4 черных. В 3-й – 5 белых и 5 черных шара. Сначала из каждой урны достанут по одному шару. Из тех урн, откуда достанут белый шар, возьмут наудачу еще по одному шару и на этом игра будет закончена. Найти вероятности события: среди всех извлеченных шаров будет 2 белых.

6. Стрелки A, B, C будут вести стрельбу по общей цели до первого попадания любым из них в следующей очередности: A, B, C, A, B, C, A, B, C. В распоряжении каждого стрелка имеется 3 патрона. Вероятности попадания стрелков A, B, C при каждом выстреле равны $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$ соответственно. Найти вероятности событий:
а) стрелок A поразит цель; б) стрелок B сделает только один выстрел.

7. Состязаясь в меткости стрельбы стрелок A будет делать 2 выстрела, а стрелок B – 3 выстрела. Найти вероятность события: стрелок A выиграет состязание. Вероятности попадания стрелков A, B при каждом выстреле равны $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$, соответственно.

8. Каждый из стрелков A, B, C будет стрелять по собственной мишени до 1-го попадания. Вероятности попадания стрелков в мишень при каждом выстреле равны $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$, соответственно. Найти вероятность события: для поражения всех мишеней понадобиться всего 5 выстрелов.

9. Стрелки A, B, C делают сначала один залп по мишени, затем каждый из попавших в мишень стрелков делает еще один выстрел, после чего стрельба прекращается. Вероятности попадания стрелков в мишень при каждом выстреле равны $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{5}$, соответственно. Найти вероятность события: всего окажется два попадания.

10. Стрелок А делает один выстрел. Если будет попадание, то стрелки В и С будут вести стрельбу по общей цели до первого попадания любым из них в следующей очередности: В, С, В, С. Если стрелок А промахнется, то стрельба стрелков В и С будет происходить в обратной очередности: С, В, С, В. Найти вероятность, что стрелок В сделает всего один выстрел, если вероятности попадания стрелков такие же, как и в задаче **6.**

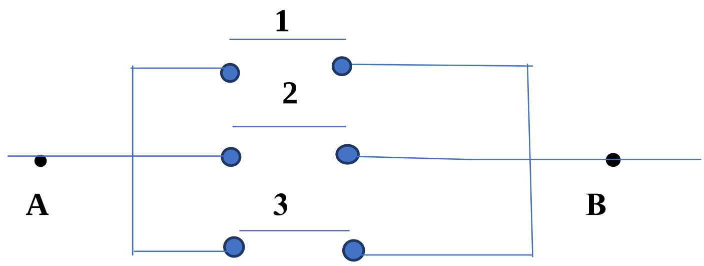
§5. Вычисление вероятности переходом к противоположному событию.

Хорошо известная формула $P(S) + P(\overline{S}) = 1$ предлагает нам выбор: какую из этих вероятностей следует вычислить для последующего вычисления другой. Ярким примером такого подхода к решению служит

Задача № 13.

Пять стрелков: A, B, C, D, E делают один залп по мишени. Вероятности попадания стрелков соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5. Определить вероятность, что будет не менее 2-х попаданий (событие S).
Р е ш е н и е. Вводим случайные события: А – стрелок А попадет в мишень, $\overline{A}$ – стрелок А промахнется и т.д.
Каждое слагаемое в формуле выигрыша будет содержать ровно 5 множителей, над каждом из которых будет от нуля, до трех черточек. Такая формула выигрыша – совершенно необъятная. Однако для противоположного события $\overline{S}$, означающего, что будет не более одного попадания, получаем формулу проигрыша $\overline{S} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ + ... всего шесть слагаемых.
Итак, сначала находим $P(\overline{S}) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 + 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5 + \ldots$,
после чего получаем искомую вероятность $P(S) = 1 - P(\overline{S}) = \ldots$

Задача №14. (параллельное соединение в электрической цепи)

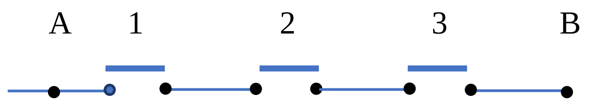


В электрической цепи АВ имеется три контактных реле, соединенных параллельно. Вероятности того, что они окажутся замкнутыми, равны соответственно p_1, p_2, p_3.
Найти вероятность того, что в цепи АВ будет течь ток (событие S).
Р е ш е н и е **.** Вводим случайные события: A_k – k-е реле будет замкнуто, $\overline{A}_k$ – k-е реле окажется разомкнутым, k = 1, 2, 3.

Имеем: $P(A_k) = p_k$. Находим $P(\overline{A}_k) = 1 - p_k = q_k$. Ток в цепи АВ будет течь, если будет замкнуто хотя бы одно реле, поэтому формула выигрыша будет содержать 7 слагаемых. Однако для противоположного события $\overline{S}$ – тока в цепи не будет, получаем всего лишь одно слагаемое: $\overline{S} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Находим $P(\overline{S}) = q_1q_2q_3$. Теперь $P(S) = 1 - q_1q_2q_3$ – искомая вероятность.

Задача № 15. (последовательное соединение в электрической цепи)

В электрической цепи AB имеется три реле, соединенные последовательно. Вероятности того, что они окажутся замкнутыми, равны, соответственно, p_1, p_2, p_3. Найти вероятность, что тока в цепи не будет.



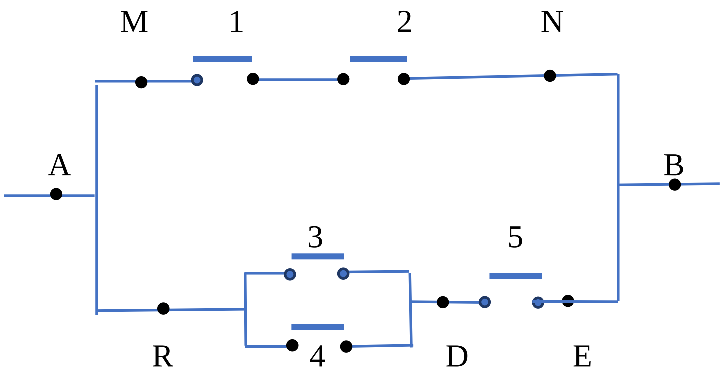
Р е ш е н и е . Вводим случайные события: A_k – k-е реле окажется замкнутым, k = 1, 2, 3. Тока в цепи не будет (случайное событие $\overline{S}$), если хотя бы одно из трех реле окажется разомкнутым. Формула выигрыша для события $\overline{S}$ будет содержать семь слагаемых, однако для противоположного события S – ток в цепи будет, формула выигрыша содержит лишь одно слагаемое: $S = A_1A_2A_3$. Находим $P(S) = p_1p_2p_3$. Теперь $P(\overline{S}) = 1 - p_1p_2p_3$ – искомая вероятность.

Прежде чем перейти к следующей задаче, сделаем важный

Вывод: В целях упрощения решения, при параллельном соединении следует вычислять вероятность не замкнутости цепи, а при последовательном – вероятность замкнутости.

Задача № 16.

Электрическая цепь содержит 5 контактных реле согласно схеме



Найти вероятность, что в цепи AB будет течь ток. Вероятности того, что реле 1÷5 окажутся замкнутыми, равны p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, соответственно.

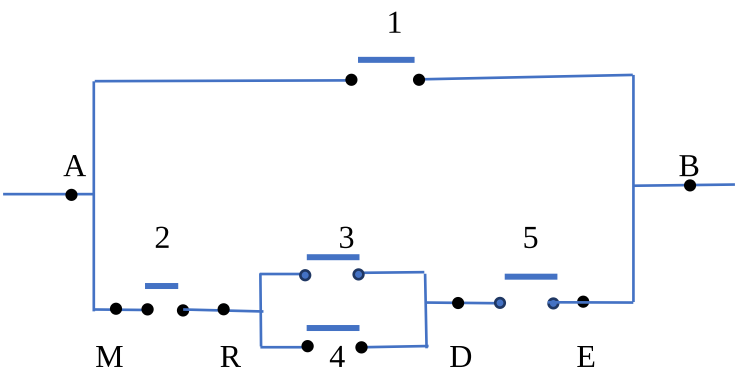
Р е ш е н и е . Расставив символы: M, N, R, D, E, мы выделяем отдельные участки электрической цепи: MN, RD, RE. Введем события S_{MN}, S_{RD}, S_{RE}, означающие, что в выделенных цепях будет течь ток, и события $\overline{S}_{MN}$, $\overline{S}_{RD}$, $\overline{S}_{RE}$, – тока в соответствующих цепях не будет. В цепи MN реле соединены последовательно. Тогда, согласно нашим выводам, сначала рассмотрим событие $S_{MN} = A_1A_2$, означающее, что цепь окажется замкнутой. Тогда $P(S_{MN}) = p_1p_2$ вероятность замкнутости, а $P(\overline{S}_{MN}) = 1 - p_1p_2$ – вероятность не замкнутости цепи MN.

Цепь RD представляет собой параллельное соединение реле 3 и 4. Полагая $P(\bar{A}_k) = 1 - p_k = q_k$, находим $\bar{S}_{RD} = \bar{A}_3\bar{A}_4$. $P(\bar{S}_{RD}) = q_3q_4$. Теперь $P(S_{RD}) = 1 - q_3q_4$ – вероятность замкнутости цепи RD.

Цепь RE представляет собой последовательное соединение цепи RD и реле 5. Поэтому находим $S_{RE} = S_{RD} \cdot A_5$. По правилу умножения находим вероятности замкнутости и не замкнутости цепи RE. $P(S_{RE}) = (1- q_3q_4)\, p_5$, $P(\bar{S}_{RE}) = 1 - p_5(1 - q_3q_4)$.

Цепь AB представляет собой параллельное соединение цепей MN и RE. Поэтому сначала находим $\bar{S}_{AB} = \bar{S}_{MN} \cdot \bar{S}_{RE}$. Отсюда, по теореме умножения вероятностей, находим сначала вероятность не замкнутости цепи и затем – вероятность замкнутости цепи.
$P(\bar{S}_{AB}) = (1- p_1p_2)(1- p_5(1- q_3q_4))$, $P(S_{AB}) = 1- (1- p_1p_2)(1- p_5(1- q_3q_4))$.

Задача №17 (для самостоятельного решения). Электрическая цепь содержит 5 контактных реле согласно представленной схеме. Найти вероятность, что в цепи AB будет течь ток. Вероятности того, что реле $1 \div 5$ окажутся замкнутыми, равны p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, соответственно.



Указание. Сначала рассмотреть цепь RD, затем – цепь ME, и, наконец, – цепь AB.

Глава 2. Случайные величины.

§6. Закон распределения случайных величин дискретного типа.

Некоторые случайные события связаны с величиной X, которая в опыте может принимать разные значения. При этом саму величину естественно называть случайной. Примером такой величины может быть, например, число белых шаров среди шаров, извлеченных из урн, число попаданий в мишень при стрельбе, число выстрелов и т.п.

О п р е д е л е н и е . Случайные величины, принимающие отдельные изолированные значения, называются *величинами дискретного типа.*

Задача № 18.

Стрелки A и B делают один залп по мишени с вероятностями попадания 0,8 и 0,7, соответственно. Случайная величина X – общее число попаданий в мишень. Найти вероятности принятия случайной величиной X всевозможных значений.

Р е ш е н и е . Случайная величина X может принимать значения: 0,1,2. Случайное событие, означающее принятие случайной величиной X числового значения k будем обозначать в виде $\{X = k\}$. Как и прежде, случайные события A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ будут означать попадания и промахи стрелков A и B, соответственно.

По всевозможным ставкам: $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$ выписываем формулы выигрыша $\{X = 0\} = \overline{A}\overline{B}$, $\{X = 1\} = A\overline{B} + \overline{A}B$, $\{X = 2\} = AB$ и находим

Соответствующие им вероятности

$P\{X = 2\} = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$, $P\{X = 1\} = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}38$,

$P\{X = 0\} = 0{,}807 = 0{,}56$

Полученный результат представим в виде таблицы:

X	0	1	2
P	0,06	0,38	0,56

О п р е д е л е н и е . Таблица, содержащая перечень всевозможных значений некоторой случайной величины X и соответствующих им вероятностей, называется *законом распределения случайной величины* X.

З а м е ч а н и е. Поскольку событие $\{X = 0\} + \{X = 1\} + \{X = 2\}$ является достоверным, то безошибочность построения закона распределения случайной величины должна подтверждаться выполнением равенства: $\sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = 1$

Задачи для самостоятельного решения.

1.Стрелок делает 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0.7 при каждом выстреле. Случайная величина X – число попаданий стрелка. Построить закон распределения случайной величины X.

2. Стрелки А и В стреляют по мишени до 1-го попадания любым их них в следующей последовательности: А, В, А, В, А, В. Каждый из них располагает тремя патронами. Вероятности попадания стрелков при каждом выстреле равны, соответственно, $3/4$ и $2/3$. Случайная величина X – число выстрелов стрелка А. Случайная величина Y – число выстрелов стрелка В. Построить законы распределения случайных величин X и Y.

3. Из урны, в которой находятся 5 белых и 4 черных шаров. Шары будут извлекаться до тех пор, пока не будут извлечены шары обеих расцветок. Случайная величина X – число извлеченных из урны шаров. Построить закон распределения случайной величины X.

4. В урне 5 белых и 3 черных шара. Наудачу будут извлекаться шары по одному до тех пор, пока не будут извлечены 2 белых (всего). Случайная величина X – число извлеченных черных шаров. Построить закон распределения случайной величины X.

5. Первая урна содержит 2 белых и 3 черных шара, вторая – 2 белых и 6 черных. Правила игры: из урн шары будут извлекаться до тех пор, пока не будет извлечено по одному черному шару из каждой урны. Построить закон распределения случайной величины X – общего числа извлеченных из урн белых шаров.

6. По узкой тропинке к водопою следуют три зайца А, В и С, в следующей очередности: впереди заяц А, затем – заяц В, а последним – заяц С. На их пути браконьер расположил два капкана, каждый из которых может сработать лишь один раз с вероятностью P = 0,7. Построить закон распределения случайной величины X – числа попавших в капканы зайцев.

§7. Элементы комбинаторики.

Для простоты этот предмет мы начнем излагать на примерах решения задач.

Задача № 19.

Сколько 5-буквенных слов можно составить из 9-ти буквенного алфавита, представляющего собой множество Ω = {А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И} при условии, что никакая буква не может быть использована дважды.

Р е ш е н и е **.** Заметим, что любое пятибуквенное слово представляет собой упорядоченный набор (кортеж) из 5-ти элементов, построенный следующим образом: Первым элементом кортежа является буква, выбранная из 9-ти элементного множества, вторым – буква, выбранная из 8-ти элементного множества и т.д. Таким образом, 1-я буква пятибуквенного слова может быть выбрана 9-ю способами, 2-я – 8-ю способами и, наконец, последняя – 5-ю способами.

По правилу произведения находим искомое число слов в виде произведения из 5-ти множителей: N = 9·8·7·6·5.

О п р е д е л е н и е . Пусть некоторое множество Ω содержит n элементов, из которых составляются k-элементные кортежи. Каждый такой кортеж *называется размещением из* n*–элементного множества по* k *элементов*. Для числа таких кортежей используют двух индексное обозначение в виде A_n^k. Воспроизводя рассуждения, проведенные выше, получаем *число размещений* **в виде произведения из** k **множителей:**

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-(k-1)). \tag{9}$$

В частном случае, когда размещение составляется из всех элементов множества Ω, его называют **перестановкой из -элементного множества,** а число перестановок обозначается символом p_{n} и определяется по формуле: $p_{\text{n}} = n\cdot(n\text{-}1)\cdot(n\text{-}2) \ldots 2\cdot1= n!$

Задача № 20.

Каким числом способов можно выбрать k элементов из -элементного множества. Здесь подчеркнем, что порядок элементов в полученном подмножестве безразличен. **Построенное таким образом подмножество называется сочетанием из -элементного множества по k элементов.** Число всевозможных сочетаний обозначают символом C_n^k.

Р е ш е н и е . Без ограничения общности рассуждений мы можем считать, что исходное множество – алфавит. Заметим, что из каждого неупорядоченного набора k букв (из каждого сочетания) можно построить $k!$ слов (размещений из -элементного множества по k элементов). Следовательно, число размещений в $k!$ раз больше числа сочетаний. Таким образом, для числа сочетаний получаем формулы:

$$C_n^k = \frac{A_k^n}{k!}, \quad \text{или} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{10}$$

В дальнейшем, в качестве вспомагательной нам послужит

Задача № 21.

Сколькими способами можно расположить k одинаковых элементов по n ячейкам.

Р е ш е н и е . Заметим, что искомое число совпадает с числом способов выбора k ячеек из n возможных. Поскольку совершенно неважно, в каком порядке отбираются ячейки для размещения элементов, каждый способ расположения элементов есть сочетание из n- элементного множества по k элементов, следовательно, это число есть C_n^k.

Применение. Вывод формулы бинома Ньютона: $(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$

Раскроем сразу все n скобок в выражении $(1 + x)^n = (1+ x)\cdot(1+ x)\cdot \ldots \cdot(1+ x)$.

Отметим, что в результате раскрытия скобок получим 2^n слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n множителей, выбранных по одному из каждой скобки. Например, выбирая в каждой скобке единицу получаем, что константа в разложении бинома равна 1. Выбирая в одной из скобок слагаемое “x” , а в остальных – единицу, получаем, что число слагаемых вида “x” равно n. Теперь определим коэффициент в разложении бинома при x^2. Для этого заметим, что число слагаемых вида x^2 равно числу способов выбора двух скобок, в которых будет выбрано слагаемое “x” из общего числа n скобок. Обращаясь к рассмотренной нами вспомогательной задаче №21, заметим, что это такое же число, как и число способов расположения двух одинаковых элементов по n ячейкам, и число это равно C_n^2. Рассуждая аналогично находим, что коэффициент при слагаемом x^k равен C_n^k. Таким образом, получаем формулу

$$(1 + x)^n = 1+ n\, x + C_n^2\, x^2 + C_n^3\, x^3 +\ldots C_n^{n-1}\, x^{n-1} + x^n$$

Очевидно, что $C_n^1 = n$ – коэффициент при x и теперь, в целях единообразия слагаемых, естественно положить, что $C_n^o = 1$ и $C_n^n = 1$. С этой целью мы должны пересмотреть формулу (9) для вычисления числа $n!$, продолжая ее на случай, когда $n = 0$ и принимая теперь следующее определение для этого числа .

$$n! = \begin{cases} n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1, & \text{если } n > 0 \\ 1, & \text{если } n = 0 \end{cases}$$

Таким образом, формула (10) для числа сочетаний теперь "узаконена" и для значения $k = 0$, и для значения $k = n$.

Простым следствием теперь является и формула бинома Ньютона в виде:

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, p^k q^{n-k} \qquad (11)$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. На каждой грани 4-х кубиков нанесены цифры от 1 до 6. Играя с этики кубиками, мальчик располагает их в ряд. При этом получаются различные 4-значные числа. Какое количество различных чисел можно получить в результате?

2. На карточках нанесено 6 гласных и 7 согласных букв. Девочка играет, составляя различные слова из семи букв, располагая сначала 3 гласных, а затем 4 согласных. Сколько различных слов может быть составлено таким способом?

3. В спортклубе занимаются 7 велосипедистов 8 пловцов и 9 марафонцев. Каким числом способов можно составить команду из 3-х велосипедистов, 4-х пловцов и 5-ти марафонцев?

4. Театральный коллектив состоит из 9-ти мужчин и 8-ми женщин. Каким числом способов можно составить труппу из 5-ти мужчин и 3-х женщин для участия в спектакле: а) без указания ролей, б) с указанием ролей?

5. Из урны, в которой находится 3 белых и 4 черных шаров, будут извлекаться шары без возврата до тех пор, пока не будут извлечены 3 белых шара. Случайная величина X – число извлеченных черных шаров. Найти закон распределения случайной величины X.

§8. Классические распределения вероятностей дискретных случайных величин.

а). Геометрическое распределение вероятностей.

Задача № 22.

Стрелок А стреляет по мишени до первого попадания с вероятностью p при каждом выстреле. Найти закон распределения случайной величины X – числа выстрелов стрелка, если количество патронов – не ограничено.

Р е ш е н и е . Случайная величина X принимает всевозможные натуральные значения.

Выписываем формулы "выигрыша" для ставок {X = 1}, {X = 2}, … , {X = n}.
{X = 1} = A, {X = 2}= $\bar{A}$A, … , {X = 3} = $\bar{A}\bar{A}$A, … , {X = n} = $\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}$A.

Полагая $1 - p = q$, находим: P{X = 1}= p; P{X = 2} = qp; P{X = 3}= q^2p, … ,

$$P\{X = n\} = q^{n-1}p. \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (12)$$

О п р е д е л е н и е . Закон распределения вероятностей, определяемый формулой (12) называется *геометрическим.*

Таким образом, полученные вероятности образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Так как q <1, то прогрессия – бесконечно убывающая.

На основании свойства закона распределения, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k p = 1.$$

Это равенство подтверждается известной формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

б) **Биномиальное распределение вероятностей .**

Задача № 23.

Стрелки A и B делают n залпов по общей мишени, с вероятностью попадания 0,8 и 0,7 соответственно.

С каждым залпом могут происходить события: D – будет ровно одно попадание, G – будет не менее одного попадания. Противоположные события обозначим $\overline{\mathrm{D}}$, $\overline{\mathrm{G}}$.

Найти закон распределения вероятностей случайных величин:

X – число появлений события D, Y – число появлений события G;

Р е ш е н и е . Пытаясь для ставки $\{\mathrm{X} = k\}$ записать формулу выигрыша обнаруживаем, что число слагаемых в ней столь велико, что переписать их всех не представляется возможным. Однако, выписывая лишь некоторые из них

$\{\mathrm{X} = k\} = \mathrm{DD}\ldots\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\overline{\mathrm{D}}\ldots\overline{\mathrm{D}} + \mathrm{DD}\ldots\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\overline{\mathrm{D}}\ldots\overline{\mathrm{D}}\mathrm{D} + \ldots$ отмечаем,

что вероятности каждого из слагаемых в этой формуле – одинаковы, а их число совпадает с числом способов расположения k черточек над n символами D, а это, в свою очередь, есть число способов расположения k одинаковых элементов по n местам. На основании решенной ранее задачи №21 получаем, что искомое число равно C_n^k. Теперь на основании правила сложения и умножения вероятностей находим

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = k\} = C_n^k\big(\mathrm{P(D)}\big)^k\big(\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}})\big)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично, получаем $\quad \mathrm{P}\{\mathrm{Y} = k\} = C_n^k\big(\mathrm{P(G)}\big)^k\big(\mathrm{P}(\overline{\mathrm{G}})\big)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$

О п р е д е л е н и е . Пусть в каждом из n испытаний некоторое событие H может произойти с вероятностью p. Обозначая через X – число появлений события H, получаем формулу

$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$, где $p = p(\mathrm{H})$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, $p = p(\mathrm{H})$, (13)

представляющую, так называемое, *биномиальное распределение вероятностей*.

(Такое название распределения связано с формулой (11) бинома Ньютона.)

Задача № 24. (Для самостоятельного решения)

В первой урне находится 7 белых и 3 черных шара, во 2-й – 6 белых и 5 черных, в 3-й – 8 белых и 4 черных. **Правило игры**: из каждой урны извлекают по одному шару, фиксируют их цвет и возвращают обратно. При этом могут произойти события:

А – из 1-й урны будет извлечен белый шар. В – среди всех извлеченных из трех урн шаров окажется ровно два белых. D –все шары будут одинакового цвета.

Игра повторяется 15 раз. Найти законы распределения случайных величин:

X – число появлений события А, Y – число появлений события В, Z – число появлений события D.

в) Гипергеометрическое распределение вероятностей.

Задача № 25.

В урне находится 9 белых и 7 черных шаров, наудачу будет извлечено 8 шаров. Случайная величина X – число белых шаров среди всех извлеченных.

Найти закон распределения случайной величины X.

Р е ш е н и е . Заметим, что исходом опыта является сочетание из 16-ти элементов по восемь, причем их число равно C_{16}^{8}. Для определенности найдем вероятность события $\{X = 5\}$. Заметив, что выигрышный состав извлеченных шаров содержит также и три черных, найдем, что пять белых шаров из восьми имеющихся можно извлечь числом C_9^5 способов, а три черных шара из семи имеющихся – числом C_7^3 способов.

По правилу произведения получаем число исходов, благоприятствующих событию $\{X = 5\}$ по формуле:

$$k = C_9^5 \cdot C_7^3.$$

На основании классического определения вероятностей, находим: $P\{X = 5\} = \frac{C_9^5 \cdot C_7^3}{C_{16}^8}$.

В общем случае получаем

$$P\{X = k\} = \frac{C_9^k \cdot C_7^{8-k}}{C_{16}^8}, \quad k = 1, 2, \dots , 8. \qquad (14)$$

О п р е д е л е н и е . Закон распределения вероятностей случайной величины X, определяемый формулой (14) носит название *гипергеометрического.*

Для самостоятельного решения предлагается

Задача № 26.

Из урны, в которой находятся 9 белых, 7 черных и 5 красных шаров, будут извлечены наудачу14 шаров. Найти вероятности событий:

а) среди извлеченных шаров окажется 6 белых и 5 черных,
б) среди извлеченных шаров окажется 5 красных.

в) среди извлеченных шаров не будет ни одного красного.

§9. Случайные величины непрерывного типа.

О п р е д е л е н и е . Случайные величины, которые принимают любые значения из сплошного промежутка $[a, b]$, называются *случайными величинами непрерывного типа.*

Такие величины имеются как в природе, так и в человеческой деятельности. Например, рост человека, диаметр изготовляемой на станке детали, дальность полета артиллерийского снаряда.

Задумавшись над вопросом о вероятности события $\{X = \alpha\}$ для случайной величины непрерывного типа, принимающей любые значения на отрезке $[a, b]$, мы вынуждены признать что $P\{X = \alpha\} = 0$, даже несмотря на то, что **не можем считать такое событие невозможным**. Более того, вопрос о вероятности события $\{X = \alpha\}$, $\alpha \in [a, b]$ мы должны признать не имеющим здравого смысла. Для этого достаточно представить себе, что должен ответить, например, артиллерист на вопрос: какова вероятность, что дальность полета орудийного снаряда (случайная величина X) окажется ровно два километра 503 метра 5 сантиметров, 3 миллиметра и два микрона.

В то же время вполне естественно звучит, например, вопрос о вероятности принятия случайной величиной X значения в интервале от 1800 до 2200 м. Иначе говоря, имеет смысл вопрос о вероятности события **$\{X \in (\alpha;\beta)\}$,** означающего принятие случайной величиной значения в интервале $(\alpha;\beta)$.

Таким образом, **если мы способны вычислять вероятности событий вида $\{X \in (\alpha;\beta)\}$, то можем считать, что располагаем законом распределения случайной величины X.**

Задача № 27. По данным разведки, вражеская цель расположена на отрезке $[a, b]$. Артиллерист, не зная точных координат цели, принимает решение о равномерном обстреле этого отрезка. Здесь множество всевозможных исходов состоит из бесконечного числа элементов, что не позволяет воспользоваться классическим определением вероятности. Но следуя идее классического определения, разумно считать вероятность события $\{X \in (\alpha;\beta)\}$ пропорциональной длине интервала $(\alpha;\beta)$, полагая **$P\{X \in (\alpha; \beta)\} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$,** где $\alpha \in [a, b]$, $\beta \in [a, b]$**. Такое равенство принято считать определением, так называемой, геометрической вероятности.** Переписывая наше равенство в виде: $P\{X \in (\alpha; \beta)\} = \frac{1}{b-a}(\beta - \alpha)$, и выделяя постоянный множитель $\rho = \frac{1}{b-a}$, называемый *плотностью вероятности,* мы можем представить его следующим образом:

$$P\{X \in (\alpha;\beta)\} = \rho(\beta - \alpha) \tag{15}$$

О п р е д е л е н и е . Случайная величина X*, называется равномерно распределенной на отрезке* $[a, b]$, если вероятность события $\{X \in (\alpha;\beta)\}$ определяется по формуле (15).

Рассмотренная нами равномерно распределенная величина X характерна для ситуации, которую артиллерист называет “стрельбой по площадям.” Однако, в том случае, когда координаты цели известны, мы должны признать, что в чем ближе к цели располагается интервал (α,β), тем выше величина ρ плотности вероятности. Таким образом, **в общем случае плотность вероятности представляет собой величину, зависящую от координаты “x”.**

Тогда вероятность события $\{X \in (\alpha;\beta)\}$ должна быть определена по формуле:

$$P\{X\in \alpha;\beta)\} = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(x)dx \qquad (16)$$

Вывод. Функция $\rho(x)$ плотности вероятности задает закон распределения случайной величины непрерывного типа.

З а м е ч а н и е . Величину определенного интеграла в формуле (16) удобно вычислять как площадь геометрической фигуры под кривой в том случае, когда функция $\rho(x)$ является либо кусочно линейной, либо кусочно постоянной.

§10. Функция распределения случайной величины.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $\rho(x)$ плотности вероятности случайной величины X, т.е. справедливо равенство: $F`(x) = \rho(x)$.

Тогда на основании формулы Ньютона – Лейбница получаем формулу для вычисления вероятности события $\{X\in(\alpha;\beta)\}$ через функцию распределения

$$P\{X\in(\alpha;\beta)\} = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (17)$$

В целях универсализации формул удобно считать, что любая случайная величина X распределена на всей числовой оси. Поэтому, в том случае, когда она принимает значение только на некотором промежутке $[a,b]$, необходимо полагать, что вне этого промежутка величина плотности равна нулю.

Например, при равномерном распределении на промежутке $[a,b]$ функция плотности вероятности теперь имеет вид:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in (a,b) \\ 0, & \text{если } x > b \end{cases}$$

Поскольку первообразная любой функции определяются с точностью до константы, то для определенности выберем первообразную $F(x)$ функции $\rho(x)$ согласно формуле:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt.$ Согласно формуле (16), значение этой функции в точке x есть вероятность события $\{X\in(-\infty;x)\}$. Собирая все сказанное, получаем формулу:

$$F(x) = P\{X\in(-\infty;x)\} = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt \qquad (18)$$

О п р е д е л е н и е . Функция $F(x)$, определяемая формулой (18), называется *функцией распределения вероятностей случайной величины X.*

Наряду с функцией плотности $\rho(x)$, функция $F(x)$ задает закон распределения вероятностей случайной величины X.

Функции $\rho(x)$ и $F(x)$ обладают следующими свойствами:

1. $\rho(x) \geq 0$, 2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$, 3. $F(x) \geq 0$

4. Функция $y = F(x)$ непрерывна и возрастает на всей числовой оси от нуля до единицы, причем прямые $y = 0$ и $y = 1$ являются горизонтальными асимптотами, ибо

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$

Для закрепления таких важных понятий, как плотность вероятности и функция распределения случайной величины X служит

Задача № 28.

Построить функцию распределения вероятностей по заданной функции плотности:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < -1 \\ \frac{1}{4}, \text{ если } x \in (-1;1) \\ 0, \text{ если } x \in (1;3) \\ \frac{1}{6}, \text{ если } x \in (3;6) \\ 0, \text{ если } x > 6 \end{cases}$$

Заранее заметим, что функция распределения окажется составленной из пяти формул, определённых на тех же промежутках, что и функция плотности. На основании формулы (16) построим функцию распределения, рассматривая последовательно, все пять промежутков. **При этом мы будем использовать часть уже построенной на предыдущем интервале функции** $F(x)$.

1) $x < -1$. По определению функции распределения находим:

$$F(x) = \text{P}\{\text{X}\in (-\infty; x)\} = 0.$$

2) $x \in (-1;1)$. Используем тот факт, что до значения $x = -1$ функция уже построена. Теперь на основании правила сложения вероятностей и очевидного равенства $\{\text{X}\in(-\infty; x)\} = \{\text{X} \in (-\infty; -1)\} + \{\text{X} \in (-1; x)\}$ получаем:
$\text{F}(x) = \text{P}\{\text{X}\in (-\infty; x)\} = \text{P}\{\text{X}\in (-\infty; -1)\} + \text{P}\{\text{X} \in (-1; x)\}$. По определению функции $\text{F}(x)$ имеем: $\text{P}\{\text{X}\in(-\infty; -1)\} = \text{F}(-1)$. Но $\text{F}(-1) = 0$. Следовательно,

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \rho(t)dt = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} t \Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{4}(x+1).$$

3) $x \in (1;3)$. Поскольку до значения $x = 1$ функция распределения уже построена, то событие $\{\text{X}\in(-\infty; x)\}$ представим в виде суммы: $\{\text{X}\in(-\infty; x)\} = \{\text{X}\in(-\infty;1)\} + \{\text{X}\in(1; x)\}$. Теперь по правилу сложения вероятностей находим

$$F(x)=\text{P}\{\text{X}\in(-\infty;1)\} + \text{P}\{\text{X}\in(1; x)\} = F(1)+\int_{1}^{x} \rho(t)dt = \frac{1}{4}(1+1) + \int_{1}^{x} 0 \cdot dt = \frac{1}{2}$$

4) $x \in (3;6)$. На основании равенства $\{\text{X}\in(-\infty; x)\} = \{\text{X}\in(-\infty;3)\} + \{\text{X}\in(3; x)\}$

находим

$$F(x) = \text{P}\{\text{X}\in(-\infty;3)\} + \text{P}\{\text{X}\in(3; x)\}=F(3) +\int_{3}^{x} \rho(t)dt = \frac{1}{2} +\int_{3}^{x} \frac{1}{6} \,\text{dt} = \frac{1}{2} +$$
$$+\frac{1}{6} t \Big|_{3}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x-3) = \frac{1}{6}x$$

5) $x > 6$

$F(x)$ = P{X∈ $(-\infty;6)$}+ P{X∈$(6; x)$} = $F(6) + \int_6^x \rho(t)dt = \frac{1}{6}\cdot 6 + \int_0^x 0\cdot dt = 1$

Таким образом, получена функция распределения в виде

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1), & \text{если } x \in (-1;1) \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in (1;3) \\ \frac{1}{6}x, & \text{если } x \in (3;6) \\ 1, & \text{если } x > 6 \end{cases}$$

Задача №29 (для самостоятельного решения).

Функция плотности вероятности случайной величины X имеет вид:

$$\rho(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x < -1 \\ \frac{1}{4}(x+1), & \text{если } x \in (-1;1) \\ 0, & \text{если } x \in (1;2) \\ \frac{3}{8}(x-2), & \text{если } x \in (2;4) \\ 0, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

Построить функцию распределения.

§11. <u>Числовые характеристики случайных величин.</u>

Детерминированную величину, т.е. величину, принимающую одно единственное значение, можно рассматривать как крайний вариант случайной величины, принимающей лишь одно значение с вероятностью, равной единице. Сравнивая случайную величину с детерминированной, естественно ввести понятия ее среднего значения. Для этого рассмотрим закон распределения дискретной случайной величины в виде следующей таблицы:

X	2	3	6
P	0.1	0.2	0.7

Представим себе, что производится 10 испытаний, в результате которых случайная величина X примет 10 значений. При этом появление события {X = 2} ожидается 1 раз, появление события {X = 3} — 2 раза, появление события {X = 6} – 7 раз. Следовательно, среднее значение случайной величины X естественно определять как среднее арифметическое этих значений с учетом повторяемости согласно равенства:

$x_{ср} = \frac{2\cdot1+3\cdot2+6\cdot7}{10} = 5$, которое удобно переписать в виде: $x_{ср} = 2\cdot0{,}1 + 3\cdot0{,}2 + 6\cdot0{,}7 = 5$.

Анализ полученного равенства позволяет ввести следующее

О п р е д е л е н и е . Числовая характеристика, обозначаемая символами $x_{ср}$ или M(X), и определяемая формулой

$$x_{ср} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (19)$$

называется *средним значением или математическим ожиданием* случайной величины X, где $x_1, \dots, x_n$ – все значения случайной величины X и $p_1, \dots, p_n$ – соответствующие им вероятности.

Однако одной такой числовой характеристики оказывается недостаточно, в чем нас убеждает следующий

Пример. Рассмотрим случайные величины X и Y принимающие одинаковые значения, с разными вероятностями

X	1	2	3
P	0.1	0.8	0.1

Y	1	2	3
P	0.45	0.1	0.45

Очевидно, что их средние значения совпадают

$x_{ср}$.= 1·0,1+2·0,8+3·0,1 = 2. $y_{ср}$ = 1·0,45+2·0,1+3·0,45 = 2.

Отметим, однако, что вероятности событий $\{X = x_{ср}\}$ и $\{Y = y_{ср}\}$ сильно отличаются. Поэтому нам необходимо ввести числовую характеристику, оценивающую вероятность отклонения случайной величины от своего среднего значения. При этом представляется наиболее естественным введение среднего отклонения случайной величины от среднего значения в виде произведения:

$$p_1|x_1 - x_{ср}| + p_2|x_2 - x_{ср}| + \dots + p_n|x_n - x_{ср}|.$$

Однако по некоторым соображениям, которые выходит за рамки нашего курса, для оценки среднего отклонения случайной величины удобнее принять среднее значение квадрата отклонения случайной величины от своего среднего значения, обозначаемое символом D(X), в соответствии с равенством

$$D(X) = p_1(x_1 - x_{ср})^2 + p_2(x_2 - x_{ср})^2 + \dots + p_n(x_n - x_{ср})^2 \qquad (20)$$

О п р е д е л е н и я . Числовая характеристика, определяемая формулой (20) называется *дисперсией случайной величины X*. Этой же цели служит и числовая характеристика, именуемая как *среднее квадратическое отклонение,* определяемое формулой:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Формулу (20) для дисперсии случайной величины можно переписать в виде:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \qquad (21)$$

Детализируя, удобно сначала ввести случайную величину Z как квадрат отклонения случайной величины X – M(X)), полагая $Z = (X - M(X))^2$ в виде таблицы

Z	$z_1 = (x_1 - M(X))^2$	$z_2 = (x_2 - M(X))^2$	…	$z_n = (x_n - M(X))^2$
P	p_1	p_2	…	p_n

с последующим вычислением величины дисперсии согласно равенства D(X) = M(Z).

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что дисперсия случайной величины может быть вычислена по формуле: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

Для случайной величины непрерывного типа математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\rho(x)dx; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho(x)\, dx - (M(X))^2$$

§12. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

О п р е д е л е н и е**. Случайные величины X и Y называются независимыми,** если закон распределения одной из них не зависит от того, какое из возможных значений приняла другая величина.

Числовые характеристики закона распределения случайной величины обладают **важными свойствами.**

1.Если X = C, т.е. случайная величина принимает всего лишь одно значение, то M(X) = C, D(X) = 0.

2. Числовые характеристики случайных величин X и CX связаны соотношениями:

$$M(CX) = CM(X), \quad D(CX) = C^2D(X).$$

3.Если случайные величины X и Y независимы, то числовые характеристики случайных величин X + Y, XY могут быть вычислены на основании равенств:

$$M(X\pm Y) = M(X) \pm M(Y), \quad D(X\pm Y) = D(X) + D(Y), \qquad M(XY) = M(X)\,M(Y)$$

Попытка вычисления математического ожидания случайной величины, распределенной по биномиальному закону на основании определения, приводит к следующему выражению: M(X) = $\sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k p^k q^{n-k}$ преобразование которого требует определенных навыков.

Преодолевая это затруднение, воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии. Для этого случайную величину X, распределенную по биноминальному закону, будем воспринимать как сумму n случайных величин X_1, X_2, … , X_n, где X_1 – число появлений случайного события H в 1-м испытании X_2 – число появлений случайного события H во 2-м испытании и т.д. При этом вполне очевидно, что эти случайные величины – независимые. Обозначая вероятность события H символом p, заметим, что каждая из случайных величин X_k принимает всего два значения: "1" – с вероятностью p и "0" – с вероятностью q = 1– p. По формулам (19) и (20) находим числовые характеристики случайных величин X_k

$M(X_k) = 1\cdot p + 0\cdot q = p, \quad k = 1, 2,\ldots, n,$

$D(X_k) = (1-p)^2\cdot p + (0-p)^2\cdot q = q^2p + p^2q = pq(p+q) = pq.$

Теперь на основании свойств математического ожидания и дисперсии получаем:

$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$

§13. Нормальное распределение случайной величины.

Примечательно, что очень многие случайные величины, встречающиеся в природе и в человеческой деятельности, можно считать распределёнными на всей числовой оси с плотностью вероятности, определяемой формулой:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (22)$$

Можно доказать, что в этой формуле параметр a – есть математическое ожидание случайной величины, а параметр σ – среднее квадратическое отклонение. Такого рода случайными величинами являются, например, высота роста человека, высота колоса пшеницы определенного сорта, диаметр детали, вытачиваемой токарем на станке.

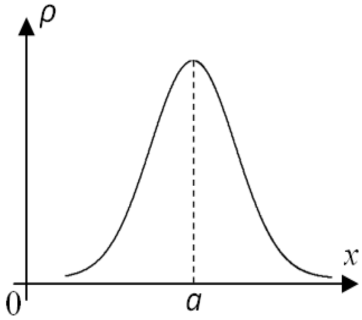
Нетрудно заметить, что $\rho(a+h) = \rho(a-h)$, т.е. график функции плотности симметричен относительно прямой $x = a$, причем в точке $x = a$ функция плотности имеет максимум.

О п р е д е л е н и е . Распределение вероятностей, задаваемое функцией плотности по формуле (22), называется *нормальным*.

Продолжая исследование функции $\rho(x)$, находим

$$\lim_{x\to\pm\infty} \rho(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0.$$

Это означает, что прямая $\rho = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции $\rho(x)$, который именуется, как кривая Гаусса и имеет вид, представленный на рисунке.



Непосредственное вычисление функции распределения через функцию $\rho(x)$ (подробности опускаем) на основании формулы (18) приводит к выражению

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \qquad (23)$$

Полученный интеграл не имеет элементарной первообразной. Французский математик П. Лаплас вычислил приближенные значения функции

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ при различных значениях аргумента x, результаты которых приведены в математической литературе как функция Лапласа. Тогда формула (23) принимает вид

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вычисляя теперь вероятность события $\{X\in(\alpha;\beta)\}$ по приведенной ранее общей формуле (17), мы получаем формулу для нормального распределения случайной величины

$$P\{X\in(\alpha;\beta)\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \qquad (24)$$

Наглядной иллюстрацией применения формулы (24) является

Задача № 30.

Токарь вытачивает детали диаметром 50 мм. Здесь случайной величиной X является диаметр реальной детали, изготовленной на станке. Заданная величина σ = 0.2 характеризует квалификацию токаря и качество станка. Контролер бракует деталь, если ее диаметр выходит за пределы промежутка (49.8; 50.1). Определить процент бракованных деталей.

Р е ш е н и е **.** По условию задачи имеем: a = 50. Определим вероятность того, что размер детали окажется в требуемом интервале. Для этого вычисляем значения аргументов:

$x_1 = \frac{\alpha - a}{\sigma} = \frac{49.8-50}{0,2} = -1, \quad x_2 = \frac{\beta - a}{\sigma} = \frac{50.1-50}{0,2} = 0,5.$

Теперь по формуле (24) находим: P{X∈(49.8; 50.1)} = Φ(0,5) – Φ(–1) = Φ(0,5) + Φ(1).

Здесь мы учли свойство нечетности функции $\Phi(x)$, т.е. равенство $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

По таблице функции Лапласа находим ее значения Φ(0,5) = 0,191; Φ(1) = 0,341. Теперь

P{X∈(49.8; 50.1)} = 0,191+0,341 = 0,532 – искомая вероятность, годные детали составляют 53,2%, а бракованные – 46,8%.

Задача № 31. Определить интервал вида $(a - h;\ a + h)$, в котором с заданной вероятностью P = 0.9 примет значение случайная величина X, распределенная по нормальному закону, при значении параметров $\sigma =$ 0.2, $a = 50$.

Р е ш е н и е. Преобразуем формулу (24) для вероятности принятия случайной величиной X значения в искомом интервале

$$P\{X \in (a - h;\ a + h)\} = \Phi\left(\frac{a+h-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-h-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-h}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{h}{\sigma}\right). \qquad (25)$$

По условию задачи имеем $2\Phi(\frac{h}{\sigma}) = 0.9$, т.е. $\Phi(\frac{h}{\sigma}) = 0.45$. По таблице функции Лапласа находим значение аргумента $x = 1.64$. Таким образом, $\frac{h}{\sigma} = 1.64$. Отсюда $h = 1.64 \cdot 0.2 = 0.328$.

Следовательно, (49.672, 50.328) – искомый интервал.

Задача №32.

Исследуя урожайность пшеничного колоска, агроном взвесил 100 экземпляров и определил среднее арифметическое значение массы колоска, равное 20 г. Полагая, что случайная величина X – масса колоска распределена по нормальному закону с параметром $\sigma = 0.2$, определить интервал, в котором с заданной вероятностью P = 0.9 заключено неизвестное математическое ожидание (параметр a) случайной величины X.

Р е ш е н и е **.** Введенное в условии задачи среднее арифметическое значение есть случайная величина $X_{ср}$, определяемая формулой $X_{ср} = \frac{X_1 + X_2 +,\dots+ X_{100}}{100}$, все слагаемые в которой – есть случайные величины (X_1 – масса 1-го колоска, X_2 – масса 2-го и т.д.) распределенные по нормальному закону с параметрами a и $\sigma = 0.2$ (как и случайная величина X). Оказывается, что случайная величина $X_{ср}$ также распределена по нормальному закону, но имеет параметрами $a_1 = a$ и $\sigma_1 = 0.1\,\sigma$. В этом убедимся, опираясь на свойства математического ожидания и дисперсии. Находим

$$a_1 = M(X_{ср}) = \frac{M(X_1)+M(X_2)+,\dots+M(X_{100})}{100} = \frac{a+a+,\dots+a}{100} = \frac{100a}{100} = a$$

(Этот результат свидетельствует о том, что каждое значение случайной величины $X_{ср}$, является хорошей точечной оценкой неизвестного математического ожидания (параметра a)).

Находим $D(X_{ср}) = \frac{D(X_1)+D(X_2)+,...+D(X_{100})}{100} = \frac{100D(X)}{10000} = \frac{D(X)}{100}$, $\sigma_1 = \sigma(X_{ср}) = \frac{\sigma(X)}{10} = 0.02$.

Основываясь на формуле (25) замечаем, что множество значений случайной величины $X_{ср}$ в виде интервала $(a - h; a + h)$, определяемого равенством $P\{X_{ср} \in (a - h;\ a + h)\} = 2\Phi(\frac{h}{\sigma(X_{ср})})$, будет содержать неизвестное математическое ожидание с заданной вероятностью P = 0,9. Как и в задаче №21, из равенства $\Phi(\frac{h}{\sigma(X_{ср})}) = 0,45$ по таблице функции Лапласа находим: $\frac{h}{\sigma(X_{ср})} = 1.64$, $h = 1.64 \cdot 0.02 = 0.0328$. Следовательно, интервал (19.97, 20.033) является искомым для неизвестного математического ожидания a.

§14. Правило трех “сигма”.

Воспользовавшись формулой (17), найдем вероятность отклонения случайной величины X от математического ожидания не более, чем на величину 3σ.

$P\{X\in(a-3\sigma;\ a+3\sigma)\} = \Phi(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2\cdot0,49865 = 0,9973$.

Таким образом, событие $\{X\in(a-3\sigma\ ;\ a+3\sigma)\}$ оказалось практически достоверным.

Приведенный ранее график функции плотности для нормально распределенной случайной величины давал лишь качественное представление о поведении функции. Теперь же, осмысливая полученный результат, приходим к выводу: **с незначительной ошибкой мы можем считать, что случайная величина распределена на интервале (a–3σ; a+3σ);** а вне этого интервала функция плотности практически равна нулю.

Этот результат носит название “правила трех сигма”. При этом мы понимаем, что график функции плотности $\rho(x)$ практически сливается с осью Ox при значениях $x_1 = a - 3\sigma$, $x_2 = a + 3\sigma$. Применение правила “трех сигма” иллюстрирует

Задача № 33

Токарь изготовил 1000 деталей, диаметр которых, по чертежу, должен быть равным 50 мм. При этом размеры всех деталей оказались в интервале значений (49.65, 50. 25). Определить процент годных деталей.

Р е ш е н и е **.** При таком большом количестве изготовленных деталей мы практически можем считать, что интервал значений имеет длину 6σ. Отсюда получаем:

$6\sigma = 50.25 - 49.65 = 0,6$, т.е. $\sigma = 0,1$. Очевидно, что $a = 50$. По формуле (24) находим

$P\{X\in(49.8;\ 50.1)\} = \Phi(\frac{50.1-50}{0,1}) - \Phi(\frac{49.8-50}{0,1}) = \Phi(1) - \Phi(-2) = 0,341+0,477 = 0,818$.

Примерно 82% деталей оказались годными.

§14. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

Применение формулы биномиального распределения $P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$ затруднительно при достаточно больших значениях чисел n и k.

Например, при $n = 80$, $k = 40$, $p = 0.8$, $q = 0.2$ получаем $P\{X=30\} = C_{80}^{30}\cdot0.8^{30}\cdot0.2^{50}$

Вычисление числа C_{80}^{30} требует очень большого количества операций умножения. Более того, вычисление вероятности события {X∈(30;40)}= {X = 30}+{X= 31}+…+{X = 40} требует уже весьма громоздких вычислений. Французский математик П. Лаплас заметил, что если нанести результаты вычислений вероятностей событий {X = k} на график функции плотности вероятности нормального распределения, построенного при значении параметров $a = np$ и $\sigma = \sqrt{npq}$, совпадающих с числовыми характеристиками биномиального распределения, (см. §11), то получаемые точки (x,ρ) хорошо укладываются на эту кривую. Следовательно, вероятность события {X = k} при биномиальном распределении можно приблизительно вычислять по формуле:

$$P\{X = k\} \approx \rho(k) \qquad (26)$$

причем в формуле $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ надо положить $a = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$.

Формула (26) составляет содержание, так называемой**, локальной теоремы Лапласа.**

Аналогично, для вычисления вероятности события {X∈$[k_1; k_2]$} применяется **формула (24) для нормального распределения с параметрами, взятыми по формулам биномиального распределения. Это составляет содержание интегральной теоремы Лапласа**.

$$P\{X\in[k_1; k_2]\} \approx \Phi\left(\frac{k_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-a}{\sigma}\right), \quad \text{где } a = np, \ \sigma = \sqrt{npq} \qquad (27)$$

Применение формул (26) и (27) иллюстрирует

Задача № 34.

Стрелок А делает 100 выстрелов по мишени с вероятностью попадания p = 0,8 при каждом выстреле. Случайная величина X – число попаданий. Найти вероятности событий: {X = 75}, {X∈[75;85]}.

Р е ш е н и е . Вместо применения формулы биномиального распределения:

$$P\{X = 75\} = C_{100}^{75} 0{,}8^{75} 0{,}2^{25}$$

находим математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение по формулам биноминального распределения: $a = np$ = 100·0,8 = 80; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 4$. Теперь на основании локальной теоремы Лапласа находим

$$P\{X = 75\} \approx \rho(75) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 4} e^{\frac{-(75-80)^2}{2\cdot 4^2}} = 0{,}0457.$$

На основании интегральной теоремы Лапласа получаем

$$P\{X\in[75;85]\} \approx \Phi\left(\frac{85-80}{4}\right) - \Phi\left(\frac{75-80}{4}\right) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-1{,}25) = 2\Phi(1{,}25) = 0{,}788$$

СОДЕРЖАНИЕ