

УДК 51-77

© *Е. Е. Иванко*

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДЕНЕЖНОГО СОСТОЯНИЯ УЧАСТНИКОВ ЗАМКНУТОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СЕТИ

В работе исследуются эффекты, возникающие в замкнутой сети обобщенных ключевых производителей, связанных отношениями «поставщик–клиент» при неизменных объемах товарообмена. Основными задачами данного исследования являются выявление выраженных негативных социально-экономических свойств системы и поиск инструментов компенсации этих свойств как за счет изменения внутренних законов товарно-денежного обмена, так и с помощью внешнего регулятора. Последовательно рассматриваются модели, связанные с повышением наценок убыточными предприятиями, государственной поддержкой убыточных предприятий и государственным влиянием на рассматриваемую систему через эмуляцию участника сети. В ходе масштабных вычислительных экспериментов показывается, что при реализации государственной поддержки по определенным алгоритмам через единственную искусственную убыточную вершину–потребитель удастся не только избежать появления иных убыточных производителей, но и существенно сбалансировать доходы прибыльных.

Ключевые слова: динамическая система на графе, ресурсная сеть, сеть производителей, сеть покупателей–продавцов, государственная поддержка.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-03

Введение

Одним из актуальных направлений развития современной экономики является рост социальной ответственности при принятии регуляционных решений. Помимо таких классических показателей, как уровень ВВП, ставка рефинансирования или уровень инфляции, все большую роль в фискальной финансовой политике начинает играть балансирование доходов, в частности борьба с бедностью. Успех в решении этих системных проблем, хоть и не приводит к немедленной экономической выгоде, положительным образом влияет на здоровье общества в целом, обеспечивая почву для стабильного долгосрочного развития, притока в экономику квалифицированных специалистов, возможности реализации стратегических инфраструктурных и венчурных проектов.

В настоящей статье автор исследует методы балансировки цен и сопутствующие такой балансировке системные эффекты, возникающие в абстрактной замкнутой сети производителей, связанных отношениями «поставщик–потребитель» в условиях неизменных объемов поставок. Рассматриваемая работа занимает промежуточное положение между абстрактными математическими исследованиями динамических систем на ориентированных графах (ресурсные сети [1–3], chip-firing/dollar games [4–8], модель песчаной кучи (abelian sandpile model) [9, 10], сети Петри [11]) и экономически содержательными сетевыми моделями [12–14] (в частности, производственными сетями (production networks) [15, 16], buyer-seller networks [17], supply chains networks [18, 19]).

В качестве метода исследования выбран вычислительный эксперимент (см. работы в области агентно-ориентированного моделирования в экономике (agent-based computational economics — ACE) [20, 21]), позволяющий быстро и гибко изменять условия функционирования модели, выявлять перспективные регуляционные механизмы и связанные с ними сложности. Отметим, что по сравнению с другим популярным методом исследования экономических систем — динамическими стохастическими моделями общего равновесия (dynamic stochastic general equilibrium — DSGE [22]) — модели, основанные на вычислительном эксперименте (в частности, ACE-модели), пригодны для анализа более широкого круга реальных социально-экономических систем, поскольку позволяют задавать произвольные законы взаимодействия между элементами модели и изначально не обусловлены необходимостью существования равновесия.

Исследуемую в работе замкнутую сеть производственных цепочек можно представить в виде сильно связанного ориентированного графа, каждая из вершин которого является обобщенным

производителем некоего существенного для экономики товара (услуги), то есть, например, все производители хлеба объединены в один узел. Далее мы полагаем непринципиальным, насколько высока детализация такой сети, иными словами, являются ли, например, производители хлеба и кондитеры разными узлами. Достаточно предположения о том, что все участники рынка, обобщенные в модели под одним узлом, обладают одинаковыми наборами поставщиков и клиентов (представленными в модели, в свою очередь, также обобщенными узлами). Каждый из рассматриваемых узлов является *ключевым производителем* в том смысле, что его успешное функционирование критично для всей производственной сети. Далее ориентированный граф с описанной содержательной интерпретацией будем называть *производственной сетью* (ПС).

Предполагается, что объем товара, производимый каждой вершиной системы, необходим и достаточен для всех потребителей и не изменяется в течение эксперимента. Такое предположение имеет рациональную основу, если вспомнить, что под узлами понимаются целые отрасли, и оговориться, что экономические процессы рассматриваются на относительно коротком временном промежутке, где инновационные изменения и непреодолимые обстоятельства не перестраивают существенно сеть ключевых производственных связей.

В противоположность объемам поставок расчетные денежные потоки между производителями могут быть отнюдь не уравновешены. Следуя кейнсианским представлениям [23] о естественном стремлении к накоплению, будем считать, что каждый производитель стремится к превосходству входящего денежного потока над исходящим. В таких условиях производители с большим значением разницы продажи-закупки с течением времени будут агрегировать доходы, что в условиях фиксированной денежной массы приведет к росту социально-экономического неравенства, в частности к появлению убыточных предприятий. Поскольку рассматривается сеть обобщенных *ключевых* производителей, банкротство любого из них может иметь катастрофические последствия для всей экономики (например, нельзя остановить сельское хозяйство, хотя сделать его прибыльным удастся далеко не всегда [24]). Кроме того, даже если бы закрытие убыточных отраслей было возможно, оно не решало бы системную проблему убыточности по существу, поскольку в новой, суженой (но по-прежнему замкнутой по условию) производственной сети с высокой вероятностью сохранилось бы неравенство доходов, а значит, с течением времени выявились бы новые убыточные производители. В работе исследуется возможность избежать появления убыточных и сбалансировать доходы прибыльных производителей с помощью некоторых алгоритмов государственной поддержки в условиях неизменных объемов поставок.

В § 3 демонстрируется, что одно только повышение наценок убыточными предприятиями без вмешательства государства предсказуемо не решает ни проблему наличия убыточных производителей в ПС, ни проблему существенного расслоения прибыльных производителей по доходу. Снижение наценок прибыльными производителями в модели не рассматривается, поскольку предполагается, что производители действуют капиталистически, а при неизменном по условию объеме поставок такое снижение привело бы к снижению дохода. Для покрытия естественно возникающего у убыточных производителей долга (см. § 4) используется государственная поддержка (денежная эмиссия). В ходе дальнейших экспериментов выясняется, что при некоторых параметрах модели в процессе итерационной динамики с повышением наценок и государственной поддержкой в ПС остается единственный убыточный производитель. Этот результат наталкивает на мысль введения искусственной полностью подконтрольной государству вершины, обладающей заведомо наихудшим соотношением доходов/расходов, которая в ходе итераций ПС могла бы остаться единственной убыточной вершиной, обеспечивая прибыльность остальных (§ 5). При достижении такого состояния эмиссия денежных средств может проводиться исключительно через искусственную вершину, что обеспечивает прозрачность процесса государственной поддержки, исключая возможность мошенничества со стороны реальных производителей. Дальнейшее распределение государственных средств от искусственной убыточной вершины к остальным производителям строго формализуется и проводится в привязке к рыночным ценам на производимые товары.

Помимо возможного экономического содержания, в рассматриваемой дискретной динамической модели возникают интересные абстрактные вопросы характеристики ПС, асимптотиче-

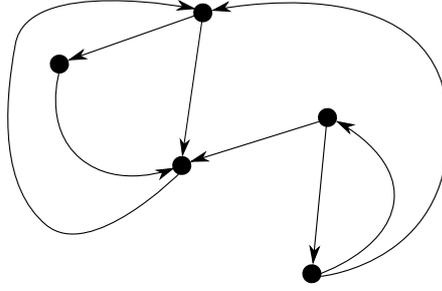


Рис. 1. Пример структуры производственной сети

ски сходящихся к состоянию с одной убыточной вершиной.

§ 1. Статическая модель

Формализуем понятие ПС; структурной основой рассматриваемой ПС является простой (без петель и кратных ребер) ориентированный граф $G = (V, E)$, где традиционно V — множество вершин (для удобства $|V| > 2$), а $E \subseteq V^2$ — множество ребер. Будем считать, что в G множества входящих и исходящих ребер для каждой вершины не пусты: $\forall v \in V \exists x \in V \exists y \in V: (v, x) \in E \ \& \ (y, v) \in E$ (такая «связность» занимает промежуточное положение между понятиями слабой и сильной связности для ориентированного графа, см. рис. 1). Напомним, что каждая из вершин множества V представляет из себя обобщенного производителя некоего существенного для экономики товара (услуги), а каждое направленное ребро выражает отношение «поставщик–клиент». Поскольку предполагается, что каждой вершине в графе соответствует единственный производимый товар, далее обозначение вершины и производимого ей товара отождествляется.

На вершинах графа задана неизменная функция себестоимости производства единицы товара: $s: V \rightarrow \mathbb{R}$, а также для каждой i -й итерации заданы соответствующие функции текущего количества денег $m_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ и наценки $c_i: V \rightarrow \mathbb{R}$, с которой данный производитель продает своим клиентам единицу товара (наценка измеряется в доле себестоимости). В рассмотренной модели наценка одинакова для всех клиентов производителя v , в дальнейшем планируется учесть естественные вариации цены, например, в зависимости от объема поставок. На ребрах задана независимая от номера итерации функция $o: E \rightarrow \mathbb{R}$, выражающая количество поставляемых единиц товара в рамках данной связи «поставщик–клиент». Поскольку по построению в G нет петель, будем считать, что поставки производителя товара самому себе скрыто отражаются в себестоимости производства.

В следующих параграфах рассматриваются некоторые варианты товарно-денежной динамики в описанной сети. Для каждого из предложенных вариантов приводится вычислительный эксперимент, демонстрирующий особенности данной динамики. Во всех вычислительных экспериментах сеть производителей объединяла $|V| = 100$ вершин, для каждой из которых ($v \in V$) равновероятно выбирались себестоимость производства единицы товара $s(v) \in \overline{1, 10}$ и начальное количество денег $m_0(v) \in \overline{1, 1000}$. Небольшая часть выбранных наудачу вершин образовывала подмножество *необходимых товаропроизводителей* (НТ): $V^* \subset V: |V^*| = 5$. Предполагалось, что продукцию каждого из НТ потребляют все без исключения вершины (например, ключевые продукты питания): $\forall v \in V^* \forall x \in V \setminus \{v\} (v, x) \in E$. Для каждой вершины v из оставшихся $V \setminus V^*$ вершин равновероятно выбиралось число клиентов $K(v) \in \overline{1, |V|}$, после чего из множества $V \setminus \{v\}$ наудачу выбирались $K(v)$ различных вершин, которые назначались клиентами v (то есть для каждого клиента x в ПС создавалась исходящая связь $(v, x) \in E$). Введение НТ не противоречит здравому смыслу и удобно для обеспечения связности сети: если исходящие ребра из каждой вершины существуют по построению, то наличие входящих гарантируется НТ. Наконец, равновероятно выбирались объем поставки $o(v, w) \in \overline{1, 10}$ и наценка на единицу товара $c_0(v) \in [0.01, 0.1]$. Далее под ПС везде будем понимать структуру, сформированную по описанным в данном параграфе правилам.

§ 2. Базовая динамика (БД)

В основе всех рассматриваемых в настоящей работе моделей лежит итерационная динамика расчетов за произведенный товар. Каждая из вершин $v \in V$ на каждой из итераций $i \in \mathbb{N}$ осуществляет продажи своей продукции каждому из своих клиентов $w \in \{x \in V : (v, x) \in E\}$, проводя расчеты по следующему правилу:

$$\begin{aligned} m_i(v) &:= m_{i-1}(v) + o(v, w)s(v)(1 + c_{i-1}(v)), \\ m_i(w) &:= m_{i-1}(w) - o(v, w)s(v)(1 + c_{i-1}(v)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где значения $m_0(v), c_0(v)$ для всякого $v \in V$ заданы по условию. Наценка на данном этапе принимается неизменной:

$$c_i(v) := c_0(v). \quad (2.2)$$

Отметим, что в рассматриваемой упрощенной модели все расчеты синхронизированы: предполагается, что каждый производитель на каждой итерации продает одинаковое число товара. Между тем в реальности время, требующееся на производство различных товаров, может радикально различаться. Рассинхронизированную модель ПС, объединяющей производителей с существенно различающимися по длительности производственными циклами, планируется рассмотреть в последующих работах.

Поскольку связи в графе и объемы продаж сгенерированы случайно, очевидно, у некоторых из товаропроизводителей в ходе итераций количество денег может уменьшиться (и даже оказаться отрицательным), то есть в заданных производственных цепочках эти узлы работают в убыток (см. типичный пример на рис. 2 с динамикой (2.1), (3.2), которая при $\alpha = 0$ эквивалентна (2.1), (2.2)). Будем предполагать, что ключевые производители, в силу важности для экономики, могут позволить себе повышать наценки на свои товары в неких разумных пределах, не теряя при этом клиентов и объемов поставок. Изучим экспериментально, будет ли увеличение наценки убыточными производителями в рамках базовой динамики (замена (2.2) с сохранением (2.1)) способствовать снижению числа убыточных производителей и выравниванию доходов производителей прибыльных.

§ 3. БД с ростом наценок

Рассмотрим два варианта дополнений к БД, при которых в конце всякой i -й итерации, после того как расчеты в соответствии с правилами (2.1) проведены для всех вершин (и уже известны величины $m_i(v)$), некоторые производители могут повышать наценку (изменять $c_i(v)$). В первом случае (3.1) будем допускать, что помимо увеличения наценки всеми производителями с убывающим количеством денег, некая доля прибыльных производителей также будет повышать цены; во втором случае (3.2) повышение наценок не будет зависеть от текущей доходности предприятия:

$$c_i(v) := \begin{cases} c_{i-1}(v) + r \cdot 0.1, & \text{если } m_i(v) < m_{i-1}(v) \text{ или } k < \alpha; \\ c_{i-1}(v), & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$c_i(v) := \begin{cases} c_{i-1}(v) + r \cdot 0.1, & \text{если } k < \alpha; \\ c_{i-1}(v), & \text{иначе;} \end{cases} \quad (3.2)$$

где r, k наудачу выбираются из $[0, 1]$, а параметр α принимает значения 0, 0.05, 0.33, 0.66, 0.95.

Даже при отсутствии повышения наценок прибыльными производителями ($\alpha = 0$) эксперименты (см. рис. 2, таблицу 1) с динамикой (2.1), (3.1) выявляют такие негативные эффекты, как: 1) рост разрыва благосостояния богатейшего производителя и «среднего класса»; 2) компенсирующее убывание благосостояния беднейшего производителя; 3) доля производителей, чье денежное состояние отрицательно (и убывает), остается велика в пределах 10000 итераций. Отметим, что, судя по проведенным вычислительным экспериментам, балансировка наценок (3.1) приводит в среднем случайно сгенерированном по правилам § 2 графе к асимптотической сходимости числа производителей с отрицательным денежным состоянием к приблизительно 10 и к бесконечному колебательному процессу численности производителей с отрицательным и уменьшившимся на текущем шаге денежным состоянием (см. рис. 3). В будущей

работе эти явления предполагается исследовать с позиции динамических моделей, описывающих распространение активности/ресурсов в графах, а также с помощью теории случайных графов и сетей Петри.

Введение в модель даже малого шанса повышения цен у неубыточных производителей существенно усугубляет описанные выше проблемы неравенства (см. пример на рис. 2 при $\alpha = 0.05$), а при увеличении параметра α указанные проблемы становятся еще более выраженными (см. таблицу 1).

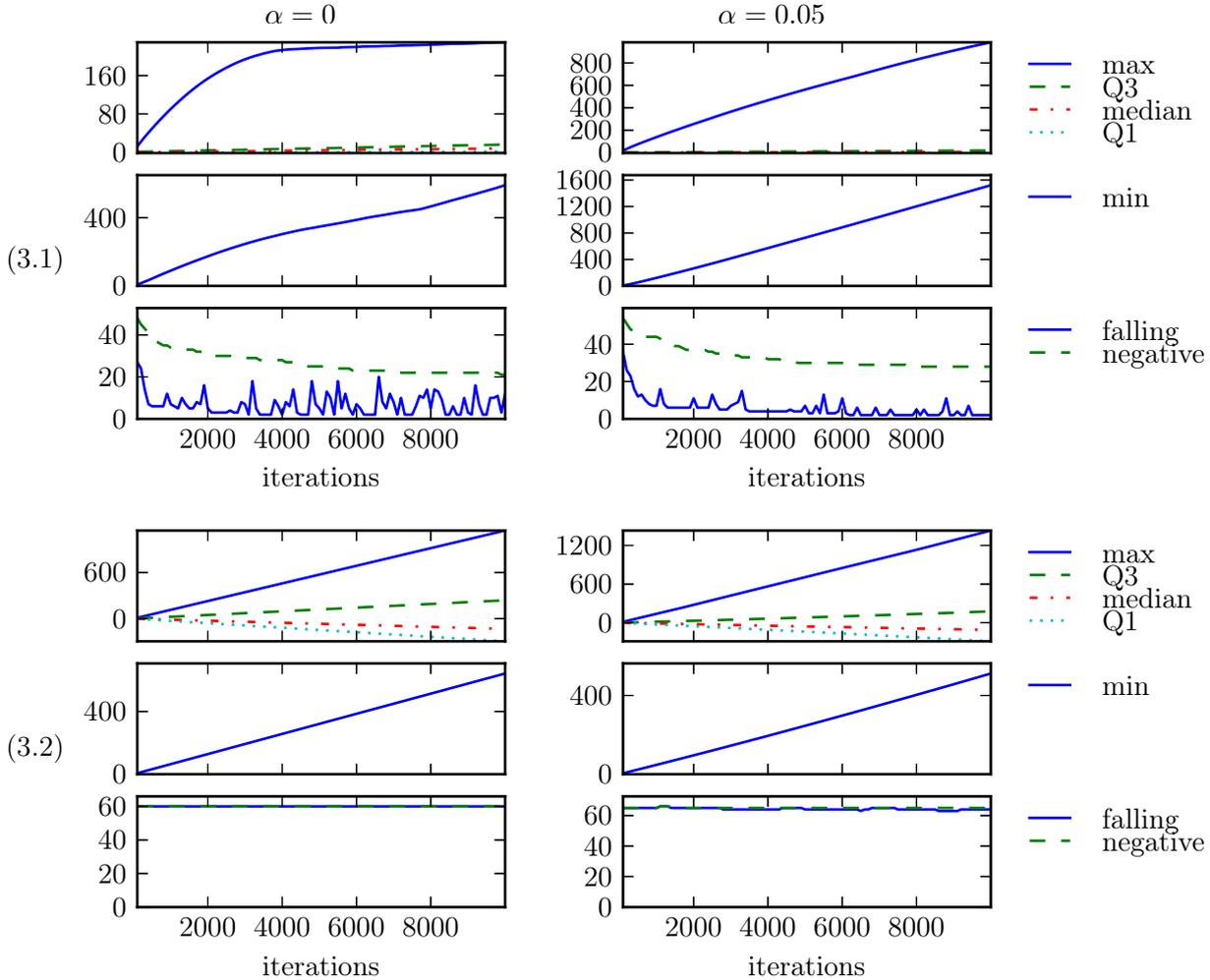


Рис. 2. Примеры результатов вычислительных экспериментов с динамиками (2.1), (3.1) и (2.1), (3.2) при $\alpha = 0$ и $\alpha = 0.05$. Здесь и ниже \max , $Q3$, median , $Q1$ и \min есть функции из \mathbb{N} в \mathbb{R} , показывающие соответственно максимум, верхний квартиль, медиану, нижний квартиль и модуль минимума денежных состояний производителей, деленные на суммарное количество денег в системе на текущей итерации (например, выражение для максимума имеет вид $\max(i) = (\max_{v \in V} \{m_i(v)\}) / (\sum_{v \in V} m_i(v))$). Функция negative показывает для текущей итерации число вершин с отрицательным, а функция falling — с отрицательным и убывающим по сравнению с предыдущей итерацией денежным состоянием

Интересно также отметить, что при динамике (2.1), (3.1), в случае когда возможность повышать наценку более равномерно распределена среди производителей ($\alpha = 0.66, 0.95$), а также при динамике (2.1), (3.2) во всех случаях, среднее число убыточных производителей в конце десяти тысячной итерации больше ожидаемых 50%. Такой сдвиг обусловлен, вероятно, наличием 5% вершин, связанных со всеми другими производителями исходящими ребрами (множество V^*). В силу того, что число клиентов у производителей из множества V^* максимально, они с большей вероятностью становятся высокодоходными, оттягивая на себя денежные потоки

Таблица 1. Усредненные результаты вычислительного эксперимента с динамиками (2.1), (3.1) и (2.1), (3.2) для различных значений параметра α

		$\alpha = 0$		$\alpha = 0.05$		$\alpha = 0.33$		$\alpha = 0.66$		$\alpha = 0.95$	
		Среднее	Ст. откл.	Среднее	Ст. откл.	Среднее	Ст. откл.	Среднее	Ст. откл.	Среднее	Ст. откл.
(3.1)	max	321.6	129.7	6 534.4	1 265.8	56 613	6 315.3	123 515.6	9 955.7	180 767.7	9 785.9
	Q3	15.4	1.9	50.4	5.6	4 711.2	2 953.3	23 097.8	5 399.6	37 707.4	9 576.2
	median	7	0.9	10.7	1.9	4.2	2.8	-1 743.3	2 295.2	-14 774	5 292.3
	Q1	0.5	0.9	-0.6	0.6	-9 390.5	1 530.2	-34 685.4	2 828.3	-50 136.7	7 345.9
	min	-951.2	235.9	-8 556	1 309.3	-36 718.6	3 438.2	-69 257	5 942	-85 202.2	10 516.8
	negative falling	23.8	2.4	26.4	2.2	45.2	2.9	54	2.3	58.8	2.3
		4	3.8	19.2	4	42.6	3	52.5	1.4	58.6	2.2
(3.2)	max	1 252.5	196.7	10 338.9	603.5	62 820.9	5 315.7	114 922	10 927.6	155 509.4	32 315.4
	Q3	209.7	51.5	2 367.7	302.8	13 431	2 800.7	25 819.1	4 830.8	32 803.1	7 481.1
	median	-112.8	21.3	-930	220.9	-5 976.9	1 211	-11 478.4	2 269.1	-10 322.1	5 051.5
	Q1	-308.1	32.1	-3 004.6	235.4	-17 221.3	1 752.3	-35 082.9	2 532	-44 898	9 878.9
	min	-541.4	70.5	-5 180.7	334.6	-30 169	3 381	-60 306.3	4 180.4	-76 846.5	16 705.2
	negative falling	60.8	2.3	58.4	1.9	60.4	2	59.6	1.8	56.5	2.8
		60.8	2.3	58.2	2	60.3	1.9	59.5	1.8	56.2	2.6

внутри системы и оставляя другим производителям меньше шансов на безубыточность.

Между тем для реальной экономики производители с отрицательным денежным балансом нетипичны. Если ограничиться, как мы условились выше, рассмотрением только торговых взаимосвязей между *критичными* для экономики производителями, резонно предположить, что производитель не может быть подвергнут банкротству и закрыт без существенного ущерба для всей экономической системы. Одним из естественных способов сохранения убыточных производств (как уже упоминалось, по-видимому, неизбежно возникающих в замкнутой экономике) и существующих цепочек поставок важнейших товаров в такой ситуации является монетарная поддержка государства.

На практике для уменьшения расслоения общества по уровню дохода нередко используется прогрессивное налогообложение [25]. Заметим, однако, что в рассматриваемой модели производственной сети прогрессивное налогообложение само по себе может лишь уменьшить состояние наиболее прибыльных производителей, перенаправляя эти деньги в «казну государства» и снижая объем необходимой для государственной поддержки денежной эмиссии. Так, например, в исследуемой ПС прогрессивное налогообложение в чистом виде не способно уменьшить число убыточных производителей, поскольку, с одной стороны, оно не изменяет объемы существующих расчетных потоков в системе, а с другой — не обеспечивает искусственного вливания средств в убыточные производства.

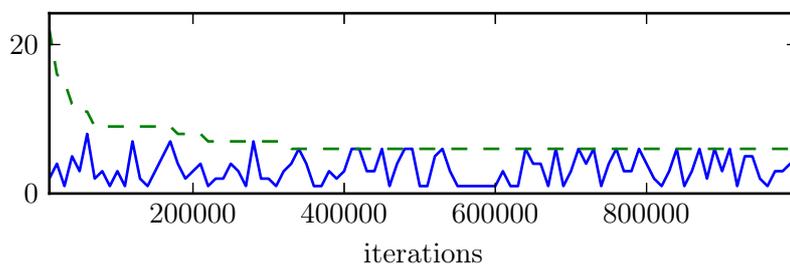


Рис. 3. Пример изменения количества вершин с отрицательным (пунктир) и отрицательным убывающим (сплошная линия) денежным состоянием в процессе динамики (2.1), (3.1) при $\alpha = 0$ на протяжении 10^6 итераций

§ 4. Модель с «государственной поддержкой» (развитие динамики (2.1), (3.1))

Динамика изменения наценок (3.1) представляется более реалистичной, чем динамика (3.2), поэтому для дальнейших вариаций и экспериментов в качестве основы выбрана именно она.

Следуя сказанному в предыдущем параграфе, рассмотрим динамику (3.1) с дополнительной компенсацией убытков для тех производителей, у которых количество денег в конце итерации оказывается отрицательным. Кроме того, будем допускать «мошенничество», когда производитель, не являясь убыточным, запрашивает и получает государственную поддержку в объеме, равном M — модулю средней господдержки по всем производителям, чье количество денег действительно оказалось отрицательным в конце итерации (см. (4.2)):

$$\begin{aligned} c_i(v) &:= \begin{cases} c_{i-1}(v) + r \cdot 0.1, & \text{если } m_i(v) < m_{i-1}(v) \text{ или } k_1 < \alpha_1; \\ c_{i-1}(v), & \text{иначе;} \end{cases} \\ m_i(v) &:= \begin{cases} 1, & \text{если } m_i(v) < 0; \\ m_i(v) + M_i, & \text{если } k_2 < \alpha_2; \\ m_i(v), & \text{иначе;} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$M_i = \frac{1}{|V_i^-|} \sum_{v \in V_i^-} (1 - m_i(v)), \quad V_i^- = \{v \in V : m_i(v) < 0\}, \quad (4.2)$$

параметры α_1, α_2 выбираются из множества $\{0, 0.05, 0.33, 0.66, 0.95\}$, а r, k_1, k_2 есть равномерно выбранные вещественные числа из промежутка $[0, 1]$.

В динамике (4.1) происходит постоянная эмиссия денег; соответственно, возникает дополнительный параметр, характеризующий модельную экономику, — отношение суммарного количества денег в системе в конце текущей итерации к суммарному количеству денег в конце предыдущей. Отметим, что во всех описываемых в настоящем параграфе экспериментах среднее значение этого параметра к десяти тысячной итерации не превосходило одного процента, поэтому при анализе модели он не учитывается и специальных графиков для него не приводится. Такая сходимость относительного денежного прироста связана, по всей видимости, с использованием в (2.1) наценки, выраженной в долях от неизменной себестоимости. В дальнейшем планируется провести эксперименты с моделями, в которых рост совокупной цены на текущей итерации будет измеряться в долях от цены на предыдущей итерации (например, в виде $c_i := c_{i-1}(1 + 0.1r)$).

В ходе вычислительных экспериментов для каждого из значений 0, 0.05, 0.33, 0.66, 0.95 параметров α_1, α_2 проводилось по 100 экспериментов, в каждом из которых строился случайный граф поставок по описанным в § 1 правилам, после чего реализовывалась динамика (2.1), (4.1) в течение 10^4 итераций. На десяти тысячной итерации каждого i -го эксперимента запоминались следующие значения: Sum^i (суммарное количество денег по всем производителям), \max^i (максимум количества денег по всем производителям), q_3^i (верхний квартиль количества денег по всем производителям), med^i (медиана количества денег по всем производителям), q_1^i (нижний квартиль количества денег по всем производителям) и, наконец, ub^i (число производителей, чье денежное состояние на десяти тысячной итерации оказалось меньше, чем на предыдущей). Полученные значения выражались в долях от текущей совокупной денежной массы и усреднялись по 100 экспериментам:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Max}} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{\max^i}{\text{Sum}^i}, & \overline{Q3} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{q_3^i}{\text{Sum}^i}, & \overline{\text{Med}} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{\text{med}^i}{\text{Sum}^i}, \\ \overline{Q1} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{q_1^i}{\text{Sum}^i}, & \overline{Ub} &= \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{\text{ub}^i}{\text{Sum}^i}. \end{aligned}$$

Примеры полученных результатов представлены на рис. 4. На рис. 5 представлена зависимость расслоения денежного состояния производителей от параметров α_1, α_2 : $(\overline{Q3} - \overline{\text{Med}})$ (рис. 5, а, темные столбики) и $(\overline{\text{Med}} - \overline{Q1})$ (рис. 5, а, светлые столбики); $\overline{\text{Max}}$ (рис. 5, б и, наконец, \overline{Ub} (рис. 5, в).

Из графиков и таблиц на рис. 5 видно, что наименьшее расслоение по доходам вместе с наименьшим числом убыточных производителей возникает при малых значениях α_1 и больших α_2 .

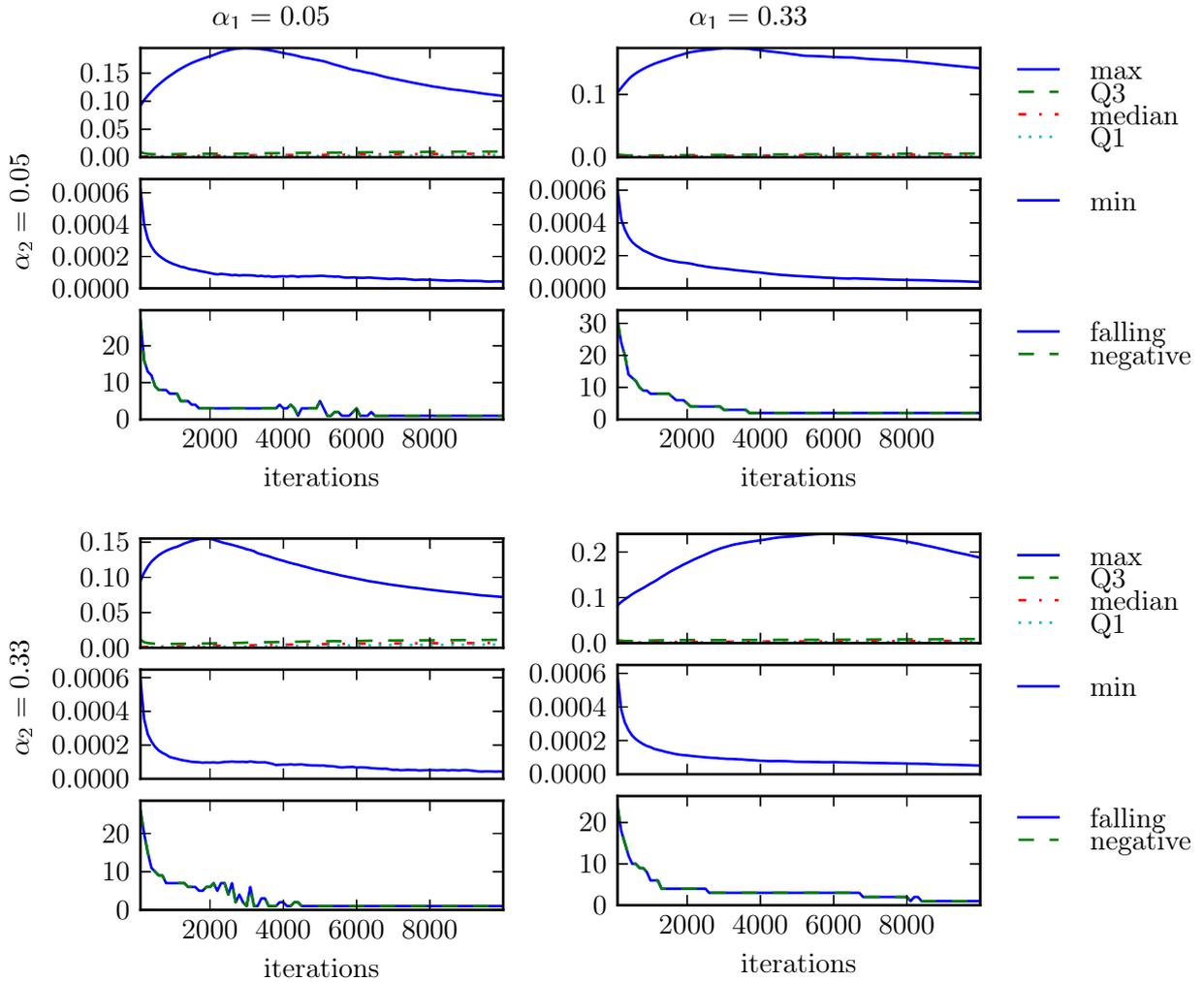
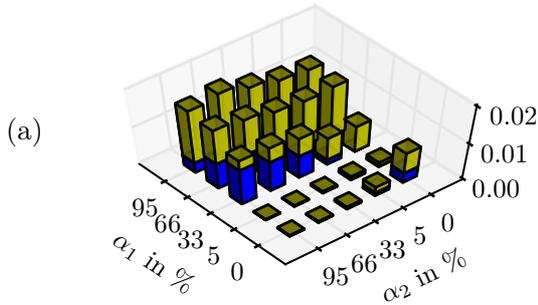


Рис. 4. Примеры результатов вычислительных экспериментов с динамикой (2.1), (4.1) при $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0.05, 0.66\}$. Описание обозначений см. под рис. 2. Из соображений наглядности (сопоставимости масштабов) первая тысяча итераций (где рассматриваемые величины могут принимать на порядки большие значения) не показана

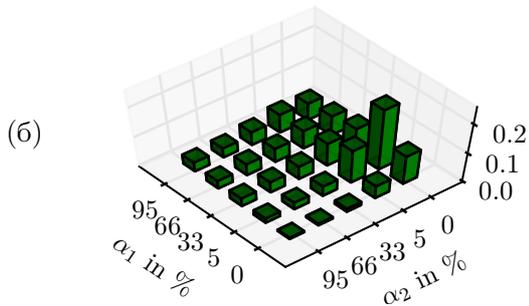
Интересно отметить, что те особенности динамики модели, которые изначально вводились как возможное «мошеничество» ($\alpha_2 > 0$) и которые в итоге оказали положительную роль на выравнивание доходности производителей, несут черты безусловного базового дохода [26].

Заметим, что при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0.05$ число убыточных производителей близко к 1 (см. таблицу к рис. 5, в). Такая особенность наталкивает на идею введения в модель искусственной вершины — «абсолютного потребителя», обладающего заведомо наихудшим соотношением «продаж» к «закупкам» среди всех реальных производителей. «Абсолютный потребитель» ничего не производит и не продает, но «использует» при этом некие объемы товаров каждого из других производителей (в действительности фактически покупка и использование в данном случае не обязательны, достаточно того, что «абсолютный потребитель» перечисляет средства продавцу в размере, привязанном к реальным объемам продаж и реальным ценам на данный товар). В силу построения вероятно, что в процессе планомерного повышения реальными убыточными производителями наценок в соответствии с динамикой (2.1), (4.1) единственной убыточной вершиной окажется именно «абсолютный потребитель», обеспечивая, таким образом, во-первых, прибыльность всех иных (реальных) производителей, а во-вторых, точность расчета и невозможность подделки величины государственной поддержки M .



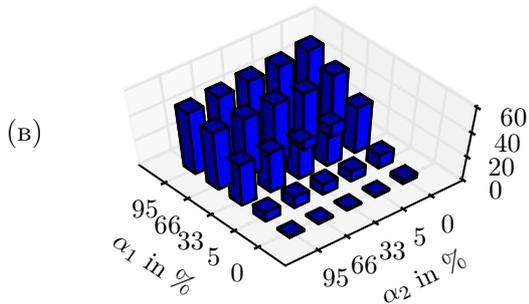
$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0	5	33	66	95
0	84.3	25.6	6.5	3.7	2.9
5	12.9	10.3	4.9	2.9	1.8
33	70.3	74.4	110.6	122.3	125.4
66	135.8	132.2	138.3	153.2	162.1
95	138.7	145	160	180	170.4

$\times 10^{-4}$



$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0	5	33	66	95
0	980.7	439.1	102.1	56.2	42.6
5	2053.2	1135.2	347.7	247.6	164.1
33	824.6	778.9	445.8	373.6	283.7
66	657.1	613.7	466.7	392.8	275.4
95	568.7	616	447.9	323.3	318.2

$\times 10^{-4}$



$\alpha_1 \backslash \alpha_2$	0	5	33	66	95
0	3.6 ± 2.6	1.4 ± 0.5	1.2 ± 0.4	1.3 ± 0.5	1.4 ± 0.7
5	11.1 ± 2.5	8.4 ± 2.6	9.1 ± 2.4	9.5 ± 2.9	8.0 ± 1.2
33	37.5 ± 3.8	33.7 ± 4.4	30.7 ± 3.9	33.3 ± 2.7	34.8 ± 2.8
66	50.5 ± 3.8	46.6 ± 2.8	48.4 ± 1.9	47.8 ± 2.3	47.8 ± 3.9
95	57.3 ± 2.6	55.0 ± 3.3	54.1 ± 2.5	52.3 ± 2.7	50.6 ± 3.5

Рис. 5. Численные значения расслоения товаропроизводителей по накопленным денежным состояниям, полученные в результате вычислительных экспериментов с динамикой (2.1), (4.1) за 10^4 итераций при различных значениях параметров α_1 , α_2 (усредненные по 100 независимым экспериментам): (а) темные столбцы — относительная разница между медианой и нижним квартилем выборки денежных состояний по всем производителям; светлые столбцы — между верхним квартилем и медианой; (б) — между максимумом и верхним квартилем; (в) — количество убыточных производителей и его стандартное отклонение (в таблице). Подробное описание эксперимента см. в тексте

§ 5. Модель с «мошенническими» убыточными узлами и «абсолютным потребителем» (развитие динамики (2.1), (4.1))

Формально «абсолютный потребитель» v_0 в рассматриваемой модели есть вершина, построенная по правилам ПС со следующими исключениями: 1) из нее не выходит ни одного ребра; 2) с каждой из прочих вершин ее связывает входящее ребро; 3) «абсолютный потребитель» «закупает» по единице товара каждого из производителей $\forall w \in V$ $o(w, v_0) = 1$; 4) «закупки» товара каждого из производителей $w \in V$ «абсолютным потребителем» производятся по цене, измененной с помощью коэффициента α_3 :

$$\begin{aligned} m_i(v_0) &:= m_{i-1}(v_0) - \alpha_3 \cdot s(w) \cdot (1 + c_{i-1}(w)), \\ m_i(w) &:= m_{i-1}(w) + \alpha_3 \cdot s(w) \cdot (1 + c_{i-1}(w)). \end{aligned} \quad (5.1)$$

В таблице 2 приводятся результаты вычислительных экспериментов, в которых выясняется, каким должен быть коэффициент α_3 («сила оттока убытков» на v_0), для того, чтобы с большой долей уверенности единственным убыточным узлом оставался «абсолютный потребитель». Заметим, что даже в случае, когда коэффициент α_1 велик ($\alpha_1 \in \{0.33, 0.66, 0.95\}$), в среднем доля государственной поддержки в совокупном доходе производителя не превосходит 70 %, а значит, у производителя остаются стимулы для продолжения рыночной борьбы за клиентов. При более ожидаемых значениях $\alpha_1 \in \{0, 0.05\}$ средняя доля необходимой государственной поддержки не превосходит 50 %.

Таблица 2. Для каждой рассмотренной пары параметров α_1, α_2 проводилось по 100 экспериментов в динамике (2.1), (4.1), (5.1) в течение 10^4 итераций. Число в каждой ячейке равняется минимальному значению коэффициента α_3 , при котором в каждом из 100 соответствующих экспериментов единственным убыточным производителем оказывался «абсолютный потребитель»; выражение в скобках показывает средний процент (и среднее отклонение от этого процента) государственной поддержки в совокупных доходах производителей при данных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\alpha_1^{\alpha_2}$	0	0.05	0.33	0.66	0.95
0	8(6 ± 8 %)	5(6 ± 8 %)	8(6 ± 8 %)	8(6 ± 8 %)	8(6 ± 9 %)
0.05	178(44 ± 18 %)	108(36 ± 17 %)	112(37 ± 17 %)	112(36 ± 17 %)	103(36 ± 17 %)
0.33	928(64 ± 20 %)	691(64 ± 20 %)	666(61 ± 20 %)	675(61 ± 20 %)	681(61 ± 20 %)
0.66	1582(67 ± 22 %)	1348(67 ± 21 %)	1419(67 ± 21 %)	1438(67 ± 22 %)	1300(67 ± 21 %)
0.95	2126(69 ± 22 %)	1973(68 ± 22 %)	1900(68 ± 22 %)	1977(69 ± 22 %)	1824(68 ± 22 %)

Полученные результаты ставят как чисто теоретические вопросы, связанные, например, с характеристикой моделей ПС, для которых в асимптоте убыточной является единственная вершина-производитель, так и вопросы использования описанного механизма «стабилизации» ПС с помощью «абсолютного потребителя» в интересах экономических приложений. Более подробно перспективные направления развития полученных результатов обсуждаются в следующем параграфе.

§ 6. Заключение

В настоящей работе основное внимание было уделено двум базовым «социальным» параметрам производственной сети (ПС), связывающей производителей ключевых товаров и услуг: отсутствию убыточных предприятий и выравниванию прибыльных производителей по уровню доходов. В замкнутой системе с постоянным объемом денег убыточные производители возникают непременно, за исключением случаев, когда доход каждого из производителей точно равен расходу, что неправдоподобно, учитывая кейнсианскую склонность к накоплению. В ходе вычислительных экспериментов было показано, что повышение наценки убыточными производителями не решает проблемы наличия существенной доли производителей с отрицательным балансом и роста расслоения по доходу среди прибыльных производителей.

Убыточные производители не могут быть подвергнуты банкротству, поскольку по условию каждый из участников производственной сети является необходимым для функционирования

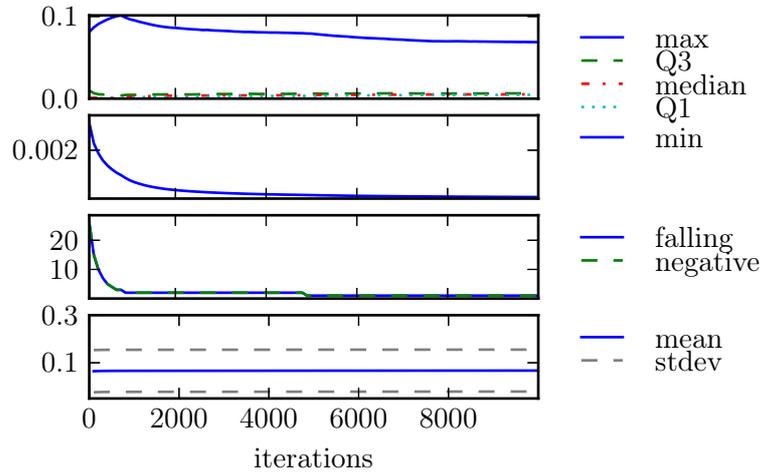


Рис. 6. Пример результатов вычислительного эксперимента с динамикой (2.1), (5.1), (4.1) при $\alpha_1 = 0.05$, $\alpha_2 = 0.05$, $\alpha_3 = 8$, реализовывавшейся в течение 10^4 итераций. Нижний график для каждого из экспериментов показывает долю государственной поддержки в доходах производителей (сплошная линия соответствует среднему значению по всем производителям, пунктир — стандартное отклонение от этого среднего). Остальные обозначения соответствуют введенным ранее (см. рис. 2). Из соображений наглядности (сопоставимости масштабов) первая тысяча итераций (где рассматриваемые величины могут принимать на порядки большие значения) опущена

всей системы ключевым производителем, а значит, узлы ПС с отрицательным балансом нуждаются во внешней поддержке. Одним из простейших способов такой поддержки может быть покрытие долга убыточных производителей за счет эмиссии денег.

В динамике ПС с государственной поддержкой рассматривались два варианта осложнений: 1) наценки повышают не только убыточные производители; 2) некоторые прибыльные производители могут запрашивать и мошенническим путем получать государственную поддержку, предназначенную только для убыточных производителей. Если добавление первой особенности существенно ухудшало показатели модели, то рост выраженности второй, наоборот, способствовал выравниванию доходов в ПС, при этом число убыточных производителей при некоторых параметрах модели оказывалось близким к единице. Последний результат натолкнул автора на идею введения в систему искусственного контролируемого «абсолютного потребителя», который мог бы стать единственной убыточной вершиной, обеспечивая выравнивание доходов остальных прибыльных вершин и позволяя государству точно оценивать объем необходимой денежной эмиссии. Дальнейшие эксперименты показали, что если цены, по которым производит «закупки» «абсолютный потребитель», достаточно высоки (относительно обычных цен, по которым продается товар/услуга для остальных участников рынка), то в ходе итераций системы «абсолютный потребитель» остается единственной убыточной вершиной, причем расслоение по доходу среди производителей существенно снижается. Следует отметить, что высокие «закупочные» цены «абсолютного потребителя» (а фактически — дотация) не уничтожают мотивацию производителей работать для остального рынка, поскольку даже при пессимистичных значениях параметров средняя доля «дотационного» дохода от «абсолютного потребителя» не превосходит 70 % от совокупного дохода производителя (а при более ожидаемых значениях $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 0.05\}$ не превосходят 45 %).

В будущих исследованиях планируется рассмотреть различные подходы к построению модели ПС, в частности: 1) обеспечивать связность ПС за счет иных механизмов, нежели введение необходимых товаропроизводителей; 2) рассмотреть более реалистичные (чем равновероятные) статистические распределения объемов поставок, себестоимостей производства и начальных наценок; 3) разрешить вариацию объемов производства в ходе итераций системы; 4) рассмотреть рассинхронизированную модель, где разные производители обладают различным по дли-

тельности циклом производства; 5) рассмотреть модель, в которой рост наценок на производимые товары выражается не в долях от неизменной себестоимости производства, а в процентах от итоговых цен предыдущей итерации. Последнее изменение, в частности, предположительно позволит реализовать более реалистичную модель роста относительной денежной массы в ПС, поскольку в рассмотренной модели, где наценка возрастает в линейной зависимости от неизменной себестоимости, отношение денежной массы на текущей итерации к денежной массе на предыдущей итерации предсказуемо сходится к 1. Дальнейшее развитие модели ПС и исследование экономического контекста выявленного эффекта стабилизации ПС с «абсолютным потребителем» планируется вести совместно со специалистами в области экономики.

Помимо экономической интерпретации, особенности динамики ПС могут представлять абстрактный теоретический интерес в области сложных систем и случайных графов. Например, в будущей работе предполагается исследовать процессы сходимости численности узлов с отрицательным денежным состоянием (см. рис. 3) и «колебания» числа узлов с убывающим денежным состоянием в динамике (2.1), (3.1) при $\alpha = 0$. Одной из первых задач в этом направлении могла бы стать характеристика сильно связанных ориентированных графов, для которых в динамике (2.1), (3.1) при $\alpha = 0$, начиная с некоторой итерации, число убыточных производителей будет равно единице (назовем их «асимптотически односточными»). Такая характеристика могла бы, например, иметь вид оценки меры асимптотически односточных орграфов на множестве всех сильно связанных орграфов с ограниченными функциями объема поставок, себестоимости, наценки и начального денежного состояния.

Автор благодарит чл.-корр. РАН А. Г. Ченцова, к. ф.-м. н. Д. В. Хлопина, Я. В. Салия (ИММ УрО РАН), д. э. н. О. А. Козлову, д. т. н., к. э. н. М. Б. Петрова, к. ф.-м. н. Л. А. Серкова, к. э. н. М. Н. Макарову (ИЭ УрО РАН) за плодотворные дискуссии и ценные комментарии.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты 18-07-00637, 16-01-00649).

Список литературы

1. Ерзин А.И., Тахонов И.И. Задача поиска сбалансированного потока // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. 9. № 4 (28). С. 50–63.
2. Кузнецов О.П. Однородные ресурсные сети I. Полные графы // Автоматика и телемеханика. 2009. № 11. С. 136–147.
3. Жилякова Л.Ю. Графовые динамические модели и их свойства // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 115–139.
4. Björner A., Lovász L. Chip-firing games on directed graphs // Journal of Algebraic Combinatorics. 1992. Vol. 1. Issue 4. P. 305–328. DOI: 10.1023/A:1022467132614
5. Bitar J., Goles E. Parallel chip firing games on graphs // Theoretical Computer Science. 1992. Vol. 92. Issue 2. P. 291–300. DOI: 10.1016/0304-3975(92)90316-8
6. Biggs N.L. Chip-firing and the critical group of a graph // Journal of Algebraic Combinatorics. 1999. Vol. 9. Issue 1. P. 25–45. DOI: 10.1023/A:1018611014097
7. López C.M. Chip firing and the Tutte polynomial // Annals of Combinatorics. 1997. Vol. 1. Issue 1. P. 253–259. DOI: 10.1007/BF02558479
8. van den Heuvel J. Algorithmic aspects of a chip-firing game // Combinatorics, Probability and Computing. 2001. Vol. 10. Issue 6. P. 505–529. DOI: 10.1017/S0963548301004886
9. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise // Physical Review Letters. 1987. Vol. 59. Issue 4. P. 381–384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.381
10. Speer E.R. Asymmetric abelian sandpile models // Journal of Statistical Physics. 1993. Vol. 71. Issue 1–2. P. 61–74. DOI: 10.1007/BF01048088
11. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. М.: Мир, 1984. 264 с.
12. Namatame A., Kaizouji T., Aruka Y. (Eds.). The complex networks of economic interactions. Essays in agent-based economics and econophysics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2006. ix+350 p. DOI: 10.1007/3-540-28727-2
13. Knieps G. Network Economics. Cham: Springer, 2015. 169 p. DOI: 10.1007/978-3-319-11695-2
14. Commendatore P., Matilla-García M., Varela L.M., Cánovas J.S. (Eds.) Complex networks and dynamics. Cham: Springer, 2016. xiii+359 p. DOI: 10.1007/978-3-319-40803-3
15. Errasti A. (Ed.). Global production networks: operations design and management, 2nd ed. CRC Press, 2017. 355 p.

16. Norouzilame F., Moch R., Riedel R., Bruch J. Global and regional production networks: a theoretical and practical synthesis // *Advances in production management systems. Innovative and knowledge-based production management in a global-local world*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2014. P. 108–115. DOI: 10.1007/978-3-662-44733-8_14
17. Kranton R.E., Minehart D.F. A theory of buyer-seller networks // *Networks and Groups*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2003. P. 347–378. DOI: 10.1007/978-3-540-24790-6_16
18. Nagurney A. *Supply chain network economics: dynamics of prices, flows and profits*. Northampton, MA, USA: Edward Elgar Publishing, 2006, 413 p.
19. Watson M., Lewis S., Cacioppi P., Jayaraman J. *Supply chain network design: applying optimization and analytics to the global supply chain*. Pearson FT Press, 2012. 424 p.
20. Tesfatsion L. Agent-based computational economics: growing economies from the bottom up // *Artificial Life*. 2002. Vol. 8. Issue 1. P. 55–82. DOI: 10.1162/106454602753694765
21. Farmer J.D., Foley D. The economy needs agent-based modelling // *Nature*. 2009. Vol. 460. Issue 7256. P. 685–686. DOI: 10.1038/460685a
22. Chacon J.L.T. *Introduction to dynamic macroeconomic general equilibrium models*. Vernon Press, 2015. 282 p.
23. Скидельски Р. Кейнс. Возвращение Мастера. Юнайтед Пресс, 2014.
24. Epstein D., Tillack P. Classification of agricultural enterprises by their financial standing // *Applied Economics Letters*. 2002. Vol. 9. Issue 6. P. 397–406. DOI: 10.1080/13504850110086071
25. Scheve K., Stasavage D. *Taxing the rich: a history of fiscal fairness in the United States and Europe*. Russell Sage Foundation, 2016. 288 p.
26. Browne J., Immervoll H. Mechanics of replacing benefit systems with a basic income: comparative results from a microsimulation approach // *The Journal of Economic Inequality*. 2017. Vol. 15. Issue 4. P. 325–344. DOI: 10.1007/s10888-017-9366-6

Поступила в редакцию 17.06.2018

Иванко Евгений Евгеньевич, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
 ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
 E-mail: evgeny.ivanko@gmail.com

E. E. Ivanko

Experimental research on the welfare in a closed production network

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 33–46 (in Russian).

Keywords: dynamical system on a graph, resource network, production network, buyer-seller network, government support.

MSC2010: 91-04

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-03

In the present paper, I study the effects appearing in a closed network consisting of generalized key manufacturers that are connected by the buyer-seller relations. The volume of trade between the participants is assumed to be constant. The purpose of this study is to reveal apparent negative socio-economic properties of the system and to identify tools for compensating for these properties both by exploiting the inner laws of money exchange and with the help of an outer regulator. The following approaches are considered consecutively: price increase by unprofitable producers, government support for unprofitable producers and government influence through the emulation of a network participant. Extensive computational experiments have demonstrated that government support conducted through a single unprofitable virtual vertex-manufacturer can not only prevent the appearance of other unprofitable manufacturers, but also tangibly balance the yield of the profitable ones.

Funding. The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18–07–00637, 16–01–00649).

REFERENCES

1. Erzin A.I., Takhonov I.I. The problem of the search for a balanced flow, *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki*, 2006, vol. 9, no. 4 (28), pp. 50–63 (in Russian).

2. Kuznetsov O.P. Uniform resource networks I. Complete graphs, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, issue 11, pp. 1889–1990. DOI: 10.1134/S0005117909110137
3. Zhilyakova L.Yu. Dynamic graph models and their properties, *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 8, pp. 1417–1435. DOI: 10.1134/S000511791508007X
4. Björner A., Lovász L. Chip-firing games on directed graphs, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1992, vol. 1, issue 4, pp. 305–328. DOI: 10.1023/A:1022467132614
5. Bitar J., Goles E. Parallel chip firing games on graphs, *Theoretical Computer Science*, 1992, vol. 92, issue 2, pp. 291–300. DOI: 10.1016/0304-3975(92)90316-8
6. Biggs N.L. Chip-firing and the critical group of a graph, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1999, vol. 9, issue 1, pp. 25–45. DOI: 10.1023/A:1018611014097
7. López C.M. Chip firing and the Tutte polynomial, *Annals of Combinatorics*, 1997, vol. 1, issue 1, pp. 253–259. DOI: 10.1007/BF02558479
8. van den Heuvel J. Algorithmic aspects of a chip-firing game, *Combinatorics, Probability and Computing*, 2001, vol. 10, issue 6, pp. 505–529. DOI: 10.1017/S0963548301004886
9. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise, *Physical Review Letters*, 1987, vol. 59, issue 4, pp. 381–384. DOI: 10.1103/PhysRevLett.59.381
10. Speer E.R. Asymmetric abelian sandpile models, *Journal of Statistical Physics*, 1993, vol. 71, issue 1–2, pp. 61–74. DOI: 10.1007/BF01048088
11. Peterson J.L. *Petri net theory and the modeling of systems*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1981, x+290 p.
12. Namatame A., Kaizouji T., Aruka Y. (Eds.). *The complex networks of economic interactions*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006, ix+350 p. DOI: 10.1007/3-540-28727-2
13. Knieps G. *Network Economics*, Cham: Springer, 2015, 169 p. DOI: 10.1007/978-3-319-11695-2
14. Commendatore P., Matilla-García M., Varela L.M., Cánovas J.S. (Eds.) *Complex networks and dynamics*, Cham: Springer, 2016, xiii+359 p. DOI: 10.1007/978-3-319-40803-3
15. Errasti A. (Ed.). *Global production networks: operations design and management*, 2nd ed., CRC Press, 2017, 355 p.
16. Norouzilame F., Moch R., Riedel R., Bruch J. Global and regional production networks: a theoretical and practical synthesis, *Advances in production management systems. Innovative and knowledge-based production management in a global-local world*, Berlin-Heidelberg: Springer, 2014, pp. 108–115. DOI: 10.1007/978-3-662-44733-8_14
17. Kranton R.E., Minehart D.F. A theory of buyer-seller networks, *Networks and Groups*, Berlin–Heidelberg: Springer, 2003, pp. 347–378. DOI: 10.1007/978-3-540-24790-6_16
18. Nagurney A. *Supply chain network economics: dynamics of prices, flows and profits*, Northampton, MA, USA: Edward Elgar Publishing, 2006, 413 p.
19. Watson M., Lewis S., Cacioppi P., Jayaraman J. *Supply chain network design: applying optimization and analytics to the global supply chain*, Pearson FT Press, 2012, 424 p.
20. Tesfatsion L. Agent-based computational economics: growing economies from the bottom up, *Artificial Life*, 2002, vol. 8, issue 1, pp. 55–82. DOI: 10.1162/106454602753694765
21. Farmer J.D., Foley D. The economy needs agent-based modelling, *Nature*, 2009, vol. 460, issue 7256, pp. 685–686. DOI: 10.1038/460685a
22. Chacon J.L.T. *Introduction to dynamic macroeconomic general equilibrium models*, Vernon Press, 2015, 282 p.
23. Skidelsky R. *Keynes: the return of the Master*, Allen Lane, 2009, 192 p.
24. Epstein D., Tillack P. Classification of agricultural enterprises by their financial standing, *Applied Economics Letters*, 2002, vol. 9, issue 6, pp. 397–406. DOI: 10.1080/13504850110086071
25. Scheve K., Stasavage D. *Taxing the rich: a history of fiscal fairness in the United States and Europe*, Russell Sage Foundation, 2016, 288 p.
26. Browne J., Immervoll H. Mechanics of replacing benefit systems with a basic income: comparative results from a microsimulation approach, *The Journal of Economic Inequality*, 2017, vol. 15, issue 4, pp. 325–344. DOI: 10.1007/s10888-017-9366-6

Received 17.06.2018

Ivanko Evgeny Evgenievich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
 Leading Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
 E-mail: evgeny.ivanko@gmail.com