

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Удмуртский государственный университет»

Институт нефти и газа им. М.С. Гуцериева

Кафедра «Бурение нефтяных и газовых скважин»

**Рекомендации по выполнению лабораторных и контрольных работ  
по дисциплине: «Начертательная геометрия и инженерная компьютерная  
графика»**

Учебно-методическое пособие

Издательский центр «Удмуртский университет»

Ижевск 2018

УДК 514.18:004.92 (075.8)

ББК 22.151.34я73

M545

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

Рецензент: к.т.н., доцент кафедры «Информационных и инженерных технологий» филиала УдГУ в г. Воткинск Е.А. Кучерова

M545 Рекомендации по выполнению лабораторных и контрольных работ по дисциплине: «Начертательная геометрия и инженерная компьютерная графика» / сост. О.В. Никитина. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет». 2018.–72с.

Учебно-методическое пособие содержит материалы, для подготовки к экзамену, примеры выполнения типовых задач и задания для выполнения лабораторных и контрольных работ, связанных с современными прикладными технологиями и методикой их реализации.

УДК 514.18:004.92 (075.8)

ББК 22.151.34я73

© О.В. Никитина. сост.,2018  
© ФГБОУ ВО «Удмуртский  
государственный университет», 2018

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>Введение</b>	4
<b>Сведения из теории</b>	6
<b>Задание №1 по теме: «Пересечение плоскостей»</b>	40
<b>Задания для самостоятельного выполнения по теме: «Пересечение плоскостей»</b>	46
<b>Задание №2 по теме: «Конус (Пирамида) – Метод секущих плоскостей»</b>	48
<b>Задания для самостоятельного выполнения по теме: «Конус (Пирамида) – Метод секущих плоскостей»</b>	51
<b>Задание №3 по теме: «Пересечение тел вращения – Метод секущих плоскостей»</b>	56
<b>Задания для самостоятельного выполнения по теме: «Пересечение тел вращения – Метод секущих плоскостей»</b>	62
<b>Список литературы</b>	64

## Введение

**Начертательная геометрия** предстала как наука в конце восемнадцатого века, когда гениальный французский геометр Гаспар Монж, читавший перед студентами парижской Политехнической школы курс лекций **Начертательная геометрия** впервые публикует их.

Со временем и в других странах студенты инженерного профиля начинают изучать курс **начертательная геометрия** как обязательную дисциплину для специалистов данного профиля.

В 1810 г в России **начертательная геометрия** впервые вошла в учебную программу для студентов петербургского Института корпуса инженеров путей сообщения, а с 1830 г. во всех высших учебных заведениях.

**Начертательная геометрия** - фундамент учебной дисциплины Инженерная графика, изучается студентами на первом курсе в первом семестре.

Изучение начертательной геометрии и черчения необходимо для приобретения знаний и навыков, позволяющих составлять и читать технические чертежи, проектную документацию, а также для развития инженерного пространственного воображения. Общим для начертательной геометрии и черчения является метод построения изображений, называемый методом проецирования. В начертательной геометрии изучают теоретические основы этого метода, а в черчении – практическое использование. Знания по построению изображений, решению задач, правила составления и оформления чертежа находят широкое применение при разработке проектов и в строительстве сооружений.

**Начертательная геометрия** изучает способы построения изображений предметов на плоскости по методу проекций (методу Монжа), позволяет по чертежу создавать пространственные образы предметов, определять их взаимное расположение и размеры.

Целью освоения дисциплины «Начертательная геометрия и инженерная компьютерная графика» является освоение студентом основных методов построения технических изображений на плоскости и в пространстве по традиционной и компьютерной технологиям в соответствии с нормативно-техническими требованиями ЕСКД.

Задачи данного методического пособия:

- Развитие пространственного воображения студента, освоение теории и практики построения чертежа.
- Начертательная геометрия является теоретической основой построения технических чертежей, которые представляют собой полные геометрические модели конкретных инженерных изделий.

Задача изучения начертательной геометрии сводится к развитию пространственного представления и воображения, конструктивно-геометрического мышления, способности к анализу и синтезу пространственных форм и отношений, изучению способов конструирования различных геометрических пространственных объектов, способов получения их чертежей на уровне графических моделей и умению решать на этих чертежах задачи, связанные с пространственными объектами и их зависимостями.

Планируемые результаты обучения по дисциплине – это знания, умения, навыки и опыт деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен освоить такие компетенции как способность к самоорганизации и самообразованию, способность оформлять технологическую и техническую документацию по эксплуатации нефтегазопромыслового оборудования.

В результате изучения данного учебно-методического пособия обучающийся должен:

- получить знания по различным методам построения эскизов, чертежей и технических рисунков стандартных деталей, построения и чтение сборочных чертежей общего вида различного уровня, сложности и назначения; построение чертежей геометрических фигур и изделий основные правила оформления, формирования, вы-

полнения и чтения чертежей деталей требования государственных стандартов ЕСКД, уметь пользоваться стандартами и справочной литературой;

- выработать умения по разработке основных конструкторских документов, соответствующих требованиям стандартов, пользоваться стандартами и справочной литературой;
- овладеть методами и средствами разработки и оформления технической документации методами и средствами автоматизации выполнения и оформления проектно-конструкторской документации; навыками работать на компьютерной технике с графическими пакетами для получения конструкторских, технологических и других документов.

## Сведения из теории Евклидово пространство и его свойства

Согласно теории множеств, любую геометрическую фигуру следует рассматривать как множество всех принадлежащих ей точек. Таким образом, всякая геометрическая фигура есть не пустое множество.

Отображение геометрической фигуры на плоскость (или какую-либо другую поверхность) можно осуществить путем проецирования ее точек на эту плоскость (поверхность).

Целесообразно рассмотреть евклидово пространство и его свойства до изучения метода проецирования.

Свойства евклидова пространства могут быть выражены при помощи системы предложений - аксиом, которые устанавливают зависимости и отношения между элементами пространства.

Точки, прямые и плоскости евклидова пространства (трехмерного) находятся в определенном взаимоотношении, которое может быть обозначено словом **принадлежность** или **инцидентность**. Термин **инцидентность** заменяет такие понятия как **лежать на**, **проходить через**.

В дальнейшем вместо выражений точка лежит на плоскости, прямая проходит через точку мы будем употреблять:

- точка  $A$  принадлежит (инцидентна) плоскости (см. рис. 1);

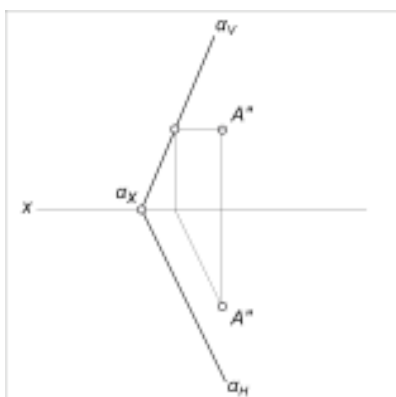


Рис. 1 – Принадлежность точки плоскости

- точка  $B$  принадлежит прямой (см. рис. 2).

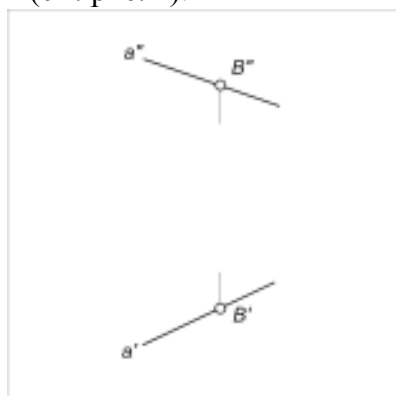


Рис. 2 – Принадлежность точки прямой

В символической форме эти выражения могут быть записаны

$$A \in \alpha; B \in a$$

Аксиомы инцидентности или отношения принадлежности между элементами евклидова пространства могут быть выражены следующими предложениями:

1. Если точка  $A$  принадлежит прямой  $a$ , а прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$ , то точка  $A$  принадлежит плоскости  $\alpha$

$$A \in a \in \alpha \Rightarrow A \in \alpha$$

2. Две различные точки  $A$  и  $B$  всегда принадлежат одной и той же и только одной прямой  $a$  или каждой прямой  $a$  принадлежат, по крайней мере, две точки  $A$  и  $B$

$$(\forall A, B)(A \neq B) \Rightarrow (\exists 1 a) \text{ или } (a \in A, B)$$

3. Три различные точки  $A, B$  и  $C$ , не принадлежащие одной прямой  $a$ , принадлежат одной и той же и только одной плоскости  $\alpha$

$$(\forall ABC)(A \neq B \neq C) \wedge (A, B, C \notin a) \Rightarrow (\exists 1 \alpha)$$

4. Если две точки  $A$  и  $B$ , принадлежащие прямой  $a$ , принадлежат плоскости  $\alpha$ , то и прямая  $a$  принадлежит плоскости  $\alpha$

$$(\forall AB)(A \neq B)(A, B \in a) \wedge (A, B \in \alpha) \Rightarrow (a \in \alpha)$$

Кроме отмеченных предложений, могут быть сформулированы и другие предложения принадлежности для элементов *евклидова пространства*:

5. Две прямые, принадлежащие одной плоскости, могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

6. Две плоскости могут принадлежать одной и той же прямой, но этого может и не быть.

7. Плоскость и не принадлежащая ей прямая могут принадлежать одной точке, но этого может и не быть.

Последние три предложения по существу перефразируют аксиому о параллельности:  
- предложение 5 утверждает, что в евклидовой плоскости две прямые либо пересекаются (принадлежат одной точке), либо не имеют общей точки, - в этом случае они называются параллельными;

- предложение 6 говорит о том, что в евклидовом пространстве две плоскости либо пересекаются (принадлежат одной прямой), либо они параллельны.

- предложение 7 утверждает, что в евклидовом пространстве прямая, не принадлежащая плоскости, либо пересекает ее (прямая и плоскость принадлежат одной точке), либо они параллельны.

## Центральное проецирование

**Центральное проецирование** является наиболее общим случаем получения проекций геометрических фигур. Сущность его заключается в следующем: пусть даны плоскость  $\alpha$  и точка  $S$  (см. рис. 3).

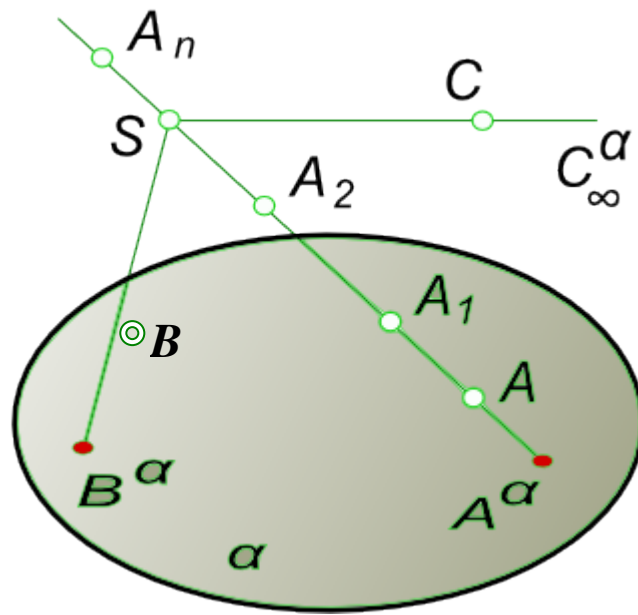


Рис. 3 – Метод получения центральной проекции

Возьмем произвольную точку  $A$ , не принадлежащую плоскости  $\alpha$ . Через заданные точки  $S, A$  проведем луч  $SA$  и отметим точку  $A^\alpha$ , в которой этот луч пересекает плоскость  $\alpha$ . Плоскость  $\alpha$  называют плоскостью проекции, точку  $S$  - центром проекции, полученную точку  $A^\alpha$  - центральной проекцией точки  $A$  на плоскость  $\alpha$ ,  $[SA^\alpha]$ -проецирующим лучом.

Положение плоскости  $\alpha$  и центра  $S$  определяет аппарат центрального проецирования. Если он задан, то всегда имеется возможность определить положение центральной проекции любой точки пространства на плоскость проекции.

Действительно, пусть дана произвольная точка  $B$ , проведя через нее проецирующий луч и определив точку его встречи с плоскостью  $\alpha$ , определяем центральную проекцию  $B^\alpha$  точки  $B$  при данном аппарате проецирования ( $\alpha$  и  $S$ ). В том случае, когда точка  $C$  принадлежит плоскости, проходящей через центр проекции и параллельной плоскости  $\alpha$ , проецирующий луч  $SC$  пресечет плоскость проекции в несобственной точке  $C^\alpha_\infty$ . Так как через две различные точки можно провести одну и только одну прямую, то из рассмотрения рисунка можно сделать вывод, что при заданном аппарате проецирования - фиксированном положении точки  $S$  и плоскости  $\alpha$ , каждая точка пространства будет иметь одну и только одну центральную проекцию. Обратное утверждение - каждой центральной проекции точки однозначно соответствует точка пространства - не имеет смысла.

Действительно кроме точки  $A^\alpha$  на проецирующем луче кроме точки  $A$  расположено множество точек  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ . Поэтому одна центральная проекция точки не дает возможности судить о положении самой точки в пространстве (см. рис. 3).

Для того чтобы сделать возможным определение положения точки в пространстве по ее центральным проекциям, необходимо иметь две центральные проекции этой точки, полученные из двух различных центров. Имея две центральные проекции точки  $A^{\alpha_1}$  и  $A^{\alpha_2}$ , полученные из центров  $S_1$  и  $S_2$ , можно определить положение точки  $A$  в пространстве. Для этого достаточно провести проецирующие лучи и отметить точку их пересечения.

Аналогичные рассуждения можно применить к точке  $B$  (см. рис. 4).



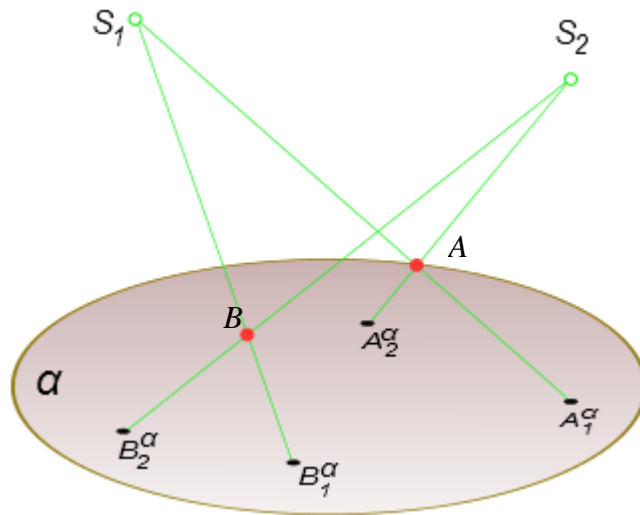


Рис. 4 – Метод определения положения точки по центральной проекции

### Свойства параллельного проецирования

Геометрические фигуры проецируются на плоскость проекции, в общем случае, с искажениями. Причем характер искажений проекций по сравнению с оригиналом зависит от аппарата проецирования и положения проецируемой фигуры по отношению к плоскости проекции. В частности, при параллельном проецировании нарушаются метрические характеристики геометрических фигур (происходит искажение линейных и угловых величин).

Действительно, пусть дана прямоугольная трапеция  $ABCD$ . Плоскость трапеции не параллельна плоскости проекции  $\alpha$ . Определим параллельную проекцию при заданном направлении проецирования  $S$ .

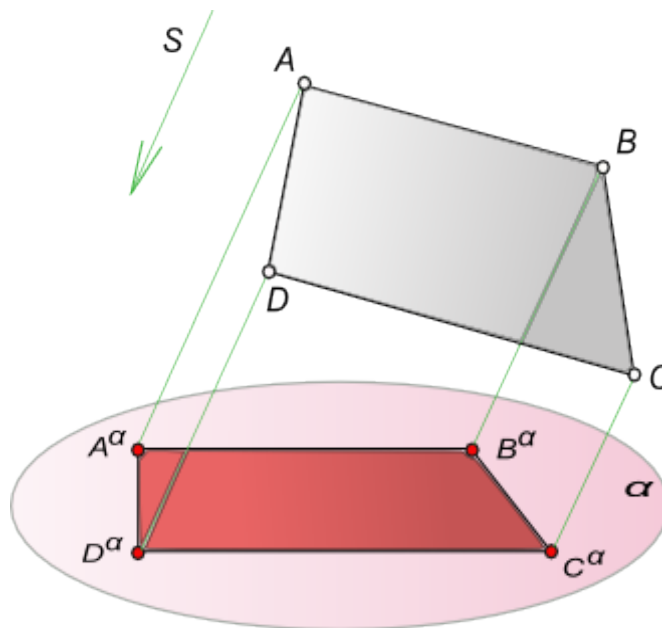


Рис. 5 – Параллельное проецирование

Из рисунка видно, что проекция  $ABCD$  существенно отличается от оригинала  $ABCD$ . Изменились длины сторон трапеции, другими стали величины углов при ее вершинах. При таких условиях, естественно, нарушается равенство площадей фигуры оригинала и ее проекции.

Наряду с этим, между оригиналом и его проекцией существует определенная связь, заключающаяся в том, что некоторые свойства оригинала сохраняются и на его проекции. Такие свойства принято называть проецируемыми или инвариантными (независимыми) для данного способа проецирования.

Основу любой геометрии составляет система аксиом. Любые геометрические определения и предложения, равно как и доказательства теорем, базируются на принятой системе аксиом. В процессе параллельного проецирования (получения проекций геометрической фигуры по ее оригиналу) или реконструкции чертежа (воспроизведение оригинала по заданным его проекциям), любое определение, любую теорему можно составить и доказать, опираясь на инвариантные свойства параллельного проецирования, которые играют в начертательной геометрии такую же важную роль, как аксиомы в геометрии.

Таким образом, можно утверждать, что в начертательной геометрии существует, как бы, две системы аксиом:

- **первая** используется в процессе построения проекции геометрической фигуры по ее оригиналу. На этом этапе функции аксиом выполняют инвариантные свойства параллельного проецирования; После того, как проекции определены, можно рассматривать задачу как плоскую, вступает в силу **вторая** система - аксиоматика евклидовой геометрии.

### Основные инвариантные свойства параллельного проецирования:

1. Проекция точки есть точка.

Это очевидно из самого определения проекции как точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

2. Проекция прямой на плоскость есть прямая.

Действительно, при параллельном проецировании все лучи, проецирующие точки  $A, B, C, D, E$  прямой  $l$ , принадлежат одной плоскости  $\gamma$ , параллельной направлению проецирования  $s$ . Эта плоскость пересекает плоскость проекции по прямой  $l^\alpha$  (см. рис. 6). (Исходя из этого справедливо и следующее утверждение. Прямая может быть проекцией не только прямой, но и любой кривой линии, если эта кривая находится в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций.)

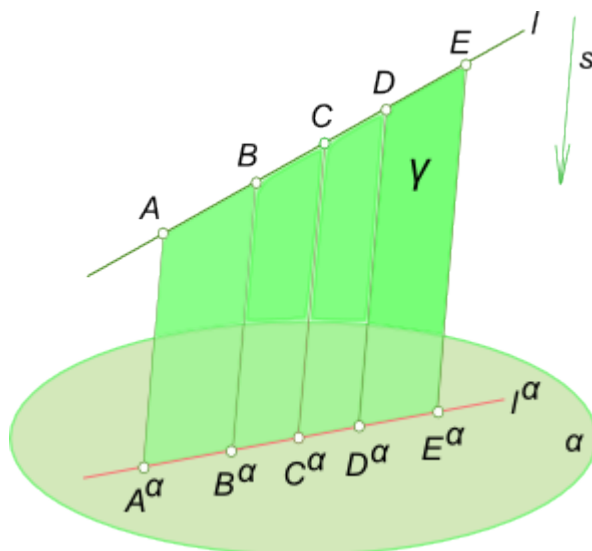


Рис. 6 – Параллельное проецирование прямой на плоскость

3. Если в пространстве точка принадлежит (инцидентна) линии, то проекция этой точки принадлежит проекции линии. Это свойство следует непосредственно из определения проекции геометрической фигуры как множества проекций всех точек.

4. Проекции взаимно параллельных прямых также взаимно параллельны, а отношение отрезков таких прямых равно отношению их параллельных проекций (см. рис. 7).

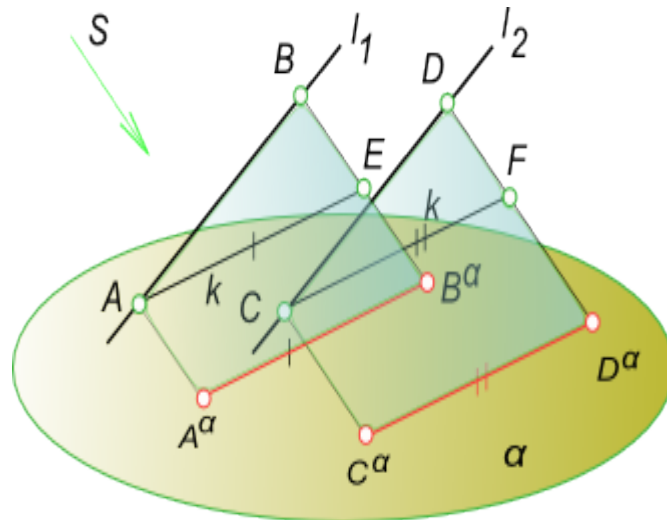


Рис. 7 – Доказательство параллельного проецирования

Если  $[AB] \parallel [CD]$ , то плоскости  $ABB^{\alpha}A^{\alpha}$  и  $CDD^{\alpha}C^{\alpha}$  параллельны как имеющие углы при вершинах  $B$  и  $D$  с соответственно параллельными сторонами -  $(BA) \parallel (DC)$  и  $(BB^{\alpha}) \parallel (DD^{\alpha})$  (см. рис. 7). Эти плоскости пересекаются плоскостью проекции  $\alpha$  по параллельным прямым  $l^{\alpha 1} \parallel l^{\alpha 2}$ . Проведем в проецирующей плоскости  $ABB^{\alpha}A^{\alpha}$  через точку  $A$  прямую  $k_1 \parallel l_1$ , а в плоскости  $CDD^{\alpha}C^{\alpha}$  прямую  $k_2 \parallel l_2$ . Эти прямые пересекут проецирующие лучи  $[BB^{\alpha}]$  и  $[DD^{\alpha}]$  в точках  $E$  и  $F$ . Отрезок  $[AE] = [A^{\alpha}B^{\alpha}]$ , а  $[CF] = [C^{\alpha}D^{\alpha}]$  как отрезки параллельных между параллельными.

$\triangle ABE$  подобен  $\triangle CDF$ . На основании подобия треугольников можно записать:

$$[A^{\alpha}B^{\alpha}] \parallel [C^{\alpha}D^{\alpha}]$$

Из четвертого свойства следует:

а) если отрезок прямой делится точкой в каком-либо отношении, то и проекция отрезка делится проекцией этой точки в том же отношении (см. рис. 8).

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему, понятно из чертежа на рисунке 8 и не требует дополнительных пояснений.

Как следствие пункт а) можно записать: середина отрезка оригинала проецируется в середину его проекции.

Поэтому медианы треугольника проецируются в медианы его проекций, а следовательно, центр тяжести треугольной пластинки проецируется в центр тяжести треугольника - проекций; центр окружности, как точка, делящая все диаметры пополам, проецируется в центр эллипса. Взаимно перпендикулярные диаметры окружности проецируются в сопряженные диаметры эллипса.

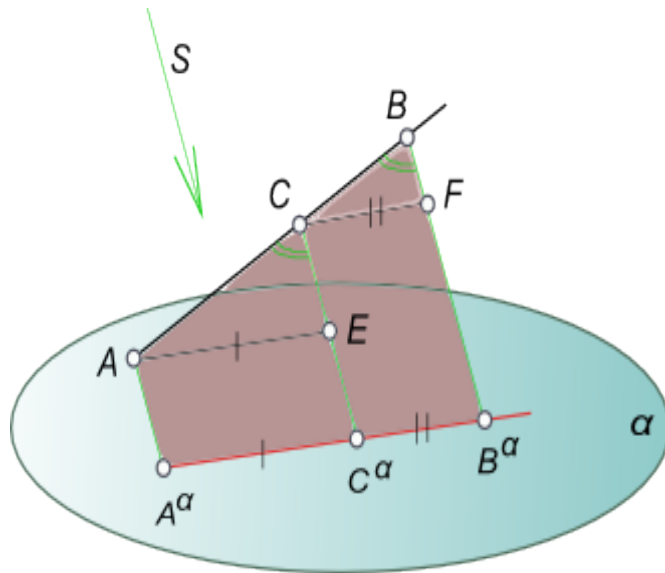


Рис.8 – Доказательство следствия из 4-го свойства

б) Проекция конгруэнтных отрезков взаимно параллельных прямых взаимно параллельны и конгруэнтны.

Поэтому проекцией любого параллелограмма будет параллелограмм. В параллелограммы проецируется также произвольно расположенный по отношению к плоскости проекции прямоугольник, ромб, квадрат.

5. Точка пересечения проекций пересекающихся прямых является проекцией точки пересечения этих прямых (см. рис. 9). Пусть две прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $K$ . Так как точка  $K$  принадлежит прямой  $a$ , то на основании свойства 3  $K^{\alpha} \in a^{\alpha}$ . Одновременно  $K \in b$ , следовательно,  $K^{\alpha} \in b^{\alpha}$ . Эти два условия могут быть удовлетворены только в том случае, если  $K^{\alpha}$  будет точкой пересечения проекций прямых  $a$  и  $b$ .

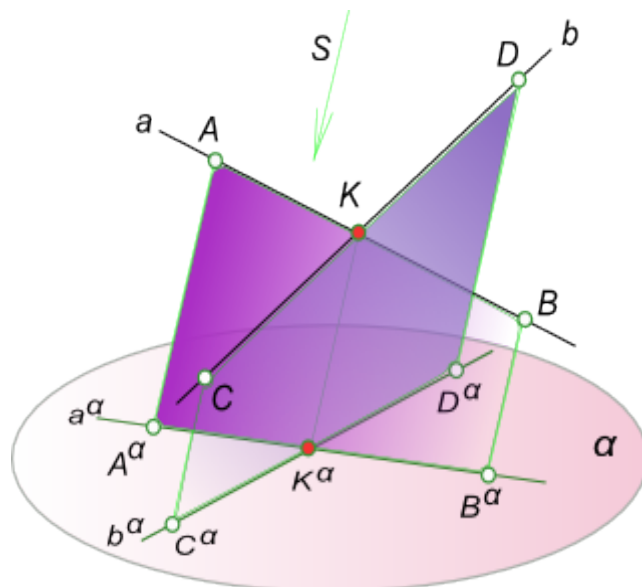


Рис.9 – Доказательство следствия из 5-го свойства

6. Плоская фигура, параллельная плоскости проекции, проецируется на эту плоскость в конгруэнтную фигуру.

7. Плоский многоугольник в общем случае проецируется в многоугольник с тем же числом вершин.

Следствием этого свойства будут:

- плоская ломанная линия проецируется, в общем случае, в ломанную линию с тем же числом вершин;
- плоская кривая проецируется, в общем случае, в кривую линию;
- проекция в виде отрезка прямой не определяет оригинала, которым могут быть: прямая, плоская ломанная или кривая линии, любая плоская фигура.

8. Параллельный перенос оригинала или плоскости проекции не изменяет вида и размеров проекции оригинала.

### Ортогональное проецирование

**Ортогональное проецирование** является частным случаем параллельного проецирования, при котором направление проецирования  $S$  перпендикулярно плоскости проекции  $\alpha$ .

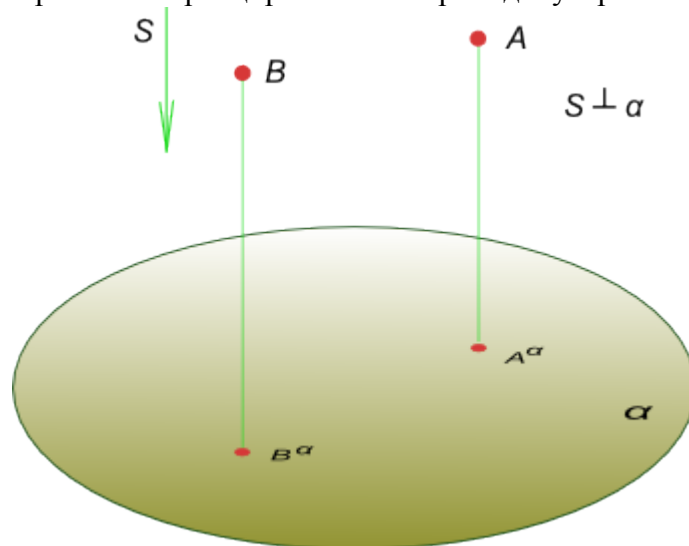


Рис.10 – Ортогональное проецирование

Рисунок 10 дает наглядное представление об ортогональном проецировании точки.

Кроме отмеченных ранее свойств параллельных проекций, для ортогонального проецирования будет справедлива следующая теорема:

*для того чтобы прямой угол проецировался ортогонально без искажения, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, одна его сторона была параллельна плоскости проекции, а вторая сторона не перпендикулярна к этой плоскости.*

$$1. ([AB] \perp [BC]) \wedge ([AB] \parallel \alpha \vee [BC] \neq \perp \alpha) \Rightarrow [A^{\alpha}B^{\alpha}] \perp [B^{\alpha}C^{\alpha}]$$

Для доказательства этой теоремы обратимся к чертежу (рис. 11).

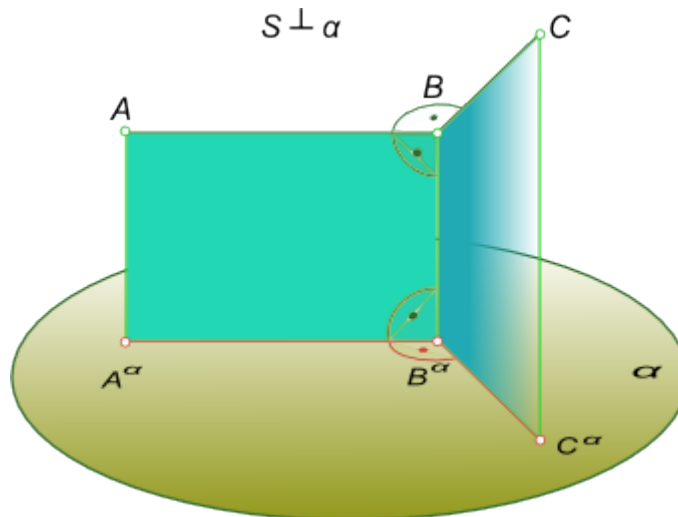


Рис. 11 – Доказательство теоремы

В пространстве  $ABC = 90^\circ$ , сторона  $AB$  данного угла параллельна плоскости проекции  $\alpha$ , а сторона  $BC$  не перпендикулярна этой плоскости, докажем, что  $A^\alpha B^\alpha C^\alpha = 90^\circ$ .

Фигура  $ABB^\alpha A^\alpha$  - прямоугольник, следовательно,  $AB$  перпендикулярен к проецирующей плоскости  $BCC^\alpha B^\alpha$ , так как он перпендикулярен к двум пересекающимся прямым этой плоскости ( $AB \perp BB^\alpha$  по построению). Но  $AB \parallel A^\alpha B^\alpha$ , следовательно,  $A^\alpha B^\alpha \perp$  плоскости  $BCC^\alpha B^\alpha$ , поэтому  $A^\alpha B^\alpha \perp B^\alpha C^\alpha$ , т. е.  $A^\alpha B^\alpha C^\alpha = 90^\circ$ .

**Ортогональное проецирование** обладает рядом преимуществ перед центральным и параллельным (косоугольным) проецированием.

Это:

- простота геометрических построений для определения ортогональных проекций точек;
- возможность при определенных условиях сохранить на проекциях форму и размеры проецируемой фигуры.

При ортогональном проецировании если проецируемая фигура параллельна плоскости проекций, то ее проекция на данную плоскость не искажена или конгруэнтна проецируемой фигуре.

Отмеченные достоинства обеспечили широкое применение ортогонального проецирования, в частности, для составления машиностроительных чертежей.

**Центральное и параллельное (косоугольное) проецирования позволяют однозначно решать задачу по определению проекции фигуры по заданному оригиналу, но не дают возможности воспроизвести (реконструировать) оригинал по его одной центральной или косоугольной проекции.**

**Для того чтобы получить ортогональный чертеж, обладающий свойством "обратимости", необходимо иметь, по крайней мере, две связанные между собой ортогональные проекции оригинала.**

### Прямоугольная декартова система координат

**Прямоугольная декартова система координат** - это способ получения ортогональных проекций, обладающих обратимостью.

Положение точки (а следовательно, и любой геометрической фигуры) в пространстве может быть определено, если будет задана какая-либо координатная система отнесения.

Наиболее удобной для фиксирования положения геометрической фигуры в пространстве и выявления ее формы по ортогональным проекциям является **прямоугольная декартова система координат**, состоящая из трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

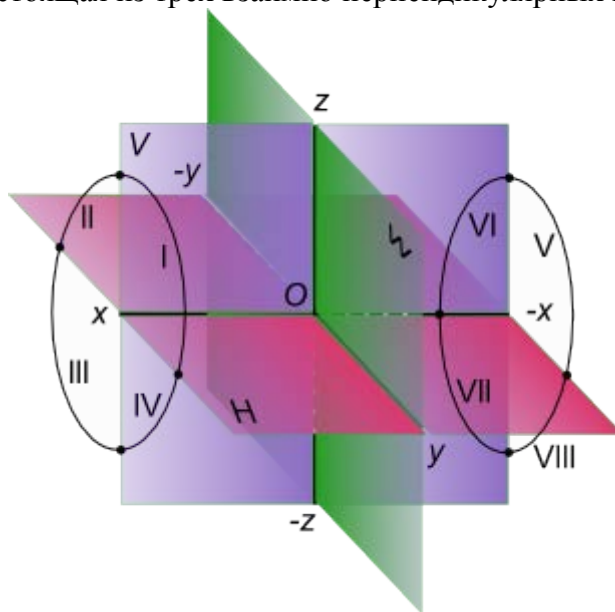


Рис. 12 – Прямоугольная декартова система координат

Рассмотрим макет из трех взаимно перпендикулярных плоскостей изображенный на рисунке 12.

Условимся называть:

- плоскость  $H$  - горизонтальной плоскостью проекции;
- плоскость  $V$  - фронтальной плоскостью проекции;
- плоскость  $W$  - профильной плоскостью проекции.

Линии пересечения плоскостей проекции образуют оси координат:

- ось  $x$  - называют осью *абсцисс*;
- ось  $y$  - осью *ординат*;
- ось  $z$  - осью *апplikат*.

Точка пересечения координатных осей принимается за начало координат и обозначается буквой  $O$  (Origo - начало).

При этом положительным направлением осей координат считают:

- для оси  $x$  - влево от начала координат;
- для оси  $y$  - в сторону зрителя от плоскости  $V$ ;
- ось  $z$  - вверх от плоскости  $H$ .

Противоположные направления осей считаются отрицательными.

Координатные плоскости делят пространство на восемь частей - *октантов*. Октанты условно принято нумеровать, так как это показано римскими цифрами на рисунке.

Каждый из октантов представляет прямоугольный трехгранник, у которого гранями служат части плоскостей проекций (называемых полами), а ребрами координатные оси.

### Отрицательные значения $x$ , $y$ и $z$ на эюре Монжа

Даны координаты точки А (30, -10, 40) или А (Ax, Ay, Az). Необходимо построить проекции А', А'', А''' и определить в каком октанте находится данная точка.

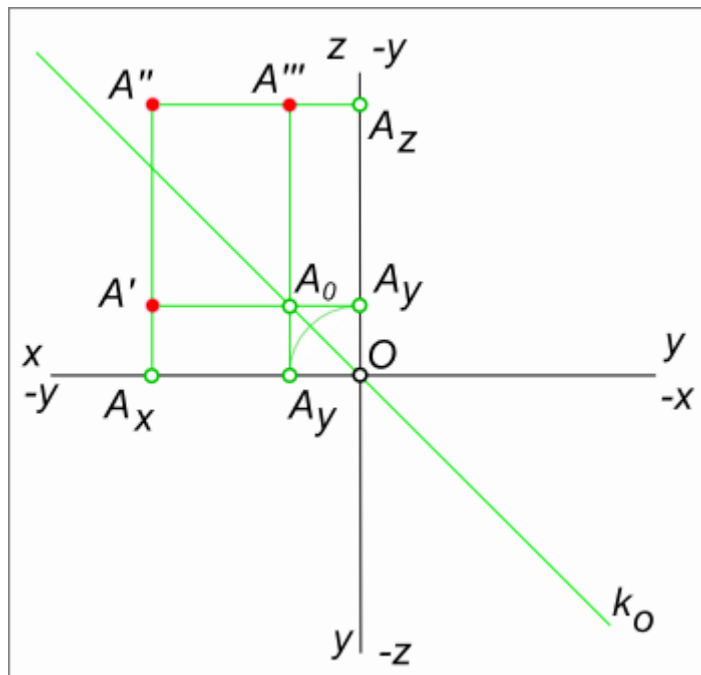


Рис. 13 – Координаты точки А

Для построения проекций точки А требуется знать где направления x, y, z положительные и где **отрицательные значения x, y и z на эюре Монжа**. Эпюры точек и знаки координат точек в октантах левой половины пространственного макета

Эпюр точки				
Положение	Октант I	Октант II	Октант III	Октант IV
x	+	+	+	+
y	+	-	-	+
z	+	+	-	-

Эпюры точек и знаки координат точек в октантах правой половины пространственного макета



Эпюр точки				
Положение	Октант V	Октант VI	Октант VII	Октант VIII
x	-	-	-	-
y	+	-	-	+
z	+	+	-	-

По приведенным эпюрам точек в октантах выводится следующая последовательность построения эпюра точки:

- проводятся оси координат  $Oxyz$ ;
- откладывается абсцисса точки от оси  $z$ ;
- проводится линия проекционной связи  $\perp$  оси  $x$ ;
- откладывается аппликата точки от оси  $x$ ;
- откладывается ордината точки от оси  $x$ .

Для определения октанта в котором располагается точка  $A$  следует воспользоваться таблицей. Положение точки  $A$  соответствует в таблице октанту №2.

### Постоянная прямая эпюра Монжа

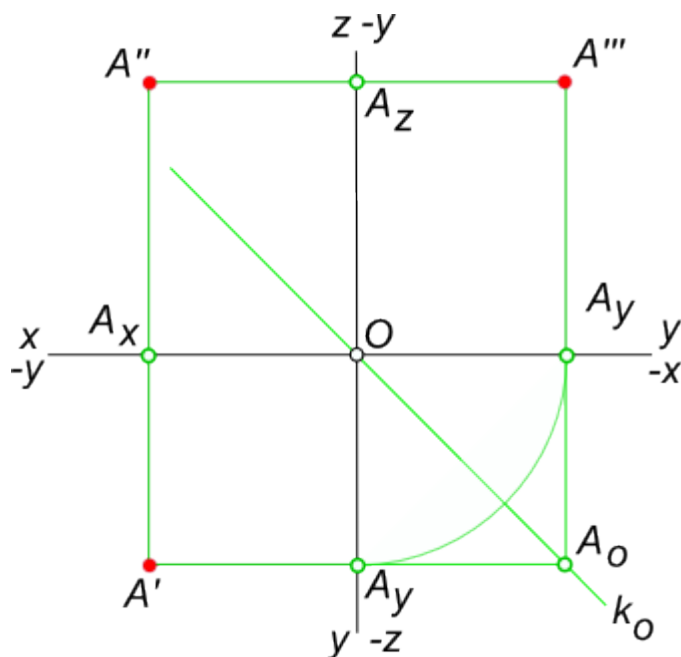


Рис. 14 – Постоянная прямая эпюра Монжа

Связь между горизонтальной и профильной проекциями точки устанавливается с помощью двух ортогональных отрезков  $[A'A_0]$  и  $[A_0A'']$  и сопрягающей их дуги окружности, с центром в точке пересечения координатных осей. Положение профильной (горизонтальной) проекции по заданным горизонтальной (профильной) и фронтальной проекциям может быть найдено и без проведения дуги окружности. В этом случае связь между горизонтальной и профильной проекциями устанавливается с помощью ломаной линии  $A'A_0A''$  с вершиной  $A_0$  на биссектрисе угла, образованного осями  $u$ . Биссектриса  $OA_0$  - **постоянная прямая эпюра Монжа** -  $k_0$ .

В тех случаях, когда нет необходимости в определении положения точки (или любой другой геометрической фигуры) относительно координатной системы плоскостей проекций, можно не указывать на эпюре осей координат (Рис. 15).

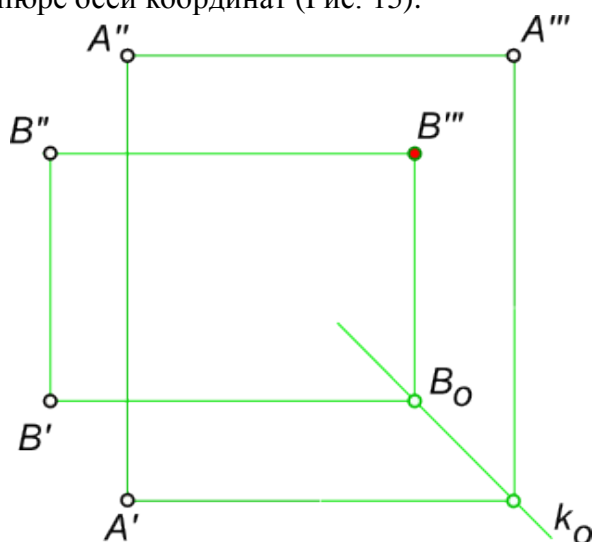


Рис. 15 – Постоянная прямая эпюра Монжа

Отсутствие на чертеже осей не мешает определять третью проекцию любой точки по двум заданным, если при этом указаны три проекции какой либо другой точки. Пусть даны три проекции точки  $A$  ( $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ ), а также горизонтальная и фронтальная проекции точки  $B$  ( $B'$ ,  $B''$ ). Требуется найти профильную проекцию  $B'''$ . Решение: - Через горизонтальную проекцию точки  $A'$  проводим прямую параллельную линии связи ( $A''A'''$ ), а через профильную проекцию  $A''$  проводим прямую, параллельную линии связи ( $A'A'''$ ), и отмечаем точку их пересечения  $A_0$ . Точка  $A_0$  определяет положение постоянной прямой  $k_0$ , являющейся биссектрисой угла  $A'A_0A''$ . Далее через  $B'$  проводим прямую параллельную линии связи ( $A''A'''$ ) (горизонтальную прямую), отмечаем точку  $B_0$  ее пересечения с постоянной прямой  $k_0$ . Через точку  $B_0$  проводим вертикальную прямую. Точка ее пересечения с горизонтальной прямой, проведенной через  $B''$ , определит искомую профильную проекцию  $B'''$ .

**Постоянная прямая эпюра Монжа** позволяет решать задачу по определению третьей проекции точки по двум заданным, независимо от того в каком октанте находится точка.

### Конкурирующие точки

**Конкурирующие точки** используются для определения видимости геометрических фигур на плоскости проекций. Где видимые объекты отображают сплошной основной линией, не видимые - тонкой пунктирной линией.

**Конкурирующие точки** - это точки, расположенные на одном проецирующем луче.

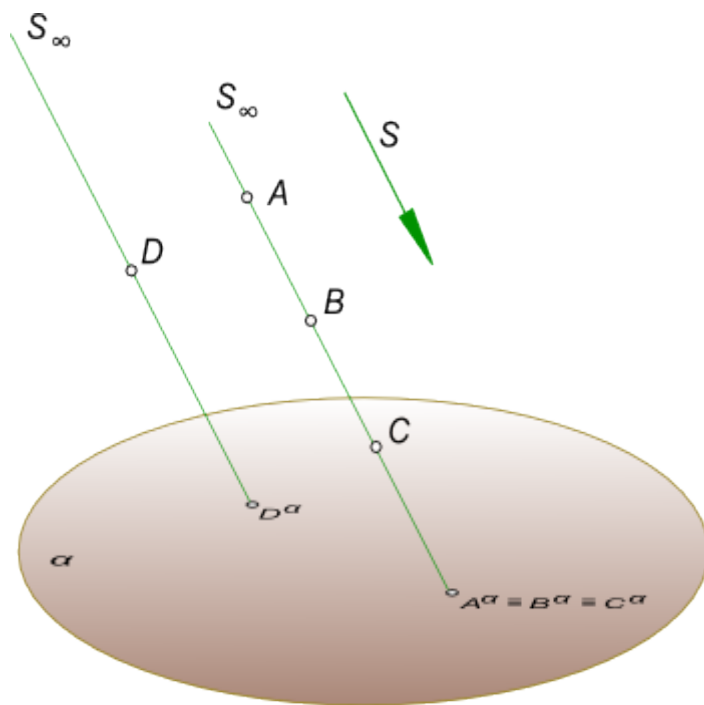


Рис. 16 – Конкурирующие точки

**Определение видимости** в системе параллельного проецирования изображенной на рисунке, затруднительно так как по одной проекции нельзя выделить наиболее удаленную от проекции точку. Образно говоря, **конкурирующие точки** - это как две лошади на скачках: когда на тебя скачут, вроде вместе, а как сбоку помотришь - сразу видно, кто впереди, а кто сзади.

Однако на эюре Монжа в ортогональной системе плоскостей проекций данная задача легко решается.

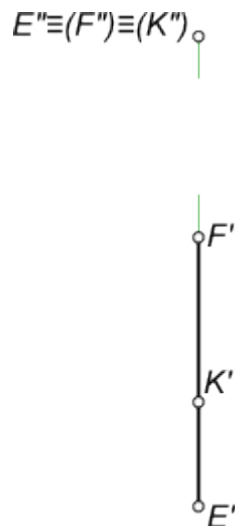


Рис. 17 – Конкурирующие точки

Применительно к нашему чертежу конкурирующими будут точки: E, K и F принадлежащие фронтально проецирующей прямой. Видимой на фронтальной плоскости проекций будет точка наиболее удаленная от нее - это точка E. Ее горизонтальная проекция E' наиболее удалена от оси x.

**Конкурирующие точки** обозначают на эюре с помощью знака  $\equiv$ , означающего совпадение указанных проекций, при этом проекции невидимых точек берут в круглые скобки.

## Положение точки в пространстве

**Положение точки в пространстве** (а следовательно, и любой геометрической фигуры) может быть определено, если будет задана какая-либо координатная система отнесения.

**Положение точки в пространстве**, геометрической фигуры наиболее удобно для фиксирования и выявления ее формы по ортогональным проекциям в декартовой системе координат, состоящей из трех взаимно перпендикулярных плоскостей.

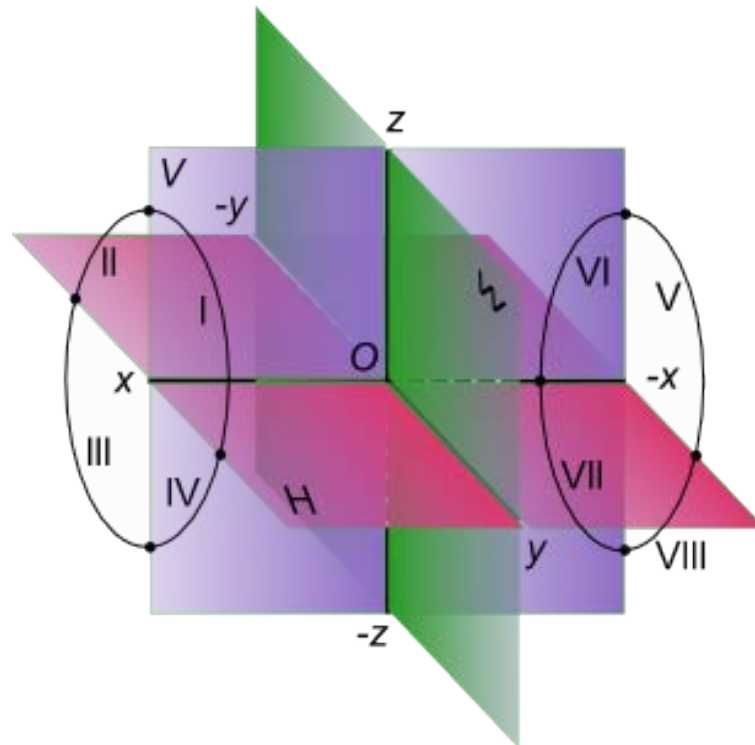


Рис. 18 – Декартова система координат

При ортогональном проецировании точки  $A$  получаем:

$A'$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $H$  (горизонтальная проекция точки  $A$ );  
 $A''$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $V$  (фронтальная проекция точки  $A$ );  
 $A'''$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $W$  (профильная проекция точки  $A$ );  
Координатой точки называется удаление точки от плоскости проекции:  
 $A(x; y; z)$  - для задания положения точки необходимы три координаты:

$$\begin{aligned} &A'(x; y); \\ &A''(x; z); \\ &A'''(y; z). \end{aligned}$$

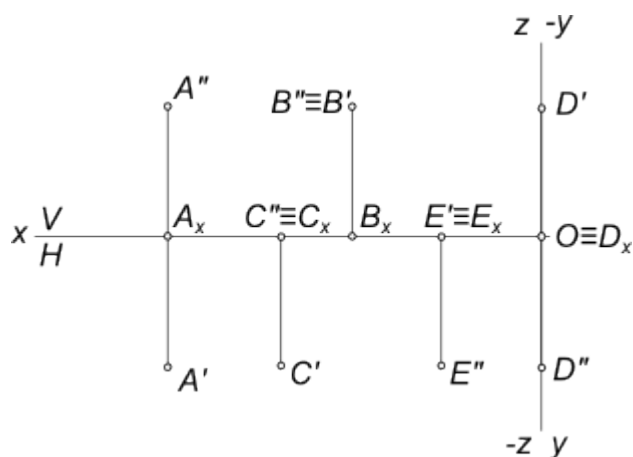


Рис. 19 – Положение точки в пространстве

**Положение точки в пространстве** может быть задано графически путем указания двух ее проекций -  $A'(x;y)$  и  $A''(x;z)$  здесь имеются все три координаты точки A. Линия соединяющая на эюре проекции точки называется линией проекционной связи. Если координаты точки  $\neq 0$ , то это точку называют точкой общего положения, если 1 или 2 координаты = 0, то точка называется точкой частного положения. На представленном рисунке 18:

- точки A и B общего положения, кроме того точка B принадлежит биссекторной плоскости;
- точки частного положения:
- точка CED принадлежит горизонтальной плоскости проекций H;
- точка E принадлежит фронтальной плоскости проекций V;
- точка D принадлежит профильной плоскости проекций W;

### Метод Монжа

**Метод Монжа** использует метод прямоугольных проекций или метод ортогонального проецирования геометрического образа (точки, прямой, плоскости, поверхности) на две взаимно перпендикулярные и взаимно связанные плоскости проекции лучами перпендикулярными этим плоскостям проекций, в этом состоит сущность метода Монжа (рис. 19):

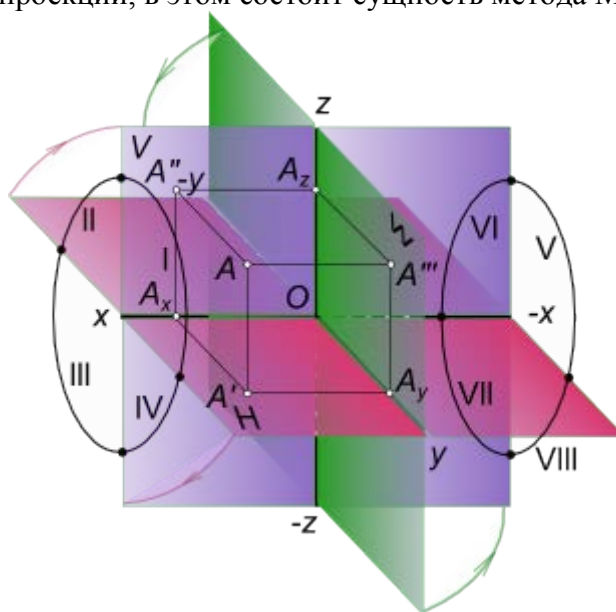


Рис.20 – Метод Монжа

$H$  – горизонтальная плоскость проекции;  
 $V$  – фронтальная плоскость проекции;  
 $W$  – профильная плоскость проекции.

Линии пересечения плоскостей проекции называются осью проекции или осью координат:

$$\begin{aligned}
 OX &= V \cap H; \\
 OY &= H \cap W; \\
 OZ &= V \cap W.
 \end{aligned}$$

$A'$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $H$  (горизонтальная проекция точки  $A$ );

$A''$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $V$  (фронтальная проекция точки  $A$ );

$A'''$  – проекция точки  $A$  на плоскость  $W$  (профильная проекция точки  $A$ ).

Методы проецирования с использованием одно-картинных чертежей позволяют решать прямую задачу (т.е. по данному оригиналу построить его проекцию). Однако, обратную задачу (т.е. по проекции воспроизвести оригинал) решить однозначно невозможно. Эта задача допускает бесчисленное множество решений, т.к. каждую точку  $A\alpha$  плоскости проекций  $\alpha$  можно считать проекцией любой точки проецирующего луча  $SA\alpha$ , проходящего через  $A\alpha$ .

Таким образом, рассмотренные одно-картинные чертежи не обладают свойством обратимости.

Для получения обратимых одно-картинных чертежей их дополняют необходимыми данными.

Существуют различные способы такого дополнения. Например, чертежи с числовыми отметками.

Способ заключается в том, что наряду с проекцией точки  $A_1$  задаётся высота точки, т.е. её расстояние от плоскости проекций. Задают, также, масштаб.

Такой способ используется в строительстве, архитектуре, геодезии и т. д. Однако, он не является универсальным для создания чертежей сложных пространственных форм.

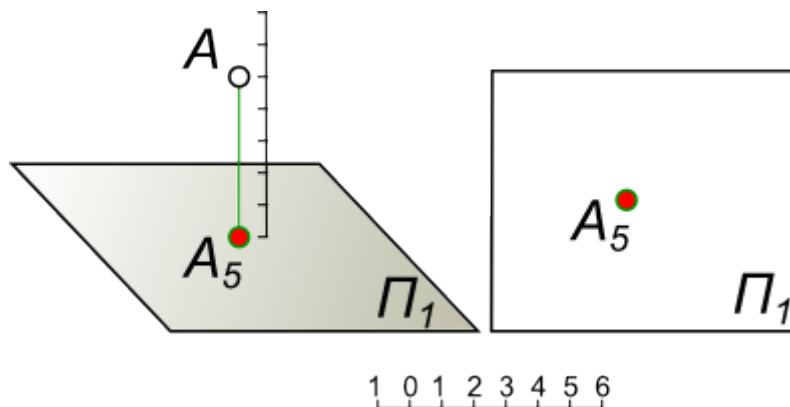


Рис. 21 – Метод Монжа

В 1798 году французский геометр-инженер Гаспар Монж, обобщив накопленные к этому времени теоретические знания и опыт, впервые дал научное обоснование общего метода построения изображений, предложив рассматривать плоский чертёж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения с плоскостью двух взаимно связанных взаимно перпендикулярных плоскостей проекций.

Отсюда ведёт начало принцип построения чертежей, получивший название **Метод Монжа**, которым мы пользуемся и поныне.

## Положение точки в пространстве

**Положение точки в пространстве** представим с помощью пространственного макета. Пусть даны в пространстве точка  $A$  и три взаимно перпендикулярные плоскости проекции.

Построим проекции точки  $A$ , расположенной в первом октанте пространства. Для этого через точку проведем проецирующие лучи, идущие перпендикулярно плоскостям проекций. На пересечении этих лучей с плоскостями проекций  $H$ ,  $V$ ,  $W$  находятся проекции самой точки  $A$  ( $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$ ).

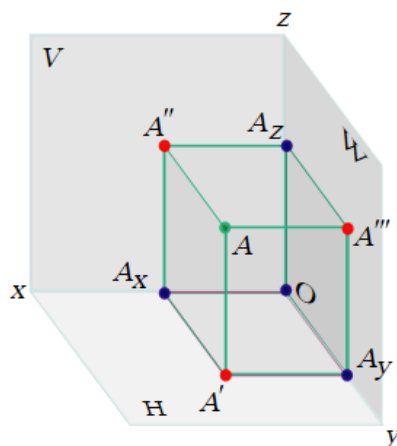


Рис. 22 – Положение точки в пространстве

**Положение точки в пространстве** определяется тремя координатами ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), показывающими величины расстояний, на которые она удалена от плоскостей проекций.

Чтобы определить эти расстояния, достаточно через точку  $A$  провести прямые, перпендикулярные к плоскостям проекций, определить точки  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$  встречи этих прямых с плоскостями проекций и измерить величины отрезков  $[AA']$ ,  $[AA'']$ ,  $[AA''']$ , которые укажут соответственно значение аппликаты  $z$ , ординаты  $y$ , абсциссы  $x$  точки  $A$ .

Точки  $A'$ ,  $A''$ ,  $A'''$  называют ортогональными проекциями точки  $A$ , при этом согласно принятым обозначениям:

$A'$  - горизонтальная проекция точки  $A$ ;

$A''$  - фронтальная проекция точки  $A$ ;

$A'''$  - профильная проекция точки  $A$ .

Отрезки:

$[AA']$  -  $[OA_x]$  - абсцисса точки  $A$ ;

$[AA'']$  -  $[OA_y]$  - ордината точки  $A$ ;

$[AA''']$  -  $[OA_z]$  - аппликата точки  $A$ .

Прямые  $(AA' \perp H)$ ,  $(AA'' \perp V)$ ,  $(AA''' \perp W)$  называют *проецирующими* *прямыми* или *проецирующими* *лучами*.

Прямую  $(AA')$ , проецирующую точку  $A$  на *горизонтальную плоскость проекций*, называют *горизонтально проецирующей* *прямой* (*лучом*).

Прямую  $(AA'')$  проецирующую точку  $A$  на *фронтальную плоскость проекций* называют *фронтально проецирующей* *прямой* (*лучом*).

Прямую  $(AA''')$  проецирующую точку  $A$  на *профильную плоскость проекций* называют *профильно-проецирующей* *прямой* (*лучом*).

Две проецирующие прямые, проходящие через точку  $A$ , определяют плоскость, которую принято называть *проецирующей*.

Чтобы получить эпюр точки  $A$ , выполним преобразование пространственного макета в эпюр Монжа:

- фронтальная проекция точки  $A$  остается на месте, как принадлежащая плоскости  $V$ , которая не меняет своего положения при рассматриваемом преобразовании.
- горизонтальная проекция  $A'$  вместе с горизонтальной плоскостью проекции опустится вниз и расположится на одном перпендикуляре к оси  $x$  с фронтальной проекцией  $A''$ .
- профильная проекция  $AA'''$  будет вращаться вместе с профильной плоскостью проекции и к концу преобразования займет положение, указанное на рисунке. При этом  $AA'''$  будет принадлежать перпендикуляру к оси  $z$ , проведенному через  $A''$  и удалена от оси  $z$  на такое же расстояние, на какое горизонтальная проекция  $A'$  удалена от оси  $x$ .

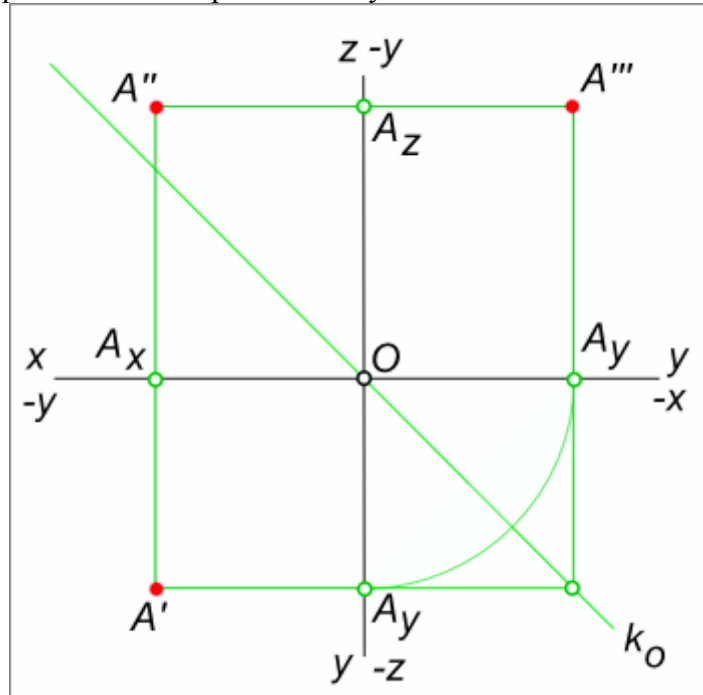


Рис. 23 – Преобразование пространственного макета в эпюр

Связь между горизонтальной и профильной проекциями точки может быть установлена с помощью двух ортогональных отрезков  $[A'A_y]$  и  $[A_yA''']$  и сопрягающей их дуги окружности, с центром в точке пересечения координатных осей.

Отмеченной связью пользуются для нахождения недостающей профильной или горизонтальной проекции.

Положение профильной (горизонтальной) проекции по заданным горизонтальной (профильной) и фронтальной проекциям может быть найдено и без проведения дуги окружности. В этом случае связь между горизонтальной и профильной проекциями может быть установлена с помощью ломаной линии  $A', A_o, A'''$  с вершиной  $A_o$  на биссектрисе угла, образованного осями  $y$  (см. рис. 22).

Биссектрису  $O, A_o, A'''$  называют постоянной прямой  $k_o$  эпюра Монжа.

Представленная на рисунке плоская модель (эпюр) несет такую же информацию, какая содержится в пространственном макете. Действительно: чтобы определить **положение точки в пространстве**, необходимо знать три координаты точки  $A - (x, y, z)$  - это длины отрезков  $[AA''']$ ,  $[AA'']$ ,  $[AA']$ .

Величины этих отрезков могут быть легко определены на эюре:  
 $[AA'''] \cong [A'A_y] \cong [A''A_z]$ ;

$$[AA''] \cong [A'A_x] \cong [A'''A_z];$$

$$[AA'] \cong [A''A_x] \cong [A'''A_y].$$

Горизонтальная проекция точки  $A$  определяется абсциссой  $x$  и ординатой  $y$ .  
 Фронтальная проекция - абсциссой  $x$  и аппликатой  $z$ .

Профильная проекция - ординатой  $y$  и аппликатой  $z$ .



$$A[A'(x, y); A''(x, z); A'''(y, z)]$$

Из записи следует:

1. Точка в пространстве удалена:

- а) от плоскости проекции  $W$  на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки  $A'$  удалена от оси  $y$  (или же фронтальная проекция  $A''$  от оси  $z$ );
- б) от плоскости проекции  $V$  на такую же величину, на какую горизонтальная проекция этой точки  $A'$  удалена от оси  $x$  (или ее профильная проекция  $A'''$  от оси  $z$ );
- в) от плоскости проекции  $H$  на такую же величину, на какую ее фронтальная проекция  $A''$  удалена от оси  $x$  (или ее профильная проекция  $A'''$  от оси  $y$ ).

2. **Положение точки в пространстве** вполне определяется положением ее двух ортогональных проекций.

Как следствие из этого - по двум любым заданным ортогональным проекциям точки всегда можно построить недостающую ее третью ортогональную проекцию.

Действительно: какое бы сочетание из двух ортогональных проекций мы не взяли, они всегда дают нам значение всех трех координат точки.

3. а) горизонтальная и фронтальная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру к оси  $x$ .

Если принять во внимание, что на эюре прямые, перпендикулярные к осям проекций и соединяющие разноименные проекции точек, называют линиями связи (проекционной связи), то пункт 3. а) может быть сформулирован иначе:

горизонтальная и фронтальная проекции любой точки принадлежат одной линии связи.

б) горизонтальная и профильная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи) к оси  $y$ ;

в) фронтальная и профильная проекции любой точки принадлежат одному перпендикуляру (одной линии связи) к оси  $z$ .

## Линия

**Линия** — это множество всех последовательных положений движущейся точки.

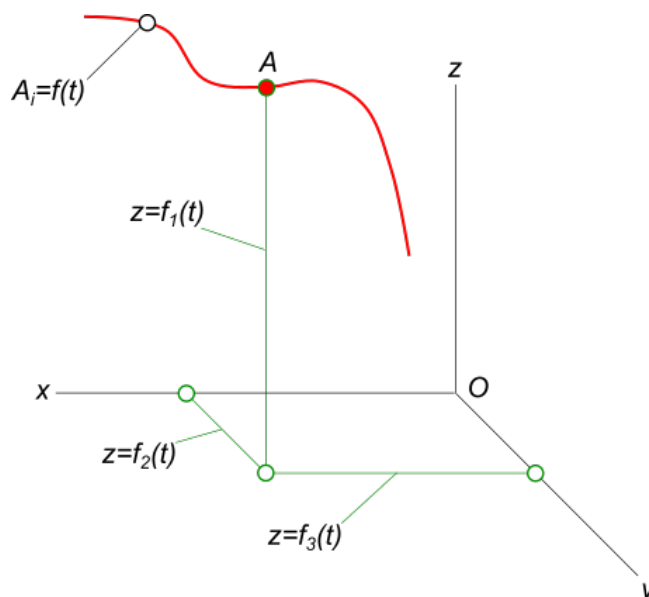


Рис. 24 – Линия

Такое представление линии позволяет получить определение линии, базирующие на таких основных понятиях геометрии, как точка и множество. В этом случае линию можно рассматривать как непрерывное множество всех принадлежащих ей точек. Если учесть, что положение точки при ее движении по заданной траектории будет зависеть от непрерывно меняющейся величины  $d$  (расстояние от точки до начала координат), то можно утверждать, что положение точки принадлежащей линии, определяется одной непрерывно меняющейся величиной  $d$ . Тогда, окончательно приняв  $d$  за параметр, приходим к следующему определению — **линия** есть непрерывное однопараметрическое множество точек.

**Линия** бывает следующих видов:

**Прямая** линия — разновидность линии, которая получается, если движущаяся точка не изменяет направления движения;

**Кривая** линия — разновидность линии, которая получается, если движущаяся точка изменяет направление движения;

**Плоская** линия — линия, все точки которой принадлежат одной плоскости;

**Пространственная** линия (линии двойкой кривизны) — линия, все точки которых не принадлежат одной плоскости (например, линия пересечения поверхностей);

**Алгебраические** линии определяются алгебраическими уравнениями в декартовой системе координат (окружность, эллипс, парабола, гипербола и др.);

**Трансцендентные** линия описываются трансцендентным уравнением (синусоида, спираль Архимеда и др.).

Если алгебраическое уравнение линии  $n$ -й степени, то алгебраическая кривая считается  $n$ -го порядка, то есть порядком кривой называют наибольшую степень ее уравнения. Геометрически порядок плоской кривой определяется наибольшим числом точек ее пересечения с прямой, лежащей в плоскости кривой, а для пространственной кривой — пересечением ее с плоскостью. Для алгебраических кривых это число точек всегда конечно. Для трансцендентных — бесконечно.

Например, для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеем  $n=2$ , т.е. это — кривая второго порядка.

Для синусоиды  $y = \sin x$  имеем  $n=\infty$ .

Кривые бывают закономерные и не закономерные, как, например, горизонтали на географической карте.

### Винтовая линия

**Винтовая линия** относится к пространственным кривым. Различают цилиндрические, конические, сферические и другие винтовые линии.

Цилиндрическая **винтовая линия** описывается точкой, которая совершает равномерное движение вдоль образующей кругового цилиндра, а образующая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси цилиндра.

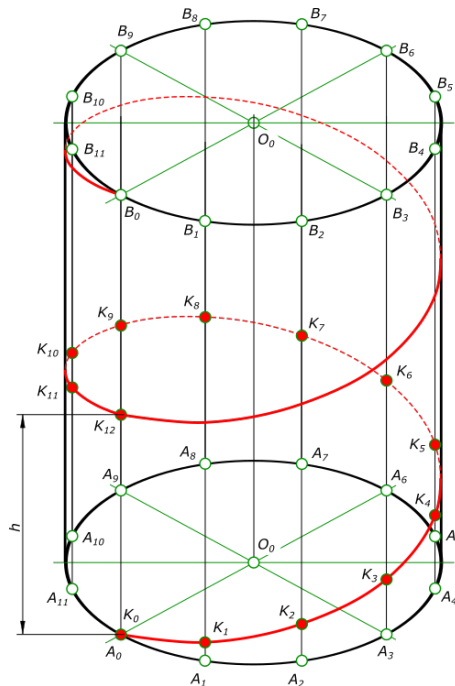


Рис. 25 – Винтовая линия

Образующая занимает 12 последовательных положений:  $A^0B^0$ .

Дуги  $A^0A^1$ ,  $A^1A^2$ ,  $A^2A^3$  и т. д. равны между собой и каждая равна  $\pi d/n$ , где  $d$  - диаметр цилиндра,  $\pi = 3,14$  и  $n$  - число положений образующей цилиндра, принятое для построения. Пусть образующая занимает 12 последовательных положений:  $A^0B^0$ ,  $A^1B^1$ ,  $A^2B^2$  и т. д. Начальному положению образующей  $AB$  соответствует  $A^0B^0$ , а точки  $K$  -  $K^0$ .

При перемещении образующей  $AB$  в положение  $A^1B^1$  точка  $K$  займет положение  $K^1$ , и поднимется по образующей на величину отрезка  $A^1K^1 = h/12$ . При последующем перемещении образующая займет положение  $A^2B^2$ , а точка  $K$  положение  $K^2$  и поднимется на высоту равную  $A^2B^2 = 2A^1B^1 = 2(h/12)$ , и т. д. Когда образующая совершит полный оборот и снова займет начальное положение, точка  $K$  будет находится на ней на высоте  $A^{12}B^{12} = 12(h/12) = h$ , величине шага винтовой линии. При этом точка описывает кривую  $K^0K^6K^{12}$ , длина которой равна длине одного витка.

На практике эти движения достигаются на токарном станке, где острие резца соответствует данной точке.

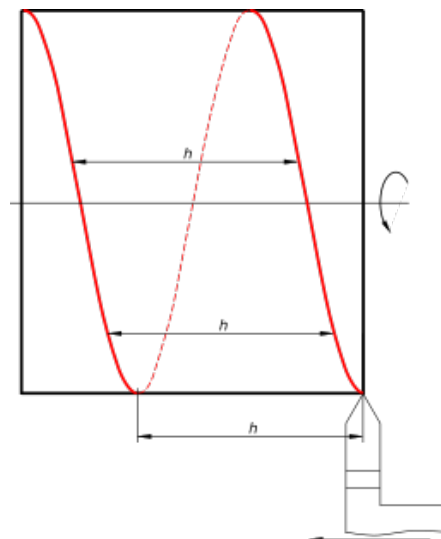


Рис. 26 – Винтовая линия

Резец оставит на цилиндрической поверхности след - винтовую линию. **Винтовая линия** может быть правой или левой. Правой винтовой линией называют линию, совершающую подъем вокруг своей оси против часовой стрелки, а левой - винтовую линию, совершающую подъем по часовой стрелке.

Винтовая линия может быть построена, когда заданы ее элементы.

**Винтовая линия** характеризуется следующими элементами: шаг, виток и угол подъема.

Шагом винтовой линии называется расстояние между смежными витками, измеренное вдоль образующей кругового цилиндра. Витком называют винтовую линию, описанную точкой за один оборот образующей вокруг оси кругового цилиндра. Длина витка равна  $L$ . Углом подъема винтовой линии называют отношение  $\operatorname{tg}(\varphi) = h/(pd)$ , тогда  $\varphi = \operatorname{arctg}(\varphi)$ , где  $d$  - диаметр цилиндра,  $p=3,14$ .

**Винтовая линия** может быть получена на конической поверхности

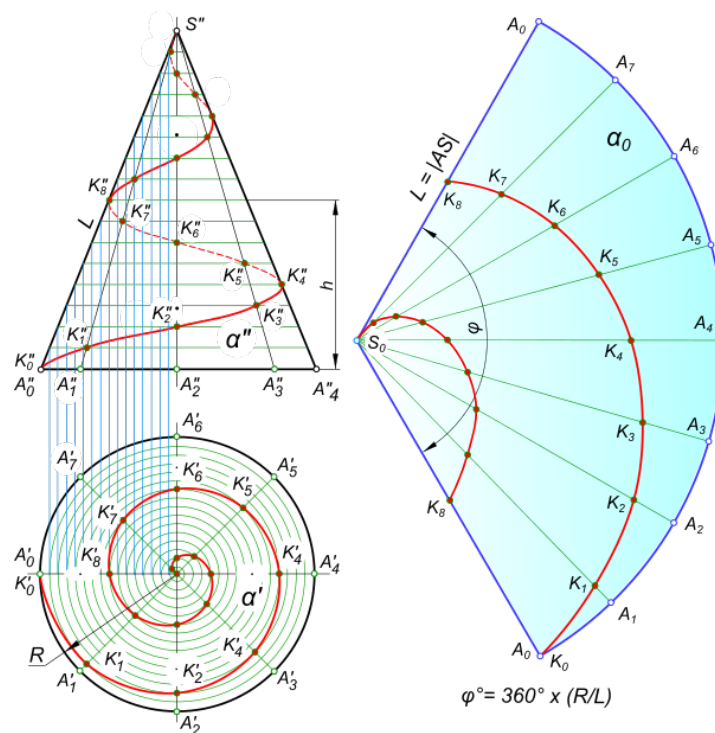


Рис. 27 – Винтовая линия

В этом случае, точка совершает равномерно-поступательное движение вдоль образующей прямого кругового конуса, а сама образующая  $SA$  вращается вокруг его оси с постоянной угловой скоростью.

Расстояние между точками смежных витков, измеренное параллельно оси конуса (например между точками  $A_0K_8$ ), является шагом  $h$  конической винтовой линии.

Проекция винтовой линии на фронтальной плоскости проекций представляет собой синусоиду с затухающим колебанием (затухающей волной), а на горизонтальной - спираль Архимеда.

При построении развертки боковой поверхности конуса винтовая линия развернется в спираль, а конус - в сектор, угол при вершине которого равен  $\varphi = 360^\circ \times (h/L)$ , а длина дуги радиуса  $R$ , соответствующая углу  $\varphi$ , равна  $2\pi R$ .

## Проекция прямой

Зависимость между декартовыми координатами принадлежащих плоскости точек, выраженная аналитически в виде многочлена первой степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Преобразуется в уравнение **проекции прямой**, когда как минимум один из них равен нулю:

$$Cz=0; \quad By=0; \quad Ax=0.$$

Например для горизонтальной проекции прямой:

$$Ax + By + D = 0$$

То есть, **проекция прямой** - линия первого порядка.

Построим **проекцию прямой**, которой принадлежат точки  $A$  и  $B$ . Спроецировав их на плоскости проекций  $H, V$  и  $W$ , а затем соединив между собой одноименные проекции  $A'B', A''B''$  и  $A'''B'''$  получаем проекции прямой (рис. 27).

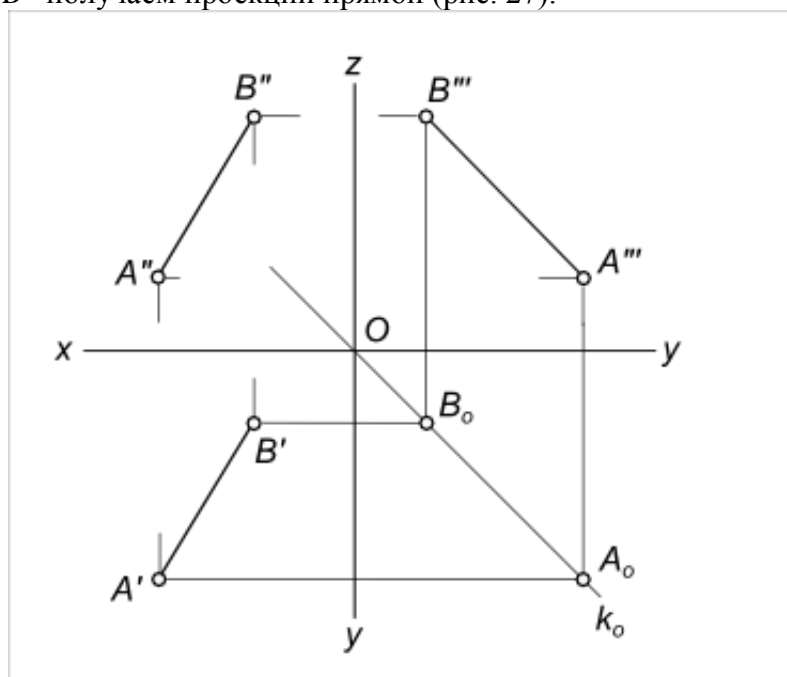


Рис. 28 – Проекция прямой

При ортогональном проецировании на плоскость прямая проецируется в прямую.

Поэтому для определения **проекции прямой** достаточно знать проекции двух не тождественных точек, принадлежащих прямой.

Аксиома евклидовой геометрии гласит: «Через две точки проходит единственная прямая».

Отсюда вытекает ответ на вопрос сколько точек определяют положение прямой в пространстве? Ответ две точки.

В связи с этим, построение **проекции прямой** линии на КЧ сводится к построению проекций двух точек ей принадлежащих.

На эпюре (КЧ) прямая может быть задана проекциями двух точек (отрезком) или непосредственно своими проекциями.

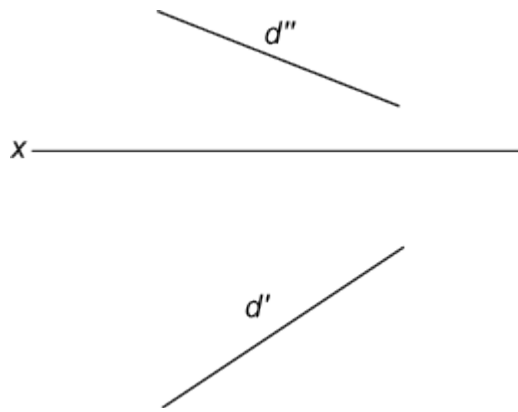


Рис. 29 – Проекции прямой d

На представленном рисунке 29 положение прямой d определяют **проекции прямой d'** и **d''**.

### Прямая общего положения

По расположению относительно плоскостей проекций бывает **прямая общего положения** и частного.

**Прямая общего положения** - это прямая не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций.

Отрезок  $[AB]$  определяющий прямую  $l$  занимает произвольное положение по отношению к плоскостям проекций (углы наклона прямой  $l$  к плоскостям  $H$ ,  $V$ , и  $W$  произвольные - отличные от 0 и 90 град.). Такая прямая есть **прямая общего положения**.

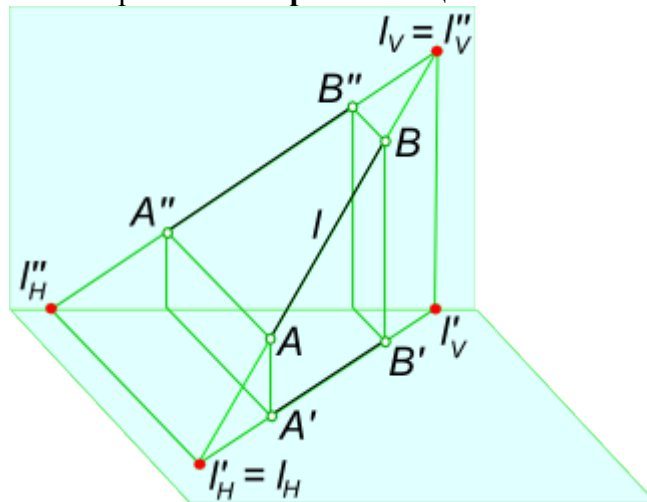


Рис. 30 – Прямая общего положения

**Прямая общего положения** пересекает все три плоскости проекций. Точку пересечения (встречи) прямой с плоскостью проекции называют следом прямой.

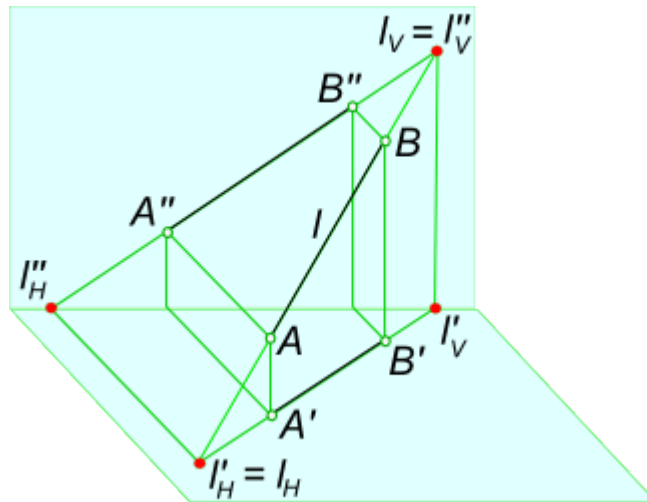


Рис. 31 – Прямая общего положения

В зависимости от того, с какой плоскостью проекции происходит встреча прямой  $l$ , следы обозначают и называют:

$l_H$  - горизонтальный след прямой  $l$ ;

$l_V$  - фронтальный след прямой  $l$ ;

$l_W$  - профильный след прямой  $l$ .

По расположению относительно плоскостей проекций бывают прямые частного положения:

### Плоскость общего положения

Плоскость - это простейшая поверхность. Существует зависимость между декартовыми координатами принадлежащих ей точек, выраженная аналитически в виде многочлена первой степени:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

То есть, плоскость - поверхность первого порядка.

**Плоскость общего положения** образуется при движении прямой  $a$  по направляющим прямым  $m$  и  $n$ , когда они пересекаются или параллельны.

Поэтому, чтобы задать **плоскость общего положения** на эпюре Монжа достаточно указать:

- проекции трех различных точек, не принадлежащих одной прямой;

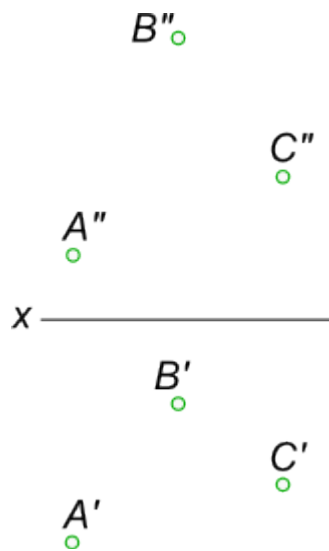


Рис. 32 – Плоскость общего положения (1 способ задания)

- прямой и не принадлежащей ей точки;

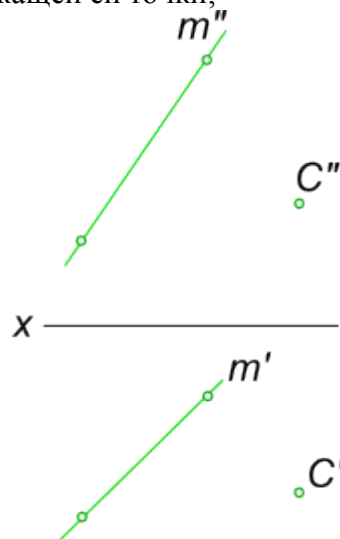


Рис. 33 – Плоскость общего положения (2 способ задания)

- двух прямых, пересекающихся в собственной точке.

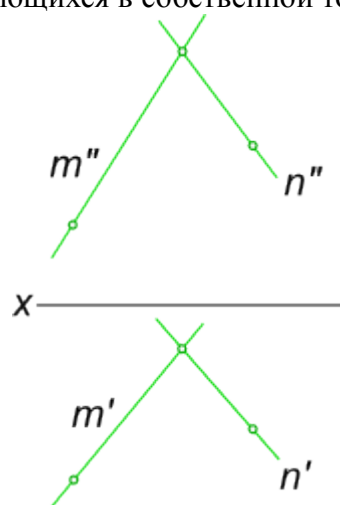


Рис. 34 – Плоскость общего положения (3 способ задания)

- двух прямых, пересекающихся в несобственной точке.



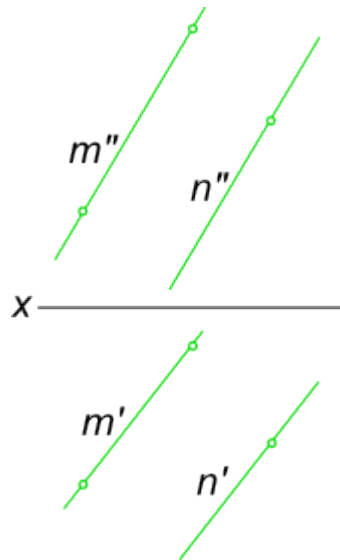


Рис. 35 – Плоскость общего положения (4 способ задания)

В некоторых случаях бывает целесообразным задавать **плоскость общего положения** прямыми, по которым эта плоскость пересекает плоскости проекции.

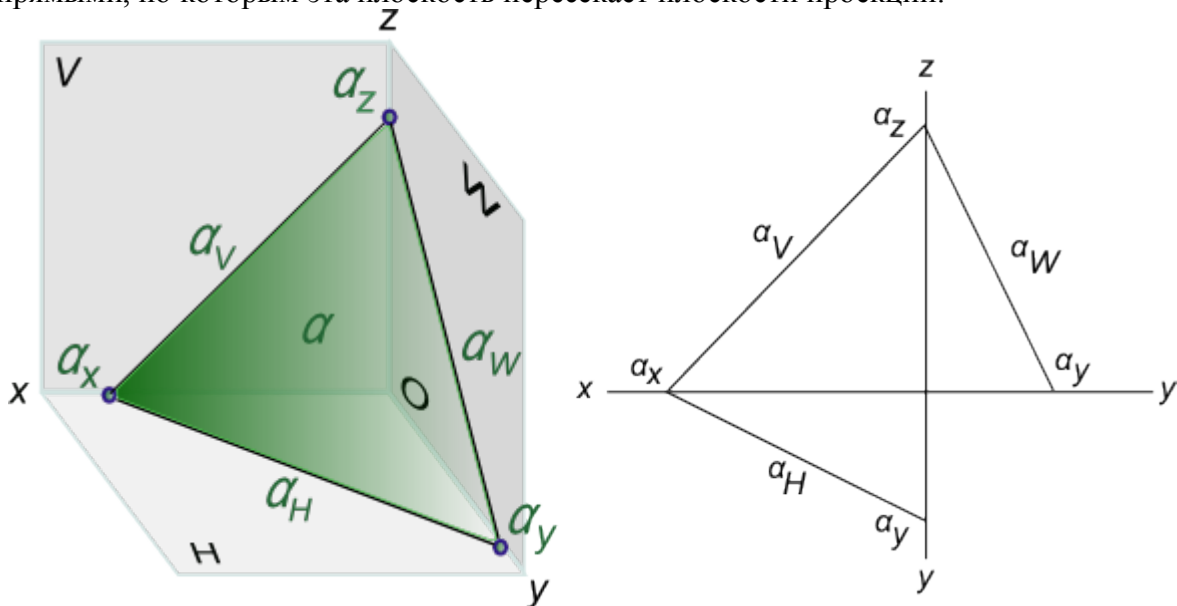


Рис. 36 – Плоскость общего положения (5 способ задания)

Такой вариант задания плоскости называют заданием плоскости следами.

На рисунке показана плоскость  $\alpha$ , заданная следами.

Плоскость  $\alpha$  пересекает координатные оси в точках  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ , а плоскости проекции по прямым  $\alpha_H[\alpha_x\alpha_y], \alpha_V[\alpha_x\alpha_z], \alpha_W[\alpha_y\alpha_z]$ .

Прямую, по которой плоскость пересекает плоскость проекции, называют следом плоскости. При этом различают:

$\alpha_H = \alpha \cap H$  - горизонтальный след плоскости  $\alpha$ ;

$\alpha_V = \alpha \cap V$  - фронтальный след плоскости  $\alpha$ ;

$\alpha_W = \alpha \cap W$  - профильный след плоскости  $\alpha$ .

Точки  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  в которых пересекаются (сходятся) два следа, называют точками схода следов.

Сопоставляя между собой пространственный чертеж и его плоскостную модель, мы видим, что задание плоскости следами обладает преимуществом перед другими вариантами ее задания:

**во-первых**, сохраняется наглядность изображения, что позволяет легко представить положение плоскости в пространстве;

**во-вторых**, при задании плоскости следами требуется указать только две прямые (в системе плоскостей проекций  $H$  и  $V$ ) вместо четырех (параллельные прямые) или шести (треугольник).

Показанная на рисунке 36 **плоскость общего положения**  $\alpha$  занимает общее (произвольное) положение по отношению к плоскостям проекций. Потому, что на эпюре Монжа следы плоскости общего положения составляют с координатными осями также произвольные углы.

## Многогранник

**Многогранник** - это геометрическая фигура поверхность которого образована плоскостями - гранями.

По количеству граней, образующих боковую поверхность многогранник называют четырех, пяти, шестигранником и т. д.

Различают следующие виды многогранников:

- Призма - это **многогранник**, в основаниях которого два многоугольника конгруэнтных между собой, боковыми гранями служат параллелограммы. Призму называют правильной если в ее основаниях правильные многоугольники. Призму называют прямой, когда ее ребра перпендикулярны основаниям;

- Пирамида - это **многогранник**, с многоугольником в основании, боковые ребрами, сходящимися в одной точке, которую называют вершиной. Пирамиду называют правильной если в ее основании правильный многоугольник, а высота проходит через его центр.

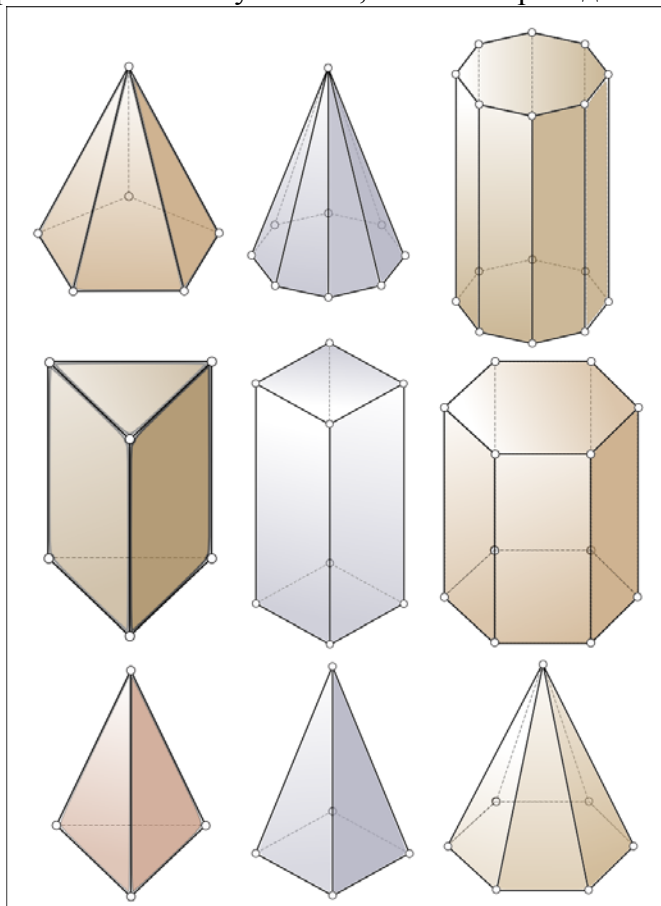


Рис. 37 – Многогранники

Изображенные на рисунках геометрические фигуры, поверхности которых плоскости - это многогранники. Плоскость образуется при движении прямой по направляющим прямым, когда они пересекаются или параллельны.

### Проекции прямой правильной призмы

Пусть требуется построить **проекции прямой правильной призмы** высотой  $h$ , с треугольным основанием вписанным в окружность, заданного диаметра. Основания призмы параллельны горизонтальной плоскости проекций  $H$ .

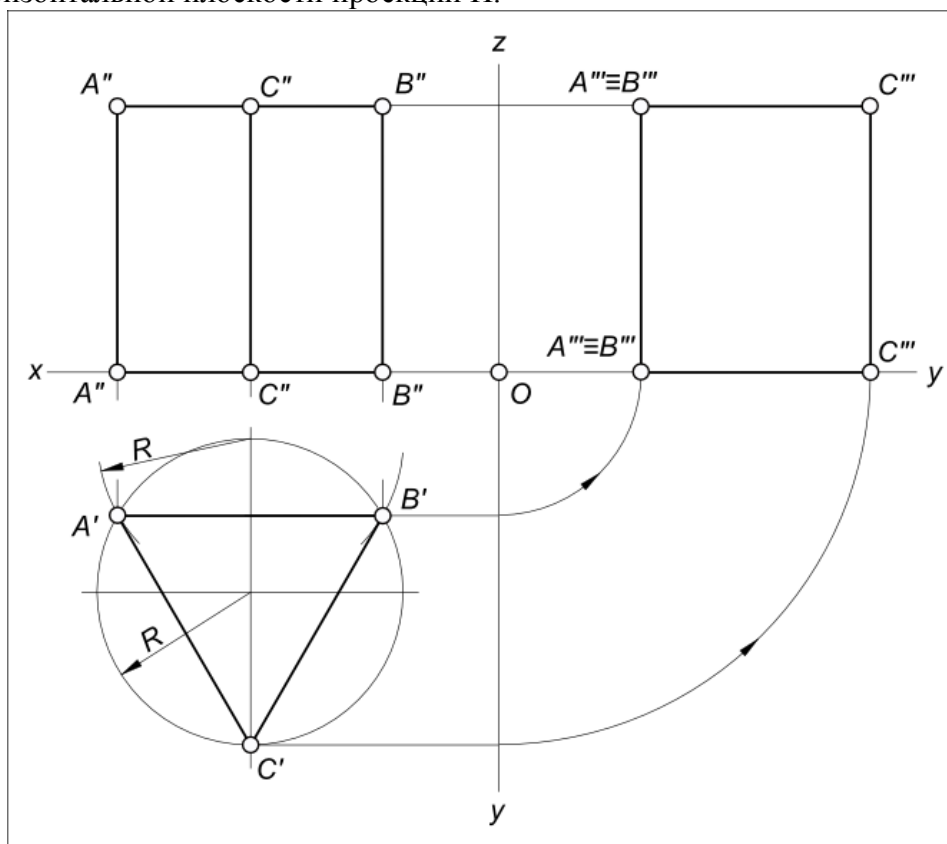


Рис. 38 – проекции прямой правильной призмы

Построение начинаем с горизонтальной **проекции прямой правильной призмы** потому, что основания призмы параллельны ей и проецируются на нее без искажения:

- проводим окружность радиусом  $R$  и через ее центр осевые линии;
- отмечаем точку  $C$  на окружности и из центра находящегося на окружности напротив нее описываем дугу тем же радиусом  $R$  до пересечения с окружностью, где отмечаем точки  $A$  и  $B$ ;
- отмеченные точки соединяем прямыми линиями.

Делаем графический анализ построенной проекции:

- $A'B'C'$  - это горизонтальная проекция нижнего и верхнего оснований призмы;
- $A'B'$ ,  $B'C'$  и  $C'A'$  - стороны треугольника  $A'B'C'$  и в то же время это горизонтальные проекции боковых граней призмы, которые спроецировались, таким образом, в силу перпендикулярности ребер призмы плоскости  $H$ ;

- задняя грань  $AB$  - фронтальная плоскость уровня  $A'B' // x \Rightarrow AB // V$ .

Далее выполняем построение фронтальной проекции прямой правильной призмы потому, что для этого есть все данные:

- проводим проекции ребер призмы на высоту  $h$ ;
- проводим проекции нижнего и верхнего оснований параллельных плоскости  $H$  и следовательно перпендикулярных плоскости  $V$ , которые представляют прямые линии.

Делаем графический анализ построенной проекции:

Прямоугольники  $A''C''C''A''$  и  $C'''B'''B'''C'''$  - проекции передних (видимых) боковых граней призмы, которые представляют собой их искаженную величину. Прямоугольник  $A''B''B''A''$  - проекция задней (невидимой) грани призмы, представляет собой ее натуральную величину ( $AB // V$ ).

### Проекции прямой правильной пирамиды

Пусть требуется построить **Проекции прямой правильной пирамиды** высотой  $h$ , с треугольным основанием вписанным в окружность заданного диаметра. Основание пирамиды параллельно горизонтальной плоскости проекций  $H$ .

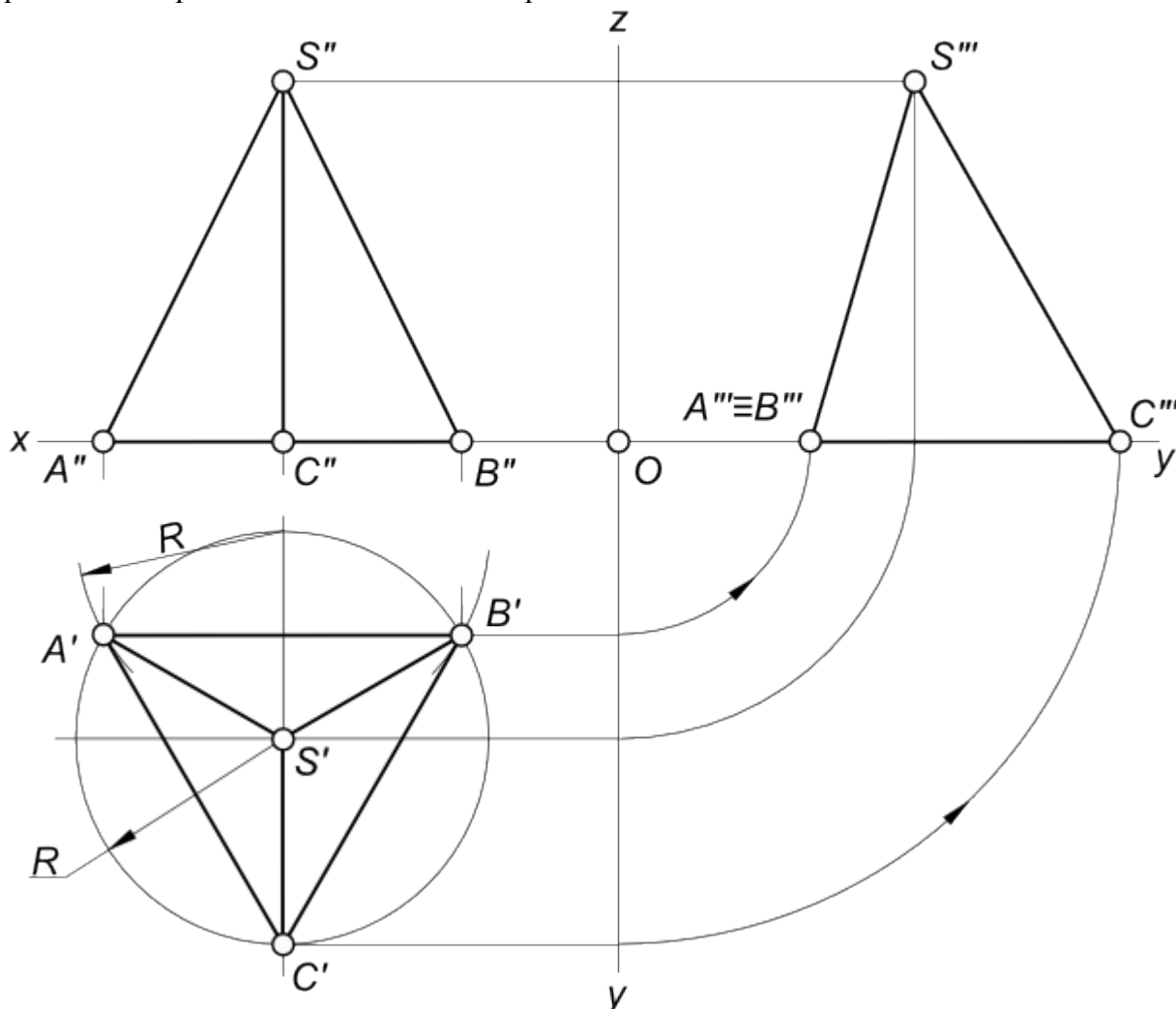


Рис. 39 – Проекции прямой правильной пирамиды

Построение начинаем с горизонтальной проекции прямой правильной пирамиды потому, что основание пирамиды, в данном случае, проецируются на нее без искажения:

- проводим окружность радиусом  $R$  и через ее центр осевые линии; - отмечаем точку  $C$  на окружности и из центра находящегося на окружности напротив нее описываем дугу тем же радиусом  $R$  до пересечения с окружностью, где отмечаем точки  $A$  и  $B$ ;

- отмеченные точки соединяем прямыми линиями;  
- центр описанной окружности совпадает с проекцией вершины пирамиды  $S'$ ;  
- соединяем прямыми линиями вершины пирамиды  $S'$  с вершинами  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  основания, получая, тем самым, проекции  $S'A'$ ,  $S'B'$  и  $S'C'$  боковых ребер пирамиды.

Делаем графический анализ построенной проекции:

- плоскость треугольника  $A'B'C'$  - это горизонтальная проекция основания пирамиды, которая является горизонтальной плоскостью уровня;

- треугольники  $S'A'B'$ ,  $S'B'C'$  и  $S'C'A'$  - это горизонтальные проекции боковых граней пирамиды, которые являются: задняя боковая грань  $SAB$  - профильно проецирующей плоскостью, передние боковые грани  $SBC$  и  $SCA$  плоскостями общего положения.

Далее выполняем построение фронтальной **Проекции прямой правильной пирамиды** потому, что для этого есть все данные:

- строим проекцию основания пирамиды, которое вырождается в горизонтальную прямую уровня  $A''B'' \equiv B''C'' \equiv C''A'' \equiv x; \Rightarrow ABC \equiv H$ ;

- откладываем высоту пирамиды -  $h$  и находим проекцию  $S''$  вершины пирамиды;

- соединяем прямыми линиями вершину пирамиды  $S''$  с вершинами  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  основания, получая, тем самым, проекции  $S''A''$ ,  $S''B''$  и  $S''C''$  боковых ребер пирамиды.

- проводим проекции нижнего и верхнего оснований параллельных плоскости  $H$  и следовательно перпендикулярных плоскости  $V$ , которые представляют прямые линии.

Делаем графический анализ построенной проекции:

Треугольники  $S''A''C''$  и  $S''C''B''$  - проекции передних (видимых) боковых граней пирамиды, которые представляют собой их искаженную величину. Треугольник  $S''A''B''$  - проекция задней (невидимой) грани пирамиды, представляет собой ее искаженную величину.

Далее выполняем построение профильной **проекции прямой правильной пирамиды** потому, что для этого есть все данные:

- строим проекцию основания пирамиды, которое вырождается в горизонтальную прямую уровня  $A'''B''' \equiv B'''C''' \equiv C'''A''' \equiv y; \Rightarrow ABC \equiv H$ ;

- соединяем прямыми линиями вершину пирамиды  $S'''$  с вершинами  $A'''$ ,  $B'''$ ,  $C'''$  основания, получая, тем самым, проекции  $S'''A'''$ ,  $S'''B'''$  и  $S'''C'''$  боковых ребер пирамиды.

Делаем графический анализ построенной проекции:

- треугольник  $S'''A'''C'''$  - проекция передней (видимой) боковой грани пирамиды, которая представляют собой их искаженную величину;

- треугольник  $S'''B'''C'''$  - проекция задней (невидимой) боковой грани пирамиды, которая представляют собой их искаженную величину;

-  $S'''A'''B'''$  - проекция задней (невидимой) боковой грани пирамиды, которая представляют собой их искаженную величину;

- профильная проекция ребра  $AB$  вырождается в точку  $A''' \equiv B'''$ , следовательно задняя боковая грань перпендикулярна плоскости  $W$ ;

- профильная проекция двухгранного угла при ребре  $AB$  представляют собой натуральную величину.

## Поверхность вращения

**Поверхность вращения** - это поверхность, образованная вращением некоторой линии, называемой образующей поверхности, вокруг неподвижной прямой - оси вращения. При этом образующая, вращаясь вокруг оси, пересекает окружность, называемую направляющей поверхности.

Образующей поверхности вращения может быть прямая или кривая линия. В зависимости от этого различают соответственно поверхности вращения линейчатые и криволинейные.

К линейчатым поверхностям вращения относятся цилиндр и конус.

К криволинейным поверхностям вращения относятся:

- сфера (образующая окружность);
- эллипсоид (образующая эллипс);
- одно и двуполостные гиперboloиды (образующая гипербола);
- параболоид (образующая парабола);
- торовые (образующая окружность).

Все названные виды поверхностей вращения, кроме торовых, являются поверхностями второго порядка (по порядку образующей или направляющей). Торовые поверхности вращения относятся к поверхностям четвертого порядка (по произведению порядков двух окружностей - образующей и направляющей).

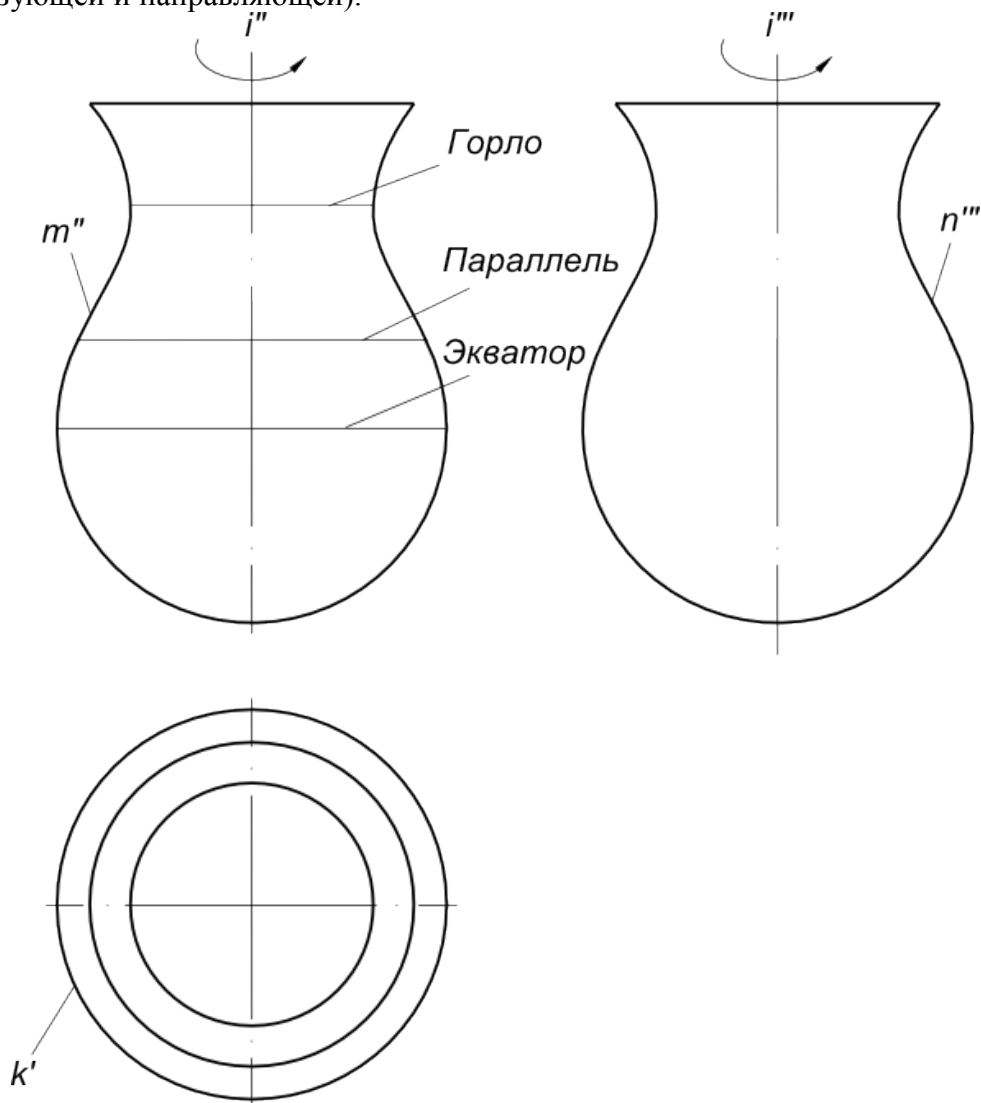


Рис 40 – Поверхность вращения

На рисунке изображена **поверхность вращения** общего вида, образующая которой кривая линия вращается вокруг горизонтально-проецирующей оси  $i$ .

Все точки образующей вращаются вокруг оси  $i$  по окружностям соответствующего радиуса, называемыми параллелями поверхности. На фронтальную и профильную плоскости проекций эти параллели проецируются в прямые линии, перпендикулярные оси вращения  $i$ .

На горизонтальную плоскость проекций параллели проецируются в виде окружностей.

Некоторые параллели получили характерные наименования:

горло - это параллель наименьшего радиуса;

экватор - это параллель наибольшего радиуса.

Проекции поверхности вращения образуются следующим образом:

- горизонтальная проекция или горизонтальный очерк определяется окружностью экватора;

- фронтальная проекция или фронтальный очерк образуется замкнутой линией главного фронтального меридиана  $m''$ , полученного при пересечении поверхности вращения фронтальной плоскостью уровня, проходящей через ее ось вращения;

- профильная проекция или профильный очерк образуется замкнутой линией главного профильного меридиана  $n''$ , полученного при пересечении поверхности вращения профильной плоскостью уровня, проходящей через ее ось вращения.

**Задание №1**  
**по дисциплине «Начертательная геометрия»**  
**Тема: «Пересечение плоскостей»**

Задание: Необходимо построить линию пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками ABC и DEF.

Решение поставленной задачи производится с помощью программы Компас 3D LT V12 в следующей последовательности:

1. **Необходимо ввести данные по координатам всех точек**, которыми заданы вершины треугольников (см. рис. 41).

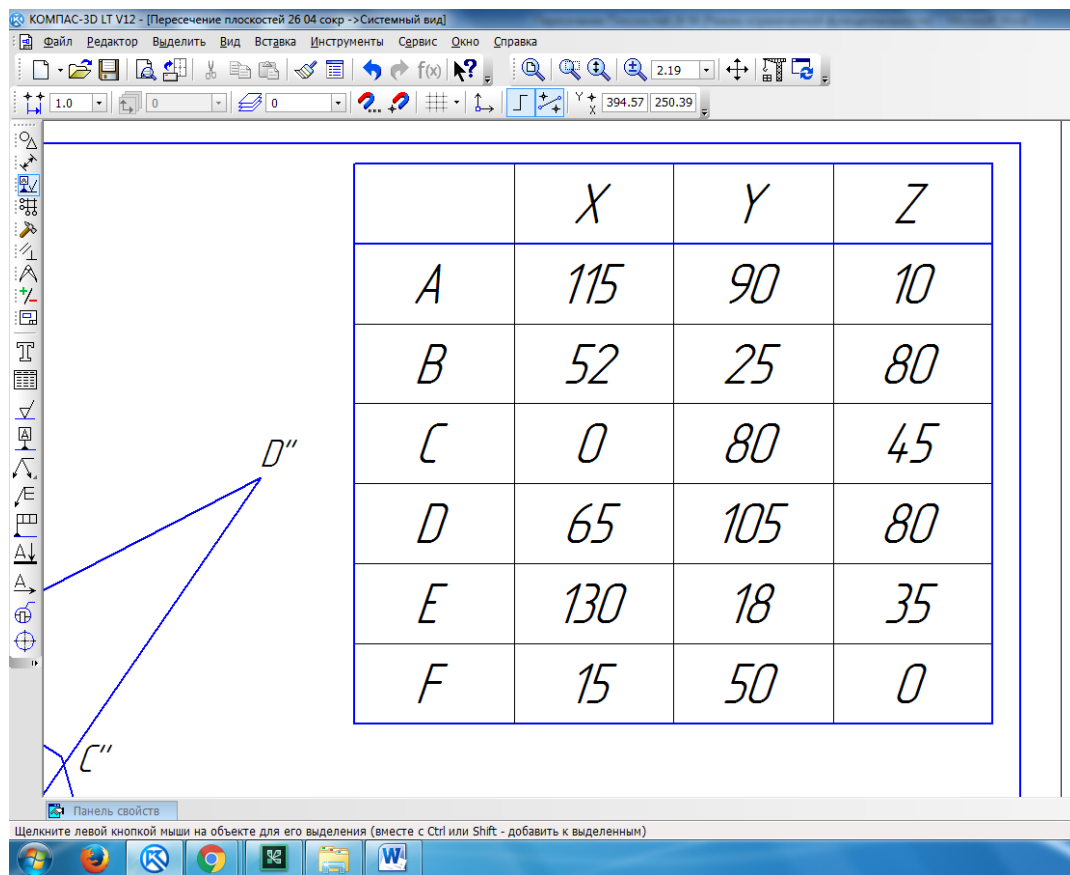


Рис. 41 – Координаты вершин треугольников

2. Затем с помощью команды «Параллельные прямые» на панели инструментов «Геометрия» строим треугольники ABC и DEF (см. рис. 42)



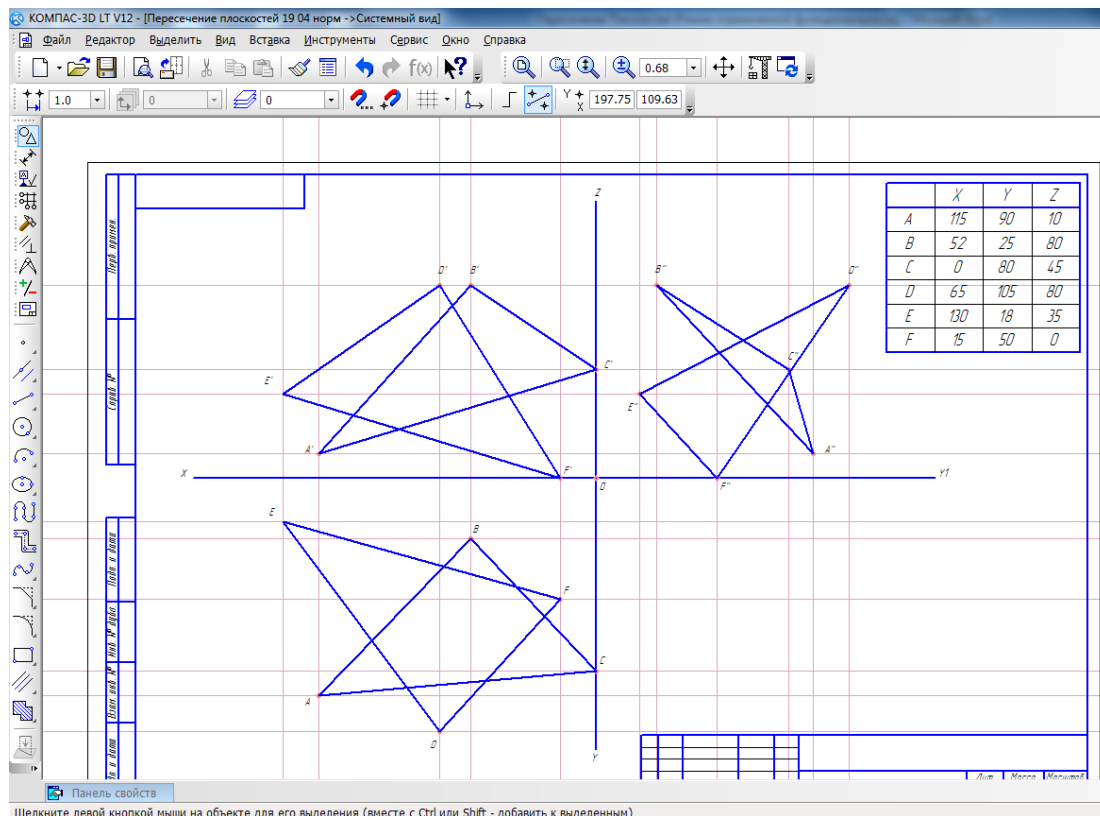


Рис. 42 – Заданные треугольники

3. Удаляем все вспомогательные линии с помощью команды меню Редактор → Удалить → Вспомогательные кривые и точки → В текущем виде.

4. Находим точку входа отрезка АВ в треугольник DEF:

- а. Через отрезок АВ проводим плоскость Т, перпендикулярную фронтальной плоскости проекции  $\pi_2$ . Плоскость Т разрезает плоскость DEF по линии 1'-2'. Точка 1' лежит на отрезке E'F', а точка 2' лежит на отрезке D'F'. Находим точки 1 и 2 на виде сверху, то есть на горизонтальной плоскости проекции  $\pi_1$ . Опускаем перпендикуляры до отрезков EF и DF. Отрезки 1-2 и АВ лежат в плоскости Т, следовательно их точка пересечения М является точкой входа отрезка АВ в плоскость DEF. Затем точку М находим в двух других плоскостях проекции фронтальной  $\pi_2$  и профильной  $\pi_3$ , для этого проводим перпендикуляры до линий A'B' и A''B''. Последовательность построения смотри на рис. 43.

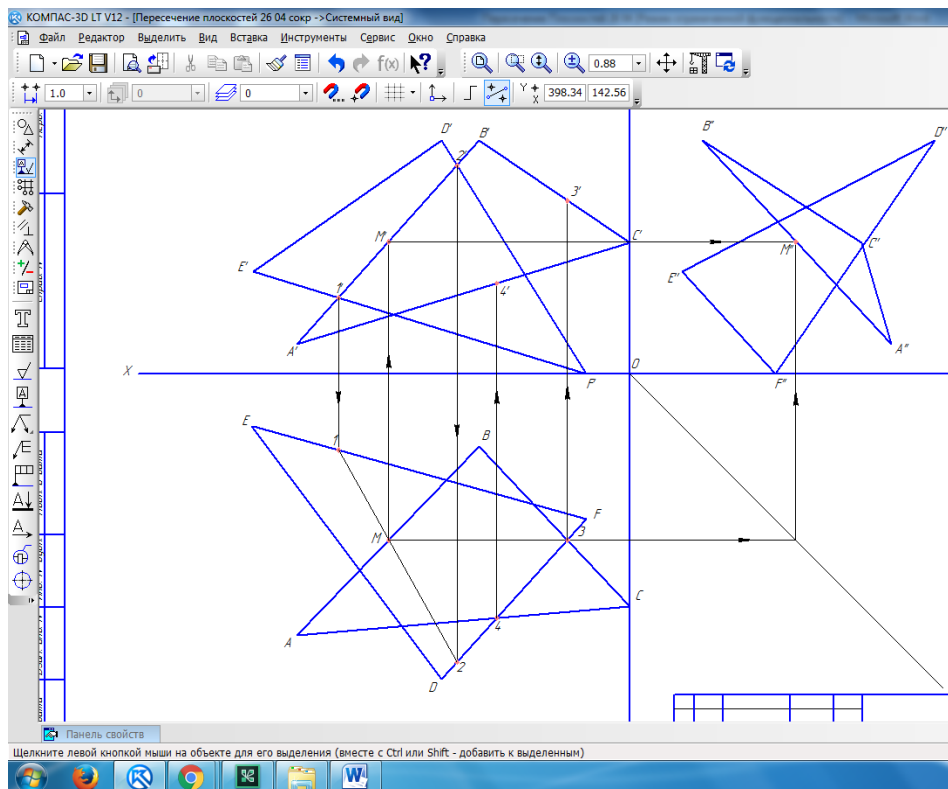


Рис. 43 – Последовательность нахождения точки М

- Находим вторую точку **N** линии пересечения треугольников аналогичным способом. Только начинаем с горизонтальной плоскости проекции  $\pi_1$ . Последовательность построения смотри на рис. 44.

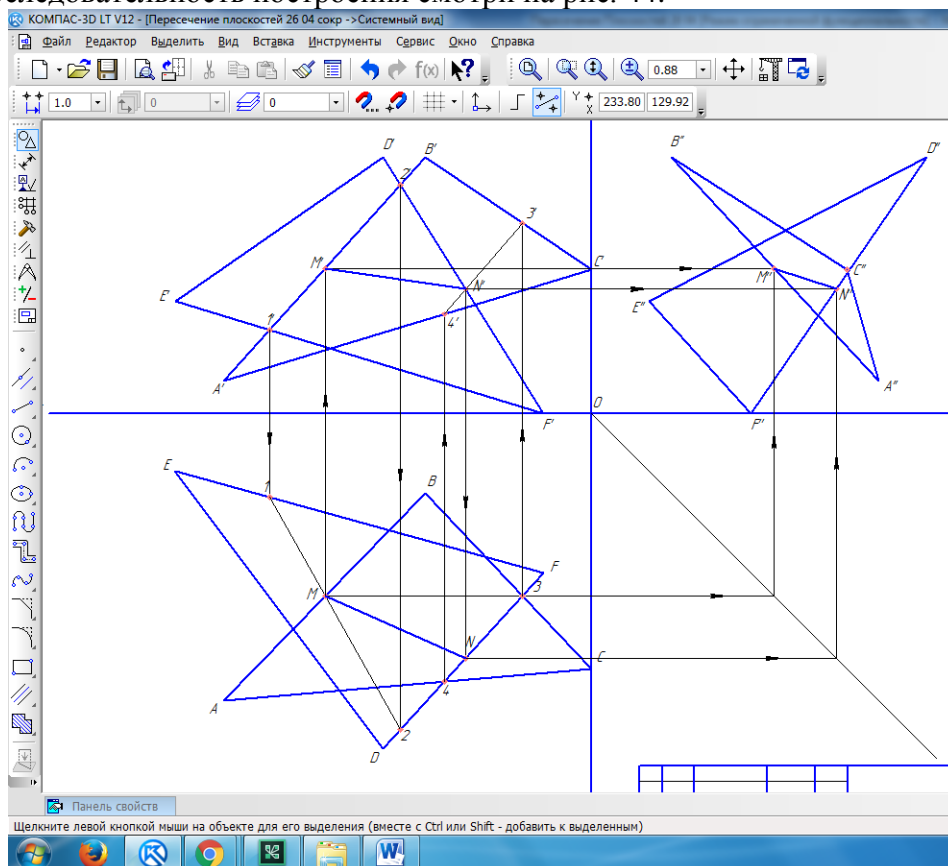


Рис. 44 – Последовательность нахождения точки N

6. Находим линию  $MN$  пересечения плоскостей  $ABC$  и  $DEF$  на трех видах (смотри на рис. 44).
7. Определяем видимость отдельных участков плоскостей с помощью метода конкурирующих точек:
8. Рассмотрим на примере вида спереди (фронтальной плоскости проекции  $\pi_2$ ). Рассмотрим точку  $1'$ , в которой пересекаются проекции отрезков  $A'B'$  и  $E'F'$ . Обратите внимание, что отрезки  $A'B'$  и  $E'F'$  не пересекаются, а пересекаются их проекции! Далее остается определить, какой из отрезков ближе к нам расположен в точке  $1'$ , а, следовательно, тот мы и видим. В этой точке проекции отрезков имеют одинаковые координаты по  $X$  и  $Z$ . А координата по  $Y$  у них разная. Её мы найдем на горизонтальной плоскости проекции  $\pi_1$ . Для этого опустим перпендикуляр из точки  $1'$  до линий  $AB$  и  $EF$  (см. рис. 45). Соответственно, у той линии, у которой координата по  $Y$  больше на опущенном перпендикуляре (т.е. дальше расположена от оси  $X$ ), следовательно, та линия расположена к нам ближе и она для нас видимая на фронтальной плоскости проекции  $\pi_2$ .

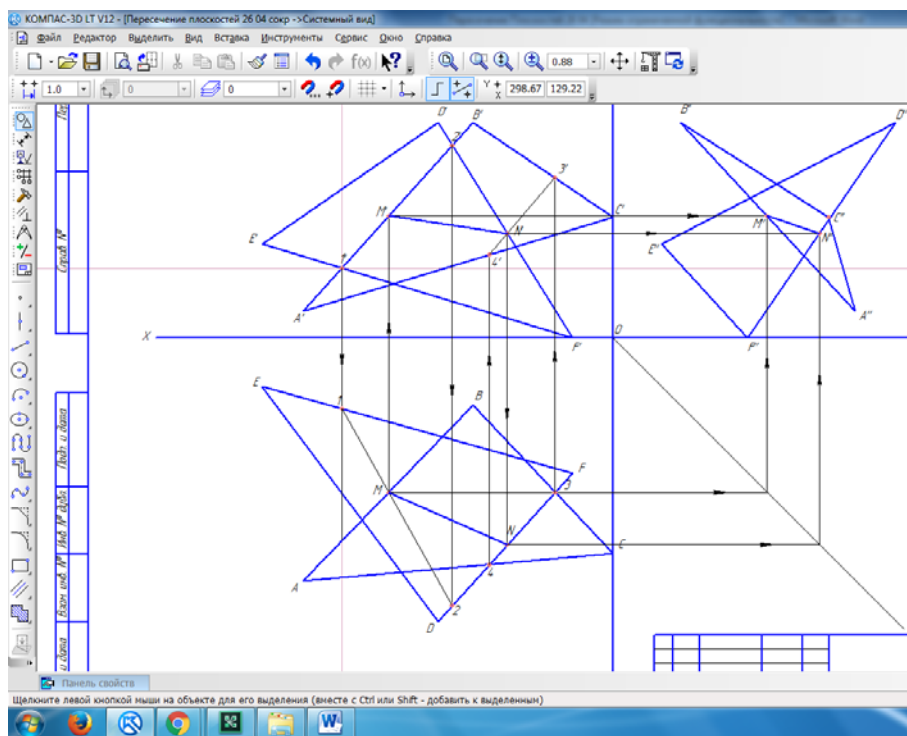


Рис. 45 – Определение видимых участков

9. Из рис. 45 видно, что отрезок  $AB$  расположен ниже отрезка  $EF$ . Следовательно, его координата по  $Y$  больше (находится дальше от оси  $X$ ). И значит, на фронтальной плоскости проекции  $\pi_2$  мы видим отрезок  $A'B'$ , а отрезок  $E'F'$  находится под ним. Плоскость  $A'M'A$  лежит над плоскостью  $EDF$ . Поэтому часть отрезка  $E'F'$  мы отсекаем. (см. рис. 46)

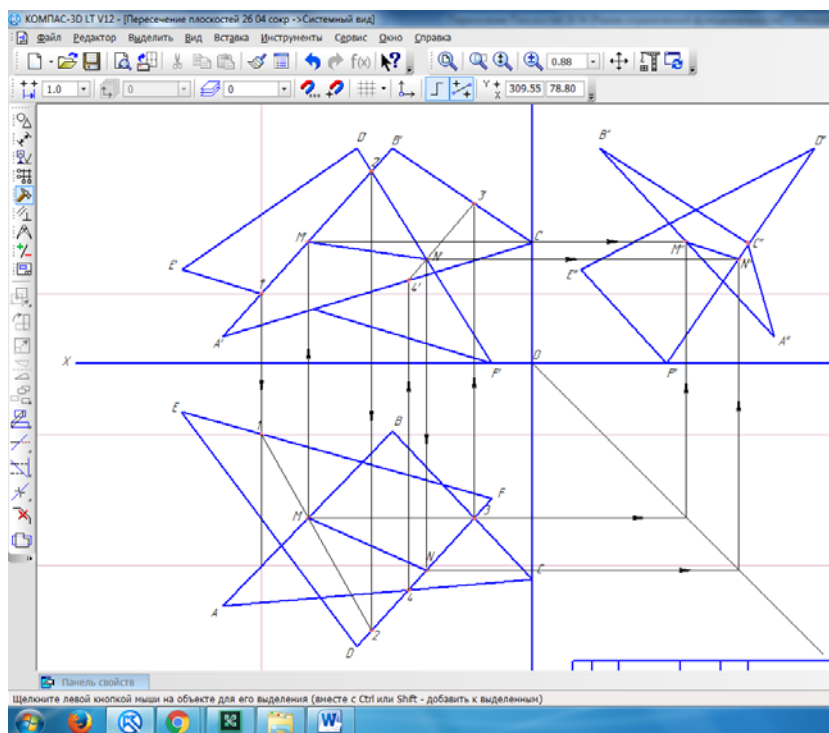


Рис. 46 – Видимый участок

10. Аналогичным способом определяем видимую линию в точке  $2'$  (см. рис 45). Опускаем перпендикуляр до отрезков  $AB$  и  $DF$ . И видим, что координата по  $Y$  больше (находится дальше от оси  $X$ ) у отрезка  $DF$ . Следовательно, участок  $M'2'$  для нас невидимый, и мы его отсекаем (см. рис 47).

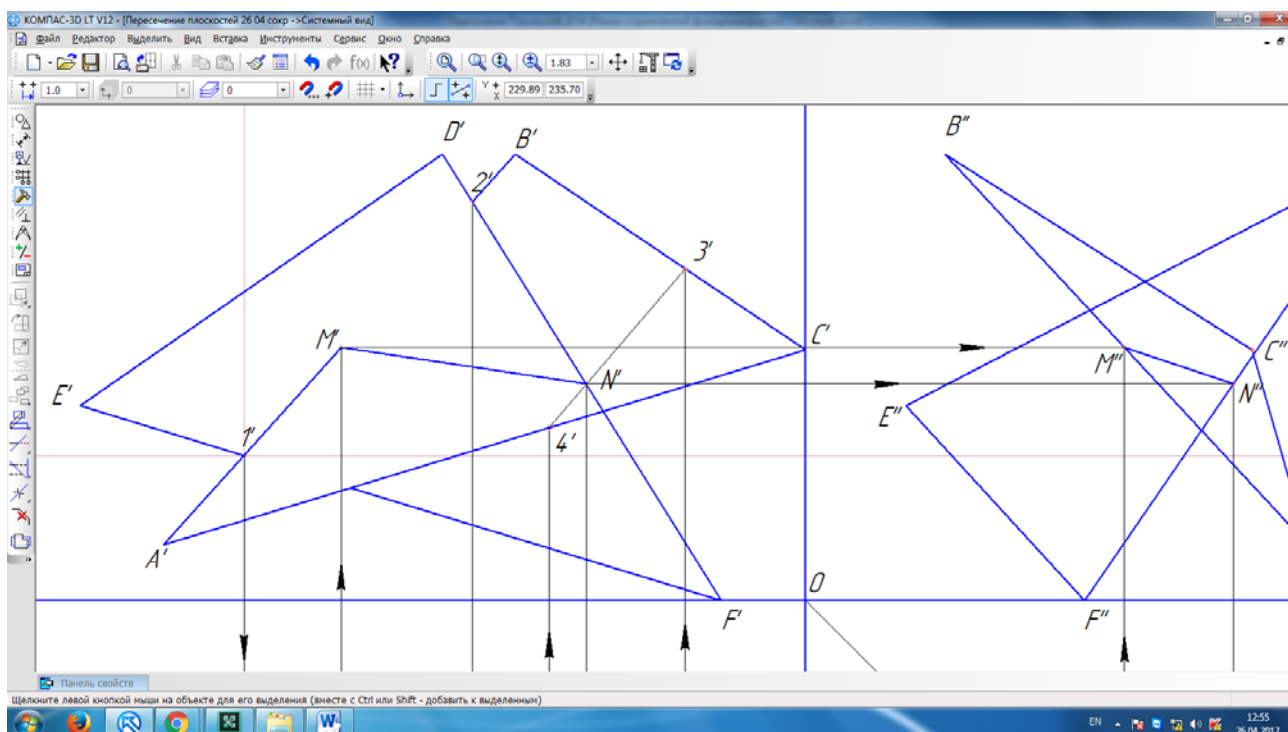


Рис. 47 – Определение видимого участка

11. Точно так же определяем, что участок  $g'N'$  для нас является невидимым (см. рис 48).

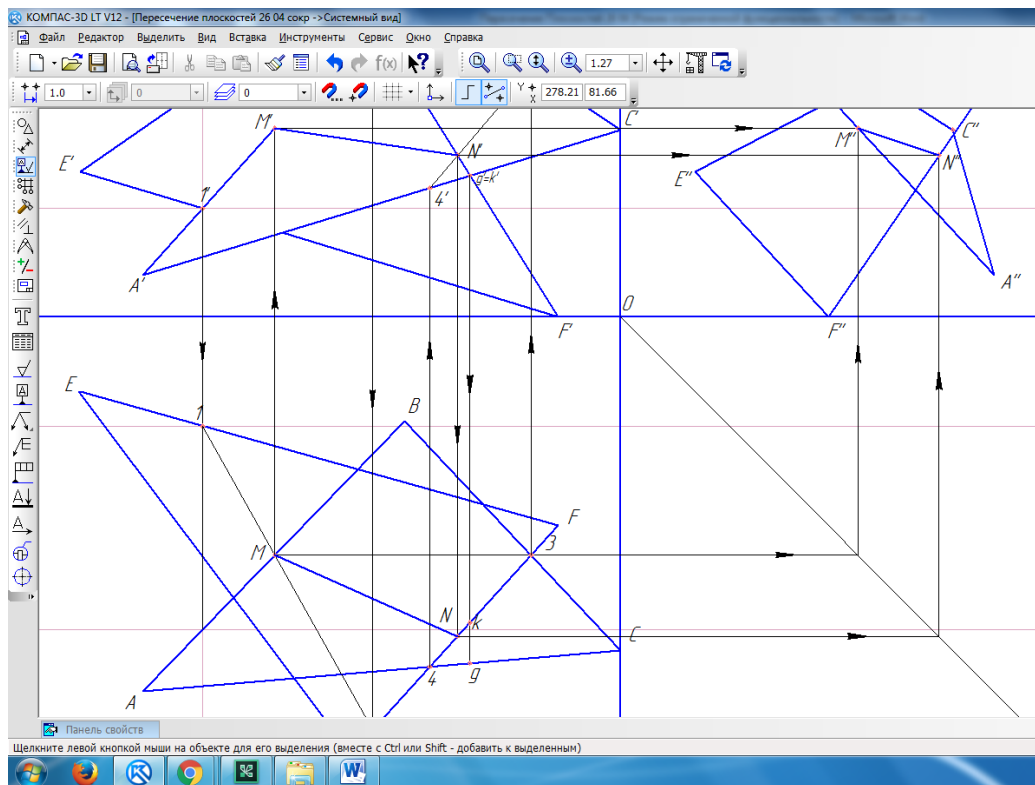


Рис. 48 – Определение видимого участка

12. На остальных проекциях аналогичными рассуждениями с помощью метода конкурирующих точек находим видимые и невидимые участки (см. рис. 49).

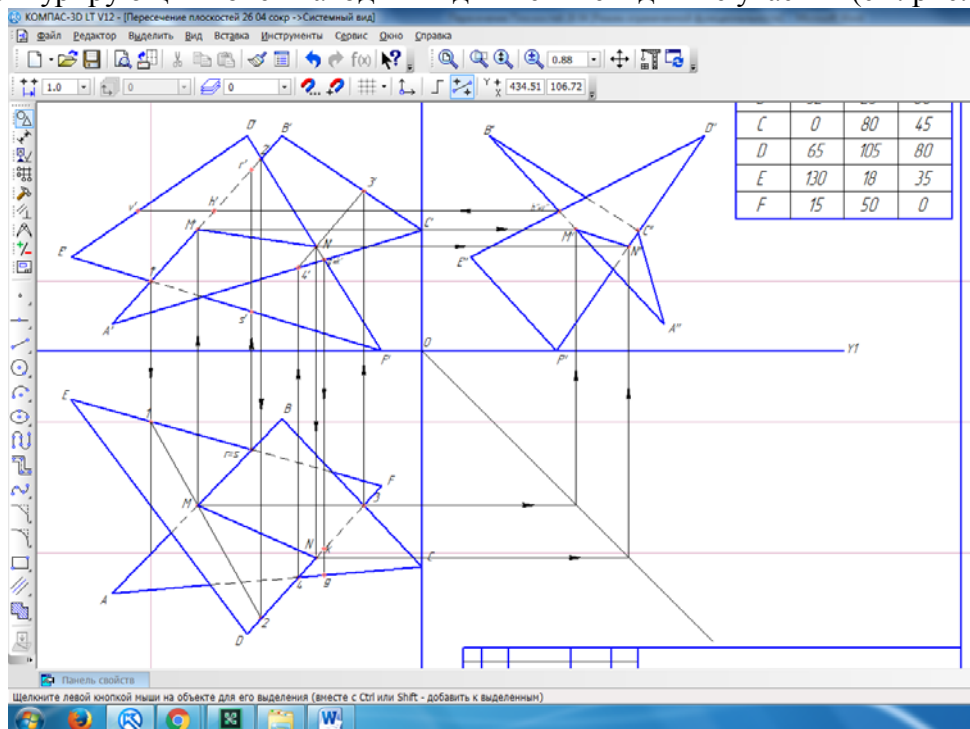


Рис. 49 – Определение видимых участков

13. Затем все невидимые отрезки проводим штриховой линией. Результат см. на рис. 49.
14. В треугольнике ABC все видимые участки заштриховываем. И окончательный вариант чертежа см. рис. 50.

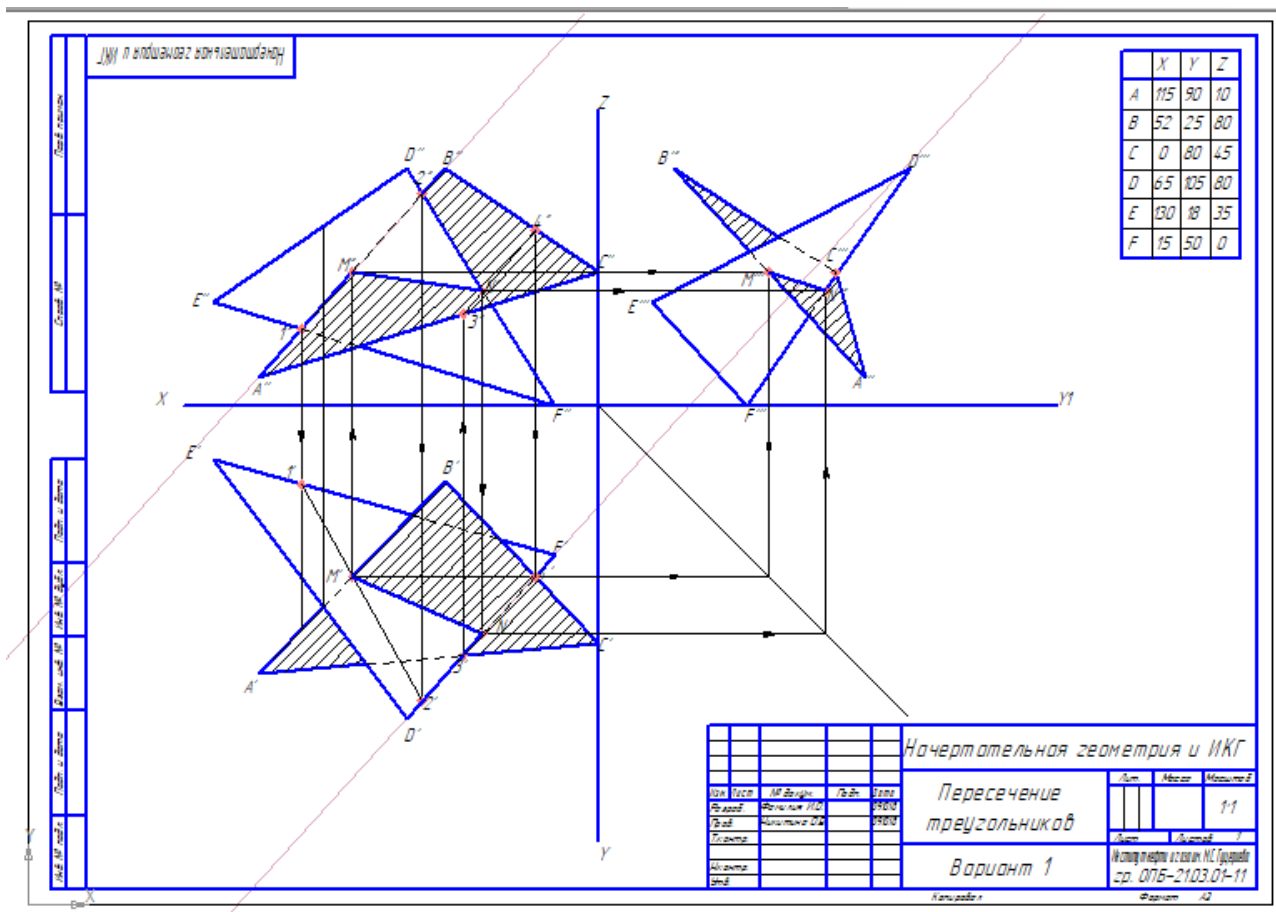


Рис. 50 – Окончательный вариант чертежа

**Задания для самостоятельного выполнения  
по теме: «Пересечение плоскостей»**

1. Построить три проекции плоскостей ABC и DEF по координатам вершин (вид спереди, сверху и слева).
2. Построить линию пересечения плоскостей.
3. Установить видимость отдельных частей плоскостей с помощью метода конкурирующих точек.

**Рекомендуется выполнять чертеж с помощью системы автоматизированного проектирования Компас-3D LT V12**

**Рекомендуемый формат чертежа - А3. Номер варианта совпадает с последней цифрой в вашей зачетке.**

**Цифра 0 – это 10 вариант.**

№ вар.	A			B			C			D			E			F		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	117	90	9	52	25	79	0	83	48	68	110	85	135	19	36	14	52	0
2	120	90	10	50	25	80	0	85	50	70	110	85	135	20	35	15	50	0
3	115	90	10	52	25	80	0	80	45	64	105	80	130	18	35	12	50	0
4	120	92	10	50	20	75	0	80	46	70	115	85	135	20	32	10	50	0
5	117	9	90	52	79	25	0	48	83	68	85	110	135	36	19	14	0	52
6	115	7	85	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	20	20	15	0	50
7	120	10	90	48	82	20	0	52	82	65	80	110	130	38	20	15	0	52
8	116	8	88	50	78	25	0	46	80	70	85	108	135	36	20	15	0	52
9	115	10	92	50	80	25	0	50	85	70	85	110	135	35	20	15	0	50
10	18	10	90	83	79	25	135	48	82	67	85	110	0	36	19	121	0	52

**Задание №2**  
**по дисциплине «Начертательная геометрия»**  
**Тема: «Конус (Пирамида) – Метод секущих плоскостей»**

Задание: Необходимо построить кривую, которая получится при рассечении Конуса наклонной плоскостью. Для построения использовать метод секущих плоскостей.

Решение поставленной задачи производится с помощью программы Компас 3D LT V12 в следующей последовательности:

В данных лабораторных работах использован метод горизонтальных секущих плоскостей. **Если рассечь конус горизонтальной плоскостью, то в сечении получим окружность.** Так как при рассечении конуса могут получаться различные кривые (окружность, эллипс, гипербола, парабола, прямая), для правильного их построения требуется рассечь конус по меньшей мере четырьмя-шестью плоскостями.

**Пример выполнения работы**  
**Конус.**

1. Произвольно проводим на фронтальной проекции 5 горизонтальных секущих плоскостей, которые в этой проекции будут выглядеть как прямые 1, 2, 3, 4, 5 (см. рис. 51). И отмечаем точки, которые будут находиться на образующих конуса при пересечении с наклонной плоскостью.

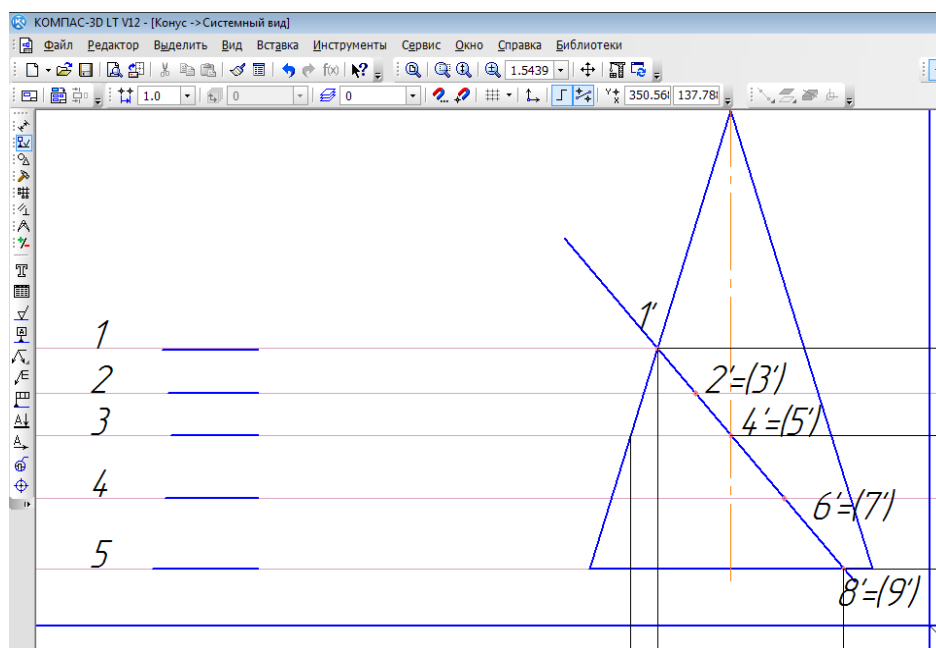


Рис. 51 – Горизонтальные секущие плоскости

2. Находим т. 1, 4, 5 на других проекциях. Т.к. они наиболее просты в их нахождении, поскольку находятся **одновременно** на крайних образующих конуса и плоскостях симметрии конуса. Для этого из т. 1' опускаем перпендикуляр до оси симметрии окружности на горизонтальной плоскости. Крайняя левая точка на этой окружности и будет наша искомая т.1.

Чтобы найти т. 4, 5 мы опускаем перпендикуляр из точки пересечения нашей 3-ей секущей плоскости и образующей конуса на ось окружности в горизонтальной плоскости и чертим окружность этого радиуса. Затем на полученную окружность из т. 4'=(5')



опускаем перпендикуляр. Точки пересечения этого перпендикуляра и окружности на горизонтальной плоскости и есть наши искомые точки 4 и 5. Затем эти точки проецируем на профильную плоскость. Все построения смотри на рис. 52.

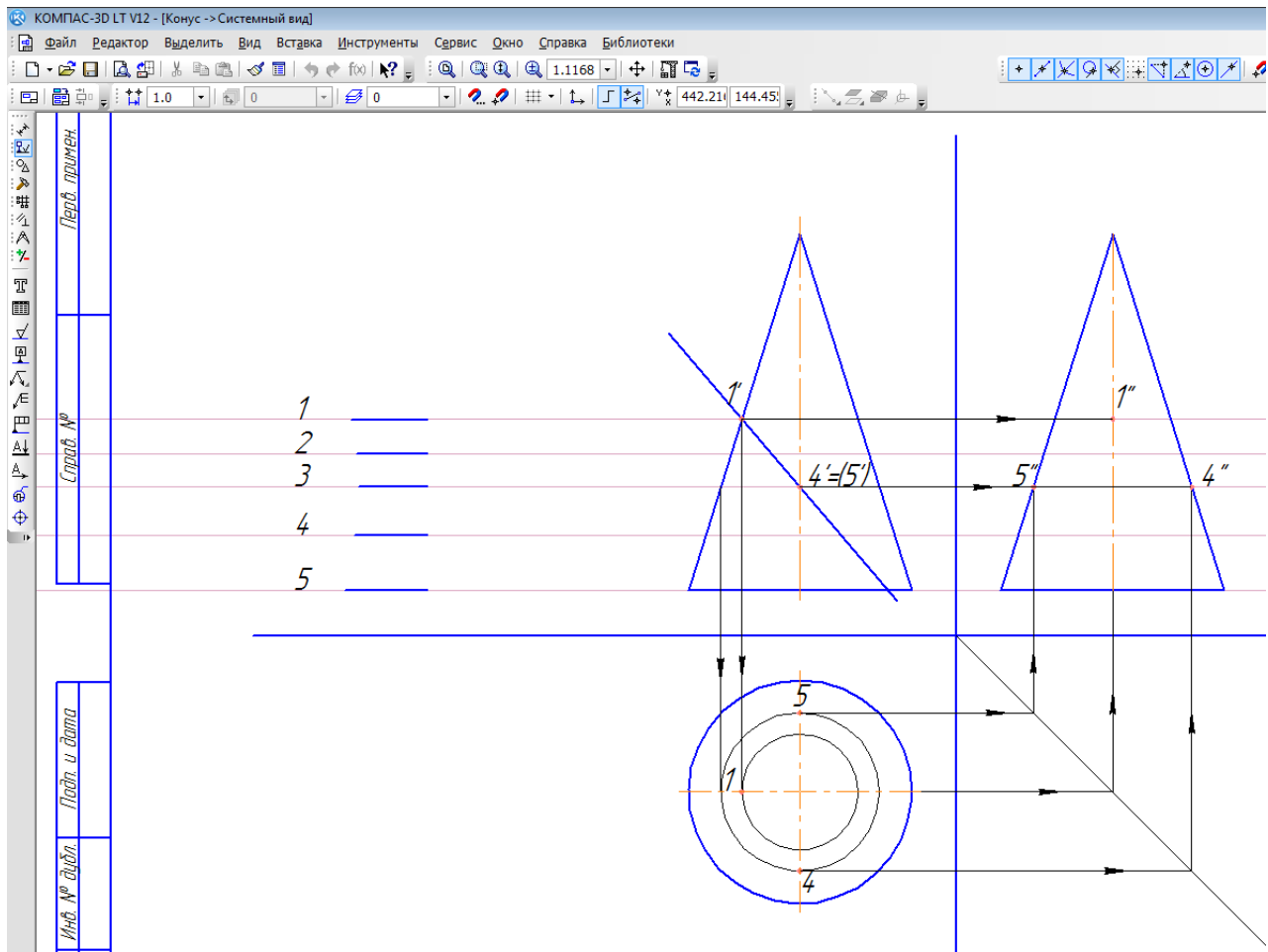


Рис. 52 – Построение т. 1, 4, 5

3. Далее строим т. 8 и 9, которые находятся на основании нашего конуса. Для этого достаточно опустить перпендикуляр с фронтальной проекции на горизонтальную до основной нашей окружности. Затем проецируем эти точки на профильную проекцию, как показано на рис. 53.

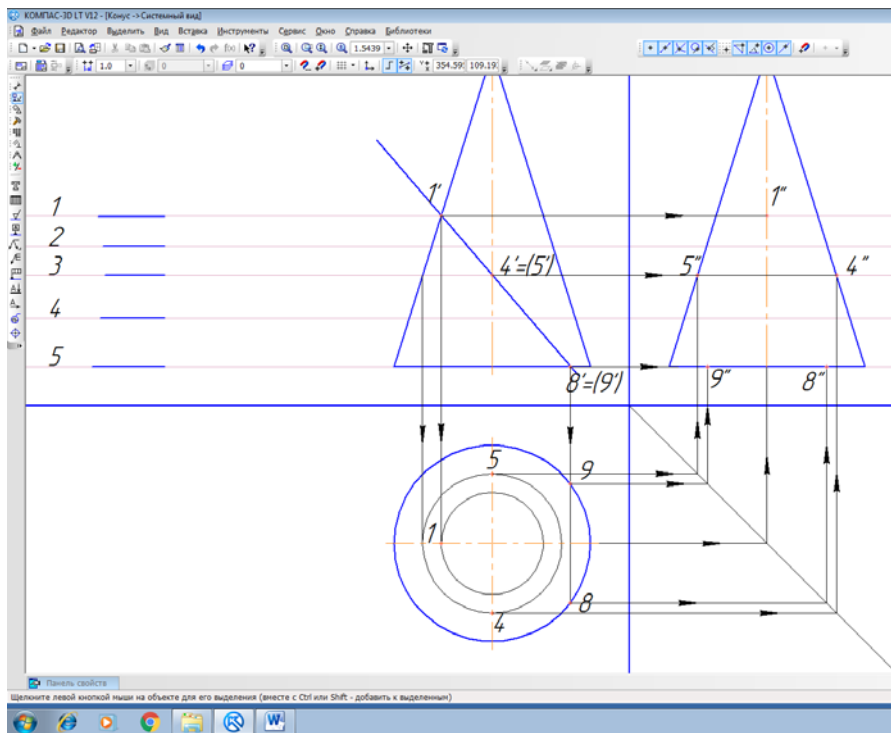


Рис. 53 – Построение т. 8, 9

4. Аналогичным образом находятся т.т. 2, 3, 6, 7. Построение см. на рис. 54.

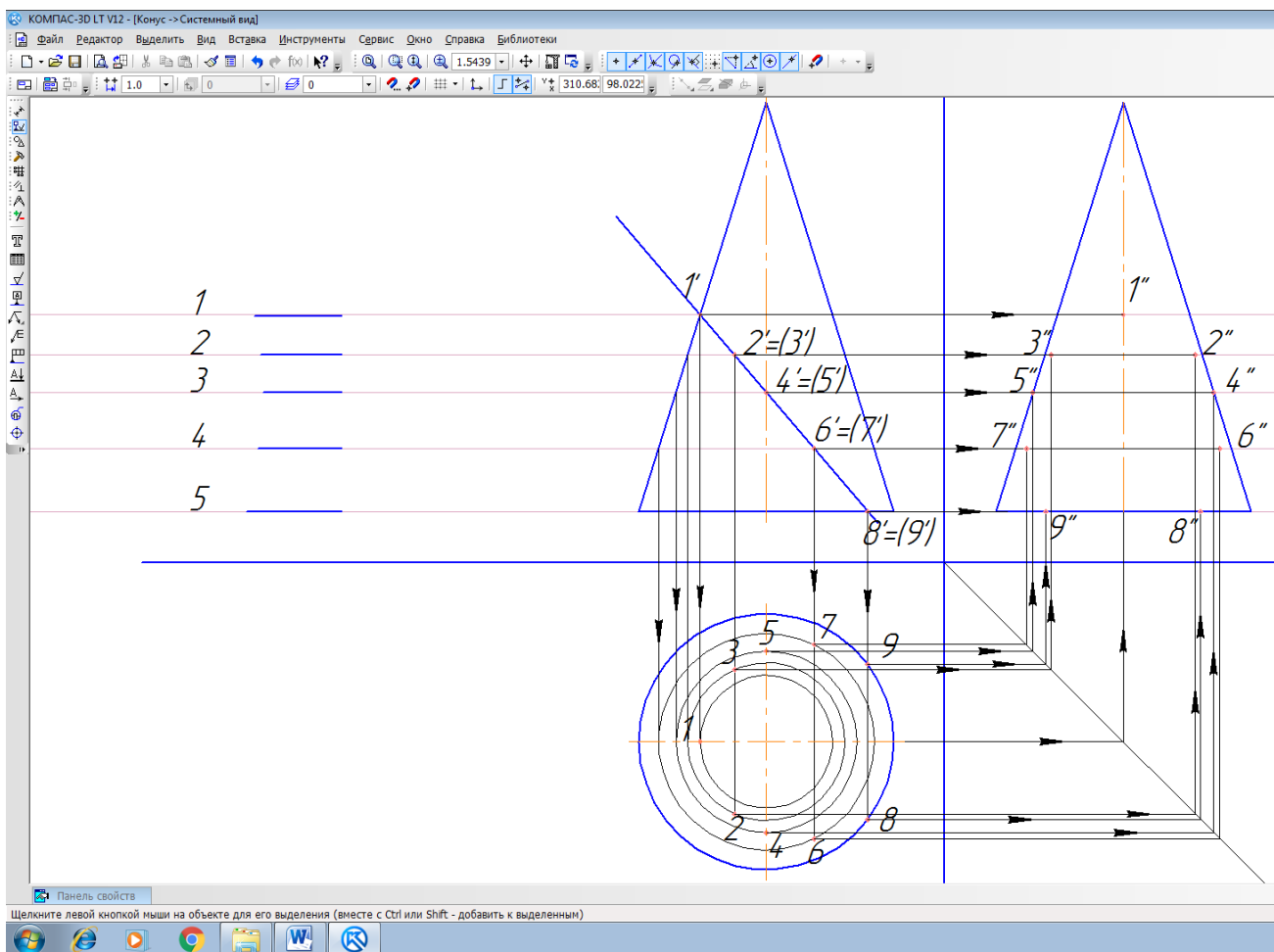


Рис. 54 – Построение т. 2, 3, 6, 7

Для построения пирамиды рассуждения и принципы построения такие же. Только необходимо помнить, что при сечении 4-хугольной пирамиды горизонтальной плоскостью мы получим такой же 4-хугольник, только меньших размеров. Пример смотри на рис. 55.

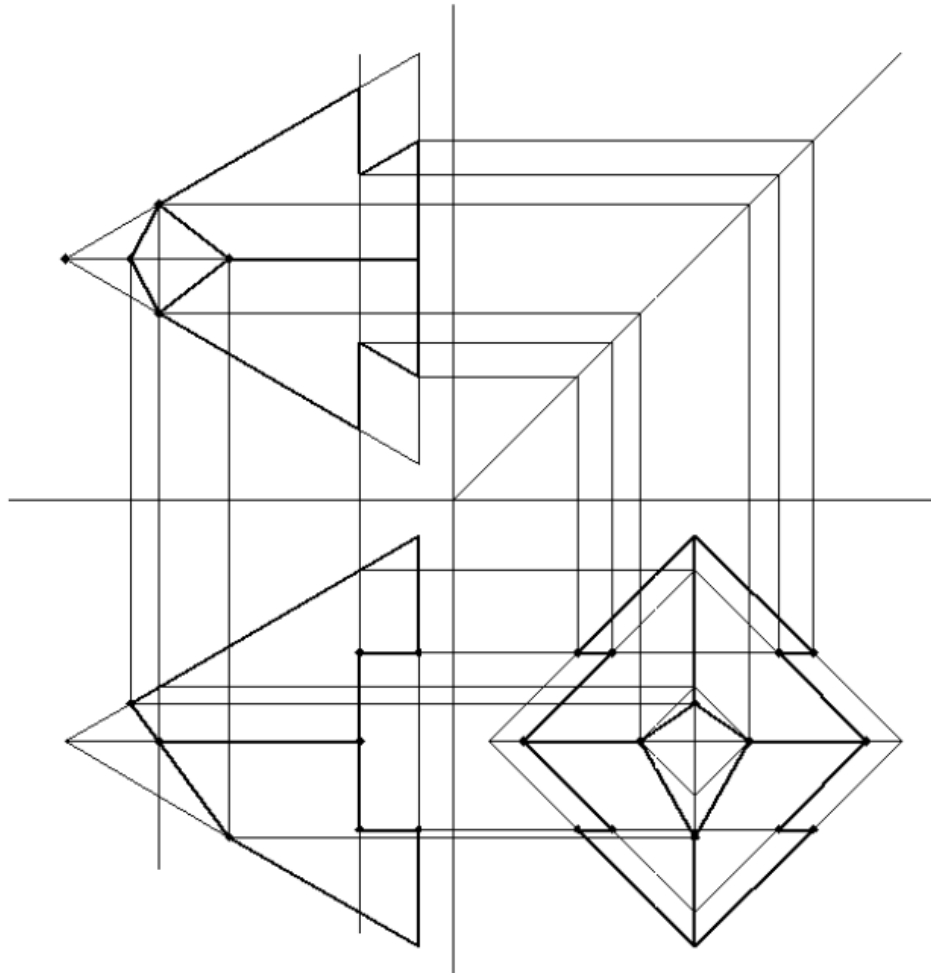


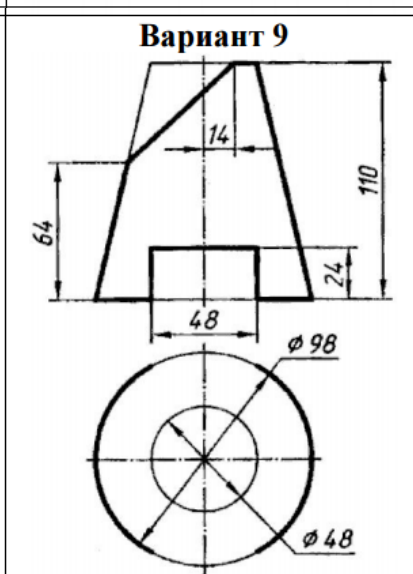
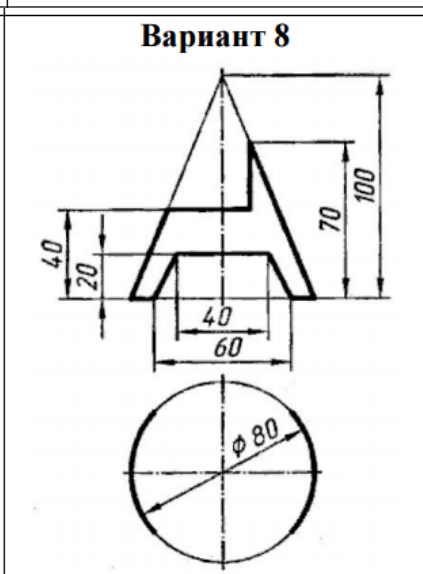
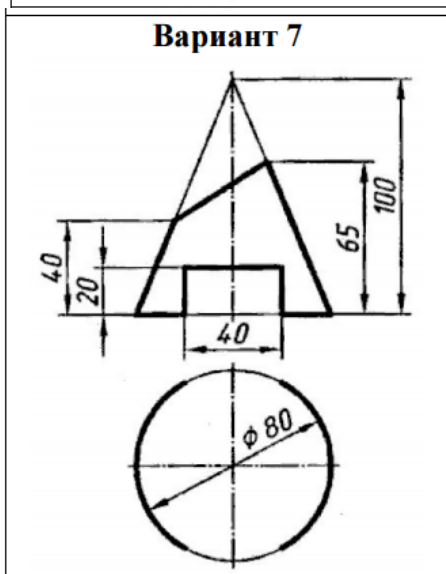
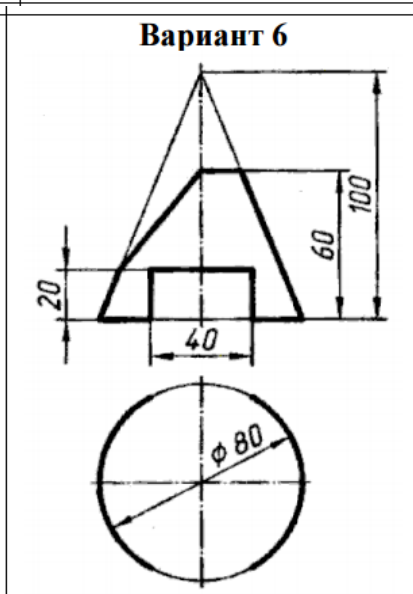
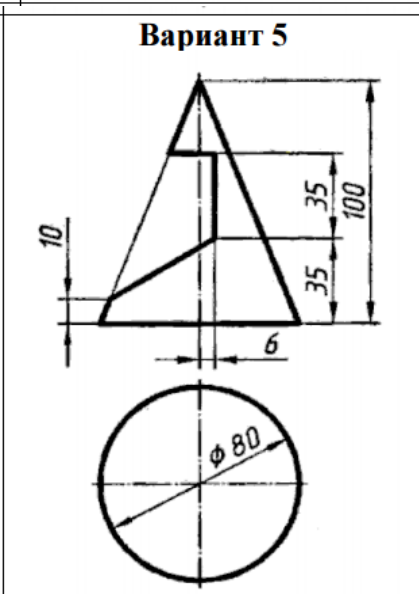
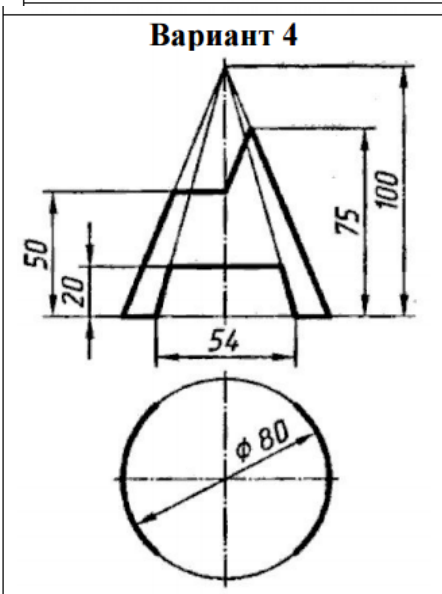
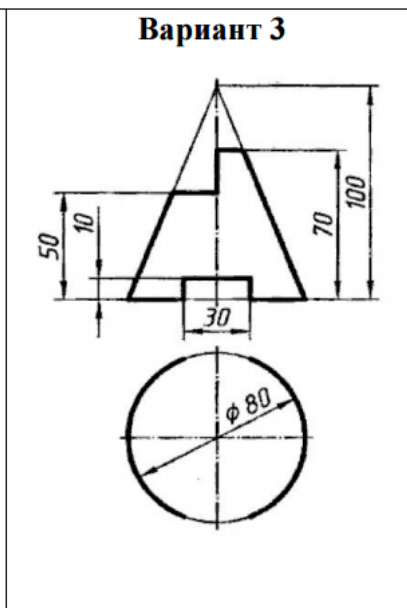
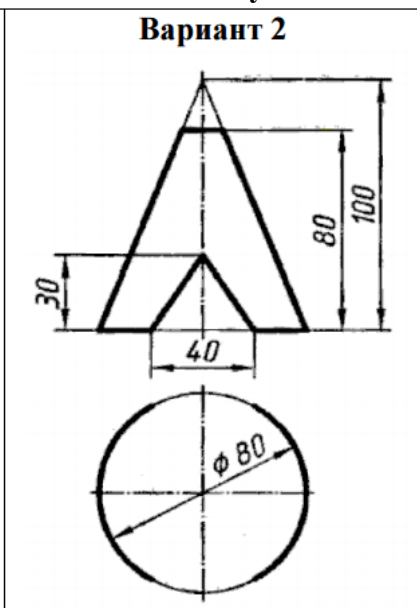
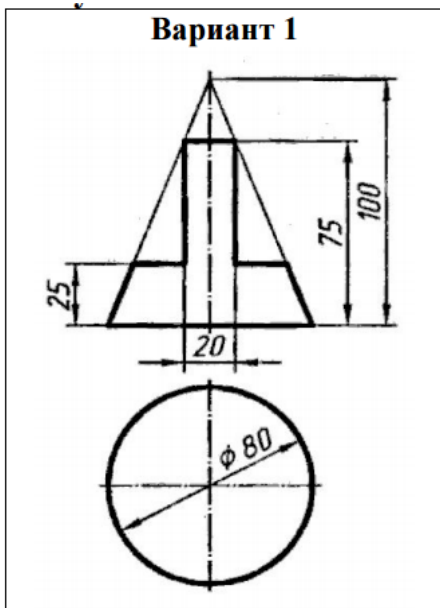
Рис. 55 – Пирамида

#### **Задания для самостоятельного выполнения**

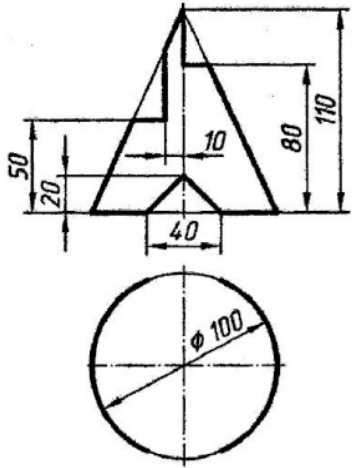
Вычертить пирамиду и конус (вид спереди, сверху и слева).

Рекомендуется выполнять чертеж с помощью системы автоматизированного проектирования Компас-3D LT V12

Конус

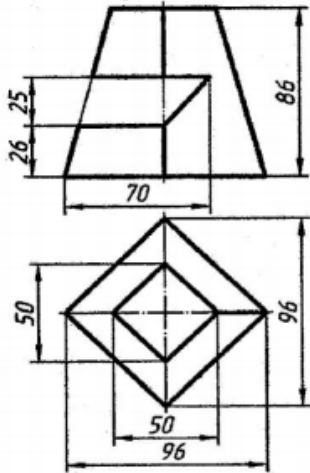


**Вариант 10**

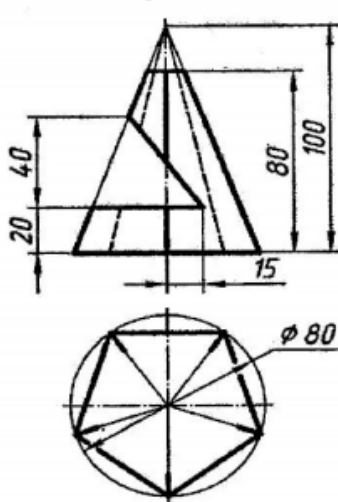


Пирамида

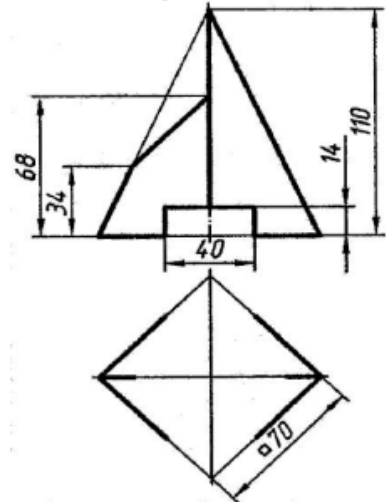
Вариант 1



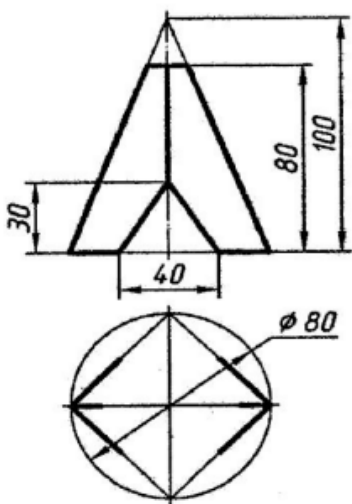
Вариант 2



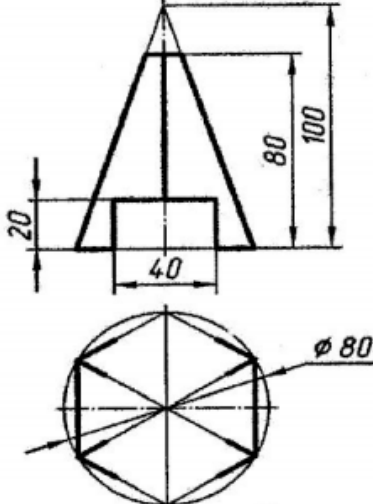
Вариант 3



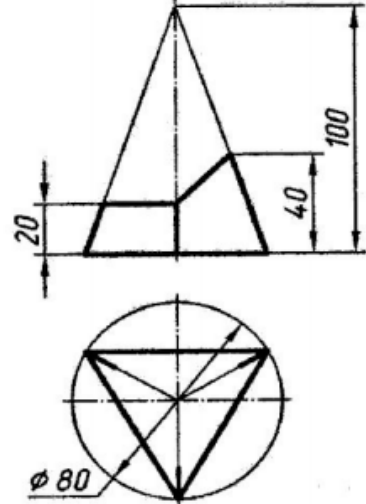
Вариант 4



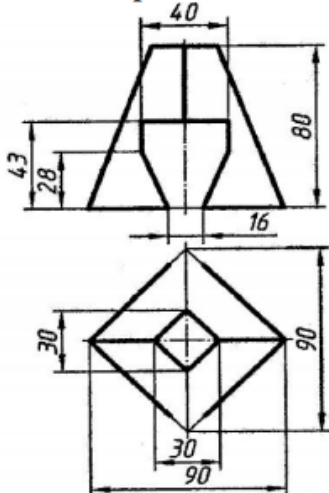
Вариант 5



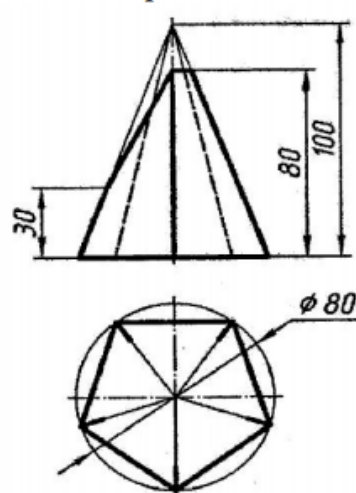
Вариант 6



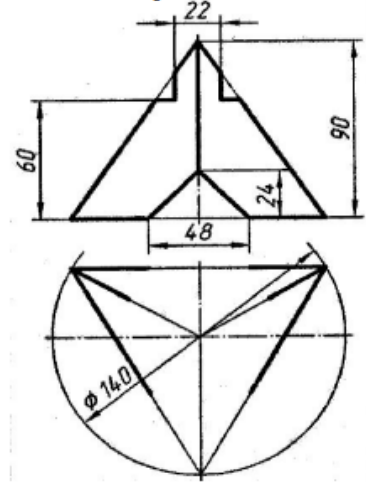
Вариант 7



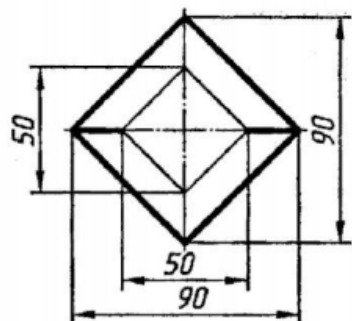
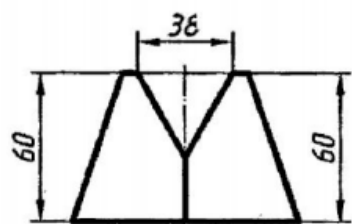
Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10



**Задание №3**  
**по дисциплине «Начертательная геометрия»**  
**Тема: «Пересечение тел вращения – Метод секущих плоскостей»**

Задание: Необходимо построить линию пересечения двух тел вращения методом секущих плоскостей.

Решение поставленной задачи производится с помощью программы Компас 3D LT V12 в следующей последовательности:

1. Необходимо построить линию пересечения двух пересекающихся тел – усеченный конус и цилиндр (см. рис. 56).

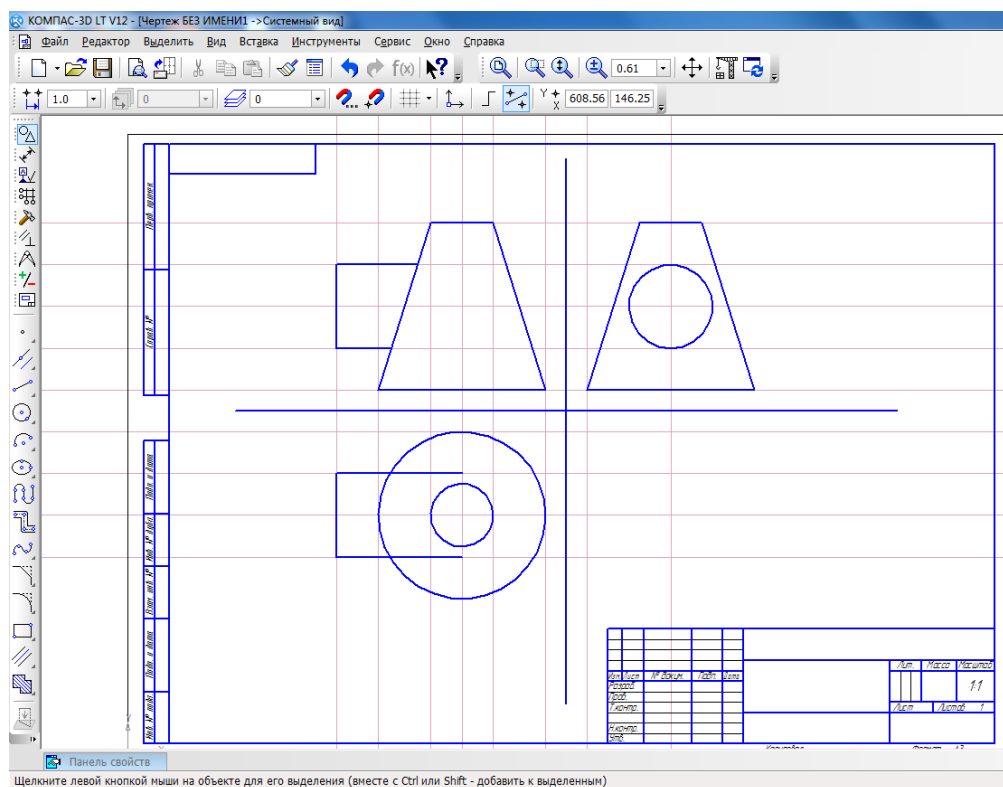


Рис. 56 – Два пересекающихся тела – усеченный конус и цилиндр

5. Для нахождения линии пересечения мы задаём вспомогательные горизонтальные секущие плоскости, как показано на рис. 57. В первую очередь находим две крайние точки 1 и 7, которые лежат одновременно на образующей конуса и цилиндра и на их плоскости симметрии. И проецируем их на горизонтальную и профильную проекции (см. рис. 57).



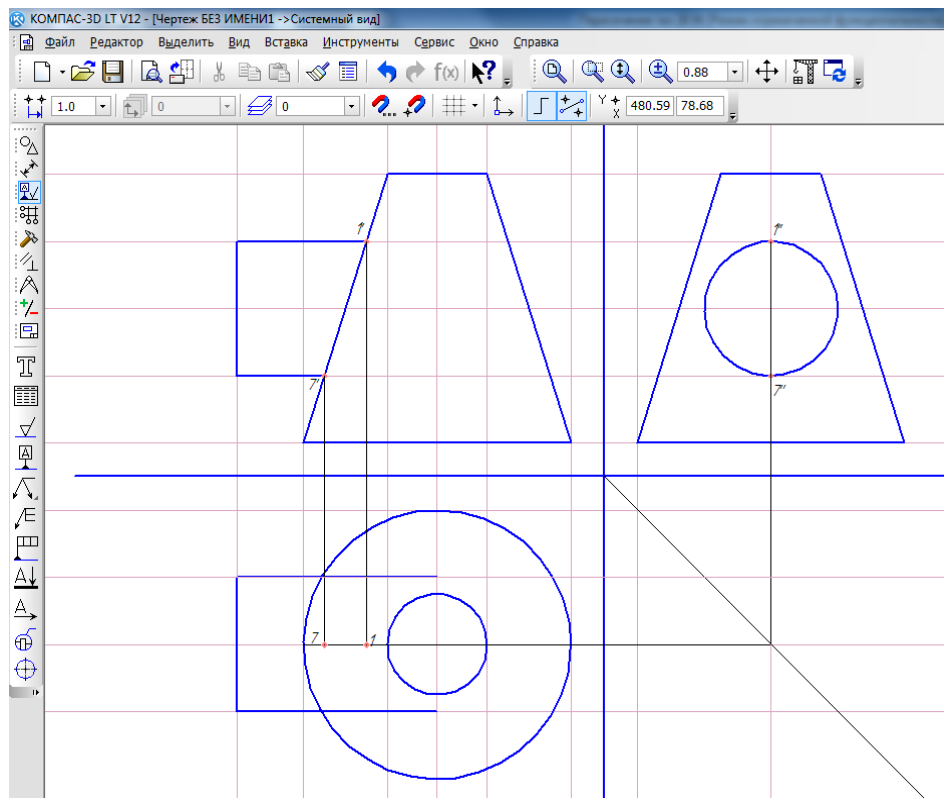


Рис. 57 – Нахождение т.т. 1 и 7

6. Затем на профильной проекции разбиваем окружность на 12 равных частей, которые мы получим, разрезая цилиндр вспомогательными горизонтальными секущими плоскостями. Эти плоскости оставляют свой след на конусе и цилиндре. След на конусе – это окружность диаметром  $d$ , след на цилиндре – прямоугольник шириной  $b$ . Ширина прямоугольника определяется на профильной проекции (виде слева). На горизонтальной проекции (виде сверху) проводим окружность диаметром  $d$  и прямоугольник шириной  $b$ .

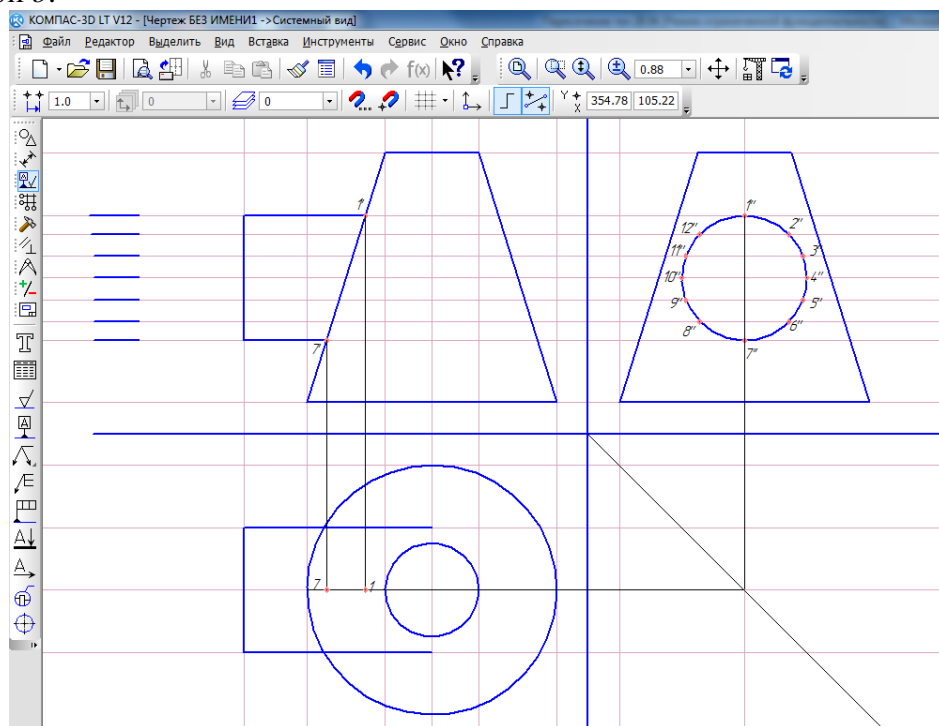


Рис. 58 – Точки пересечения двух тел в профильной проекции

7. На следующем этапе находим т.т. 4 и 10, которые находятся на пересечении конуса и крайнего положения образующей цилиндра. Для этого определяем радиус окружности, которая получится при сечении горизонтальной плоскостью. Опускаем перпендикуляр с фронтальной проекции на горизонтальную до оси симметрии нашего конуса и проводим окружность такого радиуса. Искомые нами точки в горизонтальной проекции будут лежать на этой окружности. Для точного определения положения точек 4 и 10 необходимо их спроецировать с профильной проекции на горизонтальную. Поэтому из точек 4'' и 10'' опускаем перпендикуляр до вспомогательной линии, а затем проводим горизонтально перпендикуляр до пересечения с нашей построенной окружностью. Эти точки пересечения перпендикуляра и окружности в горизонтальной проекции и будут искомыми нами точки 4 и 10. Затем из т.10 поднимаем перпендикуляр на фронтальную проекцию до пересечения с нашей секущей плоскостью. Это будут искомые точки 4' и 10'. Линии построения и направление действий, показанное стрелками, смотри на рис. 59.

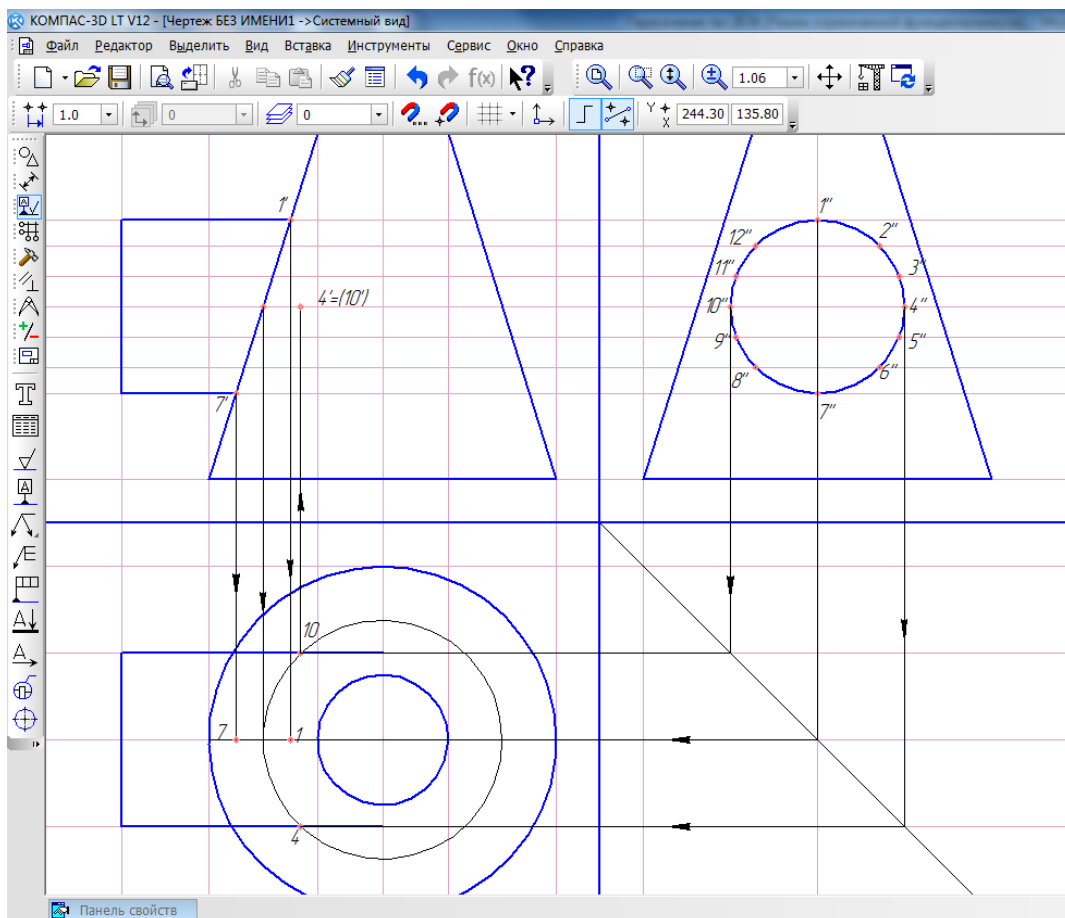


Рис. 59 – Построение точек 4 и 10

8. Подобным способом получаем все последующие точки. Построения точек 2 и 12 смотри на рис. 60.

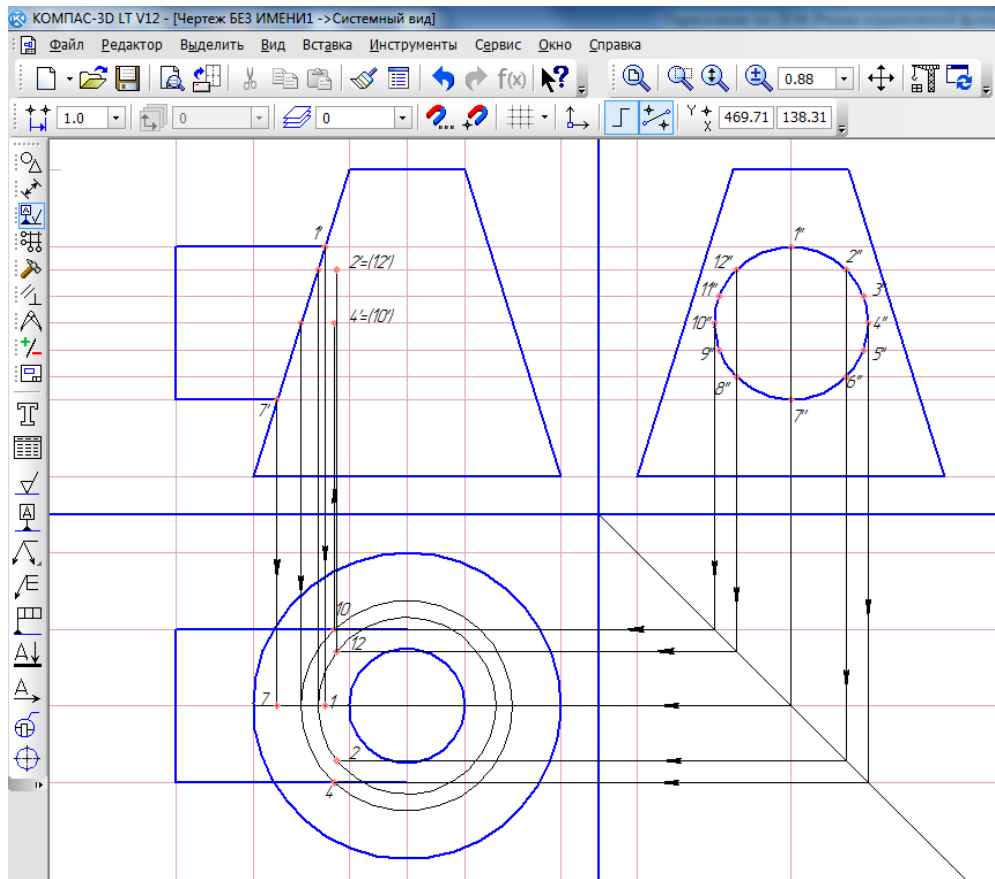


Рис. 60 – Построение точек 2 и 12

9. Линии построения точек 3 и 11, 5 и 9, 6 и 8 смотри на рис. 61.

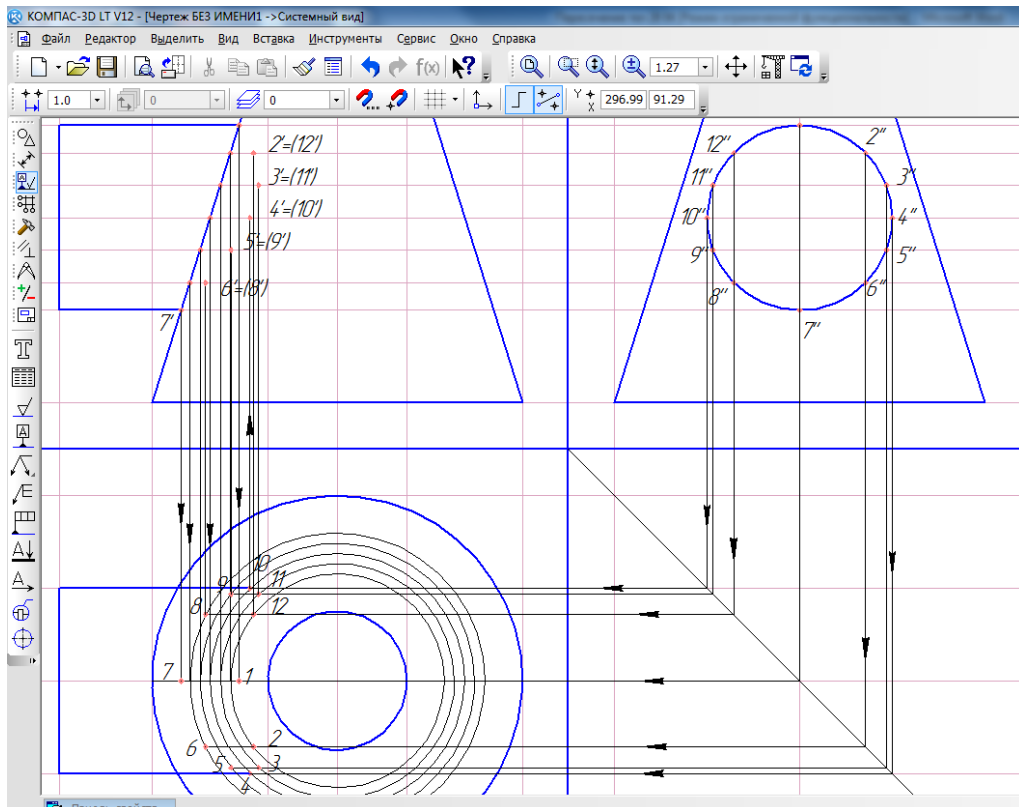


Рис. 61 – Построение точек 3 и 11, 5 и 9, 6 и 8

10. Полученные точки на фронтальной и горизонтальной проекции соединяем плавной кривой с помощью команды «Кривая Безье», которая находится во вкладке «Геометрия». Причем видимые линии мы строим сплошной утолщенной линией, а не видимые линии Штриховой утолщенной (см. рис. 62, 63)

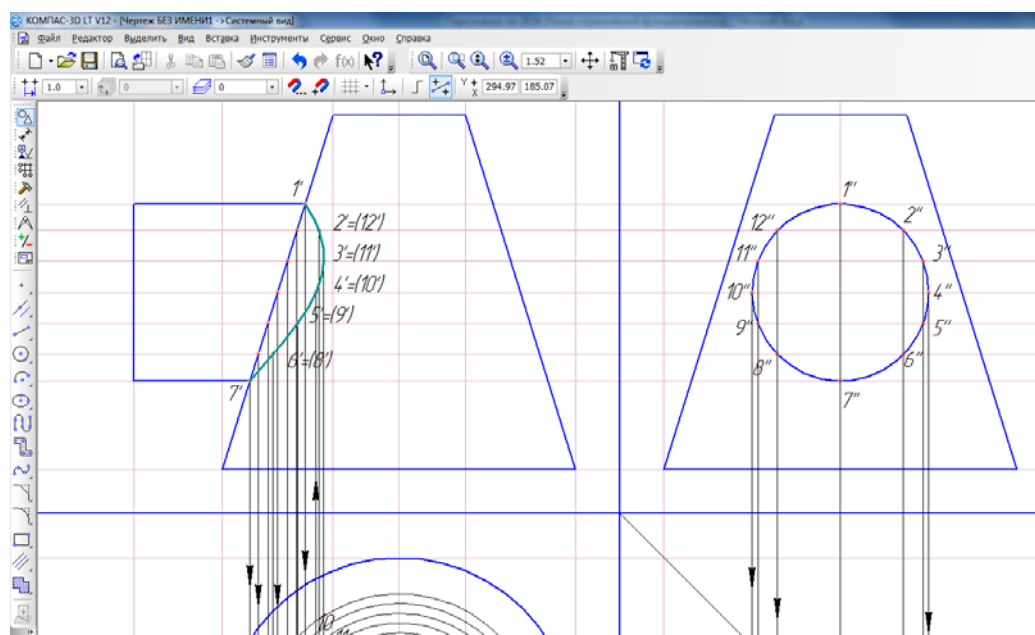


Рис. 62 – Линия пересечения конуса и цилиндра во фронтальной проекции

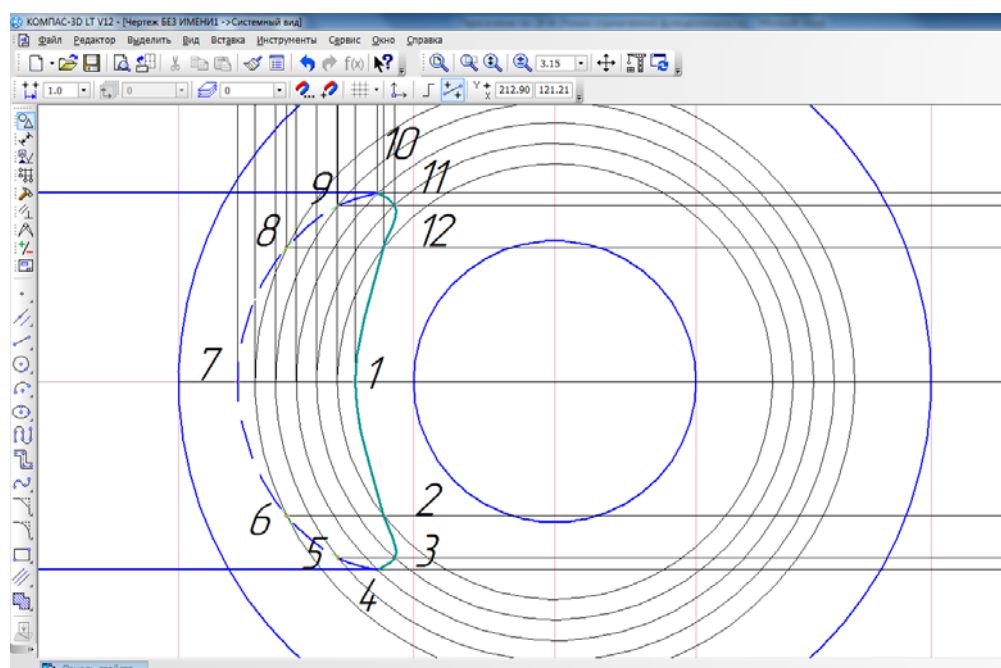


Рис. 63 – Линия пересечения конуса и цилиндра в горизонтальной проекции

11. Линии пересечения двух тел – Конуса и Цилиндра во всех трех проекциях смотри на рис. 64.

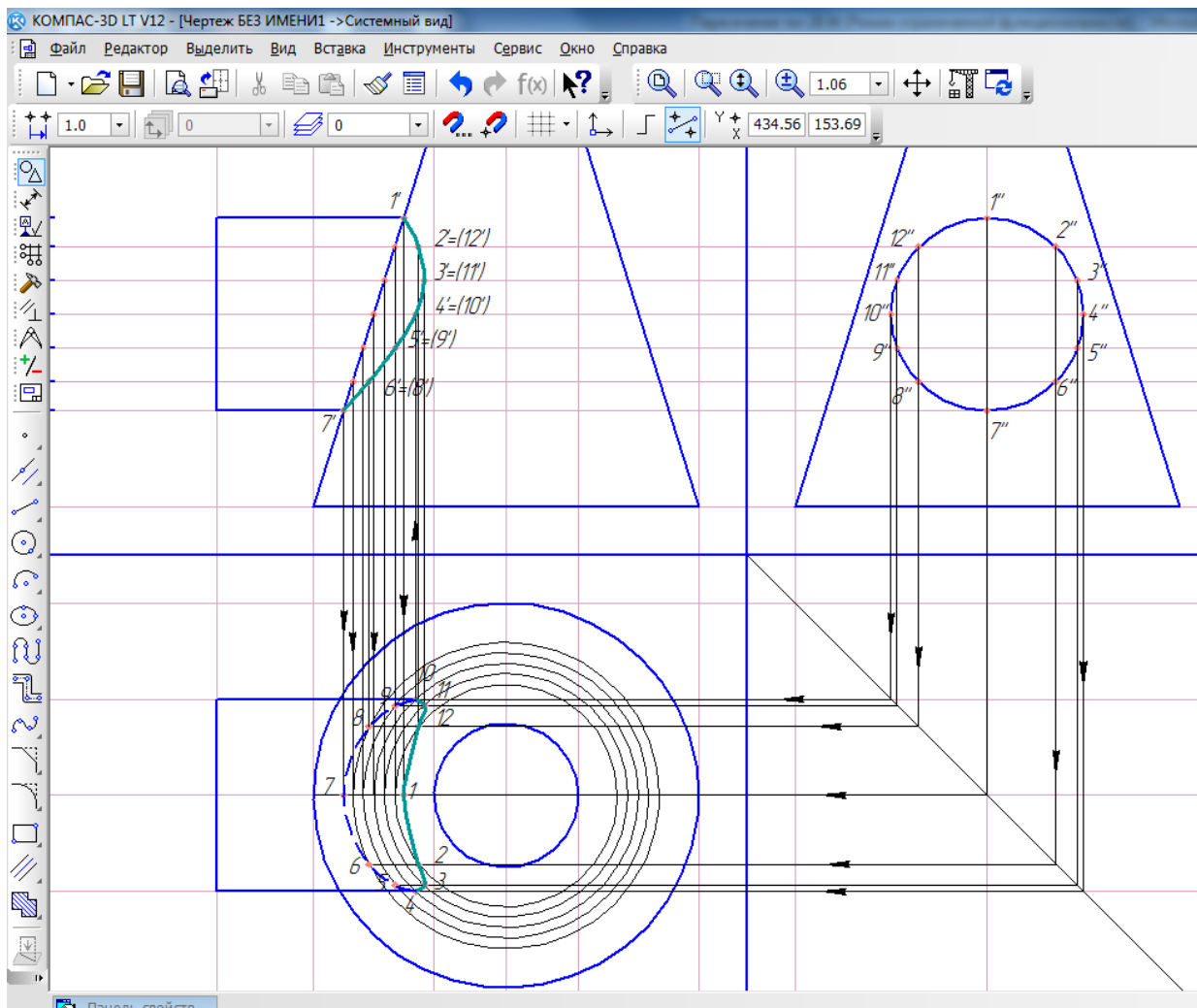
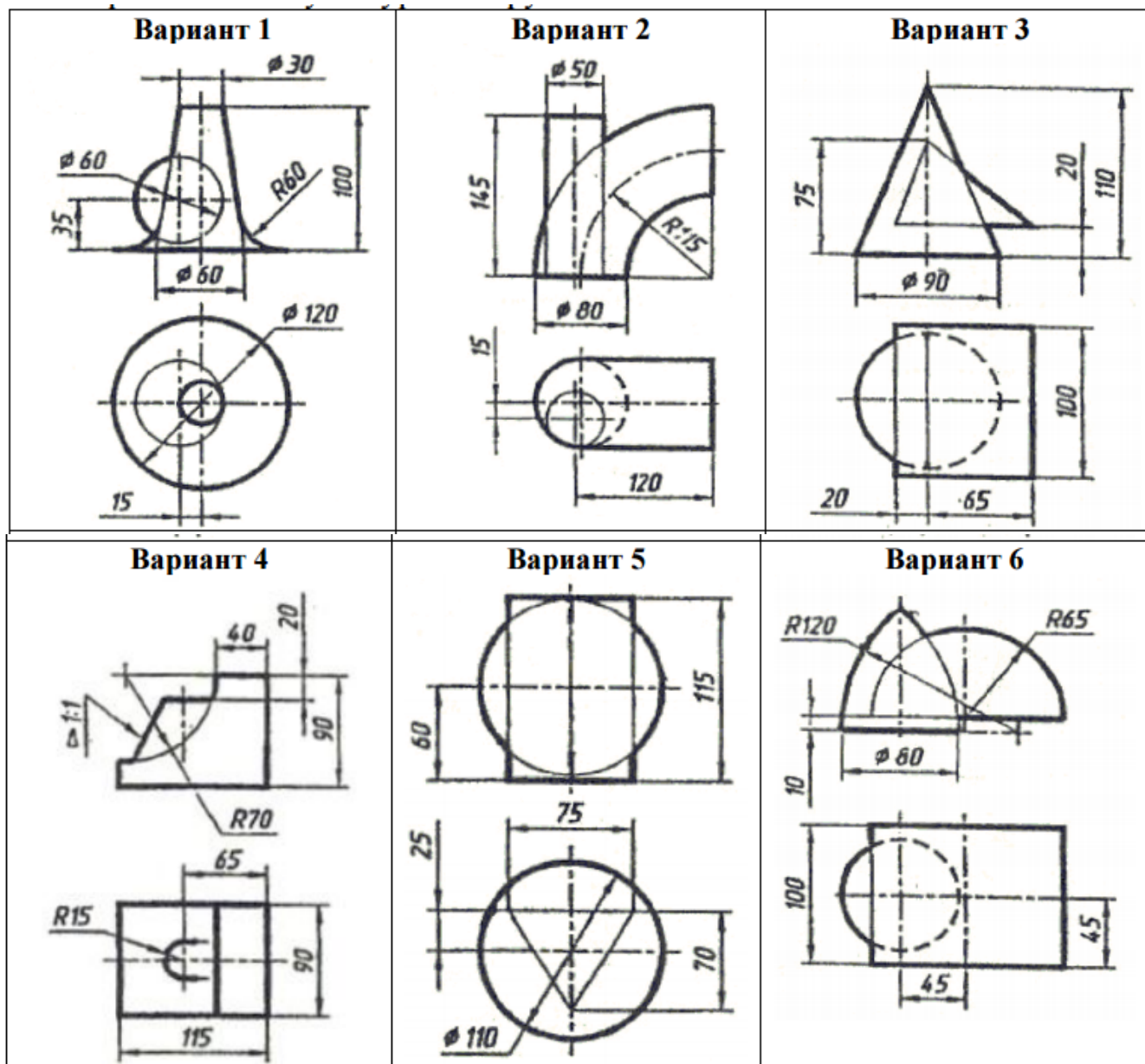


Рис. 64 – Линии пересечения двух тел – Конуса и Цилиндра

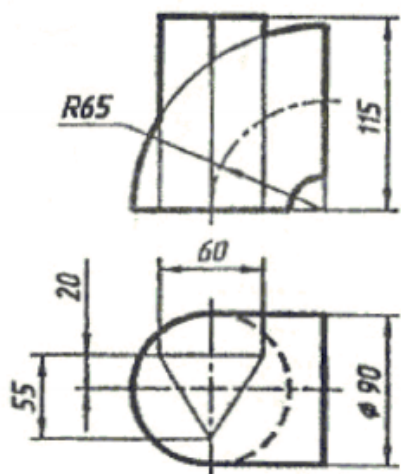
### Задания для самостоятельного выполнения

Вычертить линию пересечения тел вращения (в том числе невидимую часть). Размеры не проставлять.

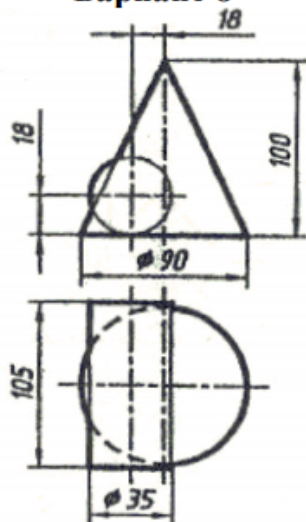
Рекомендуется выполнять чертеж с помощью системы автоматизированного проектирования Компас-3D LT V12



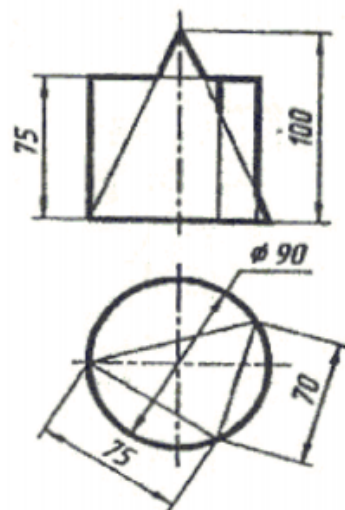
**Вариант 7**



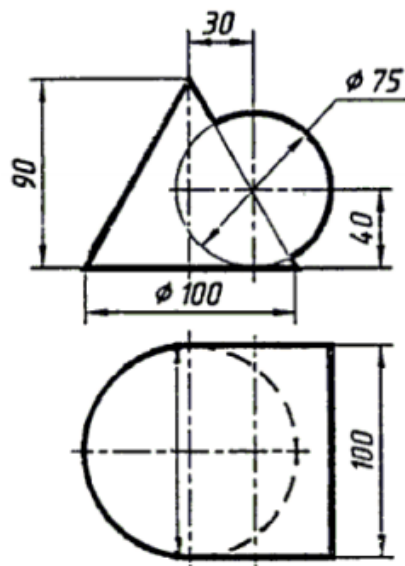
**Вариант 8**



**Вариант 9**



**Вариант 10**



## Список литературы

### Основная литература

1. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение [Электронный ресурс] : учеб. для вузов по техн. спец. / А. А. Чекмарев. - 3-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2011. - Электрон. дан. (76,9 Мб) : чертежи. - (Основы наук). - + Электрон. ресурс. - Договор № 1212 от 09.06.2011 (Лок. сеть УдГУ : только чтение). Срок действия договора до 09.06.2021. - Режим доступа : <http://elibrary.udsu.ru/xmlui/handle/123456789/7170>. - ISBN 978-5-9916-0905-0 (Юрайт). - 978-5-9692-1003-5 (ИД Юрайт).
2. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия / А. А. Чекмарев. - М. : Издательство Юрайт, 2017. - Режим доступа : <http://www.biblio-online.ru/book/B8402B9B-0643-4D71-A23D-6D2348D09F24>. - Рус яз. - ISBN 978-5-534-03109-6.
3. Чекмарев, А. А. Начертательная геометрия и черчение / А. А. Чекмарев. - М. : Издательство Юрайт, 2017. - Режим доступа : <http://www.biblio-online.ru/book/C03B8F07-8F84-4847-A8F9-468C7A6D02F2>. - Рус яз. - ISBN 978-5-534-01068-8.
4. Королёв, Ю. И. Начертательная геометрия и графика : для бакалавров и специалистов : учеб. пособие для вузов техн. спец. / Ю. И. Королёв, С. Ю. Устюжанина. - Санкт-Петербург : Питер, 2013. - 184, [1] с. : ил., табл. ; 70x100/16. - (Учебное пособие. Стандарт третьего поколения). - Библиогр.: с. 185.
5. Королёв, Ю. И. Начертательная геометрия : учеб. для вузов инженер.-техн. спец. / Ю. И. Королёв. - 2-е изд. - СПб.: Питер, 2010. - 256 с.: ил. ; 70x100/16. - (Учебник для вузов). - Библиогр.: с. 255-256.
6. Фролов С.А. Начертательная геометрия: Учебник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.:ИНФРА – М.: 2012. – 285 с.
7. Фролов С.А. Начертательная геометрия: сборник задач. Учеб. пособие для студентов машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов.– 3-е изд. испр.,– М.: ИНФРА – М, 2011. – 172 с. ил.— (Высшее образование).
8. Белякова Е. И. Начертательная геометрия : учеб. пособие допущено МО Респ. Беларусь для вузов по тех. специальностям / Е. И. Белякова, П. В. Зеленый; под ред. П. В. Зеленого. - 3-е изд., испр. - Минск : Новое знание, 2012.
9. Лызлов А.Н. Начертательная геометрия. Задачи и решения : учеб. пособие / А.Н. Лызлов, М.В. Ракитская, Д.Е. Тихонов-Бугров. - Санкт-Петербург: Лань, 2011.
10. Нартова Л. Г. Начертательная геометрия : учеб. для вузов по напр. подготовки "Конструкторско-технолог. обеспечение машиностроит. пр-в" и "Технологические машины и оборудование" рек. МО РФ / Л. Г. Нартова, В. И. Якунин. - 3-е изд., испр. - М. : Академия, 2011.
11. Фролов, С. А. Начертательная геометрия. Способы преобразования ортогональных проекций : учеб. пособие для вузов рек. МО РФ / С. А. Фролов. - 3-е изд., испр. и доп. - М. : Высш. шк., 2002. - 159, [1] с. ; 60x88/16. - Библиогр.: с. 157-158. - ISBN 5-06-004206-5.

### Дополнительная литература

12. Талалай П. Г. Начертательная геометрия. Инженерная графика. Интернет-тестирование базовых знаний : учеб. пособие рек. ФГУ "Нац.аккредитац. агентство в сфере образования (Россаккредагентство)" / П. Г. Талалай. - СПб. и др. : Лань, 2010.



13. Чекмарев А. А. Начертательная геометрия и черчение : учеб. для вузов по техн. спец. / А. А. Чекмарев. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Высшее образование, 2009.
14. Волошин - Челпан Э. К. Начертательная геометрия. Инженерная графика : учеб. рек. МО РФ для химико-технол. вузов / Э. К. Волошин - Челпан, М-во образования и науки РФ, Федер. агентство по образованию, Моск. гос. акад. тонкой хим. технологии им. М.В. Ломоносова. - М. : Акад. Проект, 2009.
15. Королев Ю.И. Начертательная геометрия : учебник доп. Науч.-метод. советом по начертат. геометрии и инженер. графике М-ва образования и науки РФ для вузов инженерно-техн. специальностей / Ю.И. Королев. - 2-е изд. - СПб. : Питер, 2009.
16. Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика. : учеб. рек. МО РФ для вузов. В 3 т. Т.1. Начертательная геометрия. Геометрическое и проекционное черчение. / П. Н. Учаев, В. И. Якунин, С. Г. Емельянов [и др.] ; под общ. ред.: П. Н. Учаева, В. И. Якунина. - М. : Академия, 2008.
17. Начертательная геометрия. Инженерная и компьютерная графика.: учеб. рек. МО РФ для вузов. В 3 т. Т.2. Машиностроительное черчение / П. Н. Учаев, В. И. Якунин, С. Г. Емельянов [и др.] ; под общ. ред.: П. Н. Учаева, В. И. Якунина. - М. : Академия, 2008.
18. Павлова А.А. Начертательная геометрия : Практикум для студентов вузов: В 2 ч. Ч. 1 / А.А. Павлова, И.В. Глазкова. - М. : ВЛАДОС, 2003.
19. Павлова А.А. Начертательная геометрия : Практикум для студентов вузов: В 2 ч. Ч. 2 / А.А. Павлова, И.В. Глазкова. - М. : ВЛАДОС, 2003.
20. Соломонов К.Н. Начертательная геометрия : доп. УМО по образованию в кач. учебника для студентов вузов / К.Н. Соломонов, Е.Б. Бусыгина, О.Н. Чиченева. - М. : МИСИС : ИНФРА - М, 2004.
21. Ганин Н.Б. КОМПАС. М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2007 г.

Учебное издание

Составитель  
Никитина Ольга Витальевна

**РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ И КОНТРОЛЬНЫХ  
РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ: «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНЖЕНЕРНАЯ  
КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»**

Учебно-методическое пособие

Отпечатано в авторской редакции  
с оригинал-макета заказчика

Издательский центр «Удмуртский университет»  
426034, Ижевск, Университетская, д. 1, корп. 4