УДК 517.956.35

© ***Т. К. Юлдашев***

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Изучена однозначная разрешимость начальной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром. Выражение дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволило применять методов решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доказана теорема об однозначной разрешимости поставленной начальной задачи методом последовательных приближений. Получена оценка сходимости итерационного процесса Пикара. Показана устойчивость решения начальной задачи по второму аргументу.

Ключевые слова: начальная задача, характеристики, производная по направлению, суперпозиция дифференциальных операторов, вырожденное ядро, однозначная разрешимость.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-09

§ 1. Постановка задачи

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1–3]. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных высокого порядка рассматривались в работах многих авторов, в частности в [4–10].

Если дифференциальных уравнений высокого порядка можно записать в виде суперпозиции дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, то их можно локально решать методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц [11]. В работах [12,13] разработаны методики интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Эти методики были применены в работах [14–16] при изучении других задач. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных с вырожденным ядром раньше рассматривались в [17–19].

Задача. В области $\Omega \equiv \Omega_T \times R$ требуется найти функцию $u(t,x) \in C^{2\,n+m,\,2\,n+m}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t,x)\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u(t,x) =$$
$$= \lambda\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} K(t,\,s,\,\xi)\,u(s,\xi)\,d\xi\,ds + F\,(t,\,x,\,u(t,\,x)) \quad (1)$$

и начальным условиям

$$u(t,\,x)_{\,|\,t=0} = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i}\,u(t,\,x)_{\,|\,t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in R, \quad i = \overline{1,\,2n+m-1}, \quad (2)$$

где $0 < \alpha = \mathrm{const}$, $K(t,\,s,\,\xi) = f(\xi)\sum\limits_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(t)\,b_\nu(s)$, $a_\nu(t),\,b_\nu(s) \in C(\Omega_T)$, λ — действительный ненулевой спектральный параметр, $0 < \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\big|\,f(\xi)\,\big|\,d\xi < \infty$, $F\,(t,\,x,\,u) \in C(\Omega \times R)$,

$\varphi_i(x) \in C^{2n+m}(R)$, $i = \overline{1, 2n+m-1}$, $\Omega_T \equiv [0; T]$, $0 < T < \infty$, $R \equiv (-\infty; \infty)$, n, m, ω — натуральные числа. Здесь предполагается, что функции $a_\nu(t)$ и $b_\nu(s)$ являются линейно независимыми.

Отметим, что при $n = 1$ и $m = 0$ из уравнения (1) получаем дифференциальное уравнение гиперболического типа. Для решения такого уравнения с начальными условиями используется формула Даламбера, играющая большую роль при изучении распространения волн [20, с. 52]. Формула Даламбера применяется и в работах современных математиков (см., например, [21, 22]). В нашей работе получаем формулу в качестве решения поставленной задачи (1), (2), из которой при $n = 1$ и $m = 0$ получаем аналог формулы Даламбера.

§ 2. Сведение задачи (1), (2) к интегральному уравнению

Сначала начальную задачу (1), (2) сведем к решению следующего интегрального уравнения:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Big[\varphi_{2i-1}(x - \alpha t) + \varphi_{2i-1}(x + \alpha t)\Big] \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!} \Big[\varphi_{2j}(x - \alpha(t - 2\varsigma)) + \varphi_{2j}(x + \alpha(t - 2\varsigma))\Big] \frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!}\, d\varsigma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!}\, \varphi_{2n+k}(r(\varsigma, 0, x)) \frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!}\, d\varsigma +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F(\varsigma, r(t, \varsigma, x), u(\varsigma, r(t, \varsigma, x)))\right] d\varsigma, \qquad (3)$$

где

$$r(t, \varsigma, x) = x - \int_\varsigma^t u(\theta, r(t, \theta, x))\, d\theta, \qquad (4)$$

$c_\nu = \displaystyle\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu(s)\, u(s, \xi)\, d\xi\, ds$, и x играет роль параметра.

С этой целью левую часть уравнения (1) запишем в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^n u = D_2^m\, D_1^n\, D_0^m\, [u],$$

где $D_2 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u(t, x)\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор Уизема, $D_1[u] \equiv u_t - \alpha u_x$, $D_0[u] \equiv u_t + \alpha u_x$.

Тогда уравнение (1) с учетом вырожденности ядра $K(t, s, \xi) = f(\xi) \sum\limits_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(t)\, b_\nu(s)$ перепишем в виде

$$D_2^m\, D_1^n\, D_0^n\, [u] = \lambda \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(t)\, b_\nu(s)\, u(s, \xi)\, d\xi\, ds + F(t, x, u(t, x)). \qquad (5)$$

Примем обозначение

$$c_\nu = \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu(s)\, u(s, \xi)\, d\xi\, ds. \qquad (6)$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$D_2^m\, D_1^n\, D_0^n\, [u] = \lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(t)\, c_\nu + F(t, x, u(t, x)). \qquad (7)$$

Из (7) видно, что уравнение (1) имеет следующие характеристики: 1) $x-\int_0^t u(s,\,x)\,ds=C_1$, 2) $x+\alpha\,t=C_2$, 3) $x-\alpha\,t=C_3$, где C_i — произвольные постоянные, $i=\overline{1,\,3}$.

Известно, что дифференциальные выражения $D_2[u]$, $D_1[u]$, $D_0[u]$ представляют собой (с точностью до множителя) производные $\frac{du}{dl_1}$, $\frac{du}{dl_2}$, $\frac{du}{dl_3}$ функции u по направлениям l_1, l_2, l_3 вдоль характеристик. Это позволяет представить уравнение (1) как обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее изменение u вдоль характеристик.

Методика интегрирования уравнения (1) основана на введении функции трех аргументов. Пусть решение начальной задачи (1), (2) — $u(t,x)$ из класса $C^{2\,n+m,\,2\,n+m}(\Omega)$. Рассмотрим дифференциальный оператор $D_2\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u(t,\,x)\frac{\partial}{\partial x}$. Вводим достаточно гладкую по s функцию трех аргументов $h(t,s,x)=u(s,r(t,s,x))$, где $r\,(t,\,s,\,x)=x-\int_s^t u(\theta,\,r\,(t,\,\theta,\,x))\,d\theta$, $r(t,t,x)=x$. Ясно, что $s\leqslant t$, $h(t,t,x)=u(t,r(t,t,x))=u(t,x)$.

С учетом того, что

$$h_s(t,s,x)=u_s(s,r(t,s,x))+u_r(s,r(t,s,x))\cdot r_s(t,s,x)=$$
$$=u_s(s,r(t,s,x))+u(s,r(t,s,x))\cdot u_r(s,r(t,s,x)),$$

из уравнения (7) приходим к более общему уравнению:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}D_1^n\,D_0^n\,[h(t,s,x)]=\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(s)\,c_\nu+F\,(s,\,r(t,s,x),\,h(t,s,x)). \tag{8}$$

Интегрируя теперь уравнения (8) m раз, получаем

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}D_1^n\,D_0^n\,[h(t,s,x)]=\Phi_1\,(r(t,0,x))+$$
$$+\int_0^s\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(\varsigma)\,c_\nu+F\,(\varsigma,\,r(t,\varsigma,x),\,h(t,\varsigma,x))\right]d\varsigma, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}}D_1^n\,D_0^n\,[h(t,s,x)]=\Phi_2\,(r(t,0,x))+\Phi_1\,(r(t,0,x))\,s+$$
$$+\int_0^s(s-\varsigma)\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(\varsigma)\,c_\nu+F\,(\varsigma,\,r(t,\varsigma,x),\,h(t,\varsigma,x))\right]d\varsigma, \tag{10}$$

....

$$D_1^n\,D_0^n\,[h(t,s,x)]=\sum_{i=1}^{m}\Phi_i\,(r(t,0,x))\,\frac{s^{m-i}}{(m-i)!}+$$
$$+\int_0^s\frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(\varsigma)\,c_\nu+F\,(\varsigma,\,r(t,\varsigma,x),\,h(t,\varsigma,x))\right]d\varsigma, \tag{11}$$

где $\Phi_i\,(r(t,0,x))$ — произвольные постоянные вдоль первой характеристики, подлежащие определению, $i=\overline{1,\,m}$.

Начальные условия (2) для (9)–(11) выглядят так:

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}D_1^n\,D_0^n\,[h(t,0,x)]=\varphi_{2\,n+m}\,(r(t,0,x)),$$

$$\frac{\partial^{m-2}}{\partial s^{m-2}}D_1^n\,D_0^n\,[h(t,0,x)]=\varphi_{2\,n+m-1}\,(r(t,0,x)),\ \ldots,\ D_1^n\,D_0^n\,[h(t,0,x)]=\varphi_{2\,n+1}\,(r(t,0,x)).$$

В силу этих условий из (9)–(11) получаем, что

$$D_1^n\,D_0^n\,[h(t,s,x)]=\sum_{i=1}^{m}\varphi_{2\,n+i}\,(r(t,0,x))\,\frac{s^{m-i}}{(m-i)!}+$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\,(\varsigma,\, r(t,\varsigma,x),\, h(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{12}$$

где $r\,(t,\,\varsigma,\,x) = x - \int_\varsigma^t h(t,\,\theta,\,x)\,d\theta$.

При $t = s$ из (12) получаем, что

$$D_1^n\, D_0^n\,[u(t,x)] = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{2\,n+i}\,(r(t,0,x))\,\frac{t^{\,m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\,(\varsigma,\, r(t,\varsigma,x),\, u(\varsigma, r\,(t,\,\varsigma,\,x)))\right] d\varsigma, \tag{13}$$

где $r\,(t,\,\varsigma,\,x) = x - \int_\varsigma^t u(\theta,\, r\,(t,\,\theta,\,x))\,d\theta$.

Рассмотрим дифференциальное выражение $D_1[u] \equiv u_t - \alpha u_x$. Вводим функцию трех аргументов $\vartheta(t,s,x) = u(s, p\,(t,s,x))$, где $p\,(t,\,s,\,x) = x - \alpha\,(t-s)$, $p\,(t,t,x) = x$. Ясно, что $\vartheta(t,t,x) = u(t, p\,(t,t,x)) = u(t,x)$.

С учетом того, что

$$\vartheta_s(t,s,x) = u_s(s, p\,(t,s,x)) + u_p\,(s, p\,(t,s,x)) \cdot p_s\,(t,s,x) =$$

$$= u_s\,(s, p\,(t,s,x)) - \alpha \cdot u_p\,(s, p\,(t,s,x)),$$

уравнение (13) перепишем в более общем виде:

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\, D_0^n\,[\vartheta(t,s,x)] = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{2\,n+i}\,(r\,(t,0,x))\,\frac{s^{\,m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\,(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,p\,(t,\varsigma,x)),\, \vartheta(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma. \tag{14}$$

Интегрируя теперь уравнения (14) n раз, получаем

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\, D_0^n\,[\vartheta(t,s,x)] = \Phi_{m+1}\,(p(t,0,x)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_0^s \varphi_{2\,n+i}\,(r\,(\varsigma,0,(p\,(t,\varsigma,x))))\,\frac{\varsigma^{\,m-i}}{(m-i)!}\,d\varsigma +$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m}}{m!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\,(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,p\,(t,\varsigma,x)),\, \vartheta(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}\, D_0^n\,[\vartheta(t,s,x)] = \Phi_{m+2}\,(p\,(t,0,x)) + \Phi_{m+1}(p\,(t,0,x))\,s +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_0^s (s-\varsigma)\,\varphi_{2\,n+i}\,(r\,(t,0,(p\,(t,\varsigma,x))))\,\frac{\varsigma^{\,m-i}}{(m-i)!}\,d\varsigma +$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+1}}{(m+1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\,(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,p\,(t,\varsigma,x)),\, \vartheta(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{16}$$

....

$$D_0^n\,[\vartheta(t,s,x)] = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{m+i}\,(p\,(t,0,x))\,\frac{s^{\,n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2n+j}\left(r\left(t,0,\left(p\left(t,\varsigma,x\right)\right)\right)\right)\frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!}\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_{\nu}(\varsigma)\,c_{\nu}+F\left(\varsigma,\,r\left(t,\varsigma,p\left(t,\varsigma,x\right)\right),\,\vartheta(t,\varsigma,x)\right)\right]d\varsigma, \qquad (17)$$

где $\Phi_{m+i}\left(p\left(t,0,x\right)\right)$ — произвольные постоянные вдоль второй характеристики, подлежащие определению, $i=\overline{1,\,n}$.

Начальные условия (2) для (15)–(17) выглядят так:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\,D_0^n\left[\vartheta(t,0,x)\right]=\varphi_{2n}\left(p\left(t,0,x\right)\right),$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}\,D_0^n[\vartheta(t,0,x)]=\varphi_{2n-2}\left(p\left(t,0,x\right)\right),\quad \ldots,\quad D_0^n\left[\vartheta(t,0,x)\right]=\varphi_{2}\left(p\left(t,0,x\right)\right).$$

В силу этих условий из (15)–(17) получаем, что

$$D_0^n\left[\vartheta(t,s,x)\right]=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i}\left(p\left(t,0,x\right)\right)\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2n+j}\left(r\left(t,0,\left(p\left(t,\varsigma,x\right)\right)\right)\right)\frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!}\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_{\nu}(\varsigma)\,c_{\nu}+F\left(\varsigma,\,r\left(t,\varsigma,p\left(t,\varsigma,x\right)\right),\,\vartheta(t,\varsigma,x)\right)\right]d\varsigma. \qquad (18)$$

При $t=s$ из (18) имеем

$$D_0^n\left[u(t,x)\right]=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i}\left(p\left(t,0,x\right)\right)\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2n+j}\left(r\left(\varsigma,0,\left(p\left(t,\varsigma,x\right)\right)\right)\right)\frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!}\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_{\nu}(\varsigma)\,c_{\nu}+F\left(\varsigma,\,r\left(t,\varsigma,p\left(t,\varsigma,x\right)\right),\,u(\varsigma,r\left(t,\varsigma,p\left(t,\varsigma,x\right)\right))\right)\right]d\varsigma. \qquad (19)$$

Теперь рассмотрим дифференциальное выражение $D_0[u]\equiv u_t+\alpha u_x$. Обозначим $q\left(t,\,s,\,x\right)=$ $=x-\alpha\left(t-s\right)$, $q\left(t,t,x\right)=x$. Вводим функцию трех аргументов $w(t,s,x)=u(s,q\left(t,s,x\right))$ такую, что $w(t,t,x)=u(t,x)$. С учетом того, что

$$w_s(t,s,x)=u_s(s,q\left(t,s,x\right))+u_q\left(s,q\left(t,s,x\right)\right)\cdot q_s\left(t,s,x\right)=$$

$$=u_s(s,q\left(t,s,x\right))+\alpha\cdot u_q\left(s,q\left(t,s,x\right)\right),$$

уравнение (19) перепишем в виде

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\,w(t,s,x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_{2i}\left(p\left(s,0,q\right)\right)\frac{s^{n-i}}{(n-i)!}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2n+j}\left(r\left(t,0,\left(p\left(t,\varsigma,q\right)\right)\right)\right)\frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!}\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+n-1}}{(m+n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_{\nu}(\varsigma)\,c_{\nu}+F\left(\varsigma,\,r\left(t,\varsigma,p\left(t,\varsigma,q\right)\right),\,w(t,\varsigma,x)\right)\right]d\varsigma. \qquad (20)$$

Интегрируя уравнения (20) n раз, получаем

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} w(t,s,x) = \Phi_{m+n+1}(q(t,0,x)) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^s \varphi_{2i}(p(t,0,q)) \frac{\varsigma^{n-i}}{(n-i)!} d\varsigma +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^n}{n!} \varphi_{2n+j}(r(t,0,(p(t,\varsigma,q)))) \frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!} d\varsigma +$$

$$+ \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+n}}{(m+n)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F(\varsigma,\, r(t,\varsigma,p(t,\varsigma,q)),\, w(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} w(t,s,x) = \Phi_{m+n+2}(q(t,0,x)) + \Phi_{m+n+1}(q(t,0,x))\, s +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^s (s-\varsigma) \varphi_{2i}(p(t,0,q)) \frac{\varsigma^{n-i}}{(n-i)!} d\varsigma +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n+1}}{(n+1)!} \varphi_{2n+j}(r(t,0,(p(t,\varsigma,q)))) \frac{\varsigma^{m-j}}{(m-j)!} d\varsigma +$$

$$+ \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F(\varsigma,\, r(t,\varsigma,p(t,\varsigma,q)),\, w(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{22}$$

....

$$w(t,s,x) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{m+n+i}(q(t,0,x)) \frac{s^{n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{2j}(p(t,0,q)) \frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!} d\varsigma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!} \varphi_{2n+k}(r(t,0,(p(t,\varsigma,q)))) \frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!} d\varsigma +$$

$$+ \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+2n-1}}{(m+2n-1)!} \left[\lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma) c_\nu + F(\varsigma,\, r(t,\varsigma,p(t,\varsigma,q)),\, w(t,\varsigma,x))\right] d\varsigma, \tag{23}$$

где $\Phi_{m+n+i}(q(t,0,x))$ — произвольные постоянные вдоль третьей характеристики, подлежащие определению, $i=\overline{1,\,n}$.

Начальные условия (2) для (21)–(23) выглядят так:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} w(t,0,x) = \varphi_{2n-1}(q(t,0,x)),$$

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} w(t,0,x) = \varphi_{2n-3}(q(t,0,x)), \quad \ldots, \quad w(t,0,x) = \varphi_1(q(t,0,x)).$$

В силу этих условий из (21)–(23) получаем, что

$$w(t,s,x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2i-1}(q(t,0,x)) \frac{s^{n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{2j}(p(t,0,q)) \frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!} d\varsigma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!} \varphi_{2n+k}(r(t,0,(p(t,\varsigma,q)))) \frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!} d\varsigma +$$

$$+\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{m+2n-1}}{(m+2n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\left(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,p\,(t,\varsigma,q)),\, w(t,\varsigma,x)\right)\right] d\varsigma. \tag{24}$$

С учетом того, что $q\,(t,0,x) = x-\alpha\, t$, $p\,(t,s,q) = x$, $p\,(\varsigma,0,q\,(t,\varsigma,x)) = x-\alpha\,(t-2\,\varsigma)$, при $t = s$ из (24) получаем, что

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2\,i-1}\,(x-\alpha\, t)\,\frac{t^{\,n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2\,j}\,(x-\alpha\,(t-2\,\varsigma))\,\frac{\varsigma^{\,n-j}}{(n-j)!}\,d\varsigma +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,2\,n-1}}{(2\,n-1)!}\,\varphi_{2\,n+k}\,(r\,(\varsigma,0,x))\,\frac{\varsigma^{\,m-k}}{(m-k)!}\,d\varsigma +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,m+2\,n-1}}{(m+2\,n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\left(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,x),\, u(\varsigma, r\,(t,\varsigma,x)))\right)\right] d\varsigma. \tag{25}$$

Теперь уравнение (1), в отличие от (13), запишем в виде

$$D_0^n D_1^n[u(t,x)] = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{2\,n+i}\,(r(t,0,x))\,\frac{t^{\,m-i}}{(m-i)!} +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,m-1}}{(m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\left(\varsigma,\, r(t,\varsigma,x),\, u(\varsigma, r\,(t,\,\varsigma,\,x))\right)\right] d\varsigma.$$

Повторяя процедуры (14)–(24), аналогично (25) получим

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{2\,i-1}\,(x+\alpha\, t)\,\frac{t^{\,n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,n-1}}{(n-1)!}\,\varphi_{2\,j}\,(x+\alpha\,(t-2\,\varsigma))\,\frac{\varsigma^{\,n-j}}{(n-j)!}\,d\varsigma +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,2\,n-1}}{(2\,n-1)!}\,\varphi_{2\,n+k}\,(r\,(t,0,x))\,\frac{\varsigma^{\,m-k}}{(m-k)!}\,d\varsigma +$$

$$+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{\,m+2\,n-1}}{(m+2\,n-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(\varsigma)\, c_\nu + F\left(\varsigma,\, r\,(t,\varsigma,x),\, u(\varsigma, r\,(t,\varsigma,x))\right)\right] d\varsigma. \tag{26}$$

Из (25) и (26) придем к уравнению (3) (с учетом обозначения (4)).

Теперь преобразуем интегральное уравнения (3). Подставляя интегральное уравнение (3) в формулу (6), получаем систему алгебраических уравнений (САУ)

$$c_\nu - \lambda\sum_{\mu=1}^{\omega} A_{\nu\,\mu}\, c_\mu = B_\nu(u,\, r), \quad \nu = \overline{1,\omega}, \tag{27}$$

где

$$A_{\nu\,\mu} = \int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu\,(s)\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{\,2\,n+m-1}}{(2\,n+m-1)!}\, a_\nu(\varsigma)\, d\varsigma\, d\xi\, ds,$$

$$B_\nu(u,\, r) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu\,(s)\sum_{i=1}^{m}\left[\varphi_{2\,i-1}\,(\xi-\alpha\, s) + \varphi_{2\,i-1}\,(\xi+\alpha\, s)\right]\frac{s^{\,n-i}}{(n-i)!}\, d\xi\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu\,(s)\sum_{j=1}^{n}\int_0^s \frac{(s-\varsigma)^{\,n-1}}{(n-1)!}\left[\varphi_{2\,j}\,(\xi-\alpha\,(s-2\,\varsigma)) +\right.$$

$$+\varphi_{2j}(\xi+\alpha(s-2\varsigma))\Big]\,\frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!}\,d\varsigma\,d\xi\,ds+$$

$$+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,b_\nu(s)\sum_{k=1}^{m}\int_0^s\frac{(s-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\varphi_{2n+k}(r(t,0,\xi))\,\frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!}\,d\varsigma\,d\xi\,ds+$$

$$+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,b_\nu(s)\int_0^s\frac{(s-\varsigma)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\,F(\varsigma,r(t,\varsigma,\xi),u(\varsigma,r(t,\varsigma,\xi)))\,d\varsigma\,d\xi\,ds. \tag{28}$$

САУ (27) однозначно разрешима при любых $B_\nu(u,r)$, если выполняется следующее условие:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1\omega}\\ \lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2\omega}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{\omega 1} & \lambda A_{\omega 2} & \dots & 1-\lambda A_{\omega\omega}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{29}$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (29) есть многочлен относительно λ степени не выше ω. Алгебраическое уравнение $\Delta(\lambda)=0$ имеет не более ω различных корней. Через Λ обозначим множество корней этого алгебраического уравнения. При других значениях параметра, то есть при $\lambda\in R\backslash\Lambda$, условие (29) выполняется. Для таких регулярных значений λ система (27) имеет единственное решение при любой правой части.

Для регулярных значений $\lambda\in R\backslash\Lambda$ решения САУ (27) записываются в виде

$$c_\nu=\frac{\Delta_\nu(\lambda,u,r)}{\Delta(\lambda)},\quad \nu=\overline{1,\omega}, \tag{30}$$

где

$$\Delta_\nu(\lambda,u,r)=\begin{vmatrix}1-\lambda A_{11} & \dots & \lambda A_{1(\nu-1)} & B_1(u,r) & \lambda A_{1(\nu+1)} & \dots & \lambda A_{1\omega}\\ \lambda A_{21} & \dots & \lambda A_{2(\nu-1)} & B_2(u,r) & \lambda A_{2(\nu+1)} & \dots & \lambda A_{2\omega}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda A_{\omega 1} & \dots & \lambda A_{\omega(\nu-1)} & B_\omega(u,r) & \lambda A_{\omega(\nu+1)} & \dots & 1-\lambda A_{\omega\omega}\end{vmatrix}. \tag{31}$$

Из (31) видно, что определители $\Delta_\nu(\lambda,u,r)$ зависят и от самой неизвестной функции $u(t,x)$. Подстановка (31) в уравнение (3) дает следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[\varphi_{2i-1}(x-\alpha t)+\varphi_{2i-1}(x+\alpha t)\Big]\,\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\Big[\varphi_{2j}(x-\alpha(t-2\varsigma))+\varphi_{2j}(x+\alpha(t-2\varsigma))\Big]\frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!}\,d\varsigma+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\varphi_{2n+k}(r(\varsigma,0,x))\frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!}\,d\varsigma+$$

$$+\int_0^t\frac{(t-\varsigma)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\Big[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(\varsigma)\,\frac{\Delta_\nu(\lambda,u,r)}{\Delta(\lambda)}+F(\varsigma,r(t,\varsigma,x),u(\varsigma,r(t,\varsigma,x)))\Big]\,d\varsigma. \tag{32}$$

§ 3. Исследования интегрального уравнения (32)

Для функции $g(t,x)\in C(\Omega)$ вводим норму $\|g(t,x)\|=\sup_{(t,x)\in\Omega}|g(t,x)|$.

Л е м м а 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $0<\sup\limits_{x\in R}\sum\limits_{i=1}^{n}|\varphi_{2i-1}(x)|\dfrac{T^{n-i}}{(n-i)!}+\sup\limits_{(t,x)\in\Omega}\sum\limits_{j=1}^{n}|\varphi_{2j}(x)|\displaystyle\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+$
$+\sup\limits_{(t,x)\in\Omega}\sum\limits_{k=1}^{m}|\varphi_{2n+k}(x)|\displaystyle\int_0^t\frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{s^{m-k}}{(m-k)!}\,ds\leqslant\Delta_0<\infty;$

2) $\left|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)\right| \leqslant \chi_i \left|x_1-x_2\right|$, $0<\chi_i=\mathrm{const}<\infty$, $i=\overline{1,\,2n}$;

3) $\sup\limits_{x\in R}\left|f(t,\,x,\,u)\right| \leqslant M(t)$, $0<M(t)\in C(\Omega_T)$;

4) $\left|f(t,\,x_1,\,u_1)-f(t,\,x_2,\,u_2)\right| \leqslant Q(t)\left|x_1-x_2\right|+N(t)\left|u_1-u_2\right|$, *где* $0<Q(t)\in C(\Omega_T)$, $0<N(t)\in C(\Omega_T)$.

Тогда при регулярных значениях параметра $\lambda\in R\backslash\Lambda$, *для которых выполняется условие* (29), *интегральное уравнение* (32) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение можно найти методом последовательных приближений:*

$$
\begin{gathered}
u_0(t,\,x)=0, \quad u_{\tau+1}(t,\,x)=\Theta(t,\,x)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\varphi_{2n+k}\left(r_\tau(\varsigma,\,0,\,x)\right)\frac{\varsigma^{m-k}}{(m-k)!}\,d\varsigma+ \\
+\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(\varsigma)\,\frac{\Delta_\nu(\lambda,\,u_\tau,\,r_\tau)}{\Delta(\lambda)}+F\left(\varsigma,\,r_\tau(t,\,\varsigma,\,x),\,u_\tau(\varsigma,\,r_\tau(t,\,\varsigma,\,x))\right)\right]d\varsigma, \qquad (33)\\
\tau=0,\,1,\,2,\,\ldots\,,
\end{gathered}
$$

где

$$
r_0(s,\,t,\,x)=x; \quad r_\tau(s,\,t,\,x)=x-\int_s^t u_\tau(\theta,\,r_\tau(\theta,\,t,\,x))\,ds,
$$

$$
\Theta(t,\,x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi_{2i-1}(x-\alpha t)+\varphi_{2i-1}(x+\alpha t)\right]\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}+
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \frac{(t-\varsigma)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\varphi_{2j}\left(x-\alpha(t-2\varsigma)\right)+\varphi_{2j}\left(x+\alpha(t-2\varsigma)\right)\right]\frac{\varsigma^{n-j}}{(n-j)!}\,d\varsigma.
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий леммы, для первой разности приближения (33) справедлива следующая оценка:

$$
\begin{gathered}
\left\|u_1(t,\,x)-u_0(t,\,x)\right\| \leqslant \\
\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in R}\left|\varphi_{2i-1}(x)\right|\frac{T^{n-i}}{(n-i)!}+\sum_{j=1}^{n}\sup_{(t,x)\in\Omega}\left|\varphi_{2j}(x)\right|\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\,ds+ \\
+\sum_{k=1}^{m}\sup_{(t,x)\in\Omega}\left|\varphi_{2n+k}(x)\right|\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{s^{m-k}}{(m-k)!}\,ds+ \\
+\sup_{(t,x)\in\Omega}\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[\left|\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(s)\,\frac{\Delta_\nu(\lambda,\,0,\,x)}{\Delta(\lambda)}\right|+M(s)\right]ds \leqslant \Delta_0+\Delta_1+\Delta_2, \qquad (34)
\end{gathered}
$$

где

$$
\Delta_1=\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\,M(s)\,ds<\infty,
$$

$$
\Delta_2=\sup_{(t,x)\in\Omega}\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left|\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega}a_\nu(s)\,\frac{\Delta_\nu(\lambda,\,0,\,x)}{\Delta(\lambda)}\right|ds<\infty.
$$

С учетом (34) и условий леммы для второй разности приближения (33) справедлива следующая оценка:

$$
\begin{gathered}
\left\|u_2(t,\,x)-u_1(t,\,x)\right\| \leqslant \\
\leqslant \sum_{k=1}^{m}\chi_{2n+k}\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{s^{m-k}}{(m-k)!}\int_0^t \left\|u_1(\theta,\,x)-u_0(\theta,\,x)\right\|d\theta\,ds+ \\
+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[Q(s)\int_s^t \left\|u_1(\theta,\,x)-u_0(\theta,\,x)\right\|d\theta+N(s)\left\|u_1(s,\,x)-u_0(s,\,x)\right\|\right]ds+
\end{gathered}
$$

$$+\int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left\| \lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(s)\, \frac{\Delta_\nu(\lambda,\, u_1,\, r_1)-\Delta_\nu(\lambda,\, u_0,\, r_0)}{\Delta(\lambda)}\right\| ds. \tag{35}$$

С учетом (28) из (31) имеем оценку

$$\left\|\Delta_\nu(\lambda,\, u_1,\, r_1)-\Delta_\nu(\lambda,\, u_0,\, r_0)\right\| \leqslant \left|\,\overline{\Delta}_\nu(\lambda)\,\right| \int_0^s \left\| u_1(\theta,\, x)-u_0(\theta,\, x)\right\| d\theta, \tag{36}$$

где

$$\overline{\Delta}_\nu(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & \ldots & \lambda A_{1(\nu-1)} & \overline{B}_1 & \lambda A_{1(\nu+1)} & \ldots & \lambda A_{1\omega} \\ \lambda A_{21} & \ldots & \lambda A_{2(\nu-1)} & \overline{B}_2 & \lambda A_{2(\nu+1)} & \ldots & \lambda A_{2\omega} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{\omega 1} & \ldots & \lambda A_{\omega(\nu-1)} & \overline{B}_\omega & \lambda A_{\omega(\nu+1)} & \ldots & 1-\lambda A_{\omega\omega} \end{vmatrix}, \quad \nu=\overline{1,\omega}, \tag{37}$$

$$\overline{B}_\nu=\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu\,(s)\sum_{k=1}^{m}\chi_{2n+k}\int_0^s \frac{(s-\theta)^{2n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{\theta^{m-k}}{(m-k)!}\, d\theta\, d\xi\, ds\, +$$

$$+\int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, b_\nu\,(s)\int_0^s \frac{(s-\theta)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[Q\,(\theta)\,(s-\theta)+N\,(\theta)\right] d\theta\, d\xi\, ds.$$

Тогда с учетом (36) оценку (35) перепишем в следующем виде:

$$\left\| u_2(t,\, x)-u_1(t,\, x)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t H\,(t,\, s)\left\| u_1(s,\, x)-u_0(s,\, x)\right\| ds \leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\right)\int_0^t H\,(t,\, s)\, ds, \tag{38}$$

где

$$H\,(t,\, s)=\sum_{k=1}^{m}\chi_{2n+k}\,\frac{(t-s)^{2n}}{(2n-1)!}\,\frac{s^{m-k}}{(m-k)!}\, +$$

$$+\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[\left|\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} s\, a_\nu(s)\,\frac{\overline{\Delta}_\nu(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| + Q\,(s)\,(t-s)+N\,(s)\right].$$

С учетом (38) для третьей разности приближения (33) получим следующую оценку:

$$\left\| u_3(t,\, x)-u_2(t,\, x)\right\| \leqslant \int_0^t H\,(t,\, s)\left\| u_2(s,\, x)-u_1(s,\, x)\right\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\right)\int_0^t H\,(t,\, s)\int_0^s H\,(s,\, \theta)\, d\theta\, ds = \left(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\right)\frac{1}{2!}\left[\int_0^t H\,(t,\, s)\, ds\right]^2.$$

Продолжая этот процесс, по индукции получаем, что

$$\left\| u_{\tau+1}(t,\, x)-u_\tau(t,\, x)\right\| \leqslant \int_0^t H\,(t,\, s)\left\| u_\tau(s,\, x)-u_{\tau-1}(s,\, x)\right\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_2\right)\frac{1}{\tau\,!}\left[\int_0^t H\,(t,\, s)\, ds\right]^\tau. \tag{39}$$

Из оценки (39) следует, что последовательность функций $\left\{u_\tau(t,\, x)\right\}_{\tau=1}^{\infty}$, определенная формулой (33), сходится абсолютно и равномерно в области Ω.

Пусть интегральное уравнение (32) имеет два решения: $u(t,\, x)$ и $\vartheta(t,\, x)$ в области Ω. Тогда для разности этих решений справедлива оценка

$$\left\| u(t,\, x)-\vartheta(t,\, x)\right\| \leqslant \int_0^t H\,(t,\, s)\left\| u(s,\, x)-\vartheta(s,\, x)\right\| ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла–Беллмана к последнему неравенству, получаем, что $\left\| u(t,\, x)-\vartheta(t,\, x)\right\| \equiv 0$ в области Ω. Лемма доказана. □

Л е м м а 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда для итерационного процесса* (33) *справедлива оценка скорости сходимости*

$$\left\| u_\tau(t, x) - u(t, x) \right\| \leqslant \left(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2\right) \frac{\rho^\tau}{\tau\,!} \cdot \exp\{\rho\}, \tag{40}$$

где $\rho = \max\limits_{t \in \Omega_T} \displaystyle\int_0^t H(t, s)\, ds < \infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу условий леммы с учетом (39) имеем оценку

$$\left\| u_\tau(t, x) - u(t, x) \right\| \leqslant \left\| u_{\tau+1}(t, x) - u_\tau(t, x) \right\| + \left\| u_{\tau+1}(t, x) - u(t, x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2\right) \frac{\rho^\tau}{\tau\,!} + \int_0^t H(t, s) \left\| u_\tau(s, x) - u(s, x) \right\| ds.$$

Применение неравенства Гронуолла–Беллмана к последнему неравенству дает оценку (40). Лемма доказана. □

Л е м м а 3. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда для любых* $x_1, x_2 \in R$ *справедлива оценка*

$$\left\| u(t, x_1) - u(t, x_2) \right\| \leqslant \Psi(t) \left| x_1 - x_2 \right|, \tag{41}$$

где

$$\Psi(t) = \mu \cdot \exp\left\{ \int_0^t H(t, s)\, ds \right\} < \infty,$$

$$\mu = \max_{t \in \Omega_T} \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\chi_{2i-1} T^{n-i}}{(n-i)!} + \sum_{j=1}^n \chi_{2j} \frac{(t-s)^n}{(n-1)!} \frac{s^{n-j}}{(n-j)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^m \chi_{2n+k} \frac{(t-s)^{2n}}{(2n-1)!} \frac{s^{m-k}}{(m-k)!} + \frac{(t-s)^{2n+m}}{(2n+m-1)!} Q(s)(t-s) \right\} ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу условий леммы имеем оценку

$$\left\| u(t, x_1) - u(t, x_2) \right\| \leqslant \left| x_1 - x_2 \right| \sum_{i=1}^n \frac{\chi_{2i-1} T^{n-i}}{(n-i)!} +$$

$$+ \left| x_1 - x_2 \right| \sum_{j=1}^n \chi_{2j} \max_{t \in \Omega_T} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{(n-1)!} \frac{s^{n-j}}{(n-j)!}\, ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \chi_{2n+k} \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{s^{m-k}}{(m-k)!} \int_s^t \Big(\left| x_1 - x_2 \right| + \left\| u(\theta, x_1) - u(\theta, x_2) \right\| \Big)\, d\theta\, ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} \left| \lambda \sum_{\nu=1}^{\omega} a_\nu(s) \frac{\overline{\Delta}_\nu(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \right| \int_s^t \left\| u(\theta, x_1) - u(\theta, x_2) \right\| d\theta\, ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} Q(s) \int_s^t \Big(\left| x_1 - x_2 \right| + \left\| u(\theta, x_1) - u(\theta, x_2) \right\| \Big)\, d\theta\, ds +$$

$$+ \int_0^t \frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!} N(s) \left\| u(s, x_1) - u(s, x_2) \right\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \mu \cdot \left| x_1 - x_2 \right| + \int_0^t H(t, s) \left\| u(s, x_1) - u(s, x_2) \right\| ds,$$

где

$$H(t, s) = \sum_{k=1}^m \chi_{2n+k} \frac{(t-s)^{2n}}{(2n-1)!} \frac{s^{m-k}}{(m-k)!} +$$

$$+\frac{(t-s)^{2n+m-1}}{(2n+m-1)!}\left[\left|\lambda\sum_{\nu=1}^{\omega} s\,a_{\nu}(s)\,\frac{\overline{\Delta}_{\nu}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right|+Q\,(s)\,(t-s)+N\,(s)\right],$$

$$\mu=\max_{t\in\Omega_T}\int_0^t\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\chi_{2i-1}\,T^{\,n-i}}{(n-i)!}+\sum_{j=1}^{n}\chi_{2j}\,\frac{(t-s)^{n}}{(n-1)!}\,\frac{s^{\,n-j}}{(n-j)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{m}\chi_{2n+k}\,\frac{(t-s)^{2n}}{(2n-1)!}\,\frac{s^{\,m-k}}{(m-k)!}+\frac{(t-s)^{2n+m}}{(2n+m-1)!}\,Q\,(s)\,(t-s)\right\}ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла–Беллмана к последней оценке, получаем, что

$$\|\,u(t,\,x_1)-u(t,\,x_2)\,\|\leqslant\mu\,|\,x_1-x_2\,|\cdot\exp\left\{\int_0^t H\,(t,\,s)\,ds\right\}.$$

Отсюда следует справедливость оценки (41). Лемма доказана. □

§ 4. Основной результат

Из выше доказанных лемм следует, что справедлива следующая

Т е о р е м а. *Пусть выполняются все условия леммы* 1. *Тогда при регулярных значениях параметра* $\lambda\in R\backslash\Lambda$, *для которых выполняется условие* (30), *начальная задача* (1), (2) *имеет единственное решение в области* Ω. *Это решение находится из итерационного процесса Пикара* (33). *Для решения начальной задачи* (1), (2) *справедливы оценки* (40) *и* (41).

Список литературы

1. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 248 с.
2. Замышляева А.А. Математические модели соболевского типа высокого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2014. Т. 7. № 2. С. 5–28. http://mi.mathnet.ru/vyuru126
3. Benney D.J., Luke J.C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude // Journal of Mathematics and Physics. 1964. Vol. 43. P. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309
4. Galaktionov V.A., Mitidieri E., Pohozaev S.I. Global sign-changing solutions of a higher order semilinear heat equation in the subcritical Fujita range // Advanced Nonlinear Studies. 2012. Vol. 12. No. 3. P. 569–596. DOI: 10.1515/ans-2012-0308
5. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Известия вузов. Математика. 2017. № 8. С. 27–41. http://mi.mathnet.ru/ivm9266
6. Кошанов Б.Д., Солдатов А.П. Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1666–1681. DOI: 10.1134/S0374064116120074
7. Похожаев С.И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка // Математический сборник. 1982. Т. 117 (159). № 2. С. 251–265. http://mi.mathnet.ru/msb2202
8. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973. 219 с.
9. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 112–123. http://mi.mathnet.ru/zvmmf9641
10. Юлдашева А.В. Об одной задаче для квазилинейного уравнения четного порядка // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». Т. 140. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. С. 43–49. http://mi.mathnet.ru/into233
11. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999. 96 с.
12. Иманалиев М.И., Ведь Ю.А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 465–477. http://mi.mathnet.ru/de6793

13. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады РАН. 1992. Т. 325. № 6. С. 1111–1115. http://mi.mathnet.ru/dan5418
14. Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 4. С. 71–82.
15. Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 56–62. http://mi.mathnet.ru/vtgu253
16. Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». 2012. Вып. 6. С. 35–41. http://mi.mathnet.ru/vyurm104
17. Юлдашев Т.К. Обобщенная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения высокого порядка с вырожденным ядром // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 50. С. 121–132. DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-10
18. Юлдашев Т.К. Смешанная задача для псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 101–110. DOI: 10.1134/S0374064117010095
19. Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38. No. 3. P. 547–553. DOI: 10.1134/S199508021703026X
20. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
21. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geqslant 1$ // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 11. С. 1558–1570. http://mi.mathnet.ru/de11597
22. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени граничного управления колебаниями струны упругой силой // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1699–1711. http://mi.mathnet.ru/de11610

Поступила в редакцию 23.04.2018

Юлдашев Турсун Камалдинович, к. ф.-м. н., доцент, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, 660014, Россия, г. Красноярск, пр. им. газеты «Красноярский рабочий», 31.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

T. K. Yuldashev

The initial value problem for the quasi-linear partial integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 116–130 (in Russian).

Keywords: initial value problem, characteristic, derivative along the direction, degenerate kernel, superposition of partial differential operators, existence and uniqueness of the solution.

MSC2010: 35A30, 35C15, 35G55, 35L30, 35M10, 35S05

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-09

High-order partial differential equations are of great interest when it comes to physical applications. Many problems of gas dynamics, elasticity theory and the theory of plates and shells are reduced to the consideration of high-order partial differential equations. This paper studies the one-valued solvability of the initial value problem for a nonlinear partial integro-differential equation of an arbitrary order with a degenerate kernel. The expression of higher-order partial differential equations as a superposition of first-order partial differential operators has allowed us to apply methods for solving first-order partial differential equations. First-order partial differential equations can be locally solved by the methods of the theory of ordinary differential equations, reducing them to a characteristic system. The existence and uniqueness of the solution to this problem is proved by the method of successive approximation. An estimate of convergence of the iterative Picard process is obtained. The stability of the solution from the second argument of the initial value problem is shown.

REFERENCES

1. Algazin S.D., Kiiko I.A. *Flatter plastin i obolochek* (Flutter of plates and shells), Moscow: Nauka, 2006, 248 p.
2. Zamyshlyaeva A.A. The higher-order Sobolev-type models, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 5–28 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vyuru126
3. Benney D.J., Luke J.C. On the interactions of permanent waves of finite amplitude, *Journal of Mathematics and Physics*, 1964, vol. 43, pp. 309–313. DOI: 10.1002/sapm1964431309
4. Galaktionov V.A., Mitidieri E., Pohozaev S.I. Global sign-changing solutions of a higher order semilinear heat equation in the subcritical Fujita range, *Advanced Nonlinear Studies*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 569–596. DOI: 10.1515/ans-2012-0308
5. Karimov Sh.T. Method of solving the Cauchy problem for one-dimensional polywave equation with singular Bessel operator, *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 8, pp. 22–35. DOI: 10.3103/S1066369X17080035
6. Koshanov B.D., Soldatov A.P. Boundary value problem with normal derivatives for a higher-order elliptic equation on the plane, *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1594–1609. DOI: 10.1134/S0012266116120077
7. Pokhozhaev S.I. On the solvability of quasilinear elliptic equations of arbitrary order, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 257–271. DOI: 10.1070/SM1983v045n02ABEH002598
8. Skrypnik I.V. *Nelineinye ellipticheskie uravneniya vysshego poryadka* (Nonlinear elliptic equations of higher order), Kiev: Naukova dumka, 1973, 219 p.
9. Yuldashev T.K. Mixed value problem for nonlinear integro-differential equation with parabolic operator of higher power, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 1, pp. 105–116. DOI: 10.1134/S0965542512010150
10. Yuldasheva A.V. On a problem for a quasi-linear equation of even order, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory*, vol. 140, Moscow: VINITI RAN, 2017, pp. 43–49 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/into233
11. Goritskii A.Yu., Kruzhkov S.N., Chechkin G.A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* (Partial differential equations of the first order), Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1999, 96 p.
12. Imanaliev M.I., Ved' Yu.A. First-order partial differential equation with an integral as a coefficient, *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 325–335. https://zbmath.org/?q=an:0689.45019
13. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. On the theory of systems of nonlinear integropartial differential equations of Whitham type, *Doklady Mathematics*, 1993, vol. 46, no. 1, pp. 169–173.
14. Dontsova M.V. Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 68–80. DOI: 10.13108/2014-6-4-68
15. Yuldashev T.K. On the inverse problem for a quasilinear partial differential equation of the first order, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. Mekhanika*, 2012, no. 2 (18), pp. 56–62 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vtgu253
16. Yuldashev T.K. On an inverse problem for a system of quazilinear equations in partial derivatives of the first order, *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika. Fizika*, 2012, issue 6, pp. 35–41 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vyurm104
17. Yuldashev T.K. Generalized solvability of the mixed value problem for a nonlinear integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 121–132. DOI: 10.20537/2226-3594-2017-50-10
18. Yuldashev T.K. Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 99–108. DOI: 10.1134/S0012266117010098
19. Yuldashev T.K. Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 547–553. DOI: 10.1134/S199508021703026X
20. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (Equations of the mathematical physics), Moscow: Nauka, 1977, 736 p.
21. Il'in V.A., Moiseev E.I. Minimization of the L_p-norm with arbitrary $p \geqslant 1$ of the derivative of a boundary displacement control on an arbitrary sufficiently large time interval T, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 11, pp. 1633–1644. DOI: 10.1134/S0012266106110139

22. Il'in V.A., Moiseev E.I. Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval, *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1775–1786. DOI: 10.1134/S0012266106120123

Received 23.04.2018

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsky Rabochy Av., 31, Krasnoyarsk, 660014, Russia.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com