Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

**А.М. Долбилов**

# МАТЕМАТИКА.
# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие
2-е издание, переработанное

Издательский центр «Удмуртский университет»
Ижевск 2018

УДК 512.64(075.8)+514.74(075.8)
ББК 22.14я73
Д64

*Рекомендовано к изданию Учебно–методическим советом УдГУ*

Рецензенты: Доцент кафедры «Высокопроизводительных вычислений и параллельного программирования к. ф.-м. н., Коган Юрий Вольфович»
Проректор по информатизации ФГБОУ ВО Ижевская ГСХА к. ф.-м. н., Хохряков Николай Владимирович

Долбилов А.М.
Д64 Математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учеб.-метод. пособие. - 2-е изд. перераб.-
Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2018. - 112 с.

Методическое пособие представляет собой курс лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии, прочитанный автором для студентов 1-го курса направления "Информационная безопасность". Рассматриваются типовые задачи с подробными решениями, а так же предлагаются задачи для самостоятельной работы. Пособие будет полезно и для студентов других направлений нематематического профиля.

УДК 512.64(075.8)+514.74(075.8)
ББК 22.14я73

# Введение.

Настоящее пособие подготовлено на основе лекций, которые были прочитаны автором студентам Удмуртского государственного университета направления подготовки "Информационная безопасность". Достаточно большой объём необходимого для изложения материала при ограниченном количестве времени не даёт возможности для систематического изложения предмета в достаточной полноте со строгими доказательствами. Поэтому автор старался либо дать идею вывода тех или иных утверждений, либо предложить правдоподобное рассуждение. Систематическое изложение материала читатель может найти в учебнике Я.С. Бугрова и С.М. Никольского "Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии".

К особенностям изложения материала в предлагаемом пособии можно отнести индуктивное изложение теоремы Крамера в связке с теорией определителей, эвристическое изложение множества комплексных чисел в тригонометрической форме, а так же попытка систематизации задач аналитической геометрии в пространстве по методам решения. Подробно излагая материал о линейных функциях в векторном пространстве, автор счёл необходимым обратить внимание читателя на тот факт, что эти новые понятия являются простой формализацией. а так же некоторым обобщением известных идей и методов решения задач элементарной математики.

Автор надеется, что индуктивное изложение материала с последующим аксиоматическим обобщением позволит студентам нематематических направлений постепенно проникнуться должным почтением к аксиоматическому методу изложения, так часто встречающемуся в учебниках и учебных пособиях по высшей математике, вызывая трудности восприятия материала.

Для выработки навыков решения задач, в пособии приводятся тестовые задачи с подробными решениями, требующие от каждого учащегося тщательной проработки. Для более основательной подготовки студенту необходимо проработать задачи, приведенные в конце каждой главы в предлагаемой последовательности.

# Глава 1. Векторная алгебра и системы линейных уравнений.

## §1. Геометрическое представление о векторах и операции над ними.

Наряду со скалярными величинами, которые можно охарактеризовать одним числом, существуют величины, характеризуемые как величиной, так и направлением. Примерами таких величин являются, например, скорость, сила, ускорение и т.д. Такого типа величины называют векторными. Из курса физики нам известно правило их сложения.

**Определение.** Вектор — это направленный отрезок, расположенный в плоскости или пространстве.

**Определение.** Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, обозначаемый $\bar{a}+\bar{b}$ и определяемый по правилу треугольника (см. рис. 1).

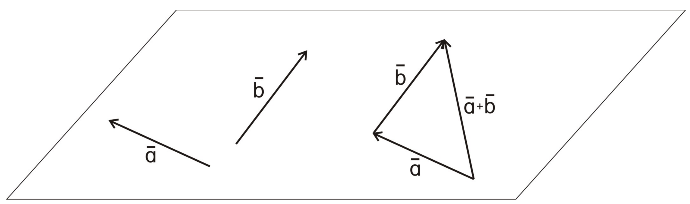


Рис. 1.

Длина вектора $\bar{a}$ обозначается символом $|\bar{a}|$.

**Определение.** Произведением вектора $\bar{a}$ на число $\lambda$ называется вектор, обозначаемый $\lambda\bar{a}$, длина которого равна $|\lambda||\bar{a}|$ , причем векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и направлены противоположно, если $\lambda < 0$ (см. рис. 2).

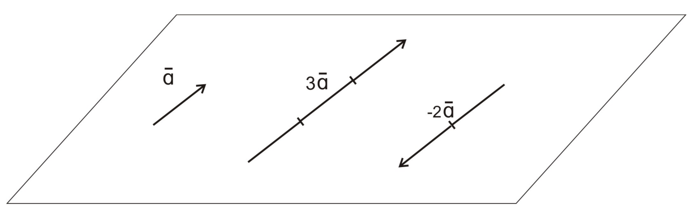


Рис. 2.

**Определение.** Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если при некотором числе $\lambda$ справедливо равенство $\bar{a} = \lambda\bar{b}$.

**Определение.** Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если в результате параллельного переноса их в общее начало эти векторы совпадают.

**Определение.** Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называются компланарными, если в результате их параллельного переноса в общее начало они оказываются лежащими в одной плоскости.

## §2. Базис во множестве векторов. Координаты вектора

**Определение.** Вектор $\bar{h} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

**Определение.** Система векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ пространства называется линейно независимой, если ни один из векторов этой системы не является линейной комбинацией других.

**Определение.** Система $\bar{a}$, $\bar{b}$ линейно независимых векторов называется неполной в данном множестве векторов, если ее можно дополнить хотя бы одним вектором $\bar{c}$ этого множества таким, чтобы система $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ также оказалась линейно независимой. **Система линейно независимых векторов называется полной или базисом множества векторов**, если любой вектор этого множества можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса.

**Примеры:**

1. Система векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ таких, что $|\bar{i}| = 1$, $|\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$ образует базис в множестве векторов плоскости $xOy$(рис.3) 2. Любая пара $\bar{a}$, $\bar{b}$ неколлинеарных векторов образует базис во множестве векторов, лежащих в плоскости векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$.
3. Система векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ таких, что $|\bar{i}| = 1$, $|\bar{j}| = 1$, $|\bar{k}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$, $\bar{j} \perp \bar{k}$ образует базис в трехмерном пространстве (рис. 3).
4. Любая тройка некомпланарных векторов образует базис в трехмерном пространстве.

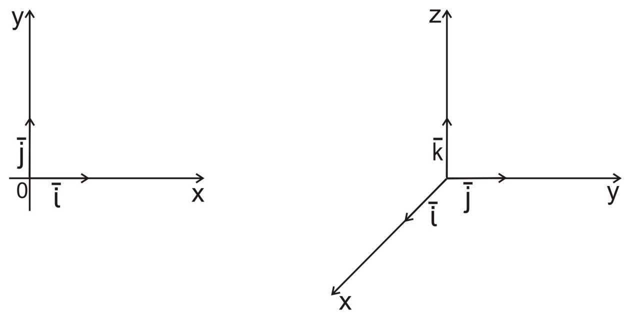


Рис. 3.

**О п р е д е л е н и е.** Равенство $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ называют разложением вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, а числа $a_1$, $a_2$, $a_3$ называют координатами вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

Очевидно, что в разных базисах один и тот же вектор будет иметь разные наборы координат. Если базис фиксирован, то вектор $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ удобно записывать в координатах в виде: $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, причем $\bar{a} + \bar{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\}$ и $\lambda\bar{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$.

**У т в е р ж д е н и е.** (Критерий коллинеарности).
Векторы $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е. $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

**У т в е р ж д е н и е.** Любой вектор плоскости (пространства) можно разложить по базису, причем единственным образом.

Таким образом, в фиксированном базисе равные векторы имеют равные координаты, т.е. равенство: $\bar{a} = \bar{b}$ означает, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

**Вывод.** Векторные уравнения в пространстве – это система из трех уравнений для их координат.

**З а д а ч а №1.** Разложить данные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ по базису $\bar{i}$ , $\bar{j}$ (см. рис. 4).

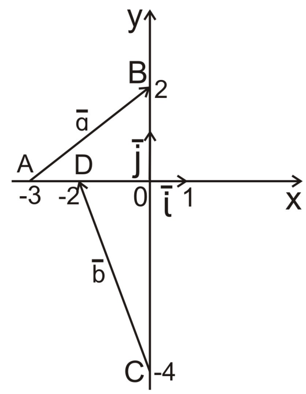


Рис. 4.

**Решение.** Чтобы разложить вектор $\bar{a}$ по базису, обозначим начало и конец вектора буквами $A$ и $B$ соответственно. Заметим, что $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$. Но $\overline{AO} = 3\bar{i}$, $\overline{OB} = 2\bar{j}$, следовательно, $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$. Аналогично $\overline{CO} = 4\bar{j}$, $\overline{OD} = -2\bar{i}$, следовательно, $\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j}$. Наконец, $\bar{a} = \{3; 2\}$, $\bar{b} = \{-2; 4\}$ – координаты векторов в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$.

## §3. Связь между координатами точек и векторов. Единичный вектор в данном направлении

Пусть $A$ – произвольная точка плоскости.

**Определение.** Вектор $\overline{OA}$ называют радиусом-вектором точки и обозначают символом $\bar{r}_A$.

**Определение.** Координатами точки $A$ называют координаты радиуса-вектора $\overline{OA}$.

**Важный вывод.** Для нахождения координат какой-либо точки достаточно найти координаты радиуса-вектора этой точки.

**Задача №2.** $A(-1;\ 3), \overline{AB} = \{5;\ -6\}$. Найти координаты точки $B$.

**Решение.** Соединим точки $A$ и $B$ с началом координат (точка $O$, рис. 5).

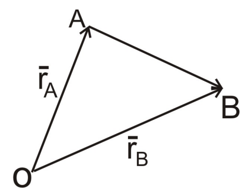


Рис. 5.

Заметим, что $\bar{r}_A = \{-1;\,3\}$. Надо найти $\bar{r}_B$. Из треугольника OAB на основании правила сложения векторов имеем: $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} = \{-1;3\} + \{5;-6\} = \{4;-3\}$. Ответ: $B(4;-3)$ – искомая точка.

**З а д а ч а №3.** $A(2;-5), B(4;1)$. Найти вектор $\overline{AB}$.

**Р е ш е н и е.** Имеем $\bar{r}_A = \{2;-5\}, \bar{r}_B = \{4;1\}$. Из треугольника $OAB$ имеем уравнение $\bar{r}_A + \overline{AB} = \bar{r}_B$, следовательно, $\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \{4;1\} - \{2;-5\} = \{2;6\}$(см. рис. 6).

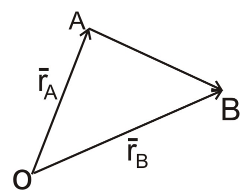


Рис. 6.

Длины векторов $\bar{a} = \{a_1;a_2\}$, $\bar{b} = \{b_1;b_2;b_3\}$ определяются на основании теоремы Пифагора по формулам:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\bar{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Вектор $\bar{e} = \dfrac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \{\dfrac{a_1}{|\bar{a}|}; \dfrac{a_2}{|\bar{a}|}\}$ имеет единичную длину и направлен так же, как и вектор $\bar{a}$.

Такой вектор бывает удобен при решении задач, т.к. играет роль эталона векторов, расположенных вдоль любой прямой, параллельной вектору $\bar{a}$. Полезность единичного вектора иллюстрируется следующей задачей.

**З а д а ч а №4.** $A(-1;3), B(2;-1), |\overline{AC_1}| = |\overline{AC_2}| = 2$. Найти точки $C_1$ и $C_2$ на прямой $AB$, если а) $\overline{AC_1} \uparrow\uparrow \overline{AB}$; б) $\overline{AC_2} \uparrow\downarrow \overline{AB}$.

**Р е ш е н и е.** Найдем сначала точку $C_1$(см. рис. 7).

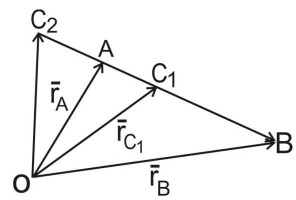


Рис. 7.

Имеем $\bar{r}_A = \{-1; 3\}, \bar{r}_B = \{2; -1\}$. Надо найти $\bar{r}_{C_1}$. Для нахождения $\bar{r}_{C_1}$ следует воспользоваться равенством $\bar{r}_{C_1} = \bar{r}_A + \overline{AC_1}$. У нас пока нет вектора $\overline{AC_1}$, однако, мы легко можем найти вектор $\overline{AB}$ (см. зад. №3). $\overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = \{2; -1\} - \{-1; 3\} = \{3; -4\}$. Зная длины векторов, параллельных прямой $\overline{AC}$, легко найти и сами векторы, если воспользоваться эталоном в направлении прямой $AB$, т. е. единичным вектором $\bar{e} = \dfrac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$.
Но $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow \bar{e} = \dfrac{1}{5}\{3; -4\} = \{0,6; -0,8\}$,
$\overline{AC_1} = 3\bar{e} = 3\{0,6; -0,8\} = \{1,8; -2,4\}$. $\overline{AC_2} = -3\bar{e} = \{-1,8; 2,4\}$,
$\bar{r_{C_1}} = \bar{r_A} + \overline{AC_1} = \{-1; 3\} + \{1,8; -2,4\} = \{0,8; 0,6\}$.
$\bar{r_{C_2}} = \bar{r_A} + \overline{AC_2} = \{-1; 3\} + \{-1,8; 2,4\} = \{-2,8; 5,4\}$.
Таким образом, получены точки: $C_1(0,8; 0,6)$, $C_2(-2,8; 5,4)$.

## §4. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.

**Определение.** Углом от вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ называется угол $\alpha \in [0; 2\pi]$, на который надо повернуть вектор $\bar{a}$ против часовой стрелки до совмещения с направлением вектора $\bar{b}$.

**Определение.** Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол $\varphi \in [0; \pi]$, образованный этими векторами, приложенными к общему началу. Углы $\alpha$ и $\varphi$ иллюстрирует рис. 8.

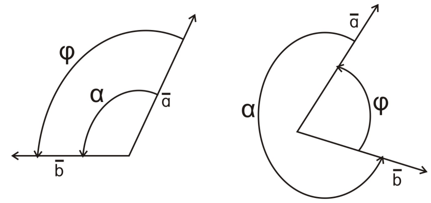


Рис. 8.

**О п р е д е л е н и е.** Угол $\alpha$ от базисного вектора $\bar{i}$ до вектора $\bar{a}$ называется углом наклона вектора $\bar{a}$ к оси $Ox$.

**У т в е р ж д е н и е.** Любой вектор $\bar{a}$ плоскости $xOy$ может быть представлен в виде: $\bar{a} = |\bar{a}|\{cos\alpha; sin\alpha\}$, где $\alpha$ – угол наклона вектора $\bar{a}$ к оси $Ox$.

Выведем формулу для вычисления угла между векторами $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2\}$ плоскости $xOy$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$ (см. рис. 9).

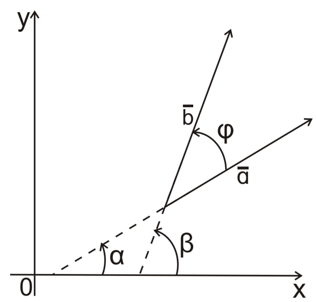


Рис. 9.

Имеем $\varphi = \beta - \alpha \Rightarrow cos\varphi = cos(\beta - \alpha) = cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$. Но $cos\alpha = \dfrac{a_1}{|\bar{a}|}$, $sin\alpha = \dfrac{a_2}{|\bar{a}|}$, $cos\beta = \dfrac{b_1}{|\bar{b}|}$, $sin\beta = \dfrac{b_2}{|\bar{b}|}$. Следовательно, $cos\varphi = \dfrac{a_1a_2}{|\bar{a}||\bar{b}|} + \dfrac{b_1b_2}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Пусть $\varphi$ – угол между векторами $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ на которых, как на сторонах, построим параллелограмм.Тогда на основании теоремы косинусов для длин его диагоналей $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b}$ справедливы равенства:
$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi$, $\quad |\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi$.
Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2 =$$

$$= 4(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

Отсюда, после элементарных преобразований, следует формула для вычисления угла между векторами:

$$cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Очевидно, что если $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 > 0$, то угол $\varphi$ – острый, если $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 < 0$, то угол $\varphi$ – тупой, а если $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, то угол $\varphi$ — прямой, т. е. векторы ортогональны.

Полученный результат факт побуждает нас ввести важное

**Определение.** Числовая функция векторных переменных $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, определяемая по правилу

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi$$

называется скалярным произведением.

**Утверждение.** (Критерий ортогональности векторов). Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

**Задача №5.** Найти вершину $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом в точке $C(-1; 3)$, если $A(3; 6)$, $|\overline{AB}| = 3$. (см.рис.10)

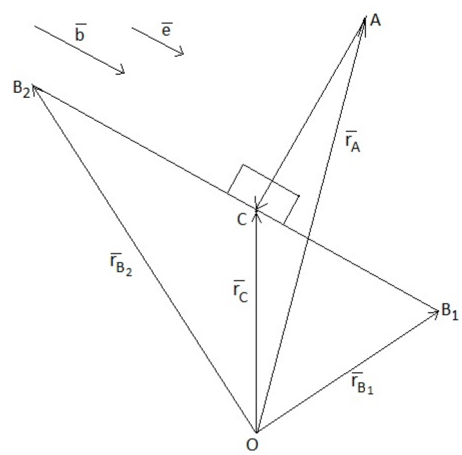


Рис. 10.

**Решение.** По условию задачи $\bar{r_A} = \{3; 6\}, \bar{r_C} = \{-1; 3\}$ – радиусы-векторы точек $A$ и $C$. Положения искомых точек $B_1$ и $B_2$ определим из равенств: $\bar{r_{B_1}} = \bar{r_C} + \overline{CB_1}$, $\bar{r_{B_2}} = \bar{r_C} + \overline{CB_2}$. Из уравнения $\bar{r_C} = \bar{r_A} + \overline{AC}$ определяем $\overline{AC} = \bar{r_C} - \bar{r_A} = \{-1; 3\} - \{3; 6\} = \{-4; -3\}$
Для нахождения неизвестных векторов $\overline{CB_1}$ и $\overline{CB_2}$ найдем какой-либо вспомогательный вектор $\bar{b}$, перпендикулярный вектору $\overline{AC}$. Следуя методу Декарта, введем неизвестные координаты вектора $\bar{b} = \{x, y\}$, которые определим из условия перепендикулярности: $(\bar{b}, \overline{AC}) = 0$, т. е.

$-4x - 3y = 0$.
Полагая $x = 3$, находим $y = -4$, $\bar{b} = \{3; -4\}$, $|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Находим единичный вектор и векторы $\overline{CB_1}$ и $\overline{CB_2}$. $\bar{e} = \dfrac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \dfrac{1}{5}\{3; -4\} =$
$= \{0,6; -0,8\}$, $\overline{CB_1} = 3\bar{e} = \{1,8; -2,4\}$, $\overline{CB_2} = -\overline{CB_1} = \{-1,8; 2,4\}$.
Наконец, $r_{\bar{B}_1} = \{-1; 3\} + \{-1,8; 2,4\} = \{0,8; 0,6\}$, $r_{\bar{B}_2} = \{-1; 3\} +$
$+\{1,8; -2,4\} = \{-2,8; 5,4\}$. Искомые точки: $B_1(0,8; 0,6)$ и $B_2(-2,8; 5,4)$.

**З а м е ч а н и е .** Вспомогательный вектор $\bar{b}$ можно было бы получить используя формулу поворота вектора $\overline{AC}$ на угол $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки (см. §8).

**О п р е д е л е н и е .** Ортогональной проекцией вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется число, обозначаемое как $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}$. Причём $\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}| cos\varphi$,
где $\varphi$ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Поскольку $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1a_2 + b_1b_2 =$
$= |\bar{a}||\bar{b}|cos\varphi$, то получаем формулу:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{b}|\Pi p_{\bar{b}}\bar{a}, \tag{1}$$

определяющую связь между проекцией вектора на вектор и скалярным произведением.
Таким образом, скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличается от проекции вектора на вектор лишь скалярным множителем. Следовательно, свойства скалярного произведения тесно связаны со свойствами проекции вектора на вектор.

**Свойства скалярного произведения:**

1) $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$, ибо очевидно, что $\text{Пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b} + \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{c}$.
2) $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$, ибо $\text{Пр}_{\bar{b}}\lambda\bar{a} = \lambda\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.
3) $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.
4) $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$, причем $(\bar{a}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow$ когда $\bar{a} = 0$.

Свойство 3) подчёркивает преимущество скалярного произведения перед понятием проекции вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$, ибо в общем случае имеем
$\text{Пр}_{\bar{b}}\bar{a} \neq \text{Пр}_{\bar{a}}\bar{b}$.

## §5. Решение векторных уравнений методом скалярных произведений.

Понятия проекции вектора на вектор и скалярного произведения находят применение благодаря следующему утверждению:

$$\bar{a}=\bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi p_{\bar{u}}\bar{a}=\Pi p_{\bar{u}}\bar{b} \\ \Pi p_{\bar{v}}\bar{a}=\Pi p_{\bar{v}}\bar{b} \\ \Pi p_{\bar{w}}\bar{a}=\Pi p_{\bar{w}}\bar{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{a},\bar{u})=(\bar{b},\bar{u}) \\ (\bar{a},\bar{v})=(\bar{b},\bar{v}) \\ (\bar{a},\bar{w})=(\bar{b},\bar{w}) \end{cases},$$

где $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ – произвольный базис в пространстве.

Теперь хорошо видно, что скалярное произведение успешно взяло на себя роль операции проецирования вектора на вектор.
Полезность этого можно оценить при решении следующей задачи.

**Задача №6.** Разложить вектор $\bar{h}=\{20;-2\}$ по базису, образованному векторами $\bar{u_1}=\{3;2\}$, $\bar{u_2}=\{-4;5\}$.

**Решение.** Надо найти числа $\lambda_1$, $\lambda_2$ из равенства

$$\bar{h}=\lambda_1\bar{u_1}+\lambda_2\bar{u_2}. \tag{2}$$

Чтобы из этого равенства исключить величину $\lambda_1$ умножим его скалярно на вектор, ортогональный вектору $\bar{u_1}$.

Очевидно, что вектор $\bar{\gamma_1}=\{-2;3\}$ ортогонален вектору $\bar{u_1}$. Тогда получим $(\bar{h},\bar{\gamma_1})=\lambda_1(\bar{u_1},\bar{\gamma_1})+\lambda_2(\bar{u_2},\bar{\gamma_1})$, но $(\bar{u_1},\bar{\gamma_1})=0$. Следовательно, $\lambda_2=\dfrac{(\bar{h},\bar{\gamma_1})}{(\bar{u_2},\bar{\gamma_1})}=\dfrac{-2\cdot 20-3\cdot 2}{-4\cdot(-2)+5\cdot 3}=-\dfrac{46}{23}=-2$. Выберем теперь вектор $\bar{\gamma_2}=\{5;4\}$ и умножим на него скалярно равенство (2). Учитывая, что $(\bar{\gamma_2},\bar{u_2})=0$, находим $\lambda_1=\dfrac{(\bar{h},\bar{\gamma_2})}{(\bar{u_1},\bar{\gamma_2})}=\dfrac{20\cdot 5-2\cdot 4}{3\cdot 5+2\cdot 4}=\dfrac{92}{23}=4$.
Итак, $\bar{h}=4\bar{u_1}-2\bar{u_2}$ – искомое разложение.
Полезен и второй способ решения.
Для этого от равенства векторов перейдем к равенству их координат.

$$\begin{pmatrix}20\\-2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$$

т. е.

$$\begin{cases} 3\lambda_1-4\lambda_2=20 \\ 2\lambda_1+5\lambda_2=-2 \end{cases}.$$

Решая полученную систему методом алгебраического сложения, умножим первое уравнение на 5, а второе на 4 и сложим полученные уравнения. Получаем $23\lambda_1=92 \Rightarrow \lambda_1=4$ и т.д.

Из процесса решения задачи следует

**В ы в о д 1.** Задача о разложении вектора по базису эквивалентна задаче о решении системы линейных уравнений. Следовательно, решение системы из двух уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = h_1 \\ a_2x + b_2y = h_2 \end{cases}.$$

единственно, если векторы $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ образуют базис.

Перенося всё сказанное на случай векторов трехмерного пространства заметим, что система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = h_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = h_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = h_3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, если векторы $\bar{u_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\bar{u_2} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\bar{u_3} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ образуют базис. Систему из трех уравнений можно трактовать как задачу о разложении вектора $\bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$ по базису из векторов $\bar{u_1}$, $\bar{u_2}$, $\bar{u_3}$, т.е.

$$\bar{h} = x\bar{u_1} + y\bar{u_2} + z\bar{u_3}.$$

**В ы в о д 2.** Сравнивая методы решения, отмечаем, что примененный выше метод скалярных умножений – это, по сути дела, метод алгебраического сложения, изложенный на языке векторов.

**З а м е ч а н и е .** Векторная трактовка системы из трёх линейных уравнений и взгляд на решение этой системы по методу алгебраического сложения является чисто алгебраическим основанием для введения такой функции, как скалярное произведение.

## §6. Определитель системы уравнений. Теорема Крамера существования и единственности решения системы линейных уравнений

Рассмотрим сначала систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2 \end{cases}, \tag{3}$$

определяемую матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
1-е уравнение умножим на число $A_{11}$, а 2-е на число $A_{21}$ и сложим их. Числа $A_{11}$ и $A_{21}$ выберем так, чтобы неизвестное $x_2$ оказалось исключенным из полученного путем сложения уравнения.
Введенная нами двойная индексация для чисел $A_{11}$ и $A_{21}$ соответствует двойной индексации коэффициентов при неизвестном $x_1$ и необходима для того, чтобы было легче обнаружить общие закономерности.

При выполнении условия $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} = 0$ для неизвестного $x_1$ получаем уравнение:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21})x_1 = h_1A_{11} + h_2A_{21}. \tag{4}$$

Для величин $A_{11}$ и $A_{21}$ получаем соотношение: $A_{11} = -\dfrac{a_{22}A_{21}}{a_{12}}$. Полагая $A_{21} = -a_{12}$, получаем $A_{11} = a_{22}$. Тогда из уравнения (4) находим

$$x_1 = \frac{h_1a_{22} - h_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{5}$$

Мы теперь легко можем найти неизвестное $x_2$ путем подстановки найденного значения неизвестного $x_1$ в одно из уранений. Однако, желая обнаружить общие закономерности, мы будем действовать независимо и симметрично. Для этого умножим 1-е уравнение на $A_{12}$, а 2-е – на $A_{22}$ и сложим их. В результате неизвестное $x_1$ будет исключено, если будет выполнено условие:

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} = 0. \tag{6}$$

Тогда для неизвестного $x_2$ получаем уравнение:

$$(a_{11}A_{12} + a_{22}A_{22})x_2 = h_1A_{12} + h_2A_{22}. \tag{7}$$

Из равенства (6) находим соотношение: $A_{12} = -\dfrac{a_{21}A_{22}}{a_{11}}$.
Полагая $A_{22} = a_{11}$, получаем $A_{12} = -a_{21}$. Тогда из уравнения (7) находим

$$x_2 = \frac{-h_1 a_{21} + h_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{8}$$

Формулы (5) и (8) надо привести к удобному виду. Знаменатели в этих формулах совпадают, причем знаменатель построен из элементов матрицы системы (3) по определенному правилу. Для него удобно ввести обозначение $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Используя это обозначение и для числителей формул (5) и (8), получаем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

**Определение.** Определителем системы уравнений называется число, обозначаемое символом: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, а также символом $det(A)$, которое вычисляется по правилу:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{10}$$

Формула (10) носит название разложения определителя по элементам 1-го столбца, а равенства (9) известны как формулы Крамера для системы уравнений (3).

Аналогичным образом решим теперь систему из 3-х уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}, \tag{11}$$

определяемую мартицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Для этого 1-е уравнение умножим на число $A_{11}$, 2-е – на число $A_{21}$, 3-е – на $A_{31}$ и сложим все уравнения. Числа $A_{11}$, $A_{21}$, $A_{31}$ необходимо выбрать так, чтобы в полученном уравнении осталось только неизвестное $x_1$. Следовательно, эти числа должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0 \\ a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

и тогда неизвестное $x_1$ определится из уравнения:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 = h_1A_{11} + h_2A_{21} + h_3A_{31}. \tag{13}$$

**Замечание.** Отметим, что обозначения, выбранные для чисел $A_{11}$, $A_{21}$, $A_{31}$, соответствуют коэффициентам при неизвестном $x_1$.

Решение системы уравнений (12) мы получим по формулам Крамера (9), объявив неизвестное $A_{31}$ свободным:

$$A_{11} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{32}A_{31} & a_{22} \\ -a_{33}A_{31} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}, \quad A_{21} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32}A_{31} \\ a_{13} & -a_{33}A_{31} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}. \tag{14}$$

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые очевидные свойства определителей 2-го порядка.

1. Величина определителя не изменится, если его соответствующие столбцы считать строками, а строки – столбцами, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

**Определение.** Операция, при которой столбцы заменяют соответствующими строками, называется **транспонированием определителя.**

2. Если столбцы определителя 2-го порядка поменять местами, то знак его изменится на противоположный.

3. При умножении элементов какого-либо столбца определителя на одно и то же число $k$ определитель умножается на это число $k$.

На основании этих свойств получаем:

$$\begin{vmatrix} -a_{32}A_{31} & a_{22} \\ -a_{33}A_{31} & a_{23} \end{vmatrix} = -A_{31}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} = A_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{31}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32}A_{31} \\ a_{13} & -a_{33}A_{31} \end{vmatrix} = -A_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = -A_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

**З а м е ч а н и е.** При преобразовании формул для чисел $A_{11}$, $A_{21}$, $A_{31}$ мы руководствовались идеей одинакового расположения элементов $a_{ij}$ в исходной матрице $A$ и в выражениях для получаемых формул.

Теперь, полагая в формулах (14) $A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, получаем $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Из уравнения (13) находим:

$$x_1 = \frac{h_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - h_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + h_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \quad (15)$$

При написании формулы (15) мы использовали следующее

**О п р е д е л е н и е.** Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ или определителем 3-го порядка называется число $det(A)$, которое находится по правилу:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Правило (16) именуют как **разложение определителя по элементам 1-го столбца.**

Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующих свойств определителя:

1) Транспонирование матрицы не изменяет величины определителя.

2) Перестановка соседних столбцов (строк) приводит к изменению знака определителя.

3) При умножении какого-либо столбца матрицы на число $k$ ее определитель умножается на это же число.

4) Определитель можно вычислять разложением по элементам 1-й строки согласно формуле

$$det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для краткости формулу (15) можно представить в виде:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \tag{17}$$

где матрица $A_1$ получена из матрицы $A$ путем замены 1-го столбца на столбец из свободных членов исходной системы уравнений.

Аналогичную формулу для неизвестного $x_2$ можно получить, воспользовавшись аналогией. Для этого перепишем исходную систему уравнений (11) в виде:

$$\begin{cases} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3 = h_1 \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 = h_2 \\ a_{32}x_2 + a_{31}x_1 + a_{33}x_3 = h_3 \end{cases}. \tag{18}$$

Эта система определяется матрицей $A' = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, которая получена из исходной матрицы $A$ перестановкой 1-го и 2-го столбцов.

Таким образом, получаем $x_2 = \dfrac{det(A'_2)}{det(A')}$, где матрица $A'_2$ получается из матрицы $A'$ путем замены 1-го столбца на столбец из свободных членов. На основании 2-го свойства определителя 3-го порядка имеем $det(A') = -det(A)$, $det(A'_2) = -det(A_2)$, где матрица $A_2$ получена из матрицы $A$ путем замены 2-го столбца на столбец свободных членов.

Тогда получаем

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)},$$

где матрица $A_2$ получена из матрицы $A$ путем замены 2-го столбца на столбец из свободных членов.

Аналогично получим и формулу $x_3 = \dfrac{det(A_3)}{det(A)}$, в которой матрица $A_3$ получена из матрицы $A$ путем замены 3-го столбца на столбец из свободных членов. Таким образом, получена

**Теорема Крамера.** Если определитель системы не равен нулю, то система уравнений (11) имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{19}$$

где матрица $A_i$ получена из матрицы $A$ путем замены $i$-го столбца на столбец свободных членов системы уравнений (11).

**Определение.** Определитель 2-го порядка, получаемый путем удаления $i$-й строки и $j$-го столбца называется минором элемента $a_{ij}$ определителя 3-го порядка и обозначается символом $M_{ij}$.

**Определение.** Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ определителя 3-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Для определителя 3-го порядка справедливо

**Свойство 5)** Если какой либо столбец (строка) определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, в каждом из которых в соответствующем столбце (строке) будет только одно из этих слагаемых. Это свойство станет вполне очевидным, если разложить определитель по элементам упомянутого столбца (строки).

Из приведенных выше свойств определителя следует, что его можно вычислять путем разложения по элементам любой строки, а также по элементам любого столбца. В связи с введенным определением, разложение определителя 3-го порядка по элементам $j$-го столбца имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}. \tag{20}$$

**Замечание.** Вывод теоремы Крамера для системы с большим числом неизвестных будет продолжен в третьей главе настоящего пособия.

**Пример.** Вычисляя определитель, убедиться в единственности решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 4 \\ 2x - 7y - 4z = -9 \\ 5x - y + 3z = 7 \end{cases}$$

**Решение.** Вычислим определитель путем разложения по элементам первого столбца.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(-21-4) - 2(-12+5) + 5(16+35) = 194.$$

Так как определитель не равен нулю, то система уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определитель путем разложения по элементам второго столбца.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(6+20) - 7(9-25) + (-12-10) = 194.$$

Вычисление определителя можно значительно упростить, если использовать следующее

**Свойство 6).** Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Такое преобразование позволяет обнулить все элементы выбранной строки (столбца) кроме одного. Применяя это свойство, вычислим определитель, обнуляя элементы второго столбца путем преобразования его строк.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 0 & -7 \\ -33 & 0 & -25 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 \\ -33 & -25 \end{vmatrix} =$$
$$= 25 \cdot 17 - 7 \cdot 33 = 194.$$

**К о м м е н т а р и й .** Ко второй строке мы прибавили третью строку, умноженную на -7, а к первой строке прибавили третью строку, умноженную на -4.
Теперь вычислим определитель обнулением третьей строки, преобразуя его столбцы.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & -4 & -7 \\ -33 & -7 & -25 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 \\ -33 & -25 \end{vmatrix} =$$
$$= 25 \cdot 17 - 7 \cdot 33 = 194.$$

**З а м е ч а н и е .** Наш выбор обнуляемой строки (столбца) определился наличием единицы в этой строке (столбце). Если же в определителе отсутствует элемент равный единице, то его нетрудно получить путем предварительного преобразования определителя на основании указанного свойства.

## §7. Векторное и смешанное произведения векторов

**З а д а ч а №7.** Построить какой-либо вектор $\bar{c}$, ортогональный каждому из векторов $\bar{a} = \{3; -2; 4\}$ и $\bar{b} = \{5; 1; -6\}$.

**Р е ш е н и е.** Пусть $\bar{c} = \{x; y; z\}$ – искомый вектор. Записывая условия перпендикулярности векторов

$$\begin{cases} (\bar{c}, \bar{a}) = 0 \\ (\bar{c}, \bar{b}) = 0 \end{cases},$$

получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases}.$$

Исключая неизвестное $y$, получаем уравнение $13x + 16z = 0 \Rightarrow x = -\frac{16}{13}z$. Исключая неизвестное $x$, получаем уравнение $13y - 2z = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{13}z$. Полагая $z = 13$, получаем $x = -16$, $y = 2$, т. е. $\bar{c} = \{-16; 2; 13\}$ – искомый вектор.

**З а м е ч а н и е.** Решая такую же задачу в общем виде для векторов $\bar{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ с использованием правила Крамера найдём, что вектор

$$\bar{c} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

ортогонален каждому из векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Этот вектор удобно записать в виде **символического определителя:**

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{21}$$

в котором предполагается разложение по элементам 1-й строки.

**О п р е д е л е н и е.** Вектор $\bar{c}$, определенный формулой (21), называют векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и обозначают символом $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

**З а м е ч а н и е.** Запись вектора векторного произведения в виде формулы (22) вовсе не означает, что вектор $\bar{c}$ – есть определитель 3-го порядка. Это всего лишь удобная форма записи разложения вектора $\bar{c}$ по базису, образованному тройкой векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, использующая символику определителя 3-го порядка.

**Упражнение.** Пользуясь определением убедиться в выполнении следующих равенств: $\bar{i} \times \bar{i} = 0$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$.

**Свойства векторного произведения:**

1) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$

2) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$

3) $\lambda\bar{a} \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b}), \lambda \in R$.

Отметим, что свойство 1) следует из свойства 5) определителя 3-го порядка. Остальные свойства очевидны.

**О п р е д е л е н и е.** Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется правой, если при взгляде с острия вектора $\bar{c}$ поворот от вектора $\bar{a}$ до совмещения с вектором $\bar{b}$ в кратчайшем направлении осуществляется против часовой стрелки.

Оказывается, что вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ ориентирован так, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} \times \bar{b}$ образуют правую тройку векторов, подобно тройке векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

**О п р е д е л е н и е.** Векторно-скалярным (смешанным) произведением тройки векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ называется число $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$.

На основании определений векторного и скалярного произведений находим, что смешанное произведение равно определителю 3-го порядка, строки которого составлены из координат векторов в порядке их следования, т.е.

$$(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

Отметим. что если $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) > 0$, то тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – правая, а иначе – левая. Кроме того, справедливо важное

**Утверждение.** (Критерий компланарности тройки векторов) Тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарная тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов равен нулю.

**Утверждение.** (Геометрический смысл модуля вектора $\bar{a} \times \bar{b}$) Модуль векторного произведения $\bar{a} \times \bar{b}$ равен площади $S$ параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ как на сторонах.

Для доказательства проделаем два встречных преобразования:

$|\bar{a} \times \bar{b}|^2 = (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 = a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 +$
$+ a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)$,

$S^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 sin^2\varphi = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2(1 - cos^2\varphi) = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2 =$
$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 +$
$+ a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2(a_2a_3b_2b_3 + a_1a_3b_1b_3 + a_1a_2b_1b_2)$,

из которых следует равенство $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$, что и требовалось доказать.

Чтобы выяснить геометрический смысл определителя системы линейных уравнений (11), исследуем действие линейного отображения

$$\bar{y} = x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + x_3\bar{a_3}, \tag{22}$$

представляющего собой левую часть этой системы. Здесь $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \bar{a_3}$ –векторы-столбцы матрицы системы. Для этого найдём образ куба, построенного на векторах $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Находим $\bar{y}(\bar{i}) = 1 \cdot \bar{a_1} + 0 \cdot \bar{a_2} + 0 \cdot \bar{a_3} = \bar{a_1}$, $\bar{y}(\bar{j}) = 0 \cdot \bar{a_1} + 1 \cdot \bar{a_2} + 0 \cdot \bar{a_3} = \bar{a_2}$, $\bar{y}(\bar{k}) = 0 \cdot \bar{a_1} + 0 \cdot \bar{a_2} + 1 \cdot \bar{a_3} = \bar{a_3}$. Следовательно, образом куба является параллелепипед, построенный на векторах $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \bar{a_3}$. Площадь основания параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a_1}, \bar{a_2}$ равна $S = |\bar{a_1} \times \bar{a_2}|$. Заметим, что вектор $\bar{c} = \bar{a_1} \times \bar{a_2}$ перпендикулярен к основанию. Высота параллелепипеда равна $h = \text{П}p\bar{a_3} = \dfrac{|(\bar{c}, \bar{a_3})|}{|\bar{c}|}$, т.е.

$h = \dfrac{|(\bar{a_1} \times \bar{a_2}, \bar{a_3})|}{|\bar{a_1} \times \bar{a_2}|}$ и тогда $V = Sh = |(\bar{a_1} \times \bar{a_2}, \bar{a_3})|$ – объём параллелепипеда, т.е. $V = |det(A^T)| = |det(A)|$. Этим обосновано

**Утверждение.** (Геометрический смысл определителя матрицы.) Модуль определителя матрицы $A$ линейного отображения (22) есть коэффициент искажения объёма отображаемой области.

## §8. Поворот вектора в плоскости $xOy$.

**Задача №7.** Найти координаты вектора $\bar{b}$, образованного поворотом вектора $\bar{a} = \{a_1; a_2\}$ на данный угол $\gamma$ против часовой стрелки.

**Решение.** Пусть $\alpha$ – угол наклона вектора $\bar{a}$. Тогда $\alpha + \gamma$ – угол наклона вектора $\bar{b}$ к оси $Ox$ (см. рис. 11).

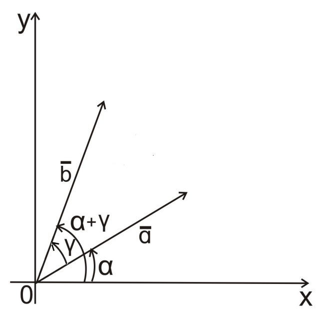


Рис. 11.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно записать так: $\bar{a} = \{a_1, a_2\} = \{|\bar{a}|\cos\alpha, |\bar{a}|\sin\alpha\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2\} = \{|\bar{a}|\cos(\alpha+\gamma), |\bar{a}|\sin(\alpha+\gamma)\} = \{|\bar{a}|(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma), |\bar{a}|(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)\} = \{a_1\cos\gamma - a_2\sin\gamma, a_2\cos\gamma + a_1\sin\gamma\}$. Таким образом, получены формулы для координат вектора $\bar{b} = \{b_1, b_2\}$:

$$\begin{cases} b_1 = a_1\cos\gamma - a_2\sin\gamma \\ b_2 = a_1\sin\gamma + a_2\cos\gamma \end{cases} . \tag{23}$$

Вводя правило умножения матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ на вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ равенством $A\bar{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$,
формулу (23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\gamma & -sin\gamma \\ sin\gamma & cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

При этом матрица $C = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -sin\gamma \\ sin\gamma & cos\gamma \end{pmatrix}$ называется матрицей поворота векторов на угол $\gamma$ против часовой стрелки.

**З а м е ч а н и е.** Матрица $D = \begin{pmatrix} cos\gamma & sin\gamma \\ -sin\gamma & cos\gamma \end{pmatrix}$ определяет поворот векторов по часовой стрелке.

## §9. Комплексные числа

Исторически комплексные числа появились в связи с задачей о нахождении корней кубического уравнения:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0. \tag{25}$$

Преобразуем это уравнение путем замены переменной: $y = x + h$.

$$(x + h)^3 + a(x + h)^2 + b(x + h) + c = 0.$$
$$x^3 + 3hx^2 + 3hx + h^3 + a(x^2 + 2hx + h^2) + b(x + h) + c = 0.$$

Очевидно, что если выбрать параметр $h$ из условия $3h + a = 0$, т. е. $h = -\dfrac{a}{3}$, то после преобразования уравнения (35) принимает вид:

$$x^3 + 3px + q = 0. \tag{26}$$

Приведем это уравнение к системе из 2-х уравнений с неизвестными $\alpha$ и $\beta$, полагая $x = \alpha + \beta$. Тогда получаем:

$$(\alpha + \beta)^3 + 3p(\alpha + \beta) + q = 0$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3p(\alpha + \beta) + q = 0$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Последнее уравнение будет существенно проще, если положить
$\alpha\beta + p = 0$.
Тем самым уравнение (26) приведено к системе к системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \beta^3 = -q \\ \alpha^3\beta^3 = -p^3 \end{cases},$$

решая которую, получаем квадратное уравнение:

$$(\alpha^3)^2 + q\alpha^3 - p^3 = 0. \tag{27}$$

Находим $\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}$, $\beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}$.

$$x = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}}. \tag{28}$$

Мы получили формулу Кардано, которая теряет смысл, если дискриминант квадратного уравнения (27) отрицателен.

Можно доказать, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три корня, дискриминант уравнения (27) отрицателен.

Чтобы формула Кардано (28) не потеряла смысл, мы расширим числовое множество, перейдя от множества точек числовой оси $Ox$ к множеству векторов плоскости $xOy$. Тогда множеству точек оси $Ox$ будет соответствовать множество векторов, параллельных оси $Ox$. Очевидно, что известный нам способ сложения векторов плоскости является продолжением способа сложения чисел, рассматриваемых как векторы вдоль числовой прямой.

Теперь, чтобы оправдать все проделанные преобразования, нам необходимо ввести такое правило умножения векторов плоскости, для которого будут выполнены все правила преобразования, справедливые для операций сложения и умножения чисел:
правило перестановки множителей и правило раскрытия скобок.
Чтобы разумно ввести операцию умножения на множестве векторов, представим векторы в виде:

$$\bar{a} = |\bar{a}|\{\cos\alpha, \sin\alpha\}, \quad \bar{b} = |\bar{b}|\{\cos\beta, \sin\beta\}.$$

Во избежание противоречия с правилом умножения чисел, очевидно, что должно выполняться условие: $|\bar{a}\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|$.

Остается выяснить, как должен определяться угол наклона вектора $\bar{a}\bar{b}$ к оси $Ox$.

Очевидно, что правило определения этого угла не должно противоречить правилу, по которому определяется этот угол при умножении чисел, как векторов, направленных вдоль оси $Ox$.

Исходя из очевидного равенства: $(-1)\cdot(-1) = 1$, иммитирующего умножение единичного вектора $-\bar{i}$ на самого себя, получаем равенство $-\bar{i}\cdot(-\bar{i}) = \bar{i}$.

Но так как вектор $-\bar{i}$ имеет угол наклона $\pi$, а вектор $\bar{i}$ имеет угол наклона $2\pi$, то последнее равенство наводит на мысль, что угол наклона вектора $\bar{a}\bar{b}$ к оси $Ox$ должен определяться, как сумма углов наклона векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ к оси $Ox$.

Итак, получаем правило умножения векторов в виде:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\{\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)\}. \tag{29}$$

В частности, результатом умножения вектора $b$ на единичный вектор $\bar{a} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$. будет вектор, образованный поворотом вектора $b$ на угол $\varphi$.

Теперь убедимся, что введенное таким способом правило умножения векторов удовлетворяет требуемым свойствам операции умножения:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a} \tag{30}$$

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} \tag{31}$$

Справедливость правила (30) – очевидна. В справедливости правила (31) легко убедиться, предположив, без ограничения общности, что вектор $\bar{a}$ единичный, т. е. $\bar{a} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$.
Заметим, что вектор в левой части равенства (31) получается как сумма векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ с последующим его поворотом на угол $\varphi$. Вектор в правой части этого равенства получается путем поворота векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ на угол $\varphi$ с последующим их сложением. Равенство обоих этих векторов очевидна. Такое наше рассуждение вполне обосновывает справедливость формулы (31).

**Определение.** Векторы плоскости с введенной по формуле (29) операцией умножения, называются комплексными числами.

Теперь мы можем решить уравнение: $z^2 = \{-1; 0\}$, где $z$ — вектор плоскости.

Очевидно, что решением этого уравнения является единичный вектор $\bar{j} = \left\{\cos\dfrac{\pi}{2}; \sin\dfrac{\pi}{2}\right\} = \{0; 1\}$, ибо

$$\bar{j}^2 = \bar{j}\bar{j} = \{\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\}\{\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}\} = \{\cos\pi, \sin\pi\} = \{0; 1\}.$$

Обозначая векторы плоскости $xOy$, направленные вдоль числовой оси $Ox$ привычным образом, в виде обыкновенных чисел, а векторы, направленные вдоль оси $Oy$ – в виде $ci$, где $i$ – единичный вектор вдоль оси $Oy$,

получаем $i^2 = -1$.
Таким образом, числа $z_{1,2} = \pm i$ являются решением уравнения $z^2 = -1$.

Отныне комплексные числа мы будем писать в виде разложения вектора $z$ по базису векторов $1, i$, т. е. в виде: $z = a + bi$.
Такая форма записи называется алгебраической, в отличии от тригонометрической формы, рассмотренной ранее. Тогда произведение векторов $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ можно находить, пользуясь правилом (31) раскрытия скобок с учетом равенства $i^2 = -1$, т.е.

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2 = \\ = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i.$$

**Определение.** Числа $z_1 = a+bi$ и $z_2 = a-bi$ называются комплексно сопряженными. Очевидо, что тогда числа $z_1 z_2$ и $z_1 + z_2$ – действительные.

Заметим, что входящие в формулу Кардано величины

$$\alpha^3 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{и} \quad \beta^3 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

являются комплексно сопряженными, если числа $p$ и $q$ действительные, а число $\dfrac{p^2}{4} + q$ отрицательное. Последний шаг, оправдывающий вывод формулы Кардано, мы сделаем ниже, когда определим операцию извлечения корня из комплексного числа. Можно доказать, что числа $\alpha$ и $\beta$ представляют собой пары комплексно сопряженных чисел, а значит все корни уравнения (37) окажутся действительными.

Тот факт, что произведение комплексно сопряженных чисел — действительное число, используется при решении уравнения $(a+bi)z = c+di$. Для этого равенство умножается на число $a - bi$, являющееся сопряженным знаменателю. При этом операцию нахождения решения уравнения можно рассматривать как определение деления комплексных чисел:

$$z = \frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{ac + bd + (ad - bc)i}{a^2 + b^2}$$

Для возведения комплексного числа $z$ в степень, а также для решения уравнения $w^n = z$ комплексное число $z = a + bi$ удобно представить в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Угол наклона $\varphi$ к оси $Ox$ числа $z$ определяется по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{a}{|z|}\right), & \text{если}\, \varphi \in [0;\, \pi], \\ -\arccos\left(\dfrac{a}{|z|}\right) + 2\pi, & \text{если}\, \varphi \in [\pi;\, 2\pi]. \end{cases}$$

Решая уравнение $w^n = z$, $w^n = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и записывая комплексное число $w$ в виде

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

находим: $w^n = |w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.
Очевидно, что комплексные числа, записанные в тригонометрической форме равны, если равны их модули, а аргументы отличаются на величину кратную $2\pi$. Таким образом, из равенства

$$|w|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

находим модуль и аргумент комплексного числа $w$

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

При этом множество решений уравнения $w^n = z$ обозначают в традиционном виде, как $w = \sqrt[n]{z}$.

Пример. Вычислить $w = \sqrt[3]{z}$, $z = -3 - 4i$
Решение. Очевидно, что $\varphi \in [\pi;\, 2\pi]$. Находим $|z| = 5$, $|w| = 1,71$,
$\cos\varphi = -0,6$, $\varphi = 2\pi - \arccos(-0,6) = 4,069$,
$\psi_0 = \dfrac{4,069}{3} = 1,356, \psi_1 = \dfrac{4,069 + 2\pi}{3} = 3,451, \psi_2 = \dfrac{4,069 + 4\pi}{3} = 5,545,$
$\cos\psi_0 = 0,213$, $\sin\psi_0 = 0,977$, $\cos\psi_1 = -0,9525$, $\sin\psi_1 = -0,3045$,
$\cos\psi_2 = 0,7397$, $\sin\psi_2 = -0,6730$.
По формуле $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ находим:
$w_0 = 1,71(0,213 + 0,977i) = 0,364 + 1,671i$,
$w_1 = 1,71(-0,9525 - 0,3045i) = -1,629 - 0,521i$,
$w_2 = 1,71(0,7397 - 0,673i) = 1,265 - 1,151i$.

## Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении параметра $\gamma$ векторы $\bar{a} = \{1; 5\}, \bar{b} = \{-3; \gamma\}$
а) коллинеарны;
б) ортогональны?

2. Точки $A(-1; 2)$ и $B(2; 6)$ — вершины параллелограмма, $C(5; 10)$ — точка пересечения его диагоналей. Найти остальные вершины.

3. Найти какой-либо вектор $\bar{e}$ в направлении биссектрисы угла $A$ треугольника $ABC$, если $A(-1; 3), B(2; 7), C(-9; 9)$.

Указание. Построить какой-либо равнобедренный треугольник с вершиной в точке $A$, стороны которого будут лежать на прямых $AB$ и $AC$.

4. Найти точку $D$ пересечения биссектрисы угла А треугольника $ABC$ со стороной $BC$.

Указание. Использовать свойство биссектрисы, основанное на подобии треугольников.

5. Найти вершину $C$ равнобедренного треугольника $ABC$, если $A(-1; 3)$, $B(2; 7)$, $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$, $\angle BAC = 30°$.

Указание. Использовать формулу поворота вектора на данный угол против часовой стрелки.

6. Проверить, лежат ли точки $A(-1; 3)$, $B(4; 5)$, $C(2; -3)$ на одной прямой.

7. Доказать, что множество точек отрезка $AB$ определяется формулой: $\bar{r_M} = (1 - \lambda)\bar{r_A} + \lambda \bar{r_B}$, $\lambda \in [0; 1]$.

8. Доказать, что радиус-вектор $\bar{r_S} = \dfrac{1}{3}(\bar{r_A} + \bar{r_B} + \bar{r_C})$ определяет координаты точки $S$ пересечения медиан треугольника $ABC$.

9. Точка $M$ делит сторону $AB$ треугольника $ABC$ в отношении 2:3, а точка $D$ делит сторону $AC$ в отношении 3:1. Определить, в каком отношении точка $S$ пересечения отрезков $CM$ и $BD$ делит эти отрезки.

Указание. Используя формулу задачи №7 записать вектор $\overline{AS}$ двумя способами: исходя из того, что точка $S$ лежит на отрезке $BD$, а также исходя из того, что точка $S$ лежит на отрезке $CM$. При этом удобно ввести обозначения $\bar{u} = \overline{AB}$, $\bar{v} = \overline{AC}$ и выразить векторы $\overline{CM}$ и $\overline{BD}$ через векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

# Глава 2. Аналитическая геометрия

## §1. О методе Декарта

Французский математик и философ Рене Декарт предложил метод решения, расчитывая, что этим методом можно будет решить едва ли не все математические задачи. Несмотря на то, что этот метод не оказался панацеей, Декарту удалось привести не только класс задач, поддающихся этому методу, но и открыть то, что сейчас называют аналитической геометрией. Суть метода Декарта в том, что он вводил неизвестные, которые впоследствии могли быть определены из уравнений или из систем уравнений. Чтобы проследить суть этого метода, решим одну задачу.

**З а д а ч а №1.** Даны вершины треугольника $ABC$ $A(-5;0)$, $B(7;9)$, $C(5;-5)$. Найти основание высоты (точку $D$), опущенной из вершины $C$ на сторону $AB$ (см. рис. 1).

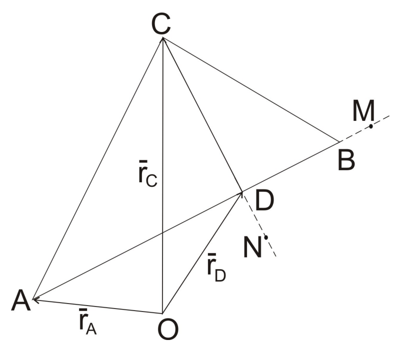


Рис. 1.

**Р е ш е н и е.** Обозначим $\bar{r_D}$ – радиус-вектор точки $D$ и отметим две особенности положения этой точки:

1) Вектор $\overline{CD} = \bar{r_D} - \bar{r_C}$ и вектор $\overline{AB} = \bar{r_B} - \bar{r_A}$ ортогональны, следовательно,

$$(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_D} - \bar{r_C}) = 0. \tag{1}$$

2) Вектор $\overline{AD} = \bar{r_D} - \bar{r_A}$ и вектор $\overline{AB} = \bar{r_B} - \bar{r_A}$ коллинеарны, следовательно, при некотором числе $t$ имеет место равенство $\overline{AD} = t\overline{AB}$, т. е. $\bar{r_D} - \bar{r_A} = t(\bar{r_B} - \bar{r_A})$ или

$$\bar{r_D} = \bar{r_A} + t(\bar{r_B} - \bar{r_A}). \tag{2}$$

Подставляя это выражение в формулу (2), получаем уравнение $(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_A} + t(\bar{r_B} - \bar{r_A}) - \bar{r_C}) = 0$, единственным неизвестным в котором является число $t$.

На основании свойства скалярного произведения приходим к уравнению: $(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_A} - \bar{r_C}) + t(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_B} - \bar{r_A}) = 0$

Находим $\bar{r_B} - \bar{r_A} = \{12; 5\}$, $\bar{r_A} - \bar{r_C} = \{-10; 5\}$,
$(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_B} - \bar{r_A}) = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$,
$(\bar{r_B} - \bar{r_A}, \bar{r_A} - \bar{r_C}) = -120 + 45 = -75$, т. е. $-75 + t \cdot 225 = 0$, $t = \dfrac{1}{3}$.
Из уравнения (2) находим $\bar{r_D} = \{-5; 0\} + \dfrac{1}{3}\{12; 9\} = \{-1; 3\}$.
Таким образом, $D(-1, 3)$ – искомая точка.

**Определение.** Всякое уравнение, определяющее радиус-вектор произвольной точки прямой, называется уравнением прямой.

**Замечание.** Так как для любой точки $N$ прямой $CD$ $\overline{CN} \perp \overline{AB}$, то уравнение (1) справедливо для любой точки $N$, а значит может быть названо уравнением прямой $CN$.

Аналогично, любая точка $M$ прямой $AB$ удовлетворяет уравнению (2), а значит оно также может быть названо уравнением прямой $AB$. Мы убедились, что такому геометрическому объекту, как прямая на плоскости, может быть сопоставлено уравнение, в основе которого лежит либо условие ортогональности, либо условие коллинеарности векторов. Образно выражаясь, такое уравнение является полномочным Алгебраическим представителем прямой как геометрического объекта.

Ввиду сказанного, в аналитической геометрии выделяются задачи, связанные с нахождением уравнений таких геометрических объектов, как прямая, отрезок прямой, плоскость или часть плоскости. В следующем параграфе мы выделим некоторые стандартные задачи, связанные с нахождением таких уравнений.

## §2. Уравнение прямой в плоскости с заданным направляющим вектором.

**Определение.** Любой вектор $\bar{s}$, параллельный данной прямой, называют направляющим вектором этой прямой.

**Задача №2.** Пусть $\bar{s} = \{s_1, s_2\}$ – направляющий вектор прямой $l$ и $M(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая этой прямой.
Найти уравнение прямой $l$.

**Р е ш е н и е.** Так как мы собираемся найти уравнение прямой, т. е. уравнение, определяющее радиус-вектор произвольной точки прямой, то эту произвольную точку обозначим $M(x;y)$ (см. рис. 2).

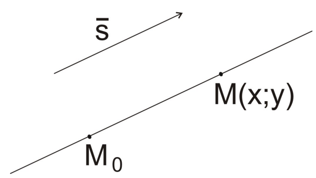


Рис. 2.

Отметим, что точка $M(x;y)$ принадлежит прямой $l$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{s} = \{s_1, s_2\}$ и $\overline{AM} = \bar{r_M} - \bar{r_A} = \{x - x_0, y - y_0\}$ коллинеарны. Записывая условие коллинеарности в виде пропорциональности координат, получаем

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} \tag{3}$$

– каноническое уравнение искомой прямой.

Записывая условие коллинеарности в виде $\overline{AM} = t\bar{s}$, т. е. $\bar{r_M} - \bar{r_A} = t\bar{s}$, получаем векторно-параметрическое уравнение прямой в виде:

$$\bar{r_M} = \bar{r_A} + t\bar{s} \tag{4}$$

Переходя в уравнении (4) к равенству координат, получаем параметрическое уравнение прямой $l$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \end{cases} . \tag{5}$$

**О п р е д е л е н и е.** Всякий вектор $\bar{n}$, ортогональный данной прямой $l$, называют нормальным вектором этой прямой.

**З а д а ч а №3.** Пусть $\bar{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой $l$, лежащей в плоскости $xOy$, и $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка этой прямой (см. рис. 3). Найти уравнение прямой $l$.

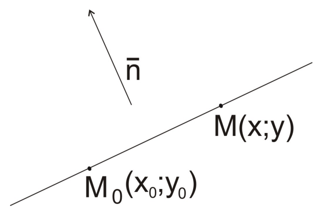


Рис. 3.

**Р е ш е н и е.** Найти уравнение прямой – это значит определить радиус-вектор произвольной точки прямой или, иначе говоря, составить уравнение, связывающее координаты произвольной точки прямой.

Поэтому обозначим $M(x;y)$ – произвольную точку прямой. Тогда $\bar{r} = \{x;y\}$ – ее радиус-вектор. Отметим, что точка $M$ лежит на прямой $l$ тогда и только тогда, когда векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M} = \bar{r_M} - \bar{r_0}$ – ортогональны, т. е. когда их скалярное произведение равно нулю. Получаем векторное уравнение прямой $l$:

$$(\bar{r_M} - \bar{r_0}, \bar{n}) = 0. \qquad (6)$$

Но $\bar{r_M} - \bar{r_0} = \{x - x_0, y - y_0\}$, $\bar{n} = \{A, B\}$, следовательно, уравнение (6) принимает вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (6) и (7) называют уравнениями прямой с заданным нормальным вектором $\bar{n} = \{A, B\}$.

**З а д а ч а №4.** Воспроизвести решение задачи (1), составляя уравнения прямых $CN$ и $AM$ в координатном виде.

**З а д а ч а №5.** $A(-1;3)$, $B(2;5)$, $C(8;3)$. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $C$
а) параллельно прямой $AB$, б) перпендикулярно прямой $AB$.

**Р е ш е н и е.** Вектор $\overline{AB} = \bar{r_B} - \bar{r_A} = (3;2)$ является направляющим для прямой, параллельной прямой AB, следовательно, на основании формул (5) выписываем параметрическое уравнение этой прямой

$$\begin{cases} x = 8 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}.$$

Кроме того, вектор $\overline{AB}$ является нормальным для прямой, перпендикулярной прямой AB, следовательно, на основании формулы (7) выписываем уравнение этой прямой

$$3(x - 8) + 2(y - 3) = 0.$$

## §3. Уравнение прямой в пространстве.

**З а д а ч а №6.** Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой параллельно направляющему вектору $\bar{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ (см. рис. 4).

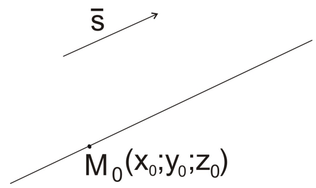


Рис. 4.

**Р е ш е н и е.** Воспроизводя все рассуждения, приведенные при решении задачи (1), получаем векторно-параметрическое уравнение прямой $l$ в виде:

$$\bar{r} = \bar{r_0} + t\bar{s},\ t \in R, \tag{8}$$

на основании которого получаем параметрические уравнения этой прямой в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + ts_1 \\ y = y_0 + ts_2 \\ z = z_0 + ts_3 \end{cases},t \in R \tag{9}$$

Исключая параметр $t$ из уравнений (9), получаем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}. \tag{10}$$

**З а м е ч а н и е.** Весьма полезно по заданному уравнению прямой в пространстве определить ее направляющий вектор и какую-нибудь точку. В связи с этим предлагается

**З а д а ч а №7.** Найти направляющий вектор прямой и какую-либо ее точку, если $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{5}$ – каноническое уравнение ее.

**Р е ш е н и е.** Сравнивая заданное уравнение с уравнением (10), находим, что $\bar{s} = \{2; -3; 5\}$ – направляющий вектор прямой. Полагая,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{5} = t,\ t \in R$$

перейдем к параметрическому уравнению заданной прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 5t \end{cases}, \quad t \in R$$

Полагая, например, $t = 1$ получаем $x = 3$; $y = -5$; $z = 5$, т. е. $M_1(3; -5; 5)$ одна из точек прямой. При $t = 0$ получаем точку $M_0(1; -2; 0)$ и т. д.

**Задача №8.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(-5; 2; 3)$ параллельно прямой $l : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ (см. рис. 5).

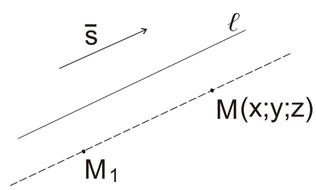


Рис. 5.

**Решение.** Заметим, что направляющий вектор $\bar{s} = \{-2; 3; 4\}$ прямой $l$ является также и направляющим вектором искомой прямой.

Теперь, обращаясь к формуле (10), можем написать
$\dfrac{x+5}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ – искомое уравнение прямой.

**Замечание.** Весьма полезно умение решать эту задачу путем непосредственного воспроизведения идеи решения, т. е. ввести произвольную точку $M(x, y, z)$ прямой и записать условие коллинеарности векторов $\bar{s}$ и $\overline{M_1M}$ в какой-либо форме, получая уравнение искомой прямой либо в векторно-параметрическом, либо в параметрическом, либо в каноническом виде.

## §4. Уравнение плоскости в пространстве.

Ориентацию плоскости в пространстве можно задать каким-либо вектором $\bar{n}$, перпендикулярным этой плоскости. Такой вектор называется нормальным вектором данной плоскости.

**Задача №9.** Найти уравнение плоскости, нормальный вектор которой равен $\bar{n} = \{A, B, C\}$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на плоскости.

**Р е ш е н и е.** Уравнение плоскости – это уравнение, определяющее радиус-вектор произвольной точки $M$ плоскости, или иначе – это уравнение, связывающее координаты произвольной точки плоскости.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда векторы $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r_0}$ и $\bar{n}$ ортогональны (см. рис. 6). Из условия ортогональности получаем:

$$(\bar{r} - \bar{r_0}, \bar{n}) = 0$$

– векторное уравнение искомой плоскости.

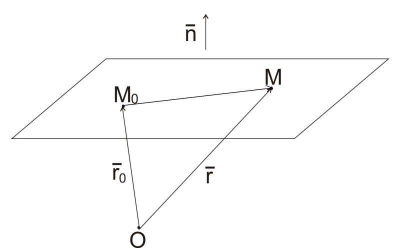


Рис. 6.

Но $\bar{r} - \bar{r_0} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, следовательно, переходя к координатам, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{10}$$

– уравнение плоскости с нормальным вектором.

Нетрудно доказать, что общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{11}$$

**З а м е ч а н и е.** По заданному уравнению плоскости оказывается весьма полезным определить нормальный вектор плоскости и какую-либо ее точку.

**З а д а ч а №10.** Указать нормальный вектор, а так же найти какую-либо точку плоскости $3x - y + 2z - 10 = 0$.

**Р е ш е н и е.** Сравнивая наше уравнение с уравнением (2), находим, что $\bar{n} = \{3; -1; 2\}$ – нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости представляет собой линейное уравнение с тремя неизвестными, имеющее бесконечно много решений. Выразим какое-либо неизвестное через остальные, например, $y = 3x + 2z - 10$. Чтобы выделить какое-либо конкретное решение из бесконечного множества решений, зададим, например, $x = 0$, $z = 1$. Тогда $y = -8$, т. е. точка $M_0(0; -8; 1)$ лежит в плоскости.

**З а д а ч а №11.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1; 8; -2)$, перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

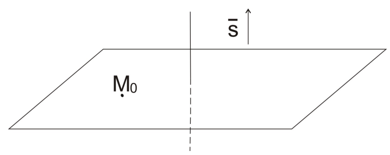


Рис. 7.

**Р е ш е н и е.** Заметим, что направляющий вектор $\bar{s} = \{4; 3; -2\}$ прямой является нормальным вектором плоскости (см. рис. 7). Поэтому на основании формулы (11) получаем искомое уравнение плоскости в виде $4(x+1) + 3(y-8) - 2(z-2) = 0$

**У п р а ж н е н и е.** Решить задачу №11, введя произвольную точку $M(x, y, z)$ плоскости, и воспользовавшись условием перпендикулярности векторов $\overline{M_0M} = \bar{r}_M - \bar{r}_{M_0}$ и $\bar{s} = \{4; 3; -2\}$.

**З а д а ч а №12.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4; -2; 5)$, перпендикулярно плоскости $3x + y - 6z + 10 = 0$ (рис. 8).

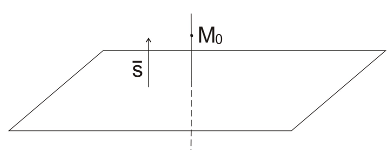


Рис. 8.

**Р е ш е н и е.** На основании уравнения плоскости находим ее нормальный вектор $\bar{n} = \{3; 1; -6\}$, который является направляющим вектором $\bar{s}$ искомой прямой. Теперь по направляющему вектору и точке выписываем искомое уравнение прямой: $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{-6}$.

**У п р а ж н е н и е.** Задачу №12 решить, исходя не из готовой формулы, а из основной идеи. Для этого надо ввести произвольную точку $M(x, y, z)$ прямой и воспользоваться условием коллинеарности векторов $\bar{n}$ и $\overline{M_0M} = \bar{r}_M - \bar{r}_{M_0}$ в виде пропорциональности координат этих векторов.

## §5. Некоторые стандартные приемы решения задач.

Для решения задач по аналитической геометрии полезно овладеть некоторыми стандартными приемами. Следующие ниже задачи №13-24 иллюстрируют такие приемы решения.

**Задача №13.** Определить координаты точки пересечения прямой $l: \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-5}{2}$ и плоскости $Q: 5x+6y+2z+13=0$.

**Решение.** Запишем уравнение прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 5t+6 \\ y = 6t+2 \quad .t \in R \\ z = 2t+5 \end{cases}$$

При некотором значении параметра $t$ точка прямой окажется в плоскости, т. е. ее координаты будут удовлетворять уравнению плоскости. Следовательно, $5(5t+6)+6(6t+2)+2(2t+5)+13=0$; $65t+65=0$; $t=-1$. Подставляя это значение в параметрическое уравнение прямой, находим $x=1$, $y=-4$, $z=3$.
Ответ: $N(1;-4;3)$ – искомая точка.

**Задача №14.** Найти уравнение линии пересечения плоскостей

$$\begin{cases} 3x-y+2z-10=0 \\ 5x+2y-3z+15=0 \end{cases}.$$

**Решение.** Объявляем переменную $z$ свободной и исключаем переменную $y$ из уравнений. Получаем $11x+z-5=0$. Полагая $z=11t+5$, получаем $x=-t$. $y=3x+2z-20=-3t+2(11t-5)-20=19t-30$. Т. е.

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 19t-30 \\ z = 11t+5 \end{cases}$$

– параметрическое уравнение прямой. Исключая параметр $t$, находим
$\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+30}{19} = \dfrac{z-5}{11}$ – каноническое уравнение прямой.

**Задача №15.** Найти острый угол между плоскостями $Q_1$ и $Q_2$ (см. рис. 9). $Q_1: 3x-y+2z-10=0$, $Q_2: x+2y-3z+15=0$,
находим $\bar{n_1} = \{3;-1;2\}$ – нормальный вектор плоскости $Q_1$,
$\bar{n_2} = \{1;2;-3\}$ – нормальный вектор плоскости $Q_2$.

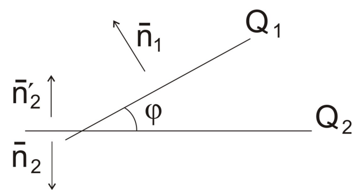


Рис. 9.

Находим $(\bar{n_1}, \bar{n_2}) = 3 - 2 - 6 = -5$, следовательно, $\widehat{\bar{n_1}, \bar{n_2}}$ – тупой угол. Берем противоположный вектор $\bar{n_2}' = \{-1; -2; 3\}$. Тогда $(\bar{n_1}, \bar{n_2}') = 5$. Находим $cos\varphi = \dfrac{(\bar{n_1}, \bar{n_2}')}{|\ \bar{n_1}\ ||\ \bar{n_2}'\ |} = \dfrac{5}{\sqrt{9+1+4}\sqrt{1+4+12}} = 0.32$, $\varphi \simeq 71°$.

**Задача №16.** Определить взаимное положение плоскости $Q : x + 2y - 3z + 15 = 0$ и прямой $l$.

$$l : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in R.$$

**Решение.** Из уравнения прямой в векторно-параметрическом виде: $\bar{r} = \bar{r_0} + t\bar{s}$, находим направляющий вектор прямой $\bar{s} = \{4; 1; 2\}$ и одну из ее точек $A(2; -1; 5)$.

Находим $\bar{n} = \{1; 2; -3\}$ – нормальный вектор плоскости. Так как $(\bar{s}, \bar{n}) = 4 + 2 - 6 = 0$, то прямая либо параллельна плоскости, либо лежит в плоскости. Но так как координаты точки $A$ удовлетворяют уравнению плоскости $Q$, то прямая $l$ лежит в плоскости.

**Задача №17.** (Пример применения векторного произведения). Найти уравнение прямой, проходящей через точку $C(6; 3; 0)$ перпендикулярно прямым $l_1$ и $l_2$ (см. рис. 10).

$l_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+12}{8} = \dfrac{z-4}{-1}$, $\quad l_2 : \dfrac{x-8}{5} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{2}$.

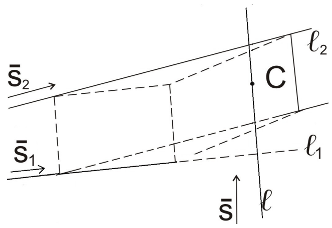


Рис. 10.

**Р е ш е н и е.** На основании уравнений прямых находим их направляющие векторы $\bar{s_1} = \{3; 8; -1\}$, $\bar{s_2} = \{5; 6; 2\}$. Находим направляющий вектор искомой прямой $l : \bar{s} = \bar{s_1} \times \bar{s_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 8 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bar{k} = 22\bar{i} - 11\bar{j} - 22\bar{k}$. В частности, и вектор $\bar{s}' = \frac{1}{11}\bar{s} = \{2; -1; -2\}$ является направляющим для прямой $l$.

Наконец, по заданной точке $C(6; 3; 0)$ и вектору $\bar{s}'$ находим уравнение прямой: $\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{-2}$.

**З а д а ч а №18.** (Пример использовния условия компланарности). Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $B(6; 2; 5)$, перпендикулярно линии $l$ пересечения плоскостей $P_1$ и $P_2$.
$P_1 : 7x + 10y + 2z - 72 = 0$, $P_2 : 3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

**Р е ш е н и е.** Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости $Q$. Заметим, что плоскости $P_1$ и $P_2$ перпендикулярны искомой плоскости, т. к. проходят через прямую $l$, перпендикулярную этой плоскости (рис. 11).

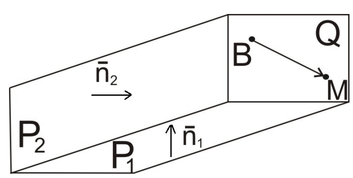


Рис. 11.

Следовательно, нормальные векторы этих плоскостей $\bar{n_1} = \{7; 10; 2\}$, $\bar{n_2} = \{3; -2; 4\}$ параллельны плоскости $Q$, а значит векторы $\bar{n_1}$, $\bar{n_2}$ и $\overline{BM} = \bar{r_M} - \bar{r_B} = \{x - 6; y - 2; z - 5\}$ компланарны. Из условия компланарности получаем искомое уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-2 & z-5 \\ 7 & 10 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$44(x-6)-22(y-2)-44(z-5)=0,\ 2(x-6)-(y-2)-2(z-5)=0,$
$2x-y-2z=0$ – искомая плоскость.

**Задача №19.** (Пример определения расстояний с помощью проекции вектора на вектор). Найти расстояние от точки $M(3;-5;1)$ до прямой $l: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+12}{8}=\dfrac{z-4}{-1}$ (см. рис. 12).

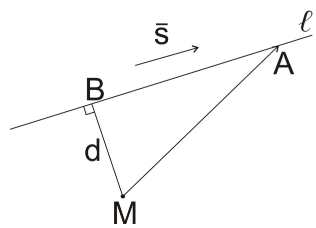


Рис. 12.

**Решение.** Возьмем какую-либо точку прямой, например, точку $A(10;20;0)$ (см. задачу №6). Найдем длину $p$ вектора $\overline{AB}$ как абсолютную величину проекции вектора $\overline{MA}=\bar{r_A}-\bar{r_M}=\{7;25;-1\}$ на направляющий вектор $\bar{s}=\{3;8;-1\}$.
$|\ \overline{AB}\ |=p=|\text{Пр}_{\bar{s}}\overline{MA}\ |=\dfrac{(|\ \overline{MA},\bar{s})\ |}{|\ \bar{s}\ |}=\dfrac{|\ 21+200+1\ |}{\sqrt{3^2+8^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{222}}{\sqrt{74}}=\sqrt{3}.$
Теперь по теореме Пифагора находим искомое расстояние:
$d=\sqrt{|\overline{MA}|^2-p^2}=\sqrt{7^2+25^2+1^2-3}=\sqrt{672}.$

**Задача №20.** (Пример использования условия перпендикулярности векторов). Найти проекцию точки $M_0(3;-5;1)$ на прямую $l$, заданную уравнением: $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-5}{2}$ (см. рис. 13).

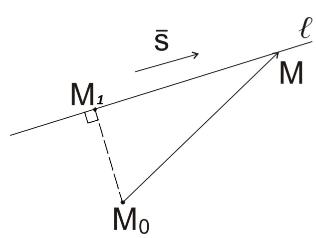


Рис. 13.

**Р е ш е н и е.** Переходя к параметрическому уравнению прямой $l$, заметим, что при любом значении числа $t$ точка $M(5t+6; 6t+2; 2t+5)$ принадлежит этой прямой. Тогда $\overline{M_0M} = \bar{r_M} - \bar{r_0} = \{5t+3; 6t+7; 2t+4\}$. Для искомой точки выполняется условие: $\overline{M_0M} \perp \bar{s}$, где $\bar{s} = \{5; 6; 2\}$ – направляющий вектор прямой, следовательно, $(\overline{M_0M}, \bar{s}) = 0$,
т. е. $5(5t+3)+6(6t+7)+2(2t+4) = 0$, т. е. $65t+65 = 0$, $t = -1$. При этом значении параметра $t$ точка $M$ прямой занимает искомое положение,
т. е. $M_1(1; -4; 3)$ – искомая точка.

**З а д а ч а №21.** (Применение уравнения связки плоскостей). Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $B(8; 1; 3)$ и линию пересечения плоскостей $P_1$ и $P_2$.
$P_1 : 7x+10y+2z+126 = 0,\ P_2 : 3x-2y+4z-12 = 0.$

**Р е ш е н и е.** Заметим, что все плоскости, проходящие через линию пересечения плоскостей $P_1$ и $P_2$ определяются так называемым уравнением связки плоскостей: $\gamma_1(7x+10y+2z+126)+\gamma_2(3x-2y+4z-12) = 0$, где $\gamma_1$ и $\gamma_2$ – параметры.

Точка $B$, лежащая в искомой плоскости при некотором соотношении параметров $\gamma_1$ и $\gamma_2$ должна удовлетворять уравнению связки плоскостей, следовательно, подставляя ее координаты, получаем уравнение:
$\gamma_1(7\cdot 8+10\cdot 1+2\cdot 3+126)+\gamma_2(3\cdot 8-2\cdot 1+4\cdot 3-12) = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -9\gamma_1$.
Подставляя это в уравнение связки, получаем:

$$7x+10y+2z+126-9(3x-2y+4z-12) = 0,$$

т. е. $-20x+28y-34z+234 = 0$ — искомое уравнение плоскости.

Иногда задача требует применения совокупности указанных приемов решения.

**З а д а ч а №22.** (Применение условия компланарности и переход к параметрическим уравнениям прямых). Найти точку пересечения прямых $l_1$ и $l_2$, $l_1 : \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y-2}{6} = \dfrac{z-5}{2},\ \ l_2 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+12}{8} = \dfrac{z-4}{-1}$, предварительно убедившись в том, что эти прямые пересекающиеся.

**Р е ш е н и е.** Очевидно, что $M_1(6; 2; 5)$ и $M_2(-2; -12; 4)$ – точки на прямых $l_1$ и $l_2$ соответственно. Прямые $l_1$ и $l_2$ пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\bar{s_1} = \{5; 6; 2\}$, $\bar{s_2} = \{3; 8; -1\}$ и $\overline{M_2M_1} = \{8; 14; 1\}$ – компланарны. Находим определитель 3-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \\ 8 & 14 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 110-66-44 = 0.$$

Т. к. $\Delta = 0$, то прямые пересекаются. Запишем уравнение прямых в параметрическом виде:

$$l_1: \begin{cases} x = 5t_1 + 6 \\ y = 6t_1 + 2 \\ z = 2t_1 + 5 \end{cases}, t_1 \in R \qquad l_2: \begin{cases} x = 3t_2 - 2 \\ y = 8t_2 - 12 \\ z = -t_2 + 4 \end{cases}, t_2 \in R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5t_1 + 6 = 3t_2 - 2 \\ 6t_1 + 2 = 8t_2 - 12 \\ 2t_1 + 5 = -t_2 + 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 5t_1 - 3t_2 = -8 \\ 6t_1 - 8t_2 = -14 \\ 2t_1 + t_2 = -1 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получаем $t_2 = 1$, $t_1 = -1$ (совместность этой системы подтверждает существование точки пересечения). Из уравнений прямых находим: $x = 1, y = -4, z = 3$. Т. е. $Q(1; -4; 3)$ – точка пересечения прямых.

**Задача №23.** Найти уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым $l_1$ и $l_2$
$l_1: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+12}{8} = \dfrac{z-4}{-1}$, $l_2: \dfrac{x-8}{5} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{2}$.

**Решение.** Обозначим $\bar{s_1} = \{3; 8; -1\}$ и $\bar{s_2} = \{5; 6; 2\}$ – направляющие векторы прямых (рис. 14). $\bar{r_{02}} = \{8; 1; 3\}$, $\bar{r_{01}} = \{-2; -12; 4\}$ – радиусы-векторы точек на прямых $l_2$ и $l_1$ соответственно. Запишем уравнения прямых в векторно-параметрическом виде: $\bar{r_1} = \bar{r_{01}} + t_1\bar{s_1}$, $\bar{r_2} = \bar{r_{02}} + t_2\bar{s_2}$. Находим $\bar{r_2} - \bar{r_1} = \bar{r_{02}} - \bar{r_{01}} + t_2\bar{s_2} - t_1\bar{s_1}$.

При некоторых значениях $t_1$ и $t_2$ будем иметь:

$$\begin{cases} \bar{r_2} - \bar{r_1} \perp \bar{s_1} \\ \bar{r_2} - \bar{r_1} \perp \bar{s_1} \end{cases} \qquad \text{т.е.} \begin{cases} (\bar{r_2} - \bar{r_1}, \bar{s_1}) = 0 \\ (\bar{r_2} - \bar{r_1}, \bar{s_2}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} (\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}} + t_2\bar{s_2} - t_1\bar{s_1}, \bar{s_1}) = 0 \\ (\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}} + t_2\bar{s_2} - t_1\bar{s_1}, \bar{s_2}) = 0 \end{cases}$$

$$\text{т.е.} \begin{cases} (\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}}, \bar{s_1}) + t_2(\bar{s_2}, \bar{s_1}) - t_1(\bar{s_1}, \bar{s_1}) = 0 \\ (\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}}, \bar{s_2}) + t_2(\bar{s_2}, \bar{s_2}) - t_1(\bar{s_1}, \bar{s_2}) = 0 \end{cases}.$$

Находим $\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}} = \{10; 13; -1\}$, $(\bar{s_1}, \bar{s_1}) = 3^2 + 8^2 + 1^2 = 74$, $(\bar{s_2}, \bar{s_2}) = 5^2 + 6^2 + 2^2 = 65$, $(\bar{s_1}, \bar{s_2}) = (\bar{s_2}, \bar{s_1}) = 15 + 48 - 2 = 61$.

$(\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}}, \bar{s_1}) = 10 \cdot 3 + 13 \cdot 8 - 1 \cdot (-1) = 135$,
$(\bar{r_{02}} - \bar{r_{01}}, \bar{s_2}) = 10 \cdot 5 + 13 \cdot 6 - 1 \cdot 2 = 126$. Получаем

$$\begin{cases} 135 + 61t_2 - 74t_1 = 0 \\ 126 - 61t_1 + 65t_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 61(t_2 + 1) - 74(t_1 - 1) = 0 \\ 65(t_2 + 1) - 61(t_1 - 1) = 0 \end{cases} \quad , t_2 = -1, t_1 = 1.$$

$\Rightarrow \bar{s} = \bar{r_2} - \bar{r_1} = \{10; 13; -1\} - \{5; 6; 2\} - \{3; 8; -1\} = \{2; -1; -2\}$ – направляющий вектор искомой прямой.

Находим $\bar{r_1} = \bar{r_{01}} + t_1\bar{s_1} = \bar{r_{02}} - \bar{r_{01}} + t_2\bar{s_2} - t_1\bar{s_1} = \{-2; -12; 4\} + \{3; 8; -1\} = \{1; -4; 3\}$ – т. е. $M_1(-5; -20; 5)$ – точка на искомой прямой и $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$ – искомая прямая в каноническом виде.

**Замечание.** Эту задачу можно было решать иначе: 1) Найти нормальные векторы плоскостей параллелизма $P_1$ и $P_2$ (рис. 14).

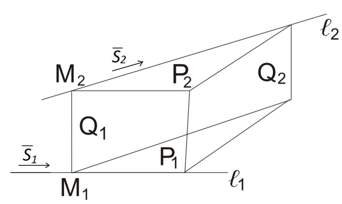


Рис. 14.

2) Найти уравнение плоскости $Q_1$, проходящей через прямую $l_1$, параллельно вектору $\bar{n} = \bar{s_1} \times \bar{s_2}$ (воспользоваться условием компланарности).

3) Найти уравнение плоскости $Q_2$ аналогично п. 2.

4) Найти искомую прямую $M_1M_2$ как линию пересечения плоскостей $Q_1$ и $Q_2$.

**Задача №24.** Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $l_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+12}{8} = \dfrac{z-4}{-1}$ и $l_2 : \dfrac{x-8}{5} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-3}{2}$.

**Указание.** 1) Найти нормальный вектор плоскостей параллелизма $\bar{n} = \bar{s_1} \times \bar{s_2}$.

2) Взять какие-либо точки $M_1$ и $M_2$ на прямых $l_1$ и $l_2$ соответственно (см. рис. 15).

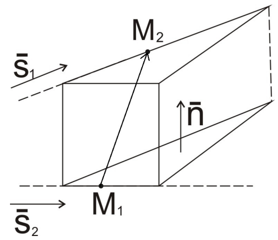


Рис. 15.

3) Найти $d = |\text{Пр}_{\bar{n}} \overline{M_1 M_2}\ |$ – искомое расстояние.

## §6. Кривые второго порядка.

Метод Декарта позволяет так же представить такие кривые как эллипс, гипербола и парабола в виде уравнений. Вид этих уравнений зависит от выбора базиса.

**Определение.** Окружность – это множество точек плоскости равноудаленных на некоторое расстояние $R$ от данной точки $C$ – центра окружности (см. рис. 16).

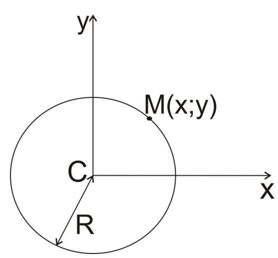


Рис. 16.

Выберем декартову систему координат с центром в точке $C$. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка окружности. Тогда $\overline{CM} = \{x;y\}$ – радиус-вектор. По условию $|\ \overline{CM}\ | = R$, т. е. $|\ \overline{CM}\ |^2 = R^2$, т. е. $x^2 + y^2 = R^2$ – уравнение окружности.

Нетрудно установить, что если центр окружности $C(x_0, y_0)$ не совпадает с началом координат, то уравнение окружности будет иметь вид: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

**Определение.** Эллипс – это множество точек $M$ плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек $F_1$ и $F_2$, называемых фокусами, есть величина постоянная, т. е. $|\ \overline{F_1 M}\ | + |\ \overline{F_2 M}\ | = const$ (см. рис. 17).

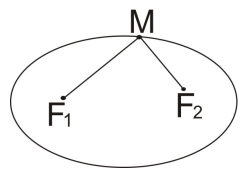


Рис. 17.

Обозначим $2c$ – расстояние между фокусами, $2a$ – длину ломаной $F_1MF_2$. Очевидно, $a > c$. Выберем систему координат $xOy$ с началом в середине отрезка $F_1F_2$ и осью $Ox$ – вдоль этого отрезка.

Тогда $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – координаты фокусов (см. рис. 18).

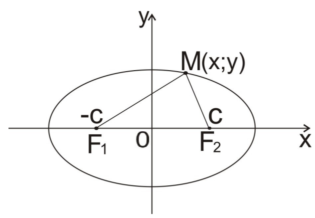


Рис. 18.

$\overline{F_1M} = \bar{r_M} - \bar{r_1} = \{x+c;y\}$, $\overline{F_2M} = \bar{r_M} - \bar{r_2} = \{x-c;y\}$. Из определения эллипса имеем: $|\ \overline{F_1M}\ | + |\ \overline{F_2M}\ | = 2a$, т. е. $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} +$ $+ \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. После преобразований получим: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Обозначая $b^2 = a^2 - c^2$, получаем **каноническое уравнение эллипса**: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Нетрудно заметить, что $a$ – длина большой полуоси эллипса, $b$ – длина малой полуоси. Наконец, уравнение $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – определяет эллипс в точке с центром в точке $C_0(x_0, y_0)$.

**Определение.** Гипербола – это множество точек $M$ плоскости, для которых разность расстояний до двух данных точек $F_1$ и $F_2$ – есть величина постоянная (см. рис. 19).

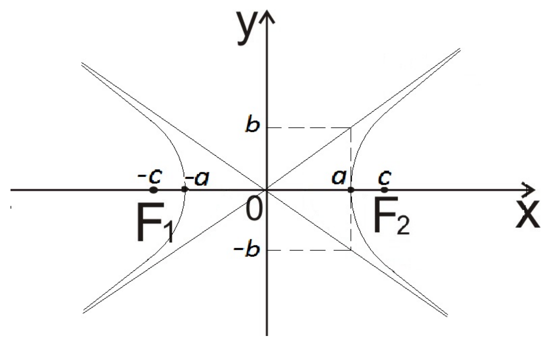


Рис. 19.

Выбирая систему координат также, как и в случае эллипса получим, что точки гиперболы удовлетворяют уравнению: $\| \overline{F_1M} \mid - \mid \overline{F_2M} \| = 2a$. Очевидно, что $a < c$. Получаем уравнение $\mid \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \mid = 2a$, которое после элементарных преобразований приводится к виду: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2-a^2} = 1$. Полагая $b^2 = c^2 - a^2$, получим **каноническое уравнение гиперболы** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы, т. к. можно доказать, что расстояние точек гиперболы до этих прямых неограничено убывает при $x \to \infty$.

Уравнение $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – определяет гиперболу с центром в точке $C_0(x_0, y_0)$.

**Определение.** Парабола – это множество точек $M$ плоскости, равноудаленных от точки $F$ – фокуса и от данной прямой $l$ – директрисы.

Обозначая через $p$ – расстояние между точкой $F$ и прямой $l$, и выбирая систему координат так, как показано на рисунке 20, из равенства $d = \mid \overline{FM} \mid$ получаем $\mid x + \dfrac{p}{2} \mid = \sqrt{(x-\dfrac{p}{2})^2 + y^2}$.

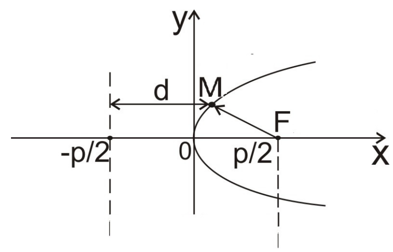


Рис. 20.

После элементарных преобразований находим: $y^2 = 2px$ – **каноническое уравнение параболы** с ветвями вправо (при $p > 0$).
Очевидно, что $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ – уравнение параболы с центром в точке $C_0(x_0, y_0)$, а уравнение $x^2 = 2py$ определяет параболу с ветвями вверх при $p > 0$.

Оказывается, что гиперболу и эллипс можно определить как множество точек, для которых отношение расстояний до фокуса и до директрисы – величина постоянная, обозначаемая через $\varepsilon$, и называемая эксцентриситетом. Причем, если $\varepsilon > 1$, то получаем гиперболу, если $\varepsilon < 1$ – эллипс, если $\varepsilon = 1$ – параболу. Оказывается, что $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ и $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ – уравнения директрис.

Если теперь ввести полярную систему координат $(r, \varphi)$, где $r$ – расстояние от точки до полюса, $\varphi$ – угол наклона к оси $Ox$ и выбрать в качестве полюса правый фокус, любой из наших кривых (см. рис. 21), то ее уравнение в такой системе координат принимает вид: $r = \dfrac{\rho}{1 - \varepsilon cos(\varphi)}$, где $\rho$ – параметр, $\varepsilon$ – эксцентриситет кривой. Такое представление кривых второго порядка удобно в небесной механике для изучения движений небесных тел.

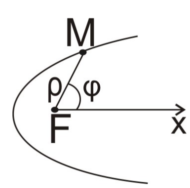


Рис. 21.

## §7. Поверхности второго порядка. Метод сечений.

Чтобы распознать, какую поверхность представляет то или иное уравнение, применяется метод секущих плоскостей.

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – уравнение эллипсоида с центром в начале координат, ибо в сечении плоскостью $z=0$ получаем эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и т. д.

Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ определяет однополостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью аппликат (рис. 22). В сечении плоскостью $z=h, h\in R$, после преобразования получаем эллипс, определяемый уравнением $\dfrac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\dfrac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1$. Полуоси этого эллипса растут вместе с ростом величины $h$. В сечении плоскостью $x=0$ получаем гиперболу $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ и т. д.

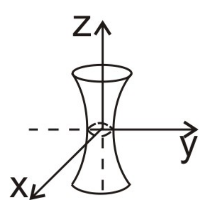


Рис. 22.

Уравнение $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ определяет двуполостный гиперболоид, ибо в сечении плоскостью $z=h, |h|>c$ получаем эллипс

$\dfrac{x^2}{a^2(\frac{h^2}{c^2}-1)}+\dfrac{y^2}{b^2(\frac{h^2}{c^2}-1)}=1$, а в сечении плоскостью $x=0$ получаем гиперболу $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (см. рис. 23).

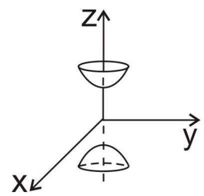


Рис. 23.

Уравнение $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ определяет эллиптический параболоид с осью, совпадающей с осью аппликат, ибо в сечении плоскостью $z = h, h > 0$ получаем эллипс $\dfrac{x^2}{a^2 h} + \dfrac{y^2}{b^2 h} = 1$, а в сечении плоскостью $x = 0$ получаем параболу $z = \dfrac{y^2}{b^2}$ (см. рис. 24).

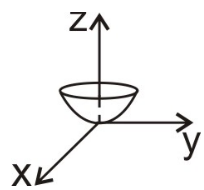


Рис. 24.

Уравнение $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ определяет круговой конус, ибо в сечении плоскостью $z = h, h > 0$ имеем окружность $x^2 + y^2 = h^2$, а в сечении плоскостью $x = 0$ получаем пару прямых $z = \pm y$ (см. рис. 25).


Рис. 25.

Уравнение $z = -x^2 + y^2$ определяет гиперболический параболоид (седловую поверхность), ибо в сечении плоскостью $z = h, h \in R$ получаем гиперболу $-x^2 + y^2 = h$, в сечении плоскостью $x = 0$ – параболу $z = y^2$, в сечении плоскостью $y = 0$ – параболу $z = -x^2$ (см. рис. 25).

## Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A_1(-2;-12;4)$, $B_1(6;2;5)$, $C_1(4;4;2)$.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $C_2(6;3;0)$ и перпендикулярную прямым $l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+12}{8} = \frac{z-4}{-1}$, $l_2 : \frac{x-8}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{2}$.

3. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой, заданной плоскостями $\gamma : 7x + 10y + 2z - 72 = 0$ и $\alpha : 2x - y - 2z = 0$.

4. Найти проекцию точки $M_2$ на прямую $l_2 : \frac{x-6}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-5}{2}$.

5. Найти уравнения плоскостей параллелизма, содержащих скрещивающиеся прямые $l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+12}{8} = \frac{z-4}{-1}$, $l_2 : \frac{x-8}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{2}$. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $l_1$ перпендикулярно плоскостям параллелизма.

6. Найти расстояние от точки $A_2(0;-13;2)$ до плоскости $\alpha : 2x - y - 2z = 0$.

7. Найти расстояние от точки $M_2(3;-5;1)$ до прямой $l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+12}{8} = \frac{z-4}{-1}$.

8. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми $l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+12}{8} = \frac{z-4}{-1}$, $l_2 : \frac{x-8}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{2}$.

9. Найти проекцию точки $D_2(-2;-11;-1)$ на плоскость $A_1B_1C_1$, если $A_1(-2;-12;4)$, $B_1(6;2;5)$, $C_1(4;4;2)$.

10. Найти точку пересечения прямых $l_1 : \frac{x-6}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-5}{2}$, $l_2 : \frac{x+2}{3} = \frac{y+12}{8} = \frac{z-4}{-1}$.

11. Найти уравнение плоскости $Q$, проходящей через точку $B_2(8;1;3)$ и линию пересечения плоскостей $\beta : 7x + 10y + 2z + 126 = 0$ и $\delta : 3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

12. Проверить, лежат ли точки $A(-2;-12;4)$, $B(6;2;5)$, $C(4;4;2)$, $D(-8;1;7)$ в одной плоскости.

13. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $A_1(-2;-12;4)$, $B_1(6;2;5)$, $C_1(4;4;2)$.

14. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A_2(0;-13;2)$, $D_2(-2;-11;-1)$ перпендикулярно плоскости $2x - y - 2z = 0$.

15. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $B_1(6;2;5)$ и перпендикулярно плоскостям $\gamma : 7x + 10y + 2z - 72 = 0$ и $\delta : 3x - 2y + 4z - 12 = 0$.

# Глава 3. Линейная алгебра и системы линейных уравнений.

## §1. Векторное пространство $R^n$.

В первой главе, преследуя цель решения геометрических задач, мы ввели понятие вектора, как направленного отрезка, который при фиксированном базисе может быть представлен в виде упорядоченной тройки чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Если же сосредоточиться на задачах исследования и решения систем линейных уравнений с большим числом неизвестных, то нам необходимо обобщить понятие вектора.

**Определение.** Упорядоченный набор $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, составленный из n чисел, называется $n$-мерным вектором, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – компонентами вектора $\bar{a}$.

Определим операции сложения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и умножения вектора на число $\lambda$ по правилам

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_1, \ldots, a_n + b_n), \quad \lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

**Определение.** Векторы $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_n}$ называют линейно независимыми, если ни один из них не может быть представлен в виде линейной комбинации остальных. Например, векторы $\bar{e_1} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\bar{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{e_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ являются линейно независимыми. Заметим, что любой вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ является линейной комбинацией этих векторов, т.е. может быть представлен в виде

$$\bar{a} = a_1\bar{e_1} + a_2\bar{e_2} + \ldots + a_n\bar{e_n}.$$

**Определение.** Говорят, что система векторов $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_n}$ образуют базис в данном множестве векторов, если каждый вектор этого множества является линейной комбинацией этой системы векторов.

Таким образом, векторы $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ образуют базис во множестве $n$-мерных векторов. В связи с этим, компоненты вектора $\bar{a}$ могут рассматриваться как его координаты в этом базисе. Заметим, что в одном и том же множестве векторов существуют различные базисы. Например, базис во множестве $n$-мерных векторов образуют и векторы $\bar{v_1} = (1, 1, \ldots, 1), \bar{v_2} = (0, 1, \ldots, 1), \ldots, \bar{v_n} = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

**Определение.** Множество $n$-мерных векторов с введенными операциями сложения и умножения называется $n$-мерным векторным пространством, которое обозначается символом $R^n$.

**Утверждение.** Разложение вектора $\bar{a}$ по базису пространства $R^n$, составленного из определенных векторов $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_n}$, является единственным.

Допуская противное, мы можем легко обнаружить, что при таком предположении система векторов $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_n}$ окажется линейно зависимой, тем самым свидетельствуя о противоречии.

Отметим, что система из $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \tag{1}$$

может быть представлена в виде векторного равенства:

$$x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + \ldots + x_n\bar{a_n} = \bar{h}, \tag{2}$$

где $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, $\bar{a_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\bar{a_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$,$\ldots$, $\bar{a_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$.

В случае, когда векторы $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \ldots, \bar{a_n}$ образуют базис в $R^n$, т.е. являются линейно независимыми, равенство (2) можно рассматривать как задачу о разложении вектора $\bar{h}$ по базису, составленному из векторов $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \ldots, \bar{a_n}$. Отсюда следует

**Утверждение.** Система уравнений (1) имеет единственное решение, если векторы $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \ldots, \bar{a_n}$ образуют базис в $R^n$,

**Определение.** Уравнение $t_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)+t_2(a_{21}x_1+ +a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \ldots + t_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = t_1h_1 + t_2h_2+ + \ldots + t_nh_n$ называется линейной комбинацией уравнений системы (1), если хотя бы два из чисел $t_i$ не равны нулю.

## §2. Метод Гаусса решения системы линейных уравнений

В основе метода Гаусса лежит известное из курса средней школы преобразование системы уравнений по методу алгебраического сложения, суть которого составляет следующее

**Утверждение.** Если в системе уравнений (1) заменить одно из уравнений на линейную комбинацию этого уравнения с какими-либо другими, то такое преобразование системы является эквивалентным. На первом шаге метода Гаусса первое уравнение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \tag{3}$$

преобразуется делением на число $a_{11}$. Далее из оставшихся $n-1$ уравнений исключается неизвестное $x_1$. Для этого из 2-го уравнения вычитаем преобразованное 1-е уравнение, умноженное на $a_{21}$. Из 3-го уравнения вычитаем преобразованное 1-е уравнение, умноженное на $a_{31}$ и т.д. Так заканчивается 1-й шаг преобразования, в результате которого получаем эквивалентную систему уравнений вида

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = p_1 \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n = p_2 \\ \qquad b_{32}x_2 + \ldots + b_{3n}x_n = p_3 \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n = p_n \end{cases} \tag{4}$$

На 2-м шаге преобразования системы делим 2-е уравнение системы (4) на $b_{22}$ с последующим исключением неизвестного $x_2$ из оставшихся $(n-2)$-х уравнений.

Наконец, на $n$-м шаге получим систему уравнений с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = q_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = q_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = q_n \end{cases} \tag{5}$$

Этим заканчивается так называемый прямой ход по методу Гаусса, и начинается обратный ход.

На 1-м шаге обратного хода исключаем из первых $n-1$ уравнений неизвестное $x_n$. Для этого из 1-го уравнения системы (5) вычитаем $n$-е уравнение, умноженное на $c_{1n}$. Из 2-го уравнения вычитаем $n$-е уравнение, умноженное на $c_{2n}$ и т.д.

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1,n-1}x_{n-1} & = r_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + d_{2,n-1}x_{n-1} & = r_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{n-1} & = r_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n & = q_n \end{cases} \tag{6}$$

На 2-м шаге обратного хода исключаем из первых $(n-2)$-х уравнений неизвестное $x_{n-1}$, умножая теперь $n-1$-е уравнение на подходящие коэффициенты $d_{1,n-1}, d_{2,n-1}, \ldots, d_{n-2,n-1}$ с последующим вычитанием полученного уравнения из первых $(n-2)$-х уравнений системы.

После $n-1$ шагов обратного хода получаем решение системы уравнений.

В целях упрощения процесса решения по методу Гаусса, все обозначенные манипуляции можно осуществлять над расширенной матрицей $\overline{A}$, составленной из коэффициентов и свободных членов системы (3)

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} & h_n \end{array} \right)$$

**З а м е ч а н и е.** В том случае, когда матрица исходной системы уравнений целочисленная, первое уравнение системы (3) можно заменить подходящей линейной комбинацией каких-либо уравнений этой системы, в которой при неизвестном $x_1$ будет получен коэффициент, равный единице. 2-е уравнение системы (4) так же можно заменить подходящей линейной комбинацией каких-либо уравнений этой системы, начиная со второго, в которой при неизвестном $x_2$ будет получен коэффициент, равный единице и т.д.

В результате таких преобразований все получаемые матрицы при выполнении прямого хода окажутся целочисленными. В том случае, когда решением системы уравнений является целочисленный вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то неизменным результатом всех преобразований на обратном ходе также будут целочисленные матрицы.

В качестве примера применения метода Гаусса рассмотрим процесс решения системы уравнений с целочисленной матрицей

$$\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 - x_3 = -11 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13 \end{cases}$$

Для этого "зашифруем" эту систему расширенной матрицей и подвергнем строки этой матрицы ранее описанным преобразованиям с последующим комментарием.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -1 & -11 \\ 4 & -7 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -8 \\ 4 & -7 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 5 & 19 & 29 \\ 0 & 11 & 15 & 37 \end{array}\right) \overset{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -23 & -21 \\ 0 & 5 & 19 & 29 \end{array}\right) \overset{(4)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -23 & -21 \\ 0 & 0 & 134 & 134 \end{array}\right) \overset{(5)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -23 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(6)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{(7)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{– решение системы уравнений.}$$

**Комментарий.**

**1-е преобразование.** Из 1-го уравнения вычли 2-е уравнение.

**2-е преобразование.** Из 2-го уравнения вычли 1-е уравнение, умноженное на 4, а из 3-го уравнения вычли 1-е уравнение, умноженное на 3.

**3-е преобразование.** Из 3-го уравнения вычли 2-е уравнение, умноженное на 2.

**4-е преобразование.** Из 3-го уравнения вычли 2-е уравнение, умноженное на 5.

**5-е преобразование.** 3-е уравнение поделили на число 134. Этим закончен прямой ход метода Гаусса.

**6-е преобразование.** К 1-му уравнению прибавили 3-е уравнение, умноженное на 4, а ко 2-му уравнению прибавили 1-е уравнение, умноженное на 23.

**7-е преобразование.** К 1-му уравнению прибавили 2-е уравнение, умноженное на 3.

## §3. Полное преобразование системы уравнений

Пусть задана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2 \end{cases}, \tag{7}$$

которая определяется матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Решая эту систему методом алгебраического сложения, мы одно из уравнений оставляем неизменным, а другое заменяем на линейную комбинацию уравнений:

$$\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2$$

Суть метода алгебраического сложения заключается в том, чтобы в полученном уравнении оставалось только одно из неизвестных. Например, если выполняется равенство $\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} = 0$ будет исключено неизвестное $x_2$.

Совершенно очевидно, что можно составить сразу две линейных комбинации уравнений системы (7), переходя тем самым к системе из двух обновленных уравнений.

**Определение.** Преобразование системы уравнений будем называть полным, если в результате этого преобразования каждое из уравнений заменяется на некоторую линейную комбинацию исходных уравнений системы.

Чтобы обнаружить общие закономерности, имеющие место при полном преобразовании системы линейных уравнений, мы впредь не будем ставить перед собой цели исключения одной из неизвестных в получаемых уравнениях. Осуществляя полное преобразование системы (7), первую линейную комбинацию составим с помощью пары чисел $b_{11}, b_{12}$, а вторую – с помощью пары чисел $b_{21}, b_{22}$.

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = b_{11}h_1 + b_{12}h_2 \\ b_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + b_{22}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = b_{21}h_1 + b_{22}h_2 \end{cases}, \tag{8}$$

которая приводится к виду:

$$\begin{cases} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})x_2 = b_{11}h_1 + b_{12}h_2 \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})x_2 = b_{11}h_1 + b_{12}h_2 \end{cases}, \tag{9}$$

Заметим, что левая часть системы (7) представляет собой пару линейных функций $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$, определяемых матрицами-строками $(a_{11} \quad a_{12})$ и $(a_{21} \quad a_{22})$, составляющими вместе квадратную матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Точно так же левая часть системы уравнений (8) имеет вид:
$b_{11}y_1 + b_{12}y_2$
$b_{21}y_1 + b_{22}y_2$,
представляя собой пару линейных функций:

$$z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2,$$

определяемых матрицами-строками $(b_{11} \quad b_{12})$ и $(b_{21} \quad b_{22})$,
составляющими вместе квадратную матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Левая часть полученной в результате полного преобразования системы уравнений (9) также представляет собой пару линейных функций, определяемых матрицами-строками:
$(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} \quad b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})$ и $(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} \quad b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})$,
которые составляют квадратную матрицу

$$BA = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

построенную из элементов матриц $A$ и $B$. Эту матрицу называют произведением матрицы $B$ на матрицу $A$ .

Концентрируя свое внимание на способе получения каждой строки матрицы $BA$, получаем правило умножения матрицы-строки на квадратную матрицу $A$ в виде:

$$(\gamma_1 \quad \gamma_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{21}, \gamma_1 a_{12} + \gamma_2 a_{22}), \tag{11}$$

результатом которого является матрица-строка.

Концентрируя своё внимание на способе получения каждого столбца матрицы $BA$, получаем правило умножения матрицы $B$ на матрицу-столбец в виде:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}q_1 + b_{12}q_2 \\ b_{21}q_1 + b_{22}q_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

результатом которого является матрица-столбец.

Основываясь на формулах (11) и (12), выделим два полезных правила получения элементов матрицы $BA$.

**Правило строк:** Строки матрицы $BA$ получаются путем умножения каждой из строк матрицы $B$ на матрицу $A$ по правилу (11).

**Правило столбцов:** Столбцы матрицы $BA$ получаются путем умножения матрицы $B$ на каждый из столбцов матрицы $A$ по правилу (12).

**Выводы.**

**1.** Введенное нами правило (12) умножения матриц позволяет записать исходную систему уравнений (7) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

или коротко, в виде:

$$AX = H, \tag{13}$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ – матрицы-столбцы, а правило полного преобразования системы представить в виде правила умножения матрицы $B$ слева на равенство (13), с переходом к равенству $B(AX) = BH$. Конечным результатом такого преобразования является система уравнений:

$$(BA)X = BH, \tag{14}$$

**2.** Метод полного преобразования системы является естественным обобщением метода алгебраического сложения.

## §4. Линейные функции в пространстве $R^n$.

На процесс решения системы уравнений по методу Гаусса совершенно необходимо посмотреть с позиции функциональных зависимостей, чтобы обнаружить общие закономерности. Задача о решении системы уравнений непосредственно связана с векторной функцией векторного аргумента $A(\bar{x})$, определяемой совокупностью из $n$ равенств

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

каждое из которых представляет собой числовую линейную функцию векторного аргумента $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$l_i(\bar{x}) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

определяемую матрицей-строкой $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$.

**Определение.** Упорядоченная совокупность из $n$ таких функций называется линейным оператором $\bar{y} = A(\bar{x})$, действующим на пространтсве $R^n$. Линейный оператор определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

составленной из матриц-строк линейных функций $l_i(\bar{x})$. Теперь система линейных уравнений (1) может быть представлена в виде задачи об определении неизвестного аргумента $\bar{x} \in R^n$, по известному значению $\bar{h}$ линейного оператора $\bar{y} = A(\bar{x})$ или в компактном виде $A(\bar{x}) = \bar{h}$, или в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Напомним, что систему линейных уравнений (1) мы ранее представляли в виде задачи о разложении вектора $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ по базису, составленному из векторов-столбцов матрицы $A$ (см. формулу (2)).

**О п р е д е л е н и е.** Линейный оператор $\bar{y} = A(\bar{x})$ называется невырожденным, если он осуществляет взаимно однозначное соответствие между двумя экземплярами пространства $R^n$.

Процесс решения по методу Гаусса связан с преобразованием линейных функций $l_i(\bar{x})$, образующих линейный оператор в виде преобразования матриц-строк, определяющих эти функции.

При этом мы заметили, что матрицы-строки преобразуются по тем же правилам сложения и умножения на число, как и векторы пространства $R^n$.

Таким образом, наряду с векторным пространством $R^n$ возникает и векторное пространство линейных функций, определенных на пространстве $R^n$, которое называют **сопряженным векторным пространством**.

Линейная функция $l(\bar{x})$ может быть использована для получения следствия из равенства векторов в виде: $\bar{a} = \bar{h} \Rightarrow l(\bar{a}) = l(\bar{h})$ или в виде: $A(\bar{x}) = \bar{h} \Rightarrow l(A(\bar{x})) = l(\bar{h})$.
Если же при этом используется сразу $n$ таких линейных функций, образующих еще один линейный оператор $\bar{z} = B(\bar{y})$ на $R^n$, то получаемые следствия выглядят так

$$\bar{a} = \bar{h} \Rightarrow B(\bar{a}) = B(\bar{h})$$

или

$$A(\bar{x}) = \bar{h} \Rightarrow B(A(\bar{x})) = B(\bar{h}).$$

Последнее равенство представляет уже рассмотренное нами полное преобразование системы уравнений, которое является эквивалентным, если линейное преобразование $\bar{z} = B(\bar{y})$ представляет собой взаимно - однозначное соответствие между элементами пространств $R^n$, т.е. является невырожденным.

**О п р е д е л е н и е.** Линейный оператор $\bar{z} = C(\bar{x})$, являющийся результатом последовательного применения двух линейных операторов $\bar{y} = A(\bar{x})$, $\bar{z} = B(\bar{y})$, называется композицией линейных операторов вида $\bar{z} = B(A(\bar{x}))$, а его матрица равна произведению матриц $B$ и $A$, определяющих линейные операторы $B(\bar{y})$ и $A(\bar{x})$, соответственно, т.е. $C = BA$.

Чтобы основательно, во всех подробностях осознать процесс применения линейных функций, составляющих преобразующий систему уравнений линейный оператор, приведем решение следующего упражнения.

**Задача.** Преобразовать систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases},$$

1) Применяя линейные функции $l_1(\bar{y}) = 7y_1 - 6y_2$, $l_2(\bar{y}) = 8y_1 + 9y_2$, определяемые матрицами-строками $(7 \quad -6)$ и $(8 \quad 9)$.
2) Применяя линейный оператор $\bar{z} = B(\bar{y})$, определяемый матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},$$

посредством вычисления матрицы композиции линейных операторов
$B(\bar{y}) = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ и $A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

**Решение.**

1 способ. От исходной системы $A(\bar{x}) = \bar{h}$ перейдем к системе уравнений вида

$$\begin{cases} l_1(A\bar{x}) = l_1(\bar{h}) \\ l_2(A\bar{x}) = l_2(\bar{h}) \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} (7 \quad -6) \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = (7 \quad -6) \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \\ (8 \quad 9) \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = (8 \quad 9) \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Произведя подробные действия, получаем

$$\begin{cases} 7(3x_1 - 4x_2) - 6(5x_1 + 2x_2) = 7 \cdot 7 - 6 \cdot 3 \\ 8(3x_1 - 4x_2) + 9(5x_1 + 2x_2) = 8 \cdot 7 + 9 \cdot 3 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -9x_1 - 40x_2 = 31 \\ 69x_1 - 14x_2 = 83 \end{cases}.$$

2 способ. От исходной системы уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$ перейдем к эквивалентной системе уравнений $B(A\bar{x}) = B(\bar{h})$ в виде равенства $(BA)(\bar{x}) = B(\bar{h})$, т.е.

$$\left( \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 21-30 & -28-12 \\ 24+45 & -32+18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 83 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -40 \\ 69 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 83 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -9x_1 - 40x_2 = 31 \\ 69x_1 - 14x_2 = 83 \end{cases}.$$

Заметим так же, что в результате преобразования исходной системы умножением на матрицу $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ будет получена система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 7 \\ 69x_1 - 14x_2 = 83 \end{cases},$$

а результатом преобразования системы умножением на матрицу $B_2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ будет система уравнений

$$\begin{cases} -9x_1 - 40x_2 = 31 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases},$$

что иллюстрирует два различных преобразования исходной системы по методу алгебраического сложения.

**Утверждение.** Линейная функция $l(\bar{x})$ и линейный оператор $A(\bar{x})$ обладают очевидными свойствами:
1) $l(\bar{x_1} + \bar{x_2}) = l(\bar{x_1}) + l(\bar{x_2}), \quad A(\bar{x_1} + \bar{x_2}) = A(\bar{x_1}) + A(\bar{x_2})$
2) $l(\lambda\bar{x_1}) = \lambda l(\bar{x}), \quad A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x})$

**Утверждение.** Если $\bar{y} = A(\bar{x})$– невырожденный линейный оператор, осуществляющий взаимно однозначное отображение пространства $R^n$ и векторы $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_k} \quad (k \leq n)$ линейно независимы, то и векторы $\bar{v_1} = A(\bar{e_1}), \bar{v_2} = A(\bar{e_2}), \ldots, \bar{v_k} = A(\bar{e_k})$ линейно независимы.
Предполагая противное и воспользовавшись свойствами линейных функций, мы придём к противоречию, обнаруживая следствием линейную зависимость векторов $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_k}$.

## §5. Решение системы уравнений методом разложения вектора по базису.

Пусть $\bar{v_1}, \bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k}$ – линейно независимая система векторов.

**Определение.** Множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\bar{v_1}, \bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k}$ называется линейной оболочкой этой системы, обозначаемой символом $< \bar{v_1}, \bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k} >$.

**Определение.** Множество $B$ $n$-мерных векторов называется подпространством пространства $R^n$, если для каждой пары $\bar{v_1}, \bar{v_2}$ векторов этого множества вектор $\bar{v} = \lambda_1 \bar{v_1} + \lambda_2 \bar{v_2}$ является элементом этого же множества при любых значениях $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Такое свойство множества $B$ называется свойством его замкнутости относительно операций сложения и умножения его элементов.

Линейная оболочка векторов $< \bar{v_1}, \bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k} >$ является подпространством пространства $R^n$, так как это замкнутое множество относительно операций сложения и умножения векторов.

Подпространство $B$ векторов называется $k$-мерным, если максимальная линейная независимая система векторов этого подпространства состоит из $k$ векторов, образуя его базис.

**Пример.** Построить базис линейной оболочки векторов $\bar{a} = (1; 3; -3; -4)$, $\bar{b} = (2; 1; -1; 2)$, $\bar{c} = (8; 9; -9; -2)$, $\bar{d} = (5; 5; -5; 0)$.

**Решение.** Составим матрицу, строками которой станут векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$, и преобразуем ее по схеме Гаусса

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 9 & -9 & -2 \\ 5 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & -15 & 15 & 30 \\ 0 & -10 & 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что пара векторов $\bar{a}$, $\bar{b} - 2\bar{a}$ образуют базис линейной оболочки так же, как и пара векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, а сама линейная оболочка является двумерным подпространством.

Из равенств $\bar{c} - 2\bar{a} - 3\bar{b} = 0$, $\bar{d} - \bar{a} - 5\bar{b} = 0$, получаем разложение векторов $\bar{c}$ и $\bar{d}$ по базису $\bar{a}$,$\bar{b}$ : $\bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$, $\bar{d} = \bar{a} + 5\bar{b}$. Этот процесс можно успешно использовать при решении системы уравнений.

Как уже было отмечено ранее, задача о решении системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

может быть представлена в виде задачи о разложении вектора $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ по базису, составленного из векторов $\bar{a_1} = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\bar{a_2} = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, $\ldots$, $\bar{a_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$

$$x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + \ldots + x_n\bar{a_n} = \bar{h}$$

Такую задачу можно решить путём преобразования системы векторов $\bar{a_1}, \bar{a_2}, \ldots, \bar{a_n}, \bar{h}$ по схеме метода Гаусса.

**Пример.** Решить путём разложения по базису систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 13 \\ 3x_1 - 16x_2 + 6x_3 = 14 \end{cases}.$$

**Решение.** Заданную систему уравнений представим в виде: $x_1\bar{a_1} + x_2\bar{a_2} + x_3\bar{a_3} = \bar{h}$, где $\bar{a_1} = (1; 2; 3)$, $\bar{a_2} = (-4; -5; -16)$, $\bar{a_3} = (3, 7, 6)$, $\bar{h} = (2; 13; 14)$. Расположим эти векторы в виде строк матрицы

$$\begin{cases} \bar{a_1} = (1; 2; 3) \\ \bar{a_2} = (-4; -5; -16) \\ \bar{a_3} = (3, 7, 6) \\ \bar{h} = (2; 13; 14) \end{cases}.$$

Преобразуем эту систему векторов по схеме Гаусса, образуя линейные комбинации с нулевой первой компонентой

$$\begin{cases} \bar{a_2} + 4\bar{a_1} = (0; 3; -4) \\ \bar{a_3} - 3\bar{a_1} = (0; 1; -3) \\ \bar{h} - 2\bar{a_1} = (0; 9; 8) \end{cases}.$$

Из этой системы векторов так же образуем линейные комбинации с нулевой второй компонентой

$$\begin{cases} \bar{a_2} + 4\bar{a_1} - 3(\bar{a_3} - 3\bar{a_1}) = (0; 0; 5) \\ \bar{h} - 2\bar{a_1} - 9(\bar{a_3} - 3\bar{a_1}) = (0; 0; 35) \end{cases} .$$

Полученные линейные комбинации представляют собой коллинеарные векторы. На основании условия коллинеарности получаем равенство $7(13\bar{a_1}+\bar{a_2}-3\bar{a_3}) = \bar{h}+25\bar{a_1}-9\bar{a_3}$, из которого находим искомое разложение $\bar{h} = 66\bar{a_1} + 7\bar{a_2} - 12\bar{a_3}$ и вместе с этим – решение системы уравнений: $x_1 = 66$, $x_2 = 7$, $x_3 = -12$.

К достоинствам этого метода можно отнести отсутствие обратного хода и наглядность производимых операций.

Отметим, что метод Гаусса основан на преобразованиях линейных функций, определяемых матрицами-строками линейного оператора, в то время как метод решения системы разложением по базису основан на преобразовании векторов-столбцов линейного оператора.

Полезно ещё раз обратить внимание на то обстоятельство, что линейный оператор можно представить в двух видах: в виде линейной комбинации, составленной из $n$ векторов, а так же в в виде упорядоченного набора из $n$ линейных функций, образующего линейный оператор

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Это очередной раз подчеркивает связь между линейным векторным пространством $R^n$ и пространством линейных функций, определенных на $R^n$.

## §6. Сопряженная система уравнений. Пара сопряженных векторных пространств и операторов.

Следуя методу алгебраического сложения, для данной системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \tag{15}$$

поставим задачу, решение которой позволит сразу определить неизвестное $x_1$. Для этого 1-е уравнение умножим на $\gamma_1$, 2-е – на $\gamma_2$,..., $n$-е – на $\gamma_n$. Складывая уравнения полученной системы и, требуя от чисел $\gamma_i$ выполнения равенств

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_1 + a_{21}\gamma_2 + \ldots + a_{n1}\gamma_n = 1 \\ a_{12}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \ldots + a_{n2}\gamma_n = 0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\gamma_1 + a_{2n}\gamma_2 + \ldots + a_{nn}\gamma_n = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

получим неизвестное $x_1$ в виде:

$$x_1 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \ldots + \gamma_n h_n. \tag{17}$$

**Определение.** Система уравнений (16), определяемая матрицей $A^T$, строки которой являются столбцами матрицы $A$ исходной системы, называется сопряженной, соответствующий линейный оператор – сопряженным, а матрица $A^T$ – транспонированной.

Заметим, что равенство (17) является результатом применения линейной функции $\Gamma(\bar{y}) = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n$, удовлетворяющей равенствам (16) к системе уравнений (15).

Коротко процедура применения этой функции выглядит так: $\Gamma(A\bar{x}) = \Gamma(\bar{h})$. И если в качестве матрицы-строки линейной функции взять решение сопряженного уравнения $A^T\bar{\gamma} = \bar{\delta_1}$, где
$\bar{\delta_1} = (1, 0, \cdots, 0)^T$, то получаем неизвестное $x_1 = \Gamma(\bar{h})$.

На множестве линейных функций, определенных на пространстве $R^n$, введем операции:
$(\lambda\Gamma)(\bar{y}) = \lambda\Gamma(\bar{y})$, $(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\bar{y}) = \Gamma_1(\bar{y}) + \Gamma_2(\bar{y})$.

**Определение.** Множество линейных функций, определенных на пространстве $R^n$, называется сопряженным векторным пространством и обозначается символом $R^{n*}$.

Очевидно, что сопряженным линейному оператору $A^T(\bar{x})$ является линейный оператор $A(\bar{x})$ а сопряженным векторному пространству $R^{n*}$ является векторное пространство $R^n$.

Поэтому уместно говорить о паре сопряженных пространств $R^n$ и $R^{n*}$ и сопряженных операторов $A(\bar{x})$ и $A^T(\bar{y})$.
При этом весьма важным является

**Утверждение.** Система уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$, $\bar{x}, \bar{h} \in R^n$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда сопряженная система уравнений $A^T(\bar{y}) = \bar{q}$, имеет единственное решение, где $\bar{y}, \bar{q} \in R^{n*}$.

Теперь очевидно, что из линейной независимости матриц-столбцов линейного оператора следует линейная независимость матриц-строк и обратно.

**Определение.** Рангом матрицы линейного оператора $\bar{y} = A(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^n, \bar{y} \in R^m$ называется число ее линейно независимых матриц-строк (матриц-столбцов).

## §7. Пара взаимно обратных линейных операторов на пространстве $R^n$. Обратная матрица и ее нахождение по методу Гаусса.

Продолжая идею решения системы уравнений (15), представленную равенством (17), подвергнем её полному преобразованию применением линейных функций $\Gamma_i(\bar{y}) = \gamma_{i1}y_1 + \gamma_{i2}y_2 + \ldots + \gamma_{in}y_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям:
$A^T\bar{\gamma}_i = \bar{\delta}_i$, где $\bar{\delta}_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$, $\bar{\delta}_2 = \{0, 1, \ldots, 0\}, \ldots$, $\bar{\delta}_n = \{0, 0, \ldots, 1\}$.
Тогда получим решение системы (15) в виде:

$$x_i = \gamma_{i1}h_1 + \gamma_{i2}h_2 + \ldots + \gamma_{in}h_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Выражаясь иначе, мы подвергли систему уравнений (15) полному преобразованию путём умножения слева на матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

Это преобразование выглядит в виде цепочки равенств:
$A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{h},\ (A^{-1}A)\bar{x} = A^{-1}\bar{h},\ \bar{x} = A^{-1}\bar{h}$. Вводя единичную матрицу $E$ в виде

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приходим к равенству $A^{-1}A = E$. Отметим, что единичная матрица обладает характерным свойством: $AE = EA = A$.

**Определение.** Матрица $A^{-1}$, определяемая равенством $A^{-1}A = E$, называется обратной по отношению к матрице $A$.

Очевидно, что матрицы $A$ и $A^{-1}$ определяют пару взаимно обратных операторов на пространстве $R^n$, т.е. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.
Равенство $AA^{-1} = E$ позволяет находить обратную матрицу по методу Гаусса, ибо представляет собой $n$ систем уравнений

$$A\bar{x}_i = \bar{\delta}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{19}$$

где $\bar{\delta}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\delta}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\bar{\delta}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Пример 1.** Решить систему уравнений по методу Гаусса с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

**Решение.** Запишем сразу все $n$ систем уравнений (19) в виде составной матрицы, которую преобразуем по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 8 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Мы завершили прямой ход метода Гаусса, в результате чего уже получена 3-я строка обратной матрицы. Во избежание арифметических ошибок, мы приостановим процесс и проверим правильность получения этой строки. При этом мы будем исходить из смысла каждой строки обратной матрицы, который представлен формулой (18). Эта формула предлагает использовать полученную 3-ю строку для вычисления неизвестного $x_3$ по методу алгебраического сложения согласно схеме:

$$+\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & (3) \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = -3 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

Линейная комбинация уравнений с такими коэффициентами имеет вид: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 3$, т.е. $x_3 = 3$.

**Замечание 1.** Наличие коэффициентов 0,0,1 при неизвестных $x_1, x_2, x_3$ в полученном уравнении подтверждает правильность нахождения 3-й строки матрицы $A^{-1}$. Осуществляя обратный ход по методу Гаусса, сначала получаем 2-ю строку матрицы $A^{-1}$, а потом и 1-ю.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -5 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Попутно проверяем правильность вычисления остальных строк, определяя значения соответствующих неизвестных согласно схеме метода алгебраического сложения:

$$+\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & (7) \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = -3 & (3) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 & (-8) \end{cases} \qquad +\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 & (2) \\ 3x_1 \qquad - 2x_3 = -3 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 & (-2) \end{cases}$$

Получаем соответственно:
$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$, т.е. $x_2 = 2$ и $1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$, т.е. $x_1 = 1$.

Таким образом, получена обратная матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и решение задачи: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

**Замечание 2.** Правильность вычисления обратной матрицы, установлением равенства $A^{-1}A = E$, здесь была осуществлена в процессе решения системы уравнений путем проверки равенств $\Gamma_1 A = (1, 0, 0)$, $\Gamma_2 A = (0, 1, 0)$, $\Gamma_3 A = (0, 0, 1)$, где $\Gamma_i$ – $i$-я строка матрицы $A^{-1}, i = 1, 2, 3$.

**Пример 2.** Решить систему путем вычисления обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение.** Преобразуем составную матрицу по методу Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Для облегчения обратного хода по методу Гаусса умножим 1-ю и 2-ю строки составной матрицы на 7, после чего продолжим процесс преобразования

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -21 & 14 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -14 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -21 & 0 & -11 & 12 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -26 & 15 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 9 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

В процессе выполнения обратного хода мы имели возможность проверять правильность вычисления строк матрицы

$A' = \begin{pmatrix} -26 & 15 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ так же, как и при решении предыдущей задачи.

При этом будут получены равенства: $7x_3 = 7$, $7x_2 = 14$, $7x_1 = 21$. Таким образом, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ – решение системы уравнений.

Как видно, матрица $A'$ некоторым образом выполняет функцию обратной матрицы, ибо $A'A = 7E$. Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -26 & 15 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 9 & -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ – обратная матрица.}$$

## §8. Теорема Крамера для произвольной системы уравнений с квадратной матрицей.

Формулировка и вывод теоремы Крамера для системы из 3-х уравнений, а так же свойства определителей 3-го порялка изложены в 1-ой главе. Здесь для доказательства теоремы, а так же для доказательства свойств определителей мы применим метод математической индукции.

Предварительно отметим, что если применить предложенный в 1-ой главе метод для решения системы из 4-х уравнений с 4-мя неизвестными, то при определении неизвестного $x_1$ для определителя 4-го порядка мы получим формулу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Отметим, что для получения этой формулы нам понадобились свойства определителей 3-го порядка, сформулированные в 1-ой главе.

Такой результат и индуктивные соображения позволяют нам для системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

ввести

**Определение.** Число, определяемое равенством

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (20)$$

называется определителем $n$-го порядка, где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,
$M_{ij}$ – определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из исходного путем

удаления $i$-ой строки и $j$-го столбца (такой определитель называют минором элемента $a_{ij}$).

Равенство (20) называют разложением определителя по элементам $j$-го столбца.

**Определение.** Равенство

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{n} a_{1j} A_{1j}, \quad A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}. \tag{21}$$

называют разложением определителя по элементам 1-ой строки.

Прежде чем выводить формулы Крамера, нам сначала необходимо доказать свойства определителя $n$-го порядка, которые утверждает следующая

**Теорема.**

1) Величина определителя не зависит от выбора столбца, по которому производится разложение.
2) Определитель можно разложить по элементам 1-й строки, т.е. $\Delta' = \Delta$.
3) Операция транспонирования определителя не изменяет его значения.
4) При умножении каждого элемента $j$-го столбца ($j = 1, 2, \ldots, n$) на одно и то же число весь определитель умножается на это же самое число.

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, нам понадобится

**Определение.** Минором пары элементов $a_{ij}$, $a_{kl}$ определителя называется определитель, обозначаемый символом $M_{ij}^{kl}$, получаемый из исходного путем удаления $i$-ой и $k$-ой строк и $j$-го и $l$-го столбцов.

В основе доказательства п. 1 теоремы лежит следующая

**Лемма.** Знак перед минором пары элементов в последовательном разложении определителя по $j$-му и $l$-му столбцам не зависит от выбора порядка этих разложений.

**Доказательство леммы.** Для определенности считаем, что $j < l$.

1) Пусть $i < k$ и пусть разложение осуществляется по $j$-му столбцу. Тогда перед минором элемента $a_{ij}$ будет знак $(-1)^{i+j}$. В полученных после 1-го разложения минорах $l$-ый столбец теперь будет$(l-1)$-м, а $k$-ая строка станет $(k-1)$-ой. Тогда перед минором $M_{ij}^{kl}$ пары элементов $a_{ij}$, $a_{kl}$ будет знак $(-1)^{i+j} \cdot (-1)^{k-1+l-1} = (-1)^{i+j+k+l}$.

Пусть теперь 1-ое разложение определителя осуществляется по $l$-му столбцу. Тогда перед минором элемента $a_{kl}$ будет знак $(-1)^{k+l}$. В полученных после 1-го разложения минорах $j$-й столбец останется $j$-м, $i$-ая

строка – $i$-ой. Следовательно, перед минором пары элементов будет знак $(-1)^{k+l}\cdot(-1)^{i+j}=(-1)^{i+j+k+l}$,
т.е. знак получится такой же, как и в предыдущем случае.

2) Пусть $i>k$ и 1-е разложение определителя осуществляется по $j$-му столбцу. Тогда перед минором элемента $a_{ij}$ будет знак $(-1)^{i+j}$, а перед минором $M_{ij}^{kl}$ пары элементов $a_{ij}$, $a_{kl}$ будет знак $(-1)^{i+j}\cdot(-1)^{k+l-1}$, ибо теперь $k$-ая строка осталась $k$-ой.

Если же 1-ое разложение определителя будет осуществлено по $l$-му столбцу, то перед минором $M_{ij}^{kl}$ пары элементов $a_{ij}$, $a_{kl}$ будет знак $(-1)^{k+l}\cdot(-1)^{i-1+j}$, ибо $i$-я строка станет $(i-1)$-й.
Мы снова наблюдаем совпадение знаков при минорах пары элементов, чем и завершается доказательство леммы.

**Доказательство теоремы.** Доказательство п. п. 1, 2 осуществим методом математической индукции.

Отметим, что основание индукции установлено в 6-ом параграфе 1-ой главы, когда мы убедились в том, что определители 2-го и 3-го порядков удовлетворяют свойствам 1-4.

Согласно индуктивного предположения считаем, что пункты 1-4 теоремы выполнены для всех определителей до $n$-го порядка включительно.

В индуктивном переходе нам надо доказать, что
1) определитель $n+1$-го порядка, разложенный по элементам $j$-го столбца совпадает с определителем, разложенным по элементам $l$-го столбца;
2) транспонированный определитель $n+1$-го порядка совпадает с исходным определителем $n+1$-го порядка.

**Доказательство п. 1.** Отметим в начале, что миноры в разложении определителя $n+1$-го порядка по элементам $j$-го или $l$-го столбцов представляют собой определители $n$-го порядка, для которых, согласно индуктивному предположению, свойство 1 выполняется.

Теперь все миноры $n$-го порядка, полученные в разложении по элементам $l$-го столбца, разложим по элементам бывшего $j$-го столбца, а все миноры $n$-го порядка, полученные в разложении по элементам $j$-го столбца, разложим по элементам бывшего $l$-го столбца. Согласно доказанной лемме, мы в обоих случаях получим полностью совпадающие разложения, что и доказывает утверждение 1-го пункта теоремы.

**Доказательство п. 2.** Заметим, что в разложении определителя по элементам 1-ой строки

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}, \tag{22}$$

а так же в разложении по элементам 1-го столбца

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}, \tag{23}$$

первые слагаемые совпадают.

Миноры $M_{1j}$ в формуле (22) разложим по элементам 1-го столбца

$$M_{1j} = \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{1j}^{i1}, \tag{24}$$

а миноры $M_{i1}$ в формуле (23) разложим по элементам 1-ой строки

$$M_{i1} = \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{i1}^{1j}. \tag{25}$$

Так как $M_{i1}^{1j} = M_{1j}^{i1}$, то после подстановки выражений (24) и (25) в формулы (22) и (23) соответственно, получаем, что суммы $\Delta$ и $\Delta'$ состоят из одинаковых слагаемых, что и требовалось доказать в п. 2 теоремы.

**Доказательство п. 3.** Заметим, что если определитель подвергнуть операции транспонирования, а потом разложить по элементам 1-го столбца и полученные в разложении миноры $n$-го порядка снова транспонировать (это нам позволяет сделать предположение индукции), то в результате получим разложение определителя по элементам 1-ой строки, что и требовалось.

**Доказательство п. 4.** Рассмотрим определитель, отличающийся от исходного только тем, что все элементы 1-го столбца умножены на одно и то же число $k$, и разложим полученный, а так же исходный определители по элементам 1-го столбца. Последующее сравнение этих разложений и доказывает справедливость п. 4 теоремы.

**Теорема Крамера.** Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases} \tag{26}$$

имеет единственное решение, если ее определитель не равен нулю. При этом решение системы может быть получено по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{27}$$

где $\Delta$ – определитель системы, $\Delta_j$ – определитель, образованный путем замены $j$-го столбца определителя $\Delta$ на столбец из свободных членов системы уравнений (26).

Доказательство теоремы проведем методом индукции по числу $n$ уравнений. Отметим, что база индукции уже установлена в 6-м параграфе 1-ой главы.

Выдвигая индуктивное предположение, считаем, что утверждение теоремы выполняется для системы из не более чем $n-1$ уравнений.

Теперь для вывода формул Крамера (27), доставляющих решение системы уравнений (26), умножим 1-ое уравнение на некоторое число $A_{1j}$, 2-ое – на $A_{2j}$ и т. д., наконец, последнее уравнение умножим на число $A_{nj}$ и сложим все полученные уравнения. При этом нам необходимо выбрать числа $A_{ij}$ так, чтобы в полученном после сложения уравнении были исключены все неизвестные, кроме $x_j$. Для этого мы потребуем, чтобы числа $A_{1j}$ удовлетворяли однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \ldots + a_{n1}A_{nj} = 0 \\ a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + \ldots + a_{n2}A_{nj} = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,j-1}A_{1j} + a_{2,j-1}A_{2j} + \ldots + a_{n,j-1}A_{nj} = 0 \\ a_{1,j+1}A_{1j} + a_{2,j+1}A_{2j} + \ldots + a_{n,j+1}A_{nj} = 0 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \ldots + a_{nn}A_{nj} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Тогда для неизвестного $x_j$ получим уравнение:

$$(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj})x_j = h_1A_{1j} + \ldots + h_nA_{nj}. \tag{29}$$

Полагая число $A_{nj}$ свободным неизвестным, решим систему (28) из $n-1$ уравнений по формулам Крамера:

$$A_{kj} = \frac{\Delta_k}{\Delta_0}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{30}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k1} & \dots & a_{n-1,1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k2} & \dots & a_{n-1,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,j-1} & a_{2,j-1} & \dots & a_{k,j-1} & \dots & a_{n-1,j-1} \\ a_{1,j+1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{k,j+1} & \dots & a_{n-1,j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{kn} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix},$$

$\Delta_k$ – определитель, полученный из определителя $\Delta_0$ путем замены $k$-го столбца на столбец из чисел
$-a_{n1}A_{nj}$, $-a_{n2}A_{nj}$, …, $-a_{n,j-1}A_{nj}$, $-a_{n,j+1}A_{nj}$, $\dots, -a_{nn}A_{nj}$.
Определитель $\Delta_0$ подвергнем операции транспонирования, после чего заметим, что число $\Delta_0$ совпадает со значением минора элемента $a_{nj}$ определителя системы (26), то есть имеем равенство

$$\Delta_0 = M_{nj}. \tag{31}$$

В определителе $\Delta_k$ вынесем постоянный множитель $-A_{nj}$ из $k$-го столбца, а столбец из элементов $a_{n1}$, $a_{n2}$, …, $a_{nn}$ посредством $n-1-k$ перемен мест с соседними столбцами перенесем вправо на $n-1$-ую позицию и, полученный таким образом определитель подвергнем операции транспонирования. При этом величина $\Delta_k$ переменит знак $n-1-k$ раз и примет вид:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \dots & a_{k-1,j-1} & a_{k-1,j+1} & \dots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^{n-k-2} \cdot A_{nj},$$

что означает $\Delta_k = M_{kj} \cdot (-1)^{n-k-2} \cdot A_{nj}$. Полагая $A_{nj} = (-1)^{n+j} \cdot M_{nj}$, получаем $\Delta_k = M_{kj} \cdot (-1)^{2n-2-k+j} \cdot M_{nj}$. Однако $(-1)^{2m-k} = (-1)^{2m-k} \cdot (-1)^{2k} = (-1)^k$. Поэтому окончательно получаем:

$$\Delta_k = (-1)^{k+j} \cdot M_{kj} \cdot M_{nj}. \tag{32}$$

С учетом равенств (31) и (32) получаем решение системы (28)

$$A_{kj} = (-1)^{k+j} \cdot M_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теперь уравнение (29) принимает вид:

$$((-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj})x_j =$$
$$= (-1)^{1+j}h_1M_{1j} + (-1)^{2+j}h_2M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}h_nM_{nj}. \qquad (33)$$

Но множитель перед неизвестным $x_j$ в равенстве (33) – это ничто иное, как разложение определителя $\Delta$ системы уравнений (26) по элементам $j$-го столбца, а правая часть равенства (33) – это разложение определителя $\Delta_j$ $n$-го порядка по элементам $h_1$, $h_2$, ..., $h_n$ $j$-го столбца.

Таким образом, уравнение (33) принимает вид: $\Delta \cdot x_j = \Delta_j$, т. е. $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $\quad j = 1, 2, \ldots, n$, чем и завершается доказательство теоремы Крамера.

**Замечание.** Из процесса доказательства теоремы Крамера (см. формулы (28) и (29)) следует, что матрица-строка $\frac{1}{\Delta}(A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj})$ выполняет роль $j$-й строки обратной матрицы системы уравнений (26). Следовательно, обратная матрица может быть вычислена по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

## §9. Скалярное произведение в пространстве $R^n$.

**Определение.** Скалярным произведением векторов $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число, обозначаемое символом $(\bar{a}, \bar{b})$ и определяемое по правилу

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Из определения следует, что $(\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$, причем $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$ только если $\bar{a} = 0$.

**Определение.** Число $|\bar{a}|$, определенное по правилу $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$ называется длиной (нормой) вектора $\bar{a}$.

**Определение.** Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ортогональными, если $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

Если любые два вектора из системы векторов $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_k}$ ортогональны, то такая система векторов называется ортогональной.

**Пример.** Система векторов $\bar{e_1} = (1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{e_2} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\bar{e_n} = (0, \ldots, 0, 1)$ образует ортонормированный базис в $R^n$, ибо $(\bar{e}_i, \bar{e_j}) = 0$ если $i \neq j$ и $|\bar{e}_i| = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

**У т в е р ж д е н и е.** Ортогональная система ненулевых векторов $\bar{u_1}$, $\bar{u_2}, \ldots, \bar{u_k}$, $k \leq n$ пространства $R^n$ линейно независима.

Предполагая наличие линейной зависимости в виде равенства $\bar{u_k} = \lambda_1 \bar{u_1} + \lambda_2 \bar{u_2} + \ldots + \lambda_{k-1} \bar{u_{k-1}}$, умножим его скалярно на вектор $\bar{u_j} (j \neq k)$. Раскрывая скобки, и воспользовавшись условиями ортогональности получим $\lambda_j (\bar{u_j}, \bar{u_j}) = 0$, из чего следует, что $\lambda_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, свидетельствуя о противоречии.

Пусть $\bar{e_1}', \bar{e_2}', \ldots, \bar{e_n}'$ – какой-либо ортонормированный базис в $R^n$. Тогда равенство

$$\bar{x} = x_1 \bar{e_1}' + x_2 \bar{e_2}' + \ldots + x_n \bar{e_n}'$$

называется разложением вектора $\bar{x}$ по ортонормированному базису, причем справедлива теорема Пифагора:

$$|\bar{x}|^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2.$$

Актуальной является задача о построении ортогонального базиса пространства. Для наглядности рассмотрим случай трёх векторов.

**Задача.** Пусть векторы $\bar{v_1}$ и $\bar{v_2}$ ортогональны, а система векторов $\bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{w}$ линейно независима, причем вектор $\bar{w}$ не ортогонален векторам $\bar{v_1}$ и $\bar{v_2}$. Построить вектор $\bar{v_3}$ ортогональный векторам $\bar{v_1}$ и $\bar{v_2}$, причем $\bar{v_3} \in < \bar{v_1}, \bar{v_2}, \bar{w} >$.

**Решение.** Из геометрических соображений очевидно, что искомым будет вектор $\bar{v_3} = \bar{w} - (\lambda_1 \bar{v_1} + \lambda_2 \bar{v_2})$, если числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ определять из условий: $(\bar{v_3}, \bar{v_i}) = 0, i = 1, 2$, т.е. $(\bar{w} - \lambda_1 \bar{v_1} - \lambda_2 \bar{v_2}, \bar{v_i}) = 0$, $(\bar{w}, \bar{v_i}) - \lambda_i (\bar{v_i}, \bar{v_i}) = 0$, $\lambda_i = \dfrac{(\bar{w}, \bar{v_i})}{|\bar{v_i}|^2}, i = 1, 2.$

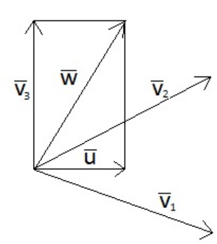


Рис. 22.

И тогда получаем искомый вектор в виде:

$$\bar{v_3} = \bar{w} - \left( \frac{(\bar{w}, \bar{v_1})}{|\bar{v_1}|^2} \bar{v_1} + \frac{(\bar{w}, \bar{v_2})}{|\bar{v_2}|^2} \bar{v_2} \right),$$

который называют перпендикуляром к подпространству $< \bar{v_1}, \bar{v_2} >$.
В свою очередь, вектор $\bar{u} = \dfrac{(\bar{w}, \bar{v_1})}{|\bar{v_1}|^2} \bar{v_1} + \dfrac{(\bar{w}, \bar{v_2})}{|\bar{v_2}|^2} \bar{v_2}$ называют ортогональной проекцией вектора $\bar{w}$ на подпространство $< \bar{v_1}, \bar{v_2} >$, который является элементом наилучшего приближения вектора $\bar{w}$, т.е. решением следующей задачи минимизации:

$$|\bar{w} - (\lambda_1 \bar{v_1} + \lambda_2 \bar{v_2})| \to min.$$

Введенная нами функция $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ предоставляет нам удобную форму применения линейной функции к равенству векторов. В частности, применительно к равенству $A\bar{x} = \bar{h}$ получаем полезное следствие: $(\bar{y}, A\bar{x}) = (\bar{y}, \bar{h})$, если $A$ – невырожденная матрица. Далее, исходя из очевидного равенства $(\bar{y}, A\bar{x}) = (A^T \bar{y}, \bar{x})$, удобно перейти от исходной задачи $A\bar{x} = \bar{h}$ к сопряженной задаче $A^T \bar{y} = \bar{\gamma}$, позволяющей определить подходящий элемент $\bar{\gamma}$ сопряженного пространства $R^{n*}$.

**Определение.** Линейный оператор $\bar{y} = A\bar{x}$ называется самосопряженным, если определяющая его матрица $A$ совпадает с матрицей $A^T$ сопряженного оператора, т.е. если выполняется равенство $A^T = A$. В этом случае имеем равенство $(\bar{x}, A\bar{y}) = (A\bar{x}, \bar{y})$, а соответствующая сопряженная задача принимает вид: $A\bar{y} = \bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma}, \bar{y} \in R^n$.

**Определение.** Матрица $A = ||a_{ij}||$ называется симметрической, если её элементы, симметричные относительно главной диагонали, образованной элементами $a_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, совпадают.

Очевидно, что для симметрической матрицы справедливо равенство: $A = A^T$, а значит матрица самосопряженного оператора – симметрическая.

## §10. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений с прямоугольной матрицей.

**Определение.** Система линейных уравнений называется однородной, если её правая часть представляет собой столбец, состоящий из нулей, т.е. имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{34}$$

определяемая прямоугольной матрицей $A = ||a_{ij}||$.

В случае когда $m = n$ и $detA \neq 0$ единственным решением системы является нулевой вектор, так как это следует непосредственно из теоремы Крамера. Если же $m < n$, то актуален вопрос о множестве решений однородной системы уравнений, на который отвечает

**Теорема.** Множество решений однородной системы уравнений образует подпространство пространства $R^n$, размерность которого равна $k = n - r$, где $r$ – ранг матрицы $A$.

Практически решение системы (34) легко осуществить по методу Гаусса. Осуществив прямой ход, приведём ее к трапециидальному виду

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_k + \ldots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases} , k \leq n$$

Если в результате преобразований какое-либо уравнение окажется линейной комбинацией остальных уравнений, то его необходимо изъять из полученной системы.

Далее осуществляем обратный ход по методу Гаусса, приводя треугольную подматрицу $k$ - го порядка к диагональному виду.

Полагая неизвестные $x_{k+1}, \ldots, x_n$ свободными и преследуя цель получения базиса в пространстве решений, будем задавать эти неизвестные так, чтобы обеспечить линейную независимость векторов-решений. Например, полагая вначале $x_{k+1} = 1$,
$x_{k+2} = 0, \ldots, x_n = 0$, далее $x_{k+1} = 0$, $x_{k+2} = 1$,$\ldots, x_n = 0$, потом
$x_{k+1} = 0$, $x_{k+2} = 0$, $x_{k+3} = 1$, $\ldots, x_n = 0$ и т.д.

В качестве примера рассмотрим процесс решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 - x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 - 11x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 18x_5 = 0 \\ 4x_1 - 15x_2 + 12x_3 - 7x_4 + 27x_5 = 0 \end{cases} . \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & -1 & 9 \\ 3 & -11 & 8 & -4 & 18 \\ 4 & -15 & 12 & -7 & 27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Полагая неизвестные $x_4$ и $x_5$ свободными, получаем решение системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 \quad = -5x_4 - 21x_5 \\ \quad x_2 \quad = -x_4 - 7x_5 \\ \quad\quad x_3 = x_4 - 4x_5 \end{cases}$$

Полагая $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_3 = -4$, $x_2 = -7$, $x_1 = -21$ и $\bar{v_1} = (-21, -7, -4, 0, 1)$ – решение системы.

Полагая $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, находим $x_3 = 1$,$x_2 = -1$, $x_1 = -5$ и $\bar{v_2} = (-5, -1, 1, 1, 0)$ – решение системы.

Векторы $\bar{v_1}$ и $\bar{v_2}$ образуют базис во множестве решений системы, следовательно, равенство

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{v_1} + \lambda_2 \bar{v_2} = \lambda_1(-21, -7, -4, 0, 1) + \lambda_2(-5, -1, 1, 1, 0)$$

– есть множество всех решений системы уравнений, где $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

**З а м е ч а н и е.** Особый интерес представляют ненулевые решения однородной системы уравнений с квадратной матрицей. В этом случае критерием существования ненулевых решений является равенство нулю определителя матрицы системы.

**О п р е д е л е н и е.** Система линейных уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$ с прямоугольной матрицей $A$ называется неоднородной, если её правая часть представляет собой ненулевой вектор $\bar{h}$.

Представим систему уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$ в виде задачи о разложении вектора $\bar{h}$ по векторам-столбцам матрицы $A$.

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что эта система будет иметь решение лишь тогда, когда вектор $\bar{h}$ будет принадлежать линейной оболочке векторов-столбцов матрицы $A$. Это означает, что число линейно независимых столбцов матрицы не увеличится в результате образования расширенной матрицы путём добавления в неё вектора $\bar{h}$ в качестве последнего столбца. Отсюда следует

**Т е о р е м а К р о н е к е р а́-К а п е л л и .** Неоднородная система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Важное свойство решений неоднородной системы уравнений выражает следующее

**У т в е р ж д е н и е.** Разность двух решений неоднородной системы уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$ является решением однородной системы $A(\bar{x}) = 0$.

Из этого утверждения следует важная

**Т е о р е м а .**(Структура решения неоднородной системы уравнений). Множество всех решений неоднородной системы уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$ представляет собой сумму какого-либо одного решения неоднородной системы и множества всех решений однородной системы $A(\bar{x}) = 0$.

Пример. Решить систему уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h}$, левая часть которой представлена системой уравнений (35), а в качестве правой части рассмотреть два варианта: $\bar{h_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 18 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\bar{h_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 18 \\ 28 \end{pmatrix}$.

Решение. Обе эти системы будем решать одновремённо методом Гаусса, преобразуя составную расширенную матрицу, в которой предпослед-

ний и последний столбцы – это векторы $\bar{h_1}$ и $\bar{h_2}$, соответственно.
Опуская подробности преобразований, приведём только исходную матрицу и матрицу, полученную в результате преобразований прямого хода метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & -1 & 9 & 7 & 7 \\ 3 & -11 & 8 & -4 & 18 & 14 & 14 \\ 4 & -15 & 12 & -7 & 27 & 21 & 22 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & -4 & 3 & -2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Очевидно, что система уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h_1}$ имеет решение, а система уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h_2}$ не имеет решений, так как последнее уравнение теряет смысл. Полученный результат находится в полном соответствии с теоремой Кронекера-Капелли, ибо расширенная матрица системы уравнений $A(\bar{x}) = \bar{h_2}$ имеет ранг равный 4-м, в то время как матрица системы имеет ранг равный 3-м. Осуществив обратный ход метода Гаусса, получим двухпараметрическое семейство решений 1-ой неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 \qquad = -5x_4 - 21x_5 + 27 \\ \quad x_2 \quad = -x_4 - 7x_5 + 9 \\ \qquad x_3 = x_4 - 4x_5 + 4 \end{cases}$$

Полагая здесь $x_4 = x_5 = 1$, находим $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, т.е.
$\bar{x} = (1, 1, 1, 1, 1)$ – решение неоднородной системы. Теперь, принимая во внимание решение системы однородных уравнений (35), и в согласии с теоремой о структуре решений неоднородной системы получаем множество всех её решений в виде:

$$\bar{x} = \lambda_1\bar{v_1} + \lambda_2\bar{v_2} = (1, 1, 1, 1, 1) + \lambda_1(-21, -7, -4, 0, 1) + \lambda_2(-5, -1, 1, 1, 0)$$

## §11. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

**Определение.** Собственным вектором $\bar{u}$ линейного оператора $\bar{y} = A(\bar{x})$, задаваемого невырожденной матрицей
$A = ||a_{ij}||, i, j = 1, 2, \dots, n$ называется отличный от нуля вектор, определяемый равенством

$$A\bar{u} = \lambda\bar{u}, \tag{36}$$

в котором множитель $\lambda$ называется собственным числом линейного оператора $A(\bar{x})$.
Очевидно, что собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя.

Из этого определения следует равенство $(A-\lambda E)\bar{u} = 0$, представляющее собой однородную систему уравнений. Решая вопрос о существовании ненулевых решений, получаем, так называемое, характеристическое уравнение

$$det(A - \lambda E) = 0, \tag{37}$$

являющееся уравнением $n$-й степени. Согласно основной теореме алгебры, уравнение (37) имеет ровно $n$ комплексных решений с учетом кратности.

**Пример.** Найти собственные векторы и собственные числа линейного оператора, определяемого матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Находим $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 6-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$det(A - \lambda E) = (6-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)((\lambda-5)(\lambda+1)+8) =$
$= (6-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (6-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3).$
Таким образом $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$ – собственные числа.

При $\lambda = \lambda_1 = 6$ уравнение (36) принимает вид $(A - 6E\bar{u}_1) = 0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{cases} 0 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \gamma_1 = 0 \\ \alpha_1 - 7\beta_1 - 2\gamma_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\beta_1 - \gamma_1 = 0 \end{cases}.$$

Исключая неизвестное $\gamma_1$ из 2-го и 3-го уравнений, находим
$3\alpha_1 + 15\beta_1 = 0$, $\alpha_1 = -5\beta_1$.
Полагая $\beta_1 = 1$, находим $\alpha_1 = -5$. Тогда

$$\gamma_1 = 2\alpha_1 + 4\beta_1 = -10 + 4 = -6.$$

Итак $\bar{u_1} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 6$.

**Проверка.**

Находим $A\bar{u_1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 6 \\ -36 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Полученное равенство $A\bar{u_1} = 6\bar{u_1}$ подтверждает правильность вычисления числа $\lambda_1 = 6$ и собственного вектора $\bar{u_1}$.

При $\lambda = \lambda_2 = 3$ уравнение (36) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{cases} 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - 4\beta_2 - 2\gamma_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + 4\beta_2 + 2\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения находим: $\alpha_2 = 0$. Тогда из 2-го или 3-го уравнений получаем $\gamma_2 = -2\beta_2$. Полагая $\beta_2 = 1$, находим $\gamma_2 = -2$, т.е. $\bar{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 3$.

При $\lambda = \lambda_3 = 1$ уравнение (36) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда легко находим $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = -\gamma_3$, т.е. $\bar{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda = 1$.

**Пример.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Находим собственные числа, полагая $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$(2-\lambda)(\lambda^2-1)+(3-3\lambda)-(-\lambda+1)=0,$
$(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)-3(\lambda-1)+(\lambda-1)=0,$
$(\lambda-1)((2-\lambda)(\lambda+1)-2)=0, \quad \lambda_1=1, \lambda-\lambda^2=0.$
Итак, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$ – собственные числа.
При $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=1$ получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \alpha_1-\beta_1-\gamma_1=0 \\ 3\alpha_1-3\beta_1-3\gamma_1=0 \\ -\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0 \end{cases}$$

В этой системе уравнений только одно уравнение является независимым: получаем $\alpha_1=\beta_1+\gamma_1$.

Полагая $\beta_1=1, \gamma_1=1$, находим $\alpha_1=1$ и $\bar{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – собственный вектор.

Полагая $\beta_1=0, \gamma_1=1$, находим $\alpha_1=1$ и $\bar{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор.
При $\lambda_3=0$ получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} 2\alpha_3-\beta_3-\gamma_3=0 \\ 3\alpha_3-2\beta_3-3\gamma_3=0 \\ -\alpha_3+\beta_3+2\gamma_3=0 \end{cases}$$

Исключая неизвестное $\beta_3$ из 2-го и 3-го уравнений, находим:
$\alpha_3+\gamma_3=0$. Полагая $\gamma_3=-1$, получаем: $\alpha_3=1$. Из 3-го уравнения находим $\beta_3=\alpha_3-2\gamma_3=3$, т.е. $\bar{u}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор.

Другие примеры нахождения собственных векторов приведены в параграфах 1 и 2 приложения.

**Утверждение.** Собственные числа линейного оператора, определяемого матрицей $A=||a_{ij}||$, и сопряженного оператора, определяемого матрицей $A^T$, совпадают.

Это следует из очевидной цепочки равенств:

$$det(A-\lambda E)=det(A-\lambda E)^T=det(A^T-\lambda E).$$

Отметим, что собственные векторы сопряженного оператора не совпадают с собственными векторами исходного оператора.
Без доказательства отметим важное

**Утверждение.** Собственные числа самосопряженного оператора – действительные, а собственные векторы – ортогональны.

## §12. Аксиоматические определения линейного пространства и линейных операций на нём

Ранее отмечалось, что компоненты вектора $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, как упорядоченного набора из $n$ чисел, можно рассматривать как координаты этого вектора в ортонормированном базисе
$\bar{e_1}=(1,0,\ldots,0),\bar{e_2}=(0,1,\ldots,0),\ldots,\bar{e_n}=(0,0,\ldots,0,1)$. Очевидно, что в другом базисе этот же вектор $\bar{x}$ будет иметь другие координаты. По этой причине, в общем случае, говоря о координатах вектора, мы должны также отмечать базис $(\bar{v_1},\bar{v_2},\ldots,\bar{v_n})$, в котором данный вектор имеет эти координаты.

Точно так же, говоря о линейном преобразовании или о линейной функции на пространстве $R^n$, мы обратили внимание, что соответствующие этим функциям матрицы также подвергаются преобразованию. Это обстоятельство требует аксиоматического определения векторного пространства. Кроме того, обобщение понятия вектора позволяет лучше различать объекты, которые мы можем считать векторами.

**Определение.** Говорят, что множество $V$ элементов, называемых векторами, образует векторное (линейное) пространство, если на этом множестве определены операции сложения и умножения векторов на числа, не выводящие за пределы множества $V$, т.е. наряду с парой векторов $\bar{v_1}$, $\bar{v_2}$ вектор $\lambda_1\bar{v_1}+\lambda_2\bar{v_2}$ принадлежит к множеству $V$, и при этом выполняются следующие аксиомы:

1) $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$,

2) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$,

3) существует 0-вектор, определяемый равенством $\bar{x}+0=\bar{x}$,

4) для каждого вектора $\bar{x}\in V$ существует вектор $-\bar{x}$, называемый противоположным вектору $\bar{x}$ и такой, что выполняется равенство
$\bar{x}+(-\bar{x})=0$,

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$,

6) $\lambda(\delta\bar{x}) = (\lambda\delta)\bar{x}$,

7) $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{x} = \lambda_1\bar{x} + \lambda_2\bar{x}$,

8) $\lambda(\bar{x_1} + \bar{x_2}) = \lambda\bar{x_1} + \lambda\bar{x_2}$.

Такое векторное пространство называют вещественным, в отличие от комплексного векторного пространства, в котором определено умножение векторов на комплексные числа.

**Примеры.** Вещественное векторное пространство образуют:

1) множество действительных чисел,

2) множество многочленов с действительными коэффициентами степени не выше $n$,

3) Множество непрерывных функций, заданных на одной и той же области определения.

**Определение.** Векторное пространство называется конечномерным, если в нем существует конечное число линейно независимых векторов. В противном случае говорят о бесконечномерном пространстве. Например множество многочленов степени $n-1$ образует $n$-мерное векторное пространство, а множество многочленов любой степени образует бесконечномерное векторное пространство.

**Определение.** Говорят, что задана числовая линейная функция $l(\bar{x})$ на векторном пространстве $\bar{V}$, если она обладает свойствами:

1) $l(\bar{x_1} + \bar{x_2}) = l(\bar{x_1}) + l(\bar{x_2})$;

2) $l(\lambda\bar{x}) = \lambda l(\bar{x})$.

**Определение.** Говорят, что на векторном пространстве $\bar{V}$ задан линейный оператор $\bar{y} = A(\bar{x})$, если выполняются свойства:

1) $A(\bar{x_1} + \bar{x_2}) = A(\bar{x_1}) + A(\bar{x_2})$;

2) $A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x})$.

Пусть $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ – базис в пространстве $\bar{V}$, $l(\bar{x})$ – числовая линейная функция и $\bar{x} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2} + \ldots + x_n\bar{e_n}$ – разложение вектора $\bar{x}$ по базису пространства $V$. На основании свойств 1) и 2) получим

$$A(\bar{x}) = x_1 A(\bar{e_1}) + x_2 A(\bar{e_2}) + \ldots + x_n A(\bar{e_n})$$

$$l(\bar{x}) = x_1 l(\bar{e_1}) + x_2 l(\bar{e_2}) + \ldots + x_n l(\bar{e_n})$$

Обозначив $l(\bar{e_1}) = b_1, l(\bar{e_2}) = b_2, \ldots, l(\bar{e_n}) = b_n$, получаем
$l(\bar{x}) = b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n$, т.е. линейной функции $l(\bar{x})$ в данном базисе

соответствует матрицы-строка $L = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, а вектору $\bar{x}$ соответствует матрица-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Не ограничивая общности выкладок, полагаем, что $\bar{y} = A(\bar{x})$ – линейный оператор на трехмерном векторном пространстве. Тогда на основании свойств 1) и 2) получаем

$$A(\bar{x}) = x_1 A(\bar{e_1}) + x_2 A(\bar{e_2}) + x_3 A(\bar{e_3}).$$

Запишем разложения векторов $A(\bar{e_1}), A(\bar{e_2}), A(\bar{e_3})$ по базису:

$A(\bar{e_1}) = a_{11}\bar{e_1} + a_{21}\bar{e_2} + a_{31}\bar{e_3}$, $A(\bar{e_2}) = a_{12}\bar{e_1} + a_{22}\bar{e_2} + a_{32}\bar{e_3}$, $A(\bar{e_3}) = a_{13}\bar{e_1} + a_{23}\bar{e_2} + a_{33}\bar{e_3}$.

Теперь получаем $A(\bar{x}) = x_1(a_{11}\bar{e_1} + a_{21}\bar{e_2} + a_{31}\bar{e_3}) + x_2(a_{12}\bar{e_1} + a_{22}\bar{e_2} + a_{32}\bar{e_3}) + x_3(a_{13}\bar{e_1} + a_{23}\bar{e_2} + a_{33}\bar{e_3}) = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)\bar{e_1} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\bar{e_2} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\bar{e_3} = y_1\bar{e_1} + y_2\bar{e_2} + y_3\bar{e_3}$

Таким образом, линейному оператору $\bar{y} = A(\bar{x})$ соответствует набор линейных функций

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}, \tag{38}$$

и матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, столбцы которой являются координатами образов базисных векторов $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ соответственно.

Вводя матрицы-столбцы $X, Y$ векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$, равенства (38) можно записать в матричном виде:

$$Y = AX \tag{39}$$

В частности, если векторы базиса $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$ являются собственными для линейного оператора $\bar{y} = A(\bar{x})$ с соответствующими им собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то получим

$$A(\bar{e_1}) = \lambda_1\bar{e_1},\ A(\bar{e_2}) = \lambda_2\bar{e_2},\ A(\bar{e_3}) = \lambda_3\bar{e_3}$$

И тогда формула (38) примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1 x_1 \\ y_2 = \qquad \lambda_2 x_2 \\ y_3 = \qquad\qquad \lambda_3 x_3 \end{cases}.$$

Таким образом получено важное

**Утверждение.** В базисе из собственных векторов матрица линейного оператора $A(\bar{x})$ имеет диагональный вид.

**Определение.** Числовая функция двух векторных переменных $\bar{x}, \bar{y}$ называется билинейной, если она линейна по каждому из аргументов, т.е. выполняются свойства:

$$B(\bar{x_1} + \bar{x_2}, \bar{y}) = B(\bar{x_1}, \bar{y}) + B(\bar{x_2}, \bar{y}),$$
$$B(\bar{x}, \bar{y_1} + \bar{y_2}) = B(\bar{x}, \bar{y_1}) + B(\bar{x}, \bar{y_2}),$$
$$B(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y}),$$
$$B(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda B(\bar{x}, \bar{y}).$$

Получим формулу для билинейной функции в фиксированном базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ $n$-мерного векторного пространства.

Пусть $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{e_i}, \bar{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \bar{e_j}$ – разложение векторов по базису.
На основании свойств линейности по каждому из аргументов получаем:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} x_i B(\bar{e_i}, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e_j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j B(\bar{e_i}, \bar{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j. \qquad (40)$$

Таким образом, билинейная функция в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ определяется матрицей $B = ||b_{ij}||$, причём $b_{ij} = B(\bar{e_i}, \bar{e_j}), i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Формула (40) может быть записана в матричном виде.

Пусть $X, Y$ – матрицы-столбцы векторов $\bar{x}, \bar{y}$ в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$, и $X^T$ – матрица-строка, полученная транспонированием матрицы-столбца $X$. Тогда формула (40) принимает вид:

$$B(\bar{x},\bar{y}) = X^T BY. \tag{41}$$

Заметим, что определенное ранее скалярное произведение векторов $\bar{x},\bar{y}$ пространства $R^n$ является частным случаем билинейной функции, для которой определяющей матрицей служит единичная матрица $E$.

**О п р е д е л е н и е.** Числовая функция $q(\bar{x}) = B(\bar{x},\bar{x})$, соответствующая билинейной функции $B(\bar{x},\bar{y})$ называется квадратичной.

Таким образом, получаем формулу

$$q(\bar{x}) = X^T BX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j.$$

**О п р е д е л е н и е.** Квадратичная функция называется положительно определенной, если она принимает только неотрицательные значения, причем $q(\bar{x}) = 0$ только если $\bar{x} = 0$.

**З а м е ч а н и е.** Из проделанных нами выкладок следует, что матрица квадратичной функции – симметрическая, т.е. $c_{ij} = c_{ji}, i \neq j$.

**Т е о р е м а (Критерий Сильвестра).** Квадратичная функция положительно определена, если все ее угловые миноры положительны, т.е.

$$b_{11} > 0, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}\ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2}\ldots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

## §13. Переход к новому базису

Очевидно, что при переходе к новому базису будут изменяться не только координаты векторов, но и матрицы линейных, билинейных функций и матрицы линейных операторов.

Пусть $\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots,\bar{e_n}$ – старый базис и $\bar{e_1}',\bar{e_2}',\ldots,\bar{e_n}'$ – новый базис $n$-мерного векторного пространства и

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e_i}, \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e_i}, \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i'\bar{e_i}', \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i'\bar{e_i}' \tag{42}$$

– разложения векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по базисам, $X, Y, X', Y'$ – матрицы-столбцы этих векторов в соответствующих базисах, связанных равенствами:

$$\bar{e_1}' = c_{11}\bar{e_1} + c_{21}\bar{e_2} + \ldots + c_{n1}\bar{e_n}, \quad \bar{e_2}' = c_{12}\bar{e_1} + c_{22}\bar{e_2} + \ldots + c_{n2}\bar{e_n}, \ldots,$$

$$\bar{e_n}' = c_{1n}\bar{e_1} + c_{2n}\bar{e_2} + \ldots + c_{nn}\bar{e_n}. \tag{43}$$

**Определение.** Матрица $C = ||c_{ij}||$, $i$-й столбец которой представляет собой координаты вектора $\bar{e_i}'$ в старом базисе, называется матрицей перехода от базиса $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ к базису $\bar{e_1}', \bar{e_2}', \ldots, \bar{e_n}'$ и имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \ldots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{44}$$

В целях упрощения выкладок будем рассматривать двумерное векторное пространство. На основании формул (42), (43) получаем

$$\bar{x} = x_1'\bar{e_1}' + x_2'\bar{e_2}' = x_1'(c_{11}\bar{e_1} + c_{21}\bar{e_2}) + x_2'(c_{12}\bar{e_1} + c_{22}\bar{e_2}) =$$

$$= (c_{11}x_1' + c_{12}x_2')\bar{e_1} + (c_{21}x_1' + c_{22}x_2')\bar{e_2} = x_1\bar{e_1} + x_2\bar{e_2}$$

Таким образом, получено соотношение между координатами вектора $\bar{x}$ в старом и новом базисах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \text{т.е.} \quad X = CX' \tag{45}$$

На основании формулы (45) матрицу перехода еще называют матрицей преобразования координат.

Пусть теперь $B(\bar{x}, \bar{y})$ – билинейная функция, определяемая в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ матрицей $B$. Тогда на основании формул (41) и (45) и очевидного равенства $(CX')^T = (X')^T C^T$ получаем:

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = X^T BY = (CX')^T BCY' = X'^T C^T BCY' = X'^T B'Y'$$

Таким образом, в базисе $\bar{e_1}', \bar{e_2}', \ldots, \bar{e_n}'$ матрица билинейной функции определяется по формуле

$$B' = C^T BC. \tag{46}$$

В частности, если в качестве билинейной функции взять скалярное произведение в пространстве $R^2$, то получаем матрицу скалярного произведения в новом базисе по формуле:

$$B' = C^T C \tag{47}$$

**О п р е д е л е н и е.** Матрица $C$ называется ортогональной, если выполняется равенство

$$C^T = C^{-1}. \tag{48}$$

Таким образом, в случае, когда матрица $C$ перехода является ортогональной, то предложенная ранее формула скалярного произведения инвариантна относительно преобразования координат векторов, определяемого формулой (45).
Об особой роли ортогональной матрицы говорит

**Т е о р е м а.** Ортогональные матрицы и только они являются матрицами перехода от одного ортогонального базиса к другому.

Очевидно, что матрица $C^TC$ является симметрической. Более того, можно доказать, что она удовлетворяет критерию Сильвестра положительной определенности квадратичной функции, определяемой этой матрицей.

**З а м е ч а н и е.** Формула (47) наводит нас на идею дальнейшего обобщения понятия скалярного произведения в произвольном фиксированном базисе в виде функции $[\bar{x}, \bar{y}] = X'GY$, где $X$ – матрица-столбец вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$, $G$ – симметрическая положительно определённая матрица.
Аксиоматическое определение скалярного произведения будет введено ниже.

Пусть $l(\bar{x}) = l_1x_1 + l_2x_2 + \ldots + l_nx_n$ – линейная функция, определяемая матрицей-строкой $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ в базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ и матрицей-строкой $L' = (l_1', l_2', \ldots, l_n')$ в базисе $\bar{e_1}', \bar{e_2}', \ldots, \bar{e_n}'$, т.е. $l(\bar{x}) = LX = L'X'$.

На основании формулы (45) получаем:

$$l(\bar{x}) = LX = LCX',$$

из чего приходим к формуле преобразования матрицы линейной функции:

$$L' = LC. \tag{49}$$

Пусть теперь $\bar{y} = A(\bar{x})$ – линейный оператор на $n$-мерном векторном пространстве, значение которого в фиксированном базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \ldots, \bar{e_n}$ определяется матрицей $A = ||a_{ij}||$ по формуле $Y = AX$, а в базисе $\bar{e_1}', \bar{e_2}', \ldots, \bar{e_n}'$ – по формуле $Y' = A'X'$, где $X, X', Y, Y'$ – матрицы-столбцы векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно.

На основании формулы (45) имеем:

$$X = CX', Y = CY', \quad \text{следовательно,}$$

$$CY' = ACX', \quad \text{откуда находим}$$

$$Y' = C^{-1}ACX'.$$

Таким образом, получаем формулу, связывающую матрицы линейного оператора в разных базисах

$$A' = C^{-1}AC. \tag{50}$$

**З а м е ч а н и е.** Если матрица перехода ортогональная, т.е. имеет место равенство $C^T = C^{-1}$, то матрица линейного оператора и матрицы билинейной и соответствующей ей квадратичной функции при переходе к новому базису пересчитываются по одинаковым формулам:

$$A' = C^TAC. \tag{51}$$

В частности, если ортогональной матрицей $C$ осуществляется переход к базису из собственных векторов квадратичной функции, то в силу предыдущего замечания, матрица квадратичной функции принимает диагональный вид, а сама квадратичная функция приводится к сумме квадратов, т.е. к виду:

$$q(\bar{x}) = \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 + \ldots + \lambda_n {x'_n}^2.$$

Этот факт успешно используется для классификации кривых, определяемых общим уравнением 2-го порядка.

**Пример.** Преобразовать общее уравнение кривой 2-го порядка, определяемой уравнением $16x_1^2 + 24x_1x_2 + 9x_2^2 + 250x_2 + 425 = 0$.
Здесь $A = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$ – матрица квадратичной функции.
Находим собственные числа матрицы $A$ из уравнения

$$det(A - \lambda E) = 0, \; (16 - \lambda)(9 - \lambda) - 12^2 = 0,$$

$$\lambda^2 - 25\lambda = 0, \; \lambda_1 = 25, \; \lambda_2 = 0 \; - \text{ собственные числа.}$$

Находим собственные векторы из уравнений

$$(A - \lambda_i E)\bar{u_i} = 0,\ i = 1, 2.$$

При $\lambda_1 = 25$ получаем:

$$\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -9\alpha_1 + 12\beta_1 = 0 \\ 12\alpha_1 - 16\beta_1 = 0 \end{cases} .$$

Полагая $\alpha_1 = 4$, находим $\beta_1 = 3$ и $\bar{u_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ – собственный вектор. При $\lambda_2 = 0$ получаем:

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 16\alpha_2 + 12\beta_2 = 0 \\ 12\alpha_2 + 9\beta_2 = 0 \end{cases} .$$

Полагая $\alpha_2 = -3$, находим $\beta_2 = 4$ и $\bar{u_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ – собственный вектор. Для проверки убеждаемся в ортогональности векторов $\bar{u_1}$ и $\bar{u_2}$, определяя их скалярное произведение $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$. Находим $|\bar{u_1}| = |\bar{u_2}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Векторы $\bar{e_1}' = \dfrac{\bar{u_1}}{|\bar{u_1}|} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$,
$\bar{e_2}' = \dfrac{\bar{u_2}}{|\bar{u_2}|} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ – образуют ортонормированный базис.
Следовательно, $C = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса
$\bar{e_1} = (1, 0)$, $\bar{e_2} = (0, 1)$ к базису $\bar{e_1}', \bar{e_2}'$. Она является ортогональной и определяет преобразование координат в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(4x_1' - 3x_2') \\ x_2 = \dfrac{1}{5}(3x_1' + 4x_2') \end{cases} .$$

Подставляя эти равенства в уравнение кривой, и производя упрощения, получаем

$${x_1'}^2 + 6x_1' + 8x_2' + 17 = 0 \quad \text{или} \quad (x_1' + 3)^2 = -8(x_2' + 1).$$

Это уравнение параболы с вершиной в точке $M_0(-3, -1)$ и ветвями, обращеными влево.

Вместо подстановки выражений для $x_1$ и $x_2$ в общее уравнение кривой мы могли бы пересчитать матрицу $A$ квадратичной функции и матрицу линейной функции $L = (0, 250)$. Для этого по формуле (51) находим:

$$A' = C^T A C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 100 & 75 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и значит квадратичная функция в новом базисе принимает вид:
$q(\bar{x}) = 25{x'_1}^2$.

По формуле (49) находим матрицу линейной функции

$$L' = LC = (0, 250) \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (150, 200).$$

И значит линейная функция в новом базисе принимает вид:
$l(\bar{x}) = 150x'_1 + 200x'_2$.
Таким образом, получаем уравнение кривой

$$25{x'_1}^2 + 150x'_1 + 200x'_2 + 425 = 0,$$

$${x'_1}^2 + 6x'_1 + 8x'_2 + 17 = 0,$$

совпадающее с полученным ранее.

## §14. Обобщение скалярного произведения

Введнное ранее скалярное произведение в пространстве $R^n$ по формуле $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ обладает свойствами:

1°. Линейностью по каждому из аргументов

$$(\bar{x_1} + \bar{x_2}, \bar{y}) = (\bar{x_1}, \bar{y}) + (\bar{x_2}, \bar{y})$$

$$(\bar{x}, \bar{y_1} + \bar{y_2}) = (\bar{x}, \bar{y_1}) + (\bar{x}, \bar{y_2})$$

$$(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y}); \quad (\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$$

2°. Симметрией

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$$

$3^\circ$. Положительной определенностью, т.е.

$$(\bar{x},\bar{x}) \geq 0, \quad \text{причем} \quad (\bar{x},\bar{x}) = 0, \quad \text{только если} \quad \bar{x} = 0.$$

**Определение.** Говорят, что в векторном пространстве задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $\bar{x},\bar{y}$ ставится в соответствие число $(\bar{x},\bar{y})$ так, что выполняются аксиомы, соответствующие свойствам $1^\circ - 3^\circ$.

**Пример.** Пусть в векторном пространстве задан определенный базис $\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots,\bar{e_n}$. Пусть $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{e_i}$, $\bar{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\bar{e_i}$ – разложения этих векторов по базису. Вводя скалярное произведение равенством $(\bar{x},\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$, мы априорно считаем этот базис ортогональным.

По формуле $|\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$ определим длину вектора, а векторы $\bar{x},\bar{y}$, для которых выполняется равенство $(\bar{x},\bar{y}) = 0$, по-прежнему будем называть ортогональными, обозначая этот факт в виде $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Заметим, что $|\bar{x}+\bar{y}|^2 = (\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) = (\bar{x},\bar{x}) + 2(\bar{x},\bar{y}) + (\bar{y},\bar{y})$ и если $\bar{x} \perp \bar{y}$, то $(\bar{x},\bar{y}) = 0$ и тогда получаем теорему Пифагора:

$$|\bar{x}+\bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2.$$

Исходя из свойства $3^\circ$, имеем неравенство $(\bar{x}-t\bar{y},\bar{x}-t\bar{y}) \geq 0$, из которого на основании свойств $1^\circ, 2^\circ$ получаем квадратное неравенство $|\bar{y}|^2t^2 - 2(\bar{x},\bar{y})t + |\bar{x}|^2 \geq 0$, справедливое для любого значения $t$. Отсюда следует неположительность дискриминанта

$$(\bar{x},\bar{y})^2 - |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2 \leq 0$$

$$\text{и неравенство Коши} \quad |(\bar{x},\bar{y})| \leq |\bar{x}||\bar{y}|,$$

на основании которого после небольших выкладок

$$|\bar{x}+\bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 + 2(\bar{x},\bar{y}) + |\bar{y}|^2 \leq |\bar{x}|^2 + 2|\bar{x},\bar{y}| + |\bar{y}|^2 = (|\bar{x}| + |\bar{y}|)^2$$

получаем неравенство треугольника:

$$|\bar{x}+\bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|.$$

Так как скалярное произведение представляет собой билинейную функцию, то в самом общем случае в фиксированном базисе $\bar{e_1},\bar{e_2},\ldots,\bar{e_n}$ оно имеет вид:

$$(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_iy_j,$$

где $g_{ij} = (\bar{e_i}, \bar{e_j})$ – элементы матрицы $\begin{pmatrix} (\bar{e_1}, \bar{e_1}), (\bar{e_1}, \bar{e_2}), \ldots, & (\bar{e_1}, \bar{e_n}) \\ (\bar{e_2}, \bar{e_1}), (\bar{e_2}, \bar{e_2}), \ldots, & (\bar{e_2}, \bar{e_n}) \\ \ldots \\ (\bar{e_n}, \bar{e_1}), (\bar{e_n}, \bar{e_2}), \ldots, & (\bar{e_n}, \bar{e_n}) \end{pmatrix}$, которая является симметрической положительно определенной и называется матрицей Грама. Например. определяя скалярное произведение традиционным способом согласно равенства $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, мы в качестве матрицы Грама берем единичную матрицу.

**Пример.** В двумерном пространстве формула обобщенного скалярного произведения имеет вид:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = g_{11}x_1y_1 + 2g_{12}x_1y_2 + g_{22}x_2y_2.$$

Тогда длина вектора вычисляется на основании равенства:

$$|\bar{x}|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) = g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2.$$

Полагая здесь $|\bar{x}| = 3, g_{11} = 5, g_{12} = 4, g_{22} = 5$, получаем уравнение "окружности"радиуса 3 в виде:

$$5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = 9.$$

При традиционном задании скалярного произведения в виде равенства $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2.$, полученное нами уравнение является уравнением эллипса, в чем легко убедиться, переходя к новому ортонормираванному базису по формулам преобразования координат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1' - x_2') \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1' + x_2') \end{cases},$$

результатом которого является уравнение:

$$9(x_1')^2 + (x_2')^2 = 9.$$

## Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить системы уравнений методом Гаусса, по правилу Крамера и с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3=-2\\ 2x_1+7x_2-6x_3=6\\ 3x_1+10x_2-10x_3=6\end{cases}\qquad \begin{cases} 4x_1-5x_2+2x_3=5\\ 3x_1-2x_2+5x_3=9\\ 5x_1-6x_2+2x_3=6\end{cases}$$

2. Вычислить определитель матрицы $A$ разложением по элементам 1-го столбца, а так же по элементам 2-й строки. Вычислить определитель матрицы $B$ обнулением 2-го столбца, а так же обнулением 3-й строки.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 & -5\\ 6 & 2 & -4 & 3\\ 4 & 1 & 3 & -1\\ 5 & 3 & 2 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Решить системы уравнений методом разложения по базису

$$\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3=0\\ 2x_1-9x_2+8x_3=2\\ 3x_1-13x_2+12x_3=4\end{cases}\qquad \begin{cases} x_1-3x_2+4x_3=4\\ 2x_1-5x_2+6x_3=6\\ 3x_1-8x_2+9x_3=8\end{cases}$$

4. Решить однородные системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+3x_4-4x_5=0\\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4-3x_5=0\\ 3x_1-5x_2+2x_3+6x_4-5x_5=0\\ 4x_1-7x_2-x_3+11x_4-13x_5=0\end{cases},\quad \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+3x_4-4x_5=0\\ 2x_1+5x_2-4x_3+x_4-5x_5=0\\ 3x_1+7x_2-6x_3+2x_4-8x_5=0\\ 4x_1+9x_2-8x_3+3x_4-11x_5=0\end{cases}.$$

5. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных матрицами

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2\\ 1 & 5 & 3\\ 5 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

6. Преобразовать уравнения кривых 2-го порядка

$$3x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2-6x_1+2x_2+1=0,\ 4x_1x_2+4x_1+4x_2^2+1=0.$$

# Приложение

## §1. Решение систем линейных однородных дифференциальных уравнений по методу Эйлера

Не ограничивая общности выкладок, рассмотрим процесс решения системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}, \tag{I}$$

определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Решить систему (I), это значит найти пару функций $x_1(t), x_2(t)$, в результате подстановки которых в равенства (I), будут получены два верных тождества.

Вводя производную вектор-функции $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, систему (I) перепишем в матричном виде

$$\bar{x}' = A\bar{x}. \tag{II}$$

Уравнение (II) будем решать в предположении, что матрица $A$ имеет различные собственные значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, которым соответствуют собственные векторы $\bar{u_1}$ и $\bar{u_2}$. Произведём замену переменной, введя новую неизвестную вектор-функцию $y(t)$ по формуле:

$$\bar{x}(t) = C\bar{y}(t), \tag{III}$$

где $C$ – матрица перехода к базису из собственных векторов матрицы $A$, приводящая матрицу $A$ к диагональному виду $A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Тогда $\bar{x}'(t) = C\bar{y}'(t)$ и наша система (II) принимает вид:

$$C\bar{y}' = AC\bar{y}.$$

Умножая это равенство слева на матрицу $C^{-1}$ и полагая $C^{-1}AC = A_1$, получаем систему:

$$\bar{y}' = A_1\bar{y},$$

которую представим в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \end{cases}.$$

Очевидно, что $y_1 = B_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = B_2 e^{\lambda_2 t}$ – решение полученной системы уравнений, где $B_1, B_2$ – произвольные константы.

Возвращаясь к вектор-функции $\bar{x}(t)$, получаем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \bar{u_1} y_1 + \bar{u_2} y_2,$$

где $\bar{u_1} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix}$, $\bar{u_2} = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ – собственные векторы матрицы $A$.

Таким образом, получаем решение системы в виде:

$$\bar{x} = B_1 \bar{u_1} e^{\lambda_1 t} + B_2 \bar{u_2} e^{\lambda_2 t}. \qquad \text{(IV)}$$

Итак, решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений производится по следующему алгоритму:

1) Находим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $A$ из уравнения $det(A - \lambda E) = 0$.

2) Находим собственные векторы $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \ldots, \bar{u_n}$ матрицы $A$ из уравнения $det(A - \lambda_i E)\bar{u_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

3) Выписываем общее решение системы на основании формулы (IV) в векторном виде и в покомпонентном виде.

**Пример.** Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}.$$

**Решение.**

1) Находим собственные числа матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda + (1-\lambda)((\lambda-3)(\lambda-4)-4) + 2 - \lambda = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 8) + 2(1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5 \text{ — собственные числа.}$$

2) Находим собственные векторы $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}$.

При $\lambda_1 = 1$ получаем уравнение $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha \qquad + \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}.$$

Полагая $\gamma = 1$, находим $\alpha = -1$, $\beta = -1$, $\bar{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 2$ получаем уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{3}\gamma \\ \beta = \dfrac{2}{3}\gamma \end{cases}.$$

Полагая $\gamma = 3$ , находим $\alpha = -1, \beta = 2, \bar{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 5$ получаем уравнение $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{cases} -2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 4\beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{3}\gamma \\ \beta = \dfrac{1}{3}\gamma \end{cases}.$$

Полагая $\gamma = 3$, находим $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\bar{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Получаем решение в виде вектор-функции по формуле (IV)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t},$$

т.е.

$$\begin{cases} x = -C_1e^t - C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ y = -C_1e^t + 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t} \\ z = C_1e^t + 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t} \end{cases}$$

– общее решение системы дифференциальных уравнений.

## §2 Метод Даламбера решения систем однородных линейных дифференциальных уравнений.

Идею метода Даламбера проследим в процессе решения простейшей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} .$$

Вычитая из 1-го уравнения 2-е а так же складывая их, получаем

$$\begin{cases} (x - y)' = 2(x - y) \\ (x + y)' = 4(x + y) \end{cases} .$$

Решая каждое из этих дифференциальных уравнений, получаем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 2C_1e^{2t} \\ x + y = 2C_2e^{2t} \end{cases}, \begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \\ y = -C_1e^{2t} + C_2e^{4t} \end{cases},$$

Метод Даламбера может оказаться более удобным, если число собственных векторов матрицы $A$ меньше числа уравнений системы.

Не ограничивая общности рассуждений, рассмотрим систему дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями

$$\bar{x}' = A\bar{x} \tag{I}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – собственные значения матрицы $A$ и $\bar{u_1}, \bar{u_2}, \bar{u_3}$ – собственные векторы сопряженной (транспонированной) матрицы $A^T$.
Умножив исходную систему скалярно на векторы $\bar{u_i}$, $i = 1, 2, 3$, получаем:

$$(\bar{u_i}, \bar{x}')' = (\bar{u_i}, A\bar{x}) = (A^T\bar{u_i}, \bar{x}).$$

Принимая во внимание равенство $A^T\bar{u_i} = \lambda_i\bar{u_i}$, $i = 1, 2, 3$, приходим к простому дифференциальному уравнению:

$$(\bar{u_i}, \bar{x})' = (\lambda_i\bar{u_i}, \bar{x}) = \lambda_i(\bar{u_i}, \bar{x}).$$

Отсюда получаем $(\bar{u_i}, \bar{x}) = C_i e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, 3$.
Если число собственных векторов совпадает с числом уравнений, то получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = C_1e^{\lambda_1 t} \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = C_2e^{\lambda_2 t} \\ u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 = C_3e^{\lambda_3 t} \end{cases}. \tag{II}$$

Решая эту систему, получим решение системы дифференциальных уравнений. Недостаток метода Даламбера, в сравнении с методом Эйлера, в необходимости последующего решения алгебраической системы линейных уравнений.

Достоинство метода Даламбера особенно проявляется в том случае, когда число собственных векторов матрицы $A$ меньше числа уравнений. Например, если собственных векторов оказывается на один меньше, чем уравнений, то разрешая систему уравнений (II), мы определим зависимости $x_1(x_n(t)), x_2(x_n(t)), \ldots, x_{n-1}(x_n(t))$, что позволит привести исходную систему к одному неоднородному линейному дифференциальному уравнению, решение которого не встретит затруднений.

**Пример.** Решить систему уравнений $\bar{x}' = A\bar{x}$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Находим собственные числа матрицы $A$ (они совпадают с собственными числами матрицы $A^T$.)

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(3\lambda-6) = 0$$

$$(4\lambda-\lambda^2)(\lambda-2) - 4(\lambda-2) = 0$$

$$(\lambda-2)(4\lambda-\lambda^2-4) = 0$$

$$(\lambda-2)^3 = 0,$$

т.е. $\lambda = 2$ – трехкратное собственное значение, которому соответствует лишь два собственных вектора. Поэтому, следуя методу Даламбера, находим собственные векторы сопряженной матрицы $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ из уравнения $(A^T - \lambda E)\bar{u} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0. \quad 2\alpha+\beta+3\gamma = 0.$$

Полагая $\gamma = 0$, $\beta = 2$, находим $\alpha = -1$, $\bar{u_1} = (-1, 2, 0)$.
Полагая $\gamma = 2$, $\beta = 0$, находим $\alpha = -3$, $\bar{u_2} = (-3, 0, 2)$.
Полученные нами собственные векторы мы записали в виде векторов-строк, т.к. это элементы сопряженного векторного пространства.
Выписываем систему алгебраических уравнений (II):

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 2C_1e^{2t} \\ -3x_1 + 2x_3 = 2C_2e^{2t} \end{cases}.$$

Отсюда находим $x_2 = \dfrac{1}{2}x_1 + C_1e^{2t}$, $x_3 = \dfrac{3}{2}x_1 + C_2e^{2t}$. Подставляя это в 1-е уравнение системы, получаем

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4x_1 + x_1 + 2C_1e^{2t} - 3x_1 - 2C_2e^{2t},$$

$x_1' - 2x_1 = 2(C_1 - C_2)e^{2t}$ – неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.
Воспользовавшись заменой переменной $x_1 = e^{2t}y(t)$, получаем $x_1' = 2e^{2t}y + e^{2t}y'$ и после подстановки в дифференциальное уравнение и последующего сокращения на $e^{2t}$ получаем:

$$2y + y' - 2y = 2(C_1 - C_2), \quad y' = 2(C_1 - C_2), \quad y = 2(C_1 - C_2)t + 2C_3.$$

Отсюда получаем решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = (2(C_1 - C_2)t + 2C_3)e^{2t} \\ x_2 = \dfrac{1}{2}x_1 + C_1e^{2t} = ((C_1 - C_2)t + C_3 + C_1)e^{2t} \\ x_3 = \dfrac{3}{2}x_1 + C_2e^{2t} = (3(C_1 - C_2)t + 3C_3 + C_2)e^{2t} \end{cases}$$

## Задачи для самостоятельного решения.

Решить системы дифференциальных уравнений методами Эйлера и Даламбера

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -x + y \end{cases}, \qquad \begin{cases} 3x' = 2x + 8y \\ 3y' = 4x - 2y. \end{cases}$$

# Содержание

*Учебное издание*

**Долбилов Александр Михайлович**

**МАТЕМАТИКА.**
**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Учебно-методическое пособие

*Авторская редакция*

Компьютерный набор и верстка Липатовой А.А.

Подписано в печать ??.??.18. Формат 60x80 1/16.
Печать офсетная. усл.печ.л.??. Уч.-изд.л. ??.
Тираж ??? экз. Заказ № ???.

Издательский центр "Удмуртский университет"
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп.4, каб.207
Тел./факс:+7(3412)500-295 E-mail:editorial@udsu.ru