Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 53

УДК 517.977

© *М. С. Близорукова*

ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД НЕВЯЗКИ В ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ НЕИЗВЕСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье рассматриваются две задачи динамической реконструкции неизвестных характеристик системы нелинейных уравнений, описывающих процесс диффузии инноваций, по неточным измерениям фазовых состояний системы. Предлагается динамический вариант решения этих задач. Предполагается, что система функционирует на заданном конечном временном интервале. Эволюция фазового состояния системы, то есть решение уравнения, определяется неизвестным входом. Точное восстановление истинного, действующего на систему, входа, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Поэтому мы предполагаем построить некоторую его аппроксимацию. Потребуем, чтобы аппроксимация была сколь угодно близка к истинному входу при условии достаточной малости измерительных ошибок и расстояния между моментами измерений фазовых состояний. На основе динамического варианта метода невязки указаны два алгоритма решения задач реконструкции: первый ориентирован на случай измерения всех координат фазового вектора, второй — на случай измерения части координат. Предложенные алгоритмы являются устойчивыми по отношению к информационным помехам и компьютерным ошибкам и представляют собой специальные регуляризирующие алгоритмы для одного из вариантов обратной задачи динамики.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, часть координат, нелинейные дифференциальные уравнения.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-05

Введение

Задачи реконструкции структурных характеристик объектов относятся к обратным задачам, когда требуется по результатам наблюдения доступного измерению выхода системы восстановить недоступный измерениям вход. Поскольку обратные задачи являются неустойчивыми относительно ошибок измерения, то в случае наличия динамики для их решения используется сочетание методов теории управления с обратной связью и теории некорректных задач. Один из методов решения обратных задач в ситуациях, когда неизвестное управление требуется восстановить в динамике, синхронно с функционированием наблюдаемой системы, как принято говорить, в темпе реального времени, получил название метода динамической регуляризации. В абсолютном большинстве работ (см., например, [1–6]), развивающих указанный выше метод, решение задач динамической реконструкции основывается на локальной регуляризации экстремального сдвига по методу сглаживающего функционала. Лишь в отдельных работах используется динамический метод невязки, который был предложен в статье [7]. В указанной работе (см. также [8–10]) рассматривался случай измерения всех координат. Причем в работах [7, 9] предполагалось наличие мгновенных ограничений на возмущение в виде выпуклого компакта. Случай отсутствия таких ограничений отражен в [8, 10]. Для систем с распределенными параметрами динамический метод невязки был развит в [3, 11–13]. В данной статье, в отличие от указанных выше работ, для нелинейной управляемой системы на основе метода экстремального сдвига, локально регуляризованного с помощью метода невязки, решается задача реконструкции при неполном измерении состояния системы, а именно, при измерении части координат. В качестве объекта исследования выбрана система, введенная в работе [14], для описания диффузии инноваций. Задачи реконструкции структурных характеристик с позиций подхода [1–13] некоторых экономико-экологические моделей были рассмотрены в работах [15–18]. Одним из важных факторов распространения любой инновации является ее взаимодействие с соответствующим социально-экономическим окружением. По аналогии с диффузией инноваций [19] был введен термин диффузии информации. В настоящее время, когда объемы информации в Интернете позволяют говорить об информационных потоках, актуальным становится изучение их динамики. И это заставляет искать новые, ранее неизвестные в этой области методы. Можно признать перспективным при анализе этих процессов (диффузии) использование математического аппарата теории управления [20–22].

§ 1. Постановка задач

Рассмотрим систему, описываемую уравнениями:

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = k(t)x_2(t) + x_1(t)(\lambda x_2(t) - \nu), \\ \dot{x}_2(t) = -k(t)x_2(t) - (\lambda x_1(t) + \mu)x_2(t) + \gamma(t),\end{gathered} \tag{1.1}$$

$$t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}.$$

Предполагается, что положительные константы λ, ν, μ, а также функция $k(\cdot)$, принимающая неотрицательные значения, известны, а $\gamma(\cdot)$ (или $x_2(t)$) неопределенны. Мы рассмотрим ситуацию, когда функция $\gamma(t)$ (измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $\gamma(t) \in P = [-\gamma, \gamma]$, $t \in T$) действует на систему, $0 < \vartheta < +\infty$. Пусть в дискретные, достаточно частые моменты времени

$$\tau_i \in \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}, \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \tau_0 = t_0, \quad \tau_m = \vartheta,$$

с некоторой погрешностью измеряется значение $z(\tau_i) \in R^n$ ($n = 1$ или 2). Результаты этих измерений (величины $\xi_i^h \in R^n$) удовлетворяют неравенствам

$$|z(\tau_i) - \xi_i^h|_n \leqslant h, \tag{1.2}$$

где $h \in (0,1)$ — уровень информационной помехи, $|x|_n$ — модуль числа x (при $n = 1$), евклидова норма (при $n = 2$).

Мы рассмотрим два случая. В первом будем предполагать, что в момент τ_i измеряется координата $x_1(\tau_i)$, то есть

$$z(\tau_i) = x_1(\tau_i), \quad \xi_i^h \in R,$$

а во втором — пара координат $x_1(\tau_i)$ и $x_2(\tau_i)$. И тогда

$$z(\tau_i) = \{x_1(\tau_i), x_2(\tau_i)\}, \quad \xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{1i}^h\} \in R^2. \tag{1.3}$$

Требуется указать алгоритм, позволяющий восстановить неизвестную координату $x_2(\cdot)$ в первом случае, или вход $\gamma(\cdot)$ — во втором случае.

Приведем строгую постановку обсуждаемых задач. Зафиксируем семейство разбиений интервала T:

$$\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{h=0}^{m_h}, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h), \quad \tau_{0,h} = t_0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta. \tag{1.4}$$

З а д а ч а 1.1. Требуется указать правило формирования управлений u_i^h в моменты τ_i вида

$$U^h \colon \{\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h\} \to u_i^h \in R$$

так, чтобы имела место сходимость

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |u^h(t) - x_2(t)|^2 \, dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Здесь $u^h(t) = u_i^h$ при $t \in \delta_{i,h} = [\tau_{i,h}, \tau_{i+1,h})$.

З а д а ч а 1.2. Требуется указать правило формирования управлений v_i^h в моменты τ_i вида

$$V^h \colon \{\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h\} \to v_i^h \in R$$

так, чтобы имела место сходимость

$$\int_{t_0}^{\vartheta} |v^h(t) - \gamma(t)|^2 \, dt \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Здесь $v^h(t) = v_i^h$ при $t \in \delta_{i,h}$.

§ 2. Алгоритм решения задачи 1.1

В дальнейшем считаем выполненным следующее условие.

Условие 2.1. а) неизвестный вход $\gamma = \gamma(t)$ порождает решение $x(t) = x(t, \gamma)$ системы (1.1) такое, что

$$\inf_{t \in T} |k(t) + \lambda x_1(t, \gamma)| \geqslant c > 0.$$

б) функция $k(t)$ дифференцируема, а ее производная является измеримой по Лебегу и ограниченной.

Полагаем также, что нам известны числа d_1, d_2, k и γ такие, что

$$|x_1(t)| \leqslant d_1, \quad |x_2(t)| \leqslant d_2, \tag{2.1}$$

$$|\dot{k}(t)| \leqslant k, \quad |\gamma(t)| \leqslant \gamma \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{2.2}$$

В силу (2.1), (2.2) верны неравенства

$$|k(t)| \leqslant k_1 = |k(t_0)| + k(\vartheta - t_0), \tag{2.3}$$

$$|\dot{x}_1(t)| \leqslant d_3 = k_1 d_2 + \lambda d_1 d_2 + \nu d_1. \tag{2.4}$$

$$|\dot{x}_2(t)| \leqslant d_4 = k_1 d_2 + \lambda d_1 d_2 + \mu d_2 + \gamma. \tag{2.5}$$

Кроме того, при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|x_1(t) - \xi_{i-1}^h| \leqslant h + \int_{\tau_{i-1}}^{t} |\dot{x}_1(\tau)|\, d\tau \leqslant h + d_3\delta. \tag{2.6}$$

Опишем алгоритм решения задачи. Прежде всего зафиксируем величину погрешности измерения фазового состояния системы (1.1), то есть число $h \in (0, 1)$, а также разбиение Δ_h вида (1.4) отрезка T на полуинтервалы. Работа алгоритма разбивается на конечное число однотипных шагов. Очередной i-й шаг выполняется в течение временнóго полуинтервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$. На основании поступивших на начало этого шага результатов измерения ξ_i^h и ξ_{i-1}^h вырабатывается вектор u_i^h по формуле:

$$u_i^h = \arg\min\{|v| \colon |v| \in \widetilde{U}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h)\} \quad \text{при} \quad i \in [1 : m], \tag{2.7}$$

где

$$\widetilde{U}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \{u \in R \colon |u| \leqslant d_2, |(k(\tau_{i-1}) + \lambda \xi_{i-1}^h)u - \nu \xi_{i-1}^h - (\xi_i^h - \xi_{i-1}^h)\delta^{-1}| \leqslant \sigma_h^{(1)}\},$$

$$\sigma_h^{(1)} = 2h\delta^{-1} + K_1\delta + K_2 h, \quad K_1 = \nu d_3 + (k + \lambda d_3)d_2, \quad K_2 = \nu + \lambda d_2.$$

Здесь и ниже считаем $\tau_i = \tau_{i,h}$, $m = m_h$. Итогом работы алгоритма на промежутке $\delta_{i,h}$ является кусочно-постоянное управление вида

$$u^h(t) = u_i^h \quad \text{при} \quad t \in \delta_{i,h}, \quad i \in [1 : m]. \tag{2.8}$$

Работа алгоритма завершается в момент ϑ.

Оказывается, что при подходящем подборе параметров h и δ функция $u^h(\cdot)$ будет являться хорошей «аппроксимацией» неизвестной координаты $x_2(\cdot)$. Этот факт следует из приведенной ниже теоремы.

Заметим, что в силу условия 2.1 а), можно указать число $E > 0$ такое, что

$$\operatorname{var}(T; (k(t) + \lambda x_1(t))^{-1} x_2(t)) \leqslant E.$$

Здесь символ $\operatorname{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* 2.1 а). *Тогда справедлива оценка*

$$|u^h(\cdot) - x_2(\cdot)|^2_{L_2(T;R)} \leqslant (c_1 h + c_2\delta + c_3 h\delta^{-1})(d_2 c^{-1} + E).$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем ряд вспомогательных утверждений. Введем следующие обозначения. Пусть

$$P_T(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; R) \colon |u(t)| \leqslant d_2 \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\},$$

$$U(x_1(\cdot)) = \{u(\cdot) \in P_T(\cdot) \colon \dot{x}_1(t) = (k(t) + \lambda x_1(t))u(t) - \nu x_1(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

Здесь $U(x_1(\cdot))$ означает совокупность всех управлений $u(\cdot)$, порождающих движение $x_1(\cdot)$.

Кроме того, введем семейство множеств

$$U^h(\cdot) = \{u(\cdot) \in P_T(\cdot) \colon u(t) = u_i \text{ при п.в. } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),\ u_i \in \widetilde{U}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i),\ i \in [1:m]\},$$

Л е м м а 2.1. *Пусть* $u(\cdot) \in U(x_1(\cdot))$. *Тогда имеют место включения*

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} u(t)\,dt \in \widetilde{U}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i), \quad i \in [1:m].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_1(t, x_1, x_2) = (k(t) + \lambda x_1)x_2 - \nu x_1$. Тогда при всех $q \in R$, $|q| \leqslant d_2$ и всех $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ в силу (2.1), (2.2), (2.6), имеем

$$|f_1(t, x_1(t), q) - f_1(\tau_{i-1}, \xi^h_{i-1}, q)| \leqslant |k(t) - k(\tau_{i-1})||q| +$$

$$+ \lambda|x_1(t) - \xi^h_{i-1}||q| + \nu|x_1(t) - \xi^h_{i-1}| \leqslant k\delta|q| + \lambda(h + d_3\delta)|q| + \nu(h + d_3\delta) \leqslant$$

$$\leqslant \nu(h + d_3\delta) + \{\lambda h + (k + \lambda d_3)\delta\}d_2 = K_1\delta + K_2 h.$$

В таком случае, каково бы ни было $u(\cdot) \in U(x_1(\cdot))$, верно неравенство

$$\Big|\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_1(t, x_1(t), u(t))\,dt - \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_1(\tau_{i-1}, \xi^h_{i-1}, u(t))\,dt\Big| \leqslant K_1\delta + K_2 h,\ i \in [1:m]. \tag{2.9}$$

Кроме того, в силу равенства

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_1(t, x_1(t), u(t))\,dt = \delta^{-1}(x_1(\tau_i) - x_1(\tau_{i-1})),$$

имеем

$$\Big|\frac{\xi^h_i - \xi^h_{i-1}}{\delta} - \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_1(t, x_1(t), u(t))\,dt\Big| \leqslant 2\frac{h}{\delta}. \tag{2.10}$$

Из (2.9), (2.10) следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Как видно из леммы 2.1, неизвестная компонента решения $x_2(\cdot)$ (которую мы восстанавливаем в задаче 1.1) обладает свойством

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} x_2(t)\,dt \in \widetilde{U}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i), \quad i \in [1:m].$$

Таким образом, множество $\widetilde{U}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i)$ можно назвать множеством устойчивых локальных усреднений.

Л е м м а 2.2. *Для любых* $t_1 \in T$ *и* $u(\cdot) \in U^h(\cdot)$ *справедливо неравенство*

$$\Big|\int_{t_0}^{t_1} \{k(t) + \lambda x_1(t)\}(x_2(t) - u(t))\,dt\Big| \leqslant c_1 h + c_2\delta + c_3 h\delta^{-1},$$

где

$$c_1 = 2 + (\vartheta - t_0)(\nu + \lambda d_2 + K_2),$$

$$c_2 = k_1 + d_1 + d_3 + \lambda(1 + d_1)d_2 + (\vartheta - t_0)(\nu d_3 + K_1 + k + \lambda d_2 d_3), \quad c_3 = 2(\vartheta - t_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \{k(t) + \lambda x_1(t)\} x_2(t)\, dt = x_1(t_1) - x_1(t_0) + \nu \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)\, dt. \tag{2.11}$$

Пусть $q = \max\{\tau_i \in \Delta\colon \tau_i \leqslant t_1\}$. Тогда в силу (2.1), (2.4) верны неравенства

$$|x_1(t_1) - x_1(q)| \leqslant d_3 \delta, \tag{2.12}$$

$$\Big| \int_{t_0}^{t_1} x_1(t)\, dt - \int_{t_0}^{q} x_1(t)\, dt \Big| \leqslant d_1 \delta. \tag{2.13}$$

В таком случае из (2.11), воспользовавшись (2.12), (2.13), получаем

$$\Big| \int_{t_0}^{t_1} \{k(t) + \lambda x_1(t)\} x_2(t)\, dt - \Big\{ x_1(q) - x_1(t_0) + \nu \int_{t_0}^{q} x_1(t)\, dt \Big\} \Big| \leqslant (d_1 + d_3)\delta. \tag{2.14}$$

Ввиду включения $u(\cdot) \in U^h(\cdot)$ имеем

$$\Big| \sum_{i=1}^{q} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (k(\tau_{i-1}) + \lambda \xi_{i-1}^h) u_i\, dt - \nu \sum_{i=1}^{q} \delta \xi_{i-1}^h - \xi_q^h + \xi_0^h \Big| \leqslant \delta \sum_{i=1}^{q} \sigma_h^{(1)} \leqslant \tag{2.15}$$

$$\leqslant (\vartheta - t_0)(2h\delta^{-1} + K_1 \delta + K_2 h).$$

В свою очередь, учитывая (2.6), устанавливаем неравенство

$$\Big| \Big\{ x_1(q) - x_1(t_0) + \nu \int_{t_0}^{q} x_1(t)\, dt \Big\} - \Big\{ \nu \sum_{i=1}^{q} \delta \xi_{i-1}^h - \xi_q^h + \xi_0^h \Big\} \Big| \leqslant \tag{2.16}$$

$$\leqslant 2h + \nu \Big| \sum_{i=1}^{q} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{x_1(t) - \xi_{i-1}^h\}\, dt \Big| \leqslant 2h + \nu(\vartheta - t_0)(h + d_3 \delta).$$

Объединив (2.14)–(2.16), выводим соотношение

$$\Big| \int_{t_0}^{t_1} (k(t) + \lambda x_1(t)) x_2(t)\, dt - \sum_{i=1}^{q} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (k(\tau_{i-1}) + \lambda \xi_{i-1}^h) u_i\, dt \Big| \leqslant \tag{2.17}$$

$$\leqslant \{2 + (\vartheta - t_0)(K_2 + \nu)\} h + 2(\vartheta - t_0) h \delta^{-1} + \{d_1 + d_3 + (\vartheta - t_0)(\nu d_3 + K_1)\}\delta.$$

Далее имеем (см. (2.1), (2.3))

$$\Big| \int_{\tau_q}^{t_1} (k(\tau_q) + \lambda \xi_q^h) u_q\, dt \Big| \leqslant \{k_1 + \lambda(d_1 + 1) d_2\}\delta.$$

В силу (2.2), (2.17), (2.6),

$$\Big| \int_{t_0}^{t_1} (k(t) + \lambda x_1(t)) u(t)\, dt - \sum_{i=1}^{q} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (k(\tau_{i-1}) + \lambda \xi_{i-1}^h) u_i\, dt \Big| \leqslant (k_1 + \lambda(d_1 + 1)) d_2 \delta + \tag{2.18}$$

$$+ \Big| \sum_{i=1}^{q} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \{k(t) - k(\tau_{i-1}) + \lambda(x_1(t) - \xi_{i-1}^h)\} u_i\, dt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant (k_1 + \lambda(d_1 + 1) d_2 \delta + \delta \sum_{i=1}^{q} \{\delta k + \lambda(h + \delta d_3) d_2\} \leqslant$$

$$\leqslant (k_1 + \lambda(d_1 + 1) d_2 \delta + (\vartheta - t_0)\{(k + \lambda d_2 d_3)\delta + \lambda d_2 h\} =$$

$$= \{k_1 + \lambda(d_1 + 1) d_2 + (\vartheta - t_0)(k + \lambda d_2 d_3)\}\delta + (\vartheta - t_0)\lambda d_2 h.$$

Справедливость леммы следует из (2.17), (2.18). Лемма доказана. □

Л е м м а 2.3 (см. [3, с. 54]). *Пусть* $T_* = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $u(\cdot) \in L_\infty(T_*;R)$, $v(\cdot) \in W(T_*;R)$,

$$\Big|\int_a^t u(\tau)\,d\tau\Big| \leqslant \varepsilon, \quad |v(t)| \leqslant K \quad \forall\, t \in T_*.$$

Тогда при всех $t \in T_*$ *верно неравенство*

$$\Big|\int_a^t u(\tau)v(\tau)\,d\tau\Big| \leqslant \varepsilon(K + \mathrm{var}(T_*; v(\cdot))).$$

Здесь символ $W(T_*;R)$ означает множество функций $y(\cdot)\colon T_* \to R$ с ограниченной вариацией.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Учитывая (2.7), заключаем, что при $i \in [1:m]$

$$|u_i^h| \leqslant \delta^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |x_2(t)|\,dt. \tag{2.19}$$

Поэтому, в силу (2.8), (2.19) при $i \in [1:m]$ также имеем

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |u^h(t)|^2\,dt \leqslant \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} |x_2^h(t)|^2\,dt.$$

Значит $|u^h(\cdot)|^2_{L_2(T;R)} \leqslant |x_2(\cdot)|^2_{L_2(T;R)}$. Отсюда получаем

$$|u^h(\cdot) - x_1(\cdot)|^2_{L_2(T;R)} \leqslant 2|x_2(\cdot)|^2_{L_2(T;R)} - 2(u^h(\cdot), x_2(\cdot))^2_{L_2(T;R)} = 2(x_2(\cdot) - u^h(\cdot), x_2(\cdot))_{L_2(T;R)}. \tag{2.20}$$

Воспользовавшись (2.20), получаем

$$|u^h(\cdot) - x_2(\cdot)|^2_{L_2(T;R)} \leqslant 2\int_0^\vartheta \{(k(t) + \lambda x_1(t))(u^h(\tau) - x_2(\tau))\}\{(k(t) + \lambda x_1(t))^{-1}x_2(t)\}\,d\tau.$$

В силу условия 2.1 a) верно неравенство

$$|(k(t) + \lambda x_1(t))^{-1}x_2(t)| \leqslant d_2c^{-1}.$$

Утверждение теоремы следует из последних двух неравенств, а также лемм 2.2 и 2.3. Теорема доказана. □

Таким образом, отображение U^h вида (2.7) решает задачу 1.1.

§ 3. Алгоритм решения задачи 1.2

Перейдем к решению второй задачи. Заметим, что в силу (1.2), (1.3), верны неравенства

$$|\xi_{1i}^h - x_1(\tau_i)| \leqslant h, \tag{3.1}$$

$$|\xi_{2i}^h - x_2(\tau_i)| \leqslant h, \tag{3.2}$$

Введем семейства множеств

$$\widetilde{V}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h) = \{v \in R\colon |v| \leqslant \gamma, |v - k(\tau_{i-1})\xi_{2i-1}^h - (\lambda\xi_{1i-1}^h + \mu)\xi_{2i-1}^h - (\xi_{2i}^h - \xi_{2i-1}^h)\delta^{-1}| \leqslant \sigma_h^{(2)}\},$$

где

$$\sigma_h^{(2)} = K_3h + K_4\delta + 2h\delta^{-1},$$

$$K_3 = k_1 + \mu + \lambda(1 + d_1 + d_2), \quad K_4 = kd_2 + (k_1 + \mu)d_4 + \lambda(d_2d_3 + d_4 + d_1d_4)\delta.$$

Алгоритм решения задачи 1.2 аналогичен описанному выше алгоритму решения задачи 1.1. Предполагаем, что на основании измерений ξ_i^h и ξ_{i-1}^h в момент τ_i построено замкнутое множество $\widetilde{V}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h)$. Следуя идеологии метода невязки, полагаем, что v_i^h — нормальный элемент из $\widetilde{V}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h)$:

$$v_i^h = \arg\min\{|v|\colon |v| \in \widetilde{V}^h(\tau_i, \xi_{i-1}^h, \xi_i^h)\}, \quad i \in [1:m]. \tag{3.3}$$

Тогда кусочно-постоянные управления $v^h(\cdot)$ на промежутке $\delta_{i,h}$ находятся по правилу

$$v^h(t) = v_i^h \quad \text{при} \quad t \in \delta_{i,h}, \quad i \in [1:m]. \tag{3.4}$$

Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $\delta(h) \to 0$, $h\delta^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *а управления* $v^h(\cdot)$ *находятся по правилу* (3.4). *Тогда*

$$v^h(\cdot) \to \gamma(\cdot) \quad \textit{в} \quad L_2(T;R) \quad \textit{при} \quad h \to 0.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть

$$Q_T(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T;R) \colon |v(t)| \leqslant \gamma \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\},$$

$$V(x(\cdot)) = \{v(\cdot) \in Q_T(\cdot) \colon \dot{x}_2(t) + k(t)x_2(t) + (\lambda x_1(t) + \mu)x_2(t) = v(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T\}.$$

$$V^h(\cdot) = \{v(\cdot) \in Q_T(\cdot) \colon v(t) = v_i \quad \text{при п.в.} \quad t \in [\tau_{i-1}, \tau_i),$$

$$v_i \in \widetilde{V}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i), \quad i \in [1:m]\}, \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{i,h},$$

Л е м м а 3.1. *Пусть* $v(\cdot) \in V(x(\cdot))$. *Тогда имеют место включения*

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(t)\,dt \in \widetilde{V}^h(\tau_i, \xi^h_{i-1}, \xi^h_i), \quad i \in [1:m].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f_2(t, x_1, x_2) = -k(t)x_2 - (\lambda x_1 + \mu)x_2$. Тогда при всех $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$\Phi_i(t) \equiv |f_2(t, x_1(t), x_2(t)) - f_2(\tau_{i-1}, \xi^h_{1i-1}, \xi^h_{2i-1})| \leqslant I^{(1)}_{i-1}(t) + I^{(2)}_{i-1}(t) + I^{(3)}_{i-1}(t),$$

где

$$I^{(1)}_{i-1}(t) = |k(t) - k(\tau_{i-1})||x_2(t)|,$$

$$I^{(2)}_{i-1}(t) = |k(\tau_{i-1})||x_2(t) - \xi^h_{2i-1}| + \mu|x_2(t) - \xi^h_{2i-1}|,$$

$$I^{(3)}_{i-1}(t) = \lambda|x_1(t)x_2(t) - \xi^h_{1i-1}\xi^h_{2i-1}|.$$

В силу (2.1), (2.2) верно неравенство

$$I^{(1)}_{i-1}(t) \leqslant kd_2\delta. \tag{3.5}$$

Кроме того, учитывая (3.2), (2.5), имеем при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$

$$|x_2(t)) - \xi^h_{2i-1})| \leqslant h + d_4\delta. \tag{3.6}$$

Поэтому из (2.3), (3.6) следует оценка

$$I^{(2)}_{i-1}(t) \leqslant (k_1 + \mu)(h + d_4\delta). \tag{3.7}$$

Заметим, что

$$|\xi^h_{1i-1}| \leqslant 1 + d_2. \tag{3.8}$$

Далее, воспользовавшись (2.1), (3.1), (3.6), (3.8), получаем

$$I^{(3)}_{i-1}(t) = \lambda|x_1(t)x_2(t) - \xi^h_{1i-1}\xi^h_{2i-1}| \leqslant \tag{3.9}$$

$$\leqslant \lambda|(x_1(t) - \xi^h_{1i-1})x_2(t)| + \lambda|\xi^h_{1i-1}(x_2(t) - \xi^h_{2i-1})| \leqslant \lambda d_2(h + d_3\delta) + \lambda(1 + d_1)(h + d_4\delta) =$$

$$= \lambda(1 + d_1 + d_2)h + \lambda(d_2d_3 + d_4 + d_1d_4)\delta.$$

Объединив (3.5), (3.7), (3.9), получаем

$$\Phi_i(t) \leqslant K_4\delta + K_3h. \tag{3.10}$$

Кроме того, в силу равенства

$$\delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_2(t, x_1(t), x_2(t))\,dt = \delta^{-1}(x_2(\tau_i) - x_2(\tau_{i-1})), \tag{3.11}$$

имеем
$$\Big|\delta^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_2(t,x_1(t),x_2(t))\,dt-\frac{\xi^h_{2i}-\xi^h_{2i-1}}{\delta}\Big|\leqslant 2\frac{h}{\delta}.$$
В таком случае, из (3.10), (3.11) вытекает, что каково бы ни было $v(\cdot)\in V(x(\cdot))$, верны неравенства
$$\Big|\delta^{-1}\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v(t)\,dt-[-k(\tau_{i-1})\xi^h_{2i-1}-(\lambda\xi^h_{i-1}+\mu)\xi^h_{2i-1}-(\xi^h_{2i}-\xi^h_{2i-1})\delta^{-1}]\Big|\leqslant\sigma^{(2)}_h,\quad i\in[1:m].$$
Лемма доказана. □

Л е м м а 3.2. *Пусть заданы последовательности* $\{h_j\}_{j=1}^\infty\subset R$, $\{v_j(\cdot)\}_{j=1}^\infty\subset Q_T(\cdot)$ *со свойствами:*
$$h_j\delta^{-1}(h_j)\to 0\quad \textit{при}\quad j\to\infty, \tag{3.12}$$
$$v_j(\cdot)\in V^{h_j}(\cdot),\quad v_j(\cdot)\to v_0(\cdot)\quad \textit{слабо в}\quad L_2(T;R)\quad \textit{при}\quad j\to\infty. \tag{3.13}$$
Тогда $v_0(\cdot)\in V(x(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, то есть $v_0(\cdot)\notin V(x(\cdot))$. Тогда найдутся $t_1,t_2\in T$, $t_1<t_2$, такие, что
$$\Big|\int_{t_1}^{t_2}(k(t)+\lambda x_1(t)+\mu)x_2(t)\,dt+x_2(t_2)-x_2(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}v_0(t)\,dt\Big|=b>0. \tag{3.14}$$
Пусть j_1 таково, что при всех $j\geqslant j_1$ и всех $t_*,t^*\in T$ таких, что $0\leqslant t^*-t_*\leqslant\delta(h_j)$ верны неравенства
$$\Big|\int_{t_*}^{t^*}(k(t)+\lambda x_1(t)+\mu)x_2(t)\,dt\Big|\leqslant b/8,\quad \Big|x_2(t_*)-x_2(t^*)-\int_{t_*}^{t^*}v_0(t)\,dt\Big|\leqslant b/8. \tag{3.15}$$
Обозначим $p_j=\min\{t\in\Delta_{h_j}\colon t\leqslant t_2\}$, $q_j=\max\{t\in\Delta_{h_j}\colon t\leqslant t_2\}$. Из (3.14), (3.15) при $j\geqslant j_1$ получаем
$$\Big|\int_{p_j}^{q_j}\{(k(t)+\lambda x_1(t)+\mu)x_2(t)+\dot x_2(t)-v_0(t)\}\,dt\Big|\geqslant b/2.$$
В таком случае при $j\geqslant j_1$
$$\sum_{q=1}^{3}I_j^{(q)}\geqslant b/2, \tag{3.16}$$
где
$$I_j^{(1)}=\Big|\int_{p_j}^{q_j}(v_j(t)-v_0(t))\,dt\Big|,$$
$$I_j^{(2)}=\Big|\int_{p_j}^{q_j}\{(k(t)+\lambda x_1(t)+\mu)x_2(t)+\dot x_2(t)\}\,dt-$$
$$-\sum_{i=p_j}^{q_{j-1}}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{k(\tau_{i-1})\xi^{h_j}_{2i-1}+(\lambda\xi^{h_j}_{1i-1}+\mu)\xi^{h_j}_{2i-1}+(\xi^{h_j}_{2i}-\xi^{h_j}_{2i-1})\delta^{-1}(h_j)\}\,dt\Big|,$$
$$I_j^{(3)}=\Big|\sum_{i=p_j}^{q_{j-1}}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{k(\tau_{i-1})\xi^{h_j}_{2i-1}+(\lambda\xi^{h_j}_{1i-1}+\mu)\xi^{h_j}_{2i-1}+(\xi^{h_j}_{2i}-\xi^{h_j}_{2i-1})\delta^{-1}(h_j)\}\,dt-\int_{p_j}^{q_j}v_j(t)\}\,dt\Big|.$$
В силу (3.13), имеет место сходимость
$$I_j^{(1)}\to 0\quad\text{при}\quad j\to\infty. \tag{3.17}$$
В свою очередь, учитывая (3.10), (2.6), (3.2), (3.12), заключаем, что
$$I_j^{(2)}\to 0\quad\text{при}\quad j\to\infty. \tag{3.18}$$

Кроме того, ввиду включения $v_j(\cdot) \in V^{h_j}(\cdot)$ имеем

$$v_j(t) = v_{ij} \in \widetilde{V}^{h_j}(\tau_i, \xi_{i-1}^{h_j}, \xi_i^{h_j}) \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

То есть

$$|v_{ij} - \{(k(\tau_{i-1}) + \lambda\xi_{1i-1}^{h_j} + \mu)\xi_{2i-1}^{h_j} + (\xi_{2i}^{h_j} - \xi_{2i-1}^{h_j})\delta^{-1}(h_j)\}| \leqslant \sigma_{h_j}^{(2)}. \tag{3.19}$$

В таком случае из (3.19) выводим

$$\Big| \int_{p_j}^{q_{j-1}} v_j(t)\,dt - \sum_{i=p_j}^{q_{j-1}} \{k(\tau_{i-1})\xi_{2i-1}^{h_j} + (\lambda\xi_{1i-1}^{h_j} + \mu)\xi_{2i-1}^{h_j} + (\xi_{2i}^{h_j} - \xi_{2i-1}^{h_j})\delta^{-1}\}\Big| \leqslant (\vartheta - t_0)\sigma_{h_j}^{(2)}. \tag{3.20}$$

В силу (3.20)

$$I_j^{(3)} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.21}$$

Однако соотношения (3.17), (3.18), (3.21) противоречат (3.16). Лемма доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Пусть

$$\widetilde{v}_h(t) = \begin{cases} v^h(t+\delta) & \text{при} \quad t \in [0, \vartheta - \delta), \\ v_{m_h}^h & \text{при} \quad t \in [\vartheta - \delta, \vartheta]. \end{cases}$$

Докажем сначала, что $\widetilde{v}_h(\cdot) \to \gamma(\cdot)$ при $h \to 0$ в $L_2(T; R)$. Достаточно показать, что для произвольной последовательности $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$, $h_j > 0$, $h_j \to 0$ при $j \to \infty$, имеет место сходимость

$$\widetilde{v}_{h_j}(\cdot) \to \gamma(\cdot) \quad \text{в} \quad L_2(T; R) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Предполагая противное, заключаем, что найдется подпоследовательность (обозначим ее символом $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$) последовательности $\{\widetilde{v}_{h_j}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$u_j(\cdot) \to u_0(\cdot) \neq \gamma(\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_2(T; R) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{3.22}$$

Пусть $\delta_j = \delta(h_j)$,

$$\overline{u}_j(t) \equiv u_{j,i} = \delta_j^{-1} \int_{\tau_{i,h_j}}^{\tau_{i+1,h_j}} \gamma(t)\,dt \quad \text{при} \quad t \in [\tau_{i,h_j}, \tau_{i+1,h_j}). \tag{3.23}$$

По лемме 3.1 $u_{j,i} \in \widetilde{V}^{h_j}(\tau_i, \xi_{i-1}^{h_j}, \xi_i^{h_j})$. Значит $\overline{u}_j(\cdot) \in V^{h_j}(\cdot)$. В силу правила выбора элементов v_i^h, имеем

$$|u_j(\cdot)|_{L_2(T;R)} \leqslant |\overline{u}_j(\cdot)|_{L_2(T;R)}. \tag{3.24}$$

Учитывая (3.23), выводим

$$|\overline{u}_j(\cdot)|^2_{L_2([\tau_i,\tau_{i+1});R)} = \delta_j |u_{j,i}|^2 \leqslant \delta_j^{-1}\Big(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\gamma(t)|\,dt\Big)^2 \leqslant \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\gamma(t)|^2\,dt = |\gamma(\cdot)|^2_{L_2([\tau_i,\tau_{i+1});R)}.$$

Поэтому

$$|\overline{u}_j(\cdot)|_{L_2(T;R)} \leqslant |\gamma(\cdot)|_{L_2(T;R)}. \tag{3.25}$$

Объединяя (3.24) и (3.25), заключаем

$$|u_j(\cdot)|_{L_2(T;R)} \leqslant |\gamma(\cdot)|_{L_2(T;R)}.$$

Следовательно,

$$\limsup_{j\to\infty} |u_j(\cdot)|_{L_2(T;R)} \leqslant |\gamma(\cdot)|_{L_2(T;R)}. \tag{3.26}$$

Кроме того, по свойству слабого предела

$$\liminf_{j\to\infty} |u_j(\cdot)|_{L_2(T;R)} \geqslant |u_0(\cdot)|_{L_2(T;R)}.$$

Отсюда и из (3.26) следует

$$|u_0(\cdot)|_{L_2(T;R)} \leqslant |\gamma(\cdot)|_{L_2(T;R)}.$$

Далее, в силу леммы 3.2, $u_0(\cdot) \in V(x(\cdot))$. Поэтому $u_0(\cdot) = \gamma(\cdot)$, что противоречит (3.22). Таким образом, $\widetilde{v}_h(\cdot) \to \gamma(\cdot)$ при $h \to 0$ в $L_2(T;R)$.

Теперь докажем утверждение теоремы. Имеем

$$\int_0^{\vartheta} |v^h(t) - \gamma(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{\delta} |\gamma(t) - v_0^h|^2\,dt + 2\int_{\delta}^{\vartheta} |\widetilde{v}_h(t-\delta) - \gamma(t-\delta)|^2\,dt + 2\int_{\delta}^{\vartheta} |\gamma(t-\delta) - \gamma(t)|^2\,dt.$$

Поскольку $\gamma(\cdot) \in L_2(T;R)$, $|v_0^h| \leqslant \gamma$, то первое и третье слагаемые в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Второе слагаемое не превосходит величины $2|\widetilde{v}_h(\cdot) - \gamma(\cdot)|^2_{L_2(T;R)}$, которая в силу доказанной сходимости бесконечно мала при $h \to 0$. Теорема доказана. □

Таким образом отображение V^h вида (3.3) решает задачу 1.2.

З а м е ч а н и е 1. Необходимо отметить, что доказательства теорем 2.1 и 3.1 принципиально различаются. При доказательстве теоремы 2.1 используется тот факт, что функция $x_2(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации, поэтому применима лемма 2.3. А во втором алгоритме мы не предполагаем какой-либо гладкости функции $\gamma(\cdot)$.

Список литературы

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
3. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 304 с.
4. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Метод экстремального сдвига Н. Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. Вып. 4. С. 18–30. http://mi.mathnet.ru/at447
5. Максимов В.И., Осипов Ю.С. О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 1. С. 16–28. https://doi.org/10.7868/S0044466916010142
6. Osipov Yu., Pandolfi L., Maksimov V. Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2001. Vol. 9. Issue 2. P. 149–162. https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.2.149
7. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. О методах позиционного моделирования управления в динамических системах // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем: сб. науч. трудов. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 34–44.
8. Максимов В.И. Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 2. С. 297–307. http://mi.mathnet.ru/zvmmf893
9. Близорукова М.С. О моделировании входа в системе с запаздыванием // Прикладная математика и информатика: Тр. фак-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 2000. № 5. С. 105–115.
10. Максимов В.И. Позиционное моделирование управлений и начальных функций для систем Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 618–629. http://mi.mathnet.ru/de6168
11. Maksimov V.I., Blizorukova M.S. On robust on-line parameter reconstruction technique // Appl. Comput. Math. 2008. Vol. 7. No. 2. P. 223–234. http://acmij.az/view.php?lang=az&menu=journal&id=216
12. Максимов В.И. Моделирование неизвестных возмущений в нелинейных параболических системах вариационных неравенств // Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 157–162.

13. Maksimov V.I. Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems // Control and Cybernetics. 1996. Vol. 25. No. 3. P. 465–481.
http://control.ibspan.waw.pl:3000/contents/export?filename=1996-3-06_maksimov.pdf
14. Bertuglia C.S., Lombado S., Nijkamp P. Innovation behavior in space and time. Berlin: Springer, 1997.
15. Максимов В.И., Розенберг В.Л. Методы математического моделирования динамических процессов, связанных с окружающей средой. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 195 с.
16. Kryazhimskii A., Maksimov V. On identification of nonobservable contamination inputs // Environ. Model. Softw. 2005. Vol. 20. P. 1057–1061. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2004.09.014
17. Близорукова М.С., Капустян В.Е., Максимов В.И. О применении методов управления по принципу обратной связи к исследованию двух эколого-экономических моделей // Прикладная математика и информатика: Тр. фак-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 2013. № 44. С. 22–34.
18. Близорукова М.С. Об одной модификации динамического метода невязки // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 21–22.
https://doi.org/10.20537/vm080208
19. Близорукова М.С. О реконструкции траектории и управления в нелинейной системе второго порядка // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 17–26.
http://mi.mathnet.ru/timm668
20. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. Построение оптимальных законов управления для модели диффузии информации в социальной среде // Прикладная математика и информатика: Тр. фак-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 2009. № 4. С. 4–33.
21. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. Модели диффузии информации в социальной группе: построение оптимальных программ // Проблемы динамического управления: Тр. фак-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М., 2010. № 5. С. 5–27.
22. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. Модель диффузии информации в социальной группе с возможными особыми режимами на бесконечном горизонте планирования // Проблемы динамического управления: Тр. фак-та ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова. М.: МАКС Пресс, 2012. № 6. С. 189–196.

Поступила в редакцию 10.02.2019

Близорукова Марина Сергеевна, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: msb@imm.uran.ru

M. S. Blizorukova

The dynamical discrepancy method in problems of reconstructing unknown characteristics of a second-order system

Citation: *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 53, pp. 48–60 (in Russian).

Keywords: dynamical reconstruction, part of coordinates, nonlinear differential equations.

MSC2010: 37N40, 93B52

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-05

This paper considers two problems of dynamical reconstruction of unknown characteristics of a system of nonlinear equations describing the process of innovation diffusion through inaccurate measurements of phase states. A dynamical variant for solving these problems is designed. The system is assumed to operate on a given finite time interval. The evolution of the system's phase state, i.e., the solution of the system, is determined by an unknown input. A precise reconstruction of the real input (acting on the system) is, generally speaking, impossible due to inaccurate measurements. Therefore, some approximation to this input is constructed which provides an arbitrary

smallness to the real input if the measurement errors and the step of incoming information are sufficiently small. Based on the dynamical version of the discrepancy method, two algorithms for solving the problems in question are specified. One of them is oriented to the case of measuring all coordinates of the phase vector, and the other, to the case of incomplete measurements. The algorithms suggested are stable with respect to informational noises and computational errors. Actually, they are special regularizing algorithms from the theory of dynamic inverse problems.

REFERENCES

1. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions*, Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
2. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. *Metody dinamicheskogo vosstanovleniya vkhodov* (The methods of dynamical reconstruction of inputs), Yekaterinburg: Izd-vo Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2011, 292 p.
3. Maksimov V.I. *Dynamic inverse problems of distributed systems*, Utrecht: VSP, 2002, 269 p.
4. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. N.N. Krasovskii's extremal shift method and problems of boundary control, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, issue 4, pp. 577–588. https://doi.org/10.1134/S0005117909040043
5. Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, issue 1, pp. 14–25. https://doi.org/10.1134/S0965542516010139
6. Osipov Yu., Pandolfi L., Maksimov V. Problems of dynamical reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions, *J. Inverse and Ill-Posed Problems*, 2001, vol. 9, issue 2, pp. 149–162. https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.2.149
7. Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S. O metodakh pozitsionnogo modelirovaniya upravleniya v dinamicheskikh sistemakh, *Qualitative questions of the theory of differential equations and control systems: Transactions*, Sverdlovsk: Ural. Otd. Akad. Nauk USSR, 1988, pp. 34–44 (in Russian).
8. Maksimov V.I. The dynamical decoupled method in the input reconstruction problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 278–288.
9. Blizorukova M.S. Input modeling in time-delayed systems, *Computational Mathematics and Modeling*, 2001, vol. 12, no. 2, pp. 174–185. https://doi.org/10.1023/A:1012518317520
10. Maksimov V.I. Positional modeling of controls and initial functions for Volterra systems, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 618–629 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de6168
11. Maksimov V.I., Blizorukova M.S. On robust on-line parameter reconstruction technique, *Appl. Comput. Math.*, 2008, vol. 7, no. 2, pp. 223–234. http://acmij.az/view.php?lang=az&menu=journal&id=216
12. Maksimov V.I. Simulation of unknown perturbations in nonlinear parabolic systems of variational inequalities, *Tekhnicheskhaya Kibernetika*, 1992, no. 1, pp. 157–162 (in Russian).
13. Maksimov V.I. Some dynamical inverse problems for hyperbolic systems, *Control and Cybernetics*, 1996, vol. 25, no. 3, pp. 466–481. http://control.ibspan.waw.pl:3000/contents/export?filename=1996-3-06_maksimov.pdf
14. Bertuglia C.S., Lombado S., Nijkamp P. *Innovation behavior in space and time*, Berlin: Springer, 1997.
15. Maksimov V.I., Rosenberg V.L. *Metody matematicheskogo modelirovaniya dinamicheskikh protsessov, svyazannykh s okruzhayushchei sredoi* (Methods of mathematical modeling of dynamic processes associated with the environment), Yekaterinburg: Izd-vo Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2009, 195 p.
16. Kryazhimskii A., Maksimov V. On identification of nonobservable contamination inputs, *Environ. Model. Softw.*, 2005, vol. 20, pp. 1057–1061. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2004.09.014
17. Blizorukova M.S., Kapustyan V.E., Maksimov V.I. Application of feedback control methods to two models in environmental economics, *Computational Mathematics and Modeling*, 2014, vol. 25, issue 4, pp. 459–469. https://doi.org/10.1007/s10598-014-9240-3
18. Blizorukova M.S. On a modification of the dynamical discrepancy method, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 2, pp. 21–22 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080208
19. Blizorukova M.S. On the reconstruction of the trajectory and control in a nonlinear second-order system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 1-11. https://doi.org/10.1134/S008154381109001X

20. Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N. Optimal control laws for the model of information diffusion in a social group, *Computational Mathematics and Modeling*, 2011, vol. 22, issue 3, pp. 288–341. https://doi.org/10.1007/s10598-011-9104-z
21. Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N. Models of information diffusion in a social group: construction of optimal programs, *Computational Mathematics and Modeling*, 2016, vol. 27, issue 3, pp. 327–350. https://doi.org/10.1007/s10598-016-9325-2
22. Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N. Information diffusion model in a social group with possible special regimes on an infinite planning horizon, *Problemy dinamicheskogo upravleniya: sbornik statei* (Problems of dynamic control: Transactions), Moscow: MAKS Press, 2012, issue 6, pp. 189–196 (in Russian).

Received 10.02.2019

Blizorukova Marina Sergeevna, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Leading Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: msb@imm.uran.ru