Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 53

УДК 519.6

© ***А. Г. Ченцов***

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ: ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Исследуются ультрафильтры и максимальные сцепленные системы, элементами которых являются множества фиксированной π-системы с «нулем» и «единицей». Ультрафильтры являются максимальными сцепленными системами, но среди последних могут быть системы, не являющиеся ультрафильтрами. В работе особое внимание уделяется описанию множества максимальных сцепленных систем, не являющихся ультрафильтрами (в статье они именуются собственными). По своим свойствам данные (максимальные сцепленные) системы существенно отличаются от ультрафильтров. Получены необходимые и достаточные условия существования упомянутых систем (имеются в виду условия на исходную π-систему), а также некоторые топологические свойства, характеризующие множество всех максимальных сцепленных систем упомянутого типа. При этом для построения соответствующего оснащения, как и в случае ультрафильтров, применяются схемы, восходящие к процедурам, используемым при построении расширения Волмэна и компактов Стоуна; упомянутые схемы реализуются, однако, в случае, когда предваряющая измеримая (по смыслу) структура задается π-системой общего вида. Это позволяет, в частности, охватить единой конструкцией процедуры построения пространств ультрафильтров и максимальных сцепленных систем в измеримых и топологических пространствах. В рамках данной конструкции естественным образом возникают битопологические пространства, отвечающие волмэновскому и стоуновскому вариантам оснащения, первое из которых в случае максимальных сцепленных систем приводит к реализации суперкомпактного T_1-пространства. Указаны примеры, в которых все максимальные сцепленные системы являются ультрафильтрами, что соответствует реализации суперкомпактного пространства ультрафильтров при использованиии топологии волмэновского типа.

Ключевые слова: битопологическое пространство, максимальная сцепленная система, ультрафильтр.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-12

Введение

Статья продолжает серию работ автора в области изучения структуры ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) и максимальных сцепленных систем (МСС) этих ИП. При этом каждое из упомянутых ИП определяется посредством задания π-системы [1, с. 14] на непустом множестве, именуемом «единицей» данного пространства (пустое множество традиционно рассматривается в качестве «нуля»). Мы рассматриваем π-системы (имеются в виду семейства множеств, замкнутые относительно конечных пересечений) с «нулем» и «единицей». В частности, это могут быть решетки множеств (с «нулем» и «единицей»). Среди последних отметим особо алгебры множеств, (открытые) топологии и семейства замкнутых множеств (замкнутые топологии) в топологических пространствах (ТП).

В то же время в топологии широко используются фильтры и, в частности, максимальные фильтры (или у/ф), не связываемые требованием принадлежности множеств — элементов фильтра — какой либо нетривиальной π-системе; иными словами, рассматриваются фильтры и у/ф семейства всех подмножеств (п/м) «единицы»; см. [2, гл. I]. Однако, при построении расширения Волмэна [3, гл. 3] уже возникает необходимость в привлечении семейства множеств, отличного в типичных случаях от семейства всех п/м «единицы». А именно: используются у/ф семейства замкнутых множеств в ТП, удовлетворяющем аксиоме T_1. Упомянутое семейство (замкнутая топология) образует решетку множеств и, в частности, π-систему.

С другой стороны, при построении пространств Стоуна (в теории булевых алгебр, см. [4]) используются фильтры и, в частности, у/ф той или иной алгебры множеств (в этой связи отметим исследования, проводимые в Ижевске А. А. Грызловым и его учениками; см. [5–7]). Следовательно, здесь возникает другой вариант решетки — алгебра множеств и, соответственно, ИП с алгеброй множеств. Разумеется, мы имеем здесь, в частности, реализацию π-системы. Однако, полуалгебра множеств, широко используемая в теории вероятностей (см., например, [8, гл. 1]), решеткой уже, вообще говоря, не является, но является π-системой. В силу упомянутых обстоятельств представляется, что именно структуры на основе π-систем определяют достаточно общий класс (широко понимаемых) ИП, охватывающий многие постановки задач, возникающих в топологии, теории меры, теории булевых алгебр (позднее отметим еще некоторые обстоятельства, касающиеся применения упомянутых широко понимаемых ИП при построении расширений экстремальных задач и задач о достижимости).

Исключительно важную роль в самых разных разделах современной математики играют компактность и свойства типа компактности; в этой связи см. [9]. В то же время у многих ТП, возникающих при формализации прикладных задач, упомянутые свойства отсутствуют (нередко отсутствует и само топологическое оснащение). Возникает проблема построения корректных расширений (этих задач) с целью «добиться» компактности пространства решений или какого-либо аналога компактности (например, секвенциальной компактности). Один из очень общих способов такого рода состоит в том, чтобы исходное множество обычных решений погрузить в подходящее пространство семейств п/м данного множества (имеются, конечно, и другие варианты; см., например, [10, 11]). В качестве таких семейств оказалось возможным использовать у/ф. Здесь ситуация аналогична расширениям ТП; имеются в виду стоун–чеховская компактификация и расширение Волмэна. Однако, если иметь в виду у/ф семейства всех п/м ТП (один из вариантов стоун–чеховской компактификации), то наиболее важные для данных построений свободные у/ф (см. [3, § 3.6]) не допускают, к сожалению, конструктивного описания (само их существование устанавливается с использованием леммы Цорна).

В то же время для некоторых π-систем уже удается указать исчерпывающее описание множества всех у/ф данной π-системы (см., в частности, [12], где в качестве π-системы использовалась алгебра п/м невырожденного промежутка вещественной прямой). Итак, обращение к у/ф π-систем имеет здесь своей целью получение описания множества всех у/ф, что сводится, в свою очередь, к описанию свободных у/ф (то есть у/ф, для которых пересечение всех множеств, составляющих данный у/ф, пусто).

Учитывая ту роль, которую играют у/ф, вполне естественна постановка вопроса о компактности при естественных вариантах оснащения, определяемых схемами Волмэна и Стоуна. Эти схемы применялись, конечно, в специальных случаях. Так, схема Волмэна оперировала с у/ф решетки замкнутых множеств в T_1-пространстве. Схеме Стоуна отвечают у/ф алгебры множеств. В обоих случаях достигается компактность получающихся ТП.

Важно отметить, что и в общем случае π-системы обе вышеупомянутые схемы работают, то есть позволяют оснащать множество у/ф соответствующими топологиями (см., в частности, [13]). Свойство компактности также сохраняется при некоторых естественных условиях. При этом «угадывается» и объемлющее (по отношению к у/ф) множество, а именно: множество всех МСС, элементами которых являются всякий раз множества из соответствующей π-системы. Более того, при оснащении топологией волмэновского типа в общем случае π-системы реализуется суперкомпактное [14, гл. 7] ТП (оно, в частности, компактно).

Понятие суперкомпактности связывается обычно с процедурой суперрасширения ТП (см. [14–17]); имеется в виду построение по исходному суперкомпактного ТП, точками которого являются МСС замкнутых множеств. Само свойство суперкомпактности произвольного ТП определяется фактом существования (открытой) предбазы со свойством: у всякого покрытия пространства множествами данной предбазы существует бинарное подпокрытие.

Суперрасширение в волмэновском оснащении как раз и обладает таким свойством.

Оказалось [13, 18, 19], что конструкции, подобные суперрасширению в его традиционном варианте [14–17], реализуются по отношению к МСС произвольной π-системы. Важную роль, роль промежуточного этапа, в рамках этих более общих построений сыграли решетки множеств (см. [19]). В данных построениях, наряду с топологией волмэновского типа, использовалась схема, идейно соответствующая конструкциям Стоуна; будем для краткости именовать данное оснащение стоуновским. Две получающиеся топологии оказываются сравнимыми; реализуется битопологическое пространство (БТП), точками которого являются МСС. Аналогичное БТП реализуется и в случае у/ф (имеется в виду БТП, точками которого являются у/ф). Было показано [18, 19], что последнее БТП является подпространством БТП, точками которого являются МСС: стоуновская топология на множестве у/ф индуцируется стоуновской топологией на множестве МСС и аналогичное свойство реализуется для топологий волмэновского типа.

В [18, 19] указаны случаи, когда вышеупомянутые БТП вырождаются (стоуновская и волмэновская топологии совпадают). В то же время указаны условия, когда упомянутые БТП не вырождены: стоуновская и волмэновская топологии различаются. Вместе с тем они (в общем случае) близки с точки зрения свойств, касающихся погружения обычных решений (точек исходного множества) в пространство у/ф. Исследование данного погружения представляет интерес с точки зрения решения задач о достижимости в ТП при ограничениях асимптотического характера (ОАХ); см. в этой связи [13, 20–22]. Заметим, что упомянутые ОАХ могут возникать в задачах управления при ослаблении стандартных ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). Вместе с тем, ОАХ могут возникать и изначально (см., в частности, [23–26]; подчеркнем,что при построении расширения задач управления с ограничениями импульсного характера в [23–25] использовалось представление множества у/ф естественной алгебры п/м невырожденного промежутка вещественной прямой, полученное ранее в [12]). Упомянутые обстоятельства, связанные с расширением задач о достижимости при ОАХ, мотивируют специальное исследование у/ф широко понимаемых ИП и изучение МСС как элементов объемлющего (по отношению к у/ф) пространства. Настоящая работа использует конструкции [13, 18, 19] и является непосредственным продолжением [27].

§ 1. Общие понятия

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами; в дальнейшем семейства являются основными объектами рассмотрения. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x; y\}$ есть def множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Для произвольного объекта z полагаем $\{z\} \triangleq \{z; z\}$, получая синглетон, содержащий z (итак, $z \in \{z\}$ есть единственный элемент множества $\{z\}$). Для произвольных объектов x, y и z получаем, что $\{x; y; z\} \triangleq \{x; y\} \cup \{z\} = \{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$.

Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех п/м X и полагаем, что $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, получая семейство всех непустых конечных п/м X. В качестве X может, конечно, использоваться семейство. Если $\mathfrak{X}$ – непустое семейство, то (см. [13, 18, 19])

$$\begin{gathered}\{\cup\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\}, \quad \{\cap\}(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{X}} X : \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\}, \\ \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcup_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\}, \quad \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \triangleq \{\bigcap_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\};\end{gathered} \tag{1.1}$$

каждое из упомянутых четырех семейств содержит $\mathfrak{X}$ и содержится в семействе всех п/м объединения множеств из $\mathfrak{X}$. Операции над семействами, указанные в (1.1), могут комбинироваться. Произвольным множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ его п/м сопоставляется семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \overset{\triangle}{=} \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})),$$

двойственное к $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathbf{C}_S[\mathbf{C}_S[\mathcal{S}]] = \mathcal{S}$, где S — множество и $\mathcal{S} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S))$. Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство, а S — множество, то

$$(\mathcal{H}|_S \overset{\triangle}{=} \{H \cap S :\ H \in \mathcal{H}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(S)))\,\&\,([\mathcal{H}](S) \overset{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{H} | S \subset H\} \in \mathcal{P}(\mathcal{H})).$$

Непустому множеству $\mathbb{X}$ и семейству $\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{X}))$ сопоставляем семейство (возможно пустое)

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}] \overset{\triangle}{=} \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{X}) | \mathbb{X} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{X}))$$

всех покрытий $\mathbb{X}$ множествами из $\mathcal{X}$. Среди покрытий такого рода выделяем бинарные, для которых $\chi \in (\mathrm{COV})[\mathbb{X}|\mathcal{X}]$ имеет вид $\chi = \{X_1; X_2\}$, где $X_1 \in \mathcal{X}$ и $X_2 \in \mathcal{X}$.

Как обычно через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \overset{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ (натуральный ряд); при $n \in \mathbb{N}$ полагаем $\overline{1, n} \overset{\triangle}{=} \{s \in \mathbb{N} | s \leqslant n\}$ и для всякого множества T через T^n обозначаем множество всех отображений из $\overline{1, n}$ в T, получая фактически множество всех упорядоченных n-к в T (кортежей «длины» n с элементами из T).

Специальные семейства. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Семейство всех π-систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей» есть

$$\pi[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\};$$

называем отделимыми π-системы из семейства

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \exists\, \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}.$$

При $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ и $L \in \mathcal{I}$ в виде $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ имеем непустое подсемейство $\mathcal{P}(\mathbf{I})$, пересечение всех множеств данного подсемейства содержит L; множества из $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)$ называем квазиокрестностями L. В виде

$$\pi^{\natural}[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)} \Lambda \in \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]\ \forall L \in \mathcal{I}\} =$$
$$= \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{I}\ \exists\, \Lambda_0 \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L) : \Lambda_0 \subset \Lambda\ \ \forall \Lambda \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\mathcal{I}]](L)\}$$

имеем семейство всех π-систем с наименьшими квазиокрестностями всех своих множеств. Отметим, что

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathfrak{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathfrak{L}\ \forall A \in \mathfrak{L}\ \forall B \in \mathfrak{L}\} = \tag{1.2}$$
$$= \{\mathfrak{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | (\varnothing \in \mathfrak{L})\&(\mathbf{I} \in \mathfrak{L})\&(\forall A \in \mathfrak{L}\ \forall B \in \mathfrak{L}\ \ (A \cup B \in \mathfrak{L})\&(A \cap B \in \mathfrak{L}))\}$$

есть множество всех решеток п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Тогда (см. (1.2))

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] | \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\} = \{\mathcal{A} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}])$$

есть семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$; если $\mathcal{J} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I}, \mathcal{J})$ есть ИП с алгеброй множеств. В виде

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

имеем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; при $\mathbf{t} \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \mathbf{t})$ имеем ТП. Наконец,

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{F} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\} = \{\mathbf{C_I}[\tau] : \ \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$$

есть семейство всех замкнутых топологий (см. [28, с. 98]) на $\mathbf{I}$. В виде

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) | \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\} \ \forall \mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$$

имеем семейства, элементами которых являются всевозможные центрированные подсемейства соответствующей π-системы.

Базы и предбазы ТП. В дальнейшем используются базы и предбазы (открытые и замкнутые) соответствующих ТП. Однако сначала введем семейства

$$(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B) \ \& \ (\forall B_1 \in \beta \ \forall B_2 \in \beta \ \forall x \in B_1 \cap B_2 \ \exists B_3 \in \beta : \\ (x \in B_3) \ \& \ (B_3 \subset B_1 \cap B_2))\},$$

$$(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} \in \beta) \ \& \ (\bigcap_{B \in \beta} B = \varnothing) \\ \& \ (\forall B_1 \in \beta \ \forall B_2 \in \beta \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2) \ \exists B_3 \in \beta : (B_1 \cup B_2 \subset B_3) \ \& \ (x \notin B_3))\},$$

элементами которых являются всякий раз базы (открытые и замкнутые соответственно) некоторой топологии на $\mathbf{I}$. Ясно, что $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $\{\cap\}(\hat{\beta}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}]$ при $\hat{\beta} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$((\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\}) \\ \& \ ((\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\beta \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \mathbf{C_I}[\tau] = \{\cap\}(\beta)\})$$

(введены семейства, являющиеся открытыми и замкнутыми базами ТП $(\mathbf{I}, \tau)$). В дальнейшем важную роль играют предбазы топологий; в этой связи полагаем сначала, что

$$((\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cap\}_\sharp(\mathbf{x}) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mathbf{x}} \mathbb{X}\}) \\ \& \ ((\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\});$$

тем самым введены семейства предбаз открытых и замкнутых множеств (имеется в виду открытость и замкнутость в некоторой топологии на $\mathbf{I}$). Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то определяем предбазы открытых и замкнутых множеств в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$:

$$((\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\}) \\ \& \ ((\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau] \stackrel{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\}).$$

Для $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$ полагаем, что $N^0_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \tau | x \in G\}$ и

$$N_\tau(x) \stackrel{\triangle}{=} \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) | \exists G \in N^0_\tau(x) : \ G \subset H\}$$

(фильтр окрестностей x в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; см. [2, гл. I]); при этом

$$\tau = \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) | G \in N_\tau(y) \ \ \forall y \in G\}. \tag{1.3}$$

Кроме того, полагаем при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$, что $\mathrm{cl}(A, \tau)$ есть def замыкание множества A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$: $\mathrm{cl}(A, \tau) \stackrel{\triangle}{=} \{x \in \mathbf{I} | A \cap H \neq \varnothing \ \forall H \in N_\tau(x)\}$.

В связи с использованием суперкомпактных ТП (см. [14–17]) введем следующее обозначение, в виде

$$
\begin{gathered}
((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \\
\forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \mathcal{S}]\ \exists G_1 \in \mathcal{G}\ \exists G_2 \in \mathcal{G} : \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}
\end{gathered}
$$

имеем [13, (5.2)] семейство всех топологий, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП. Если выполнено включение $\tau \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I},\tau)$ есть T_2-пространство (см. [3, 1.5]), то $(\mathbf{I},\tau)$ называют [9, 14–17] суперкомпактом.

§ 2. Ультрафильтры π-систем

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E и рассматриваем π-системы из $\pi[E]$ (по мере надобности будут вводится те или иные дополнительные предположения). В пределах настоящего параграфа фиксируем π-систему $\mathcal{I} \in \pi[E]$; рассматриваем $(E,\mathcal{I})$ как широко понимаемое ИП. В виде

$$
\begin{gathered}
\mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I} \setminus \{\varnothing\}) | (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F})\,\&\,(\forall F \in \mathcal{F}\ \forall I \in \mathcal{I} \\
(F \subset I) \Longrightarrow (I \in \mathcal{F}))\}
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

имеем семейство всех фильтров ИП $(E,\mathcal{I})$. При $x \in E$ имеем

$$
(\mathcal{I}-\mathrm{triv})[x] \triangleq \{I \in \mathcal{I} | x \in I\} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \tag{2.2}
$$

(тривиальный фильтр, соответствующий точке x). Максимальные фильтры называем у/ф; тогда

$$
\begin{aligned}
\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I})\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I}) \mid \forall I \in \mathcal{I}\ \ (I \cap U \neq \varnothing\ \forall U \in \mathcal{U}) \Longrightarrow (I \in \mathcal{U})\} \\
&= \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] \mid \forall \mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]\ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{V}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{V})\}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

есть семейство всех у/ф ИП $(E,\mathcal{I})$. Легко видеть, что

$$
((\mathcal{I}-\mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})\ \forall x \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[E]);
$$

см. [29, (5.9)]. Напомним кратко основные свойства фильтров и у/ф (подробнее см. [13, раздел 3]). Так,

$$
\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I})\ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I}) :\ \mathcal{F} \subset \mathcal{U} \tag{2.4}
$$

(если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[E]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^\star(\mathcal{I})$, то пересечение всех у/ф $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})$ со свойством $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ совпадает с $\mathcal{F}$). Из (2.2) и (2.4) имеем, что $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I}) \neq \varnothing$. Пусть $\Phi_{\mathcal{I}}(I) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I}) | I \in \mathcal{U}\}$ $\forall I \in \mathcal{I}$. Тогда

$$
(\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{I}}(I) :\ I \in \mathcal{I}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})] \tag{2.5}
$$

и, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})]$, а потому

$$
\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^\star[E] \triangleq \{\cup\}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})]; \tag{2.6}
$$

отметим, что в виде

$$
(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^\star[E]) \tag{2.7}
$$

реализуется нульмерное [3, 6.2] T_2-пространство; в силу (2.6)

$$
(\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}] \in (\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^\star[E]-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{I})]
$$

(итак, (2.5) есть открытая база ТП (2.7)), причем

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}] \subset \mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{I}}[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I})}[\mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{I}}[E]] \tag{2.8}$$

(если $\mathcal{I} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (2.7) есть нульмерный компакт (компактное T_2-пространство), а (2.8) превращается в равенство; см. [26, замечание 3.3]). Топологию (2.6) условимся называть стоуновской. Другая топология (волмэновская) будет введена позднее; конструкция, ее определяющая, связывается, однако, со следующими построениями.

Если $H \in \mathcal{P}(E)$, то полагаем $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I}) | \exists U \in \mathcal{U}:\ U \subset H\}$. Ясно, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}|E \setminus I] = \mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I}) \setminus \Phi_{\mathcal{I}}(I)$$

при $I \in \mathcal{I}$. Как следствие имеем свойство

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}|\Lambda]:\ \Lambda \in \mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{I}]] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_{0}[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I}); \mathbf{T}^{\star}_{\mathcal{I}}[E]]. \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.9) имеем при $L \in \mathcal{I}$, что $\Phi_{\mathcal{I}}(L)$ есть пересечение всех множеств $\mathbb{F} \in \in [\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}]](\Phi_{\mathcal{I}}(L))$. Напомним, что (см. [13, предложение 3.1]) при $L \in \mathcal{I}$ и $\Lambda \in \mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]$ условия $L \subset \Lambda$ и $\Phi_{\mathcal{I}}(L) \subset \subset \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}|\Lambda]$ эквивалентны. Это означает, что при $L \in \mathcal{I}$ справедливо равенство

$$[\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}]](\Phi_{\mathcal{I}}(L)) = \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{I}|\Lambda]:\ \Lambda \in [\mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]](L)\},$$

где $[\mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]](L) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Как следствие получаем [27, теорема 2.1] для семейства (2.3) представление

$$\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}(\mathcal{I}) | \forall I \in \mathcal{I}\ \ (I \in \mathcal{U}) \vee (\exists \Lambda \in [\mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]](I) : E \setminus \Lambda \in \mathcal{U})\} \tag{2.10}$$

(представление у/ф в терминах квазиокрестностей). Напомним, что при $\mathcal{I} \in \pi^{\natural}[E]$ для $L \in \mathcal{I}$ в виде пересечения всех множеств из $[\mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]](L)$ реализуется наименьшая квазиокрестность множества L. Отсюда согласно [27, теорема 2.2] вытекает, что при $\mathcal{I} \in \pi^{\natural}[E]$

$$\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^{\star}(\mathcal{I}) |\ \forall I \in \mathcal{I}\ \ (I \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus (\bigcap_{\Lambda \in [\mathbf{C}_{E}[\mathcal{I}]](I)} \Lambda) \in \mathcal{U})\}. \tag{2.11}$$

Представления (2.10), (2.11) существенно дополняют (2.3). В связи с (2.11) полезно отметить, что [27, предложения 3.1, 3.2] $(\mathrm{alg})[E] \subset \pi^{\natural}[E]$ и $(\mathrm{top})[E] \subset \pi^{\natural}[E]$, а потому (2.11) применимо в двух упомянутых частных случаях.

§ 3. Представление множества ультрафильтров в терминах решетки множеств, порожденной π-системой.

Фиксируем далее π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$, где (здесь и ниже) E — непустое множество. Рассмотрим непустое семейство $(\mathrm{LAT})_{0}[E|\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\ \mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_{0}[E] | \mathcal{E} \subset \mathfrak{L}\}$ всех решеток п/м E, содержащих $\mathcal{E}$. В виде

$$\mathfrak{C} \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\mathfrak{L} \in (\mathrm{LAT})_{0}[E|\mathcal{E}]} \mathfrak{L} = \{\cup\}_{\sharp}(\mathcal{E}) \in (\mathrm{LAT})_{0}[E|\mathcal{E}] \tag{3.1}$$

имеем решетку, порожденную π-системой $\mathcal{E}$. При этом [20, раздел 6] выполнено включение $(\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}] \in (\mathrm{LAT})_{0}[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathfrak{C})]$, и, в частности, $(\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}] \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_{0}[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathfrak{C})]$, а топология (волмэновского типа)

$$\mathbf{T}^{0}_{\mathfrak{C}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{C}_{\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathfrak{C})}[\{\cap\}((\mathbb{UF})[E;\mathfrak{C}])] \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^{\star}_{0}(\mathfrak{C})] \tag{3.2}$$

превращает $\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})$ в компактное T_1-пространство

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}), \mathbf{T}_{\mathfrak{C}}^0[E])$$

(см. (3.1)). Аналогичным оснащением обладает и множество $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$, поскольку выполнено включение $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]$ и, как следствие, определена топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^\natural[\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})]. \tag{3.3}$$

При этом (см. [27, теорема 4.1]) $\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}) = \{\, \mathcal{U}\cap\mathcal{E} :\ \mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C})\}$, а отображение

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U}\cap\mathcal{E} :\ \mathbb{F}_0^\star(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E})$$

сюръективно и непрерывно в смысле топологий (3.2) и (3.3). Поэтому (см. [27, теорема 6.2])

$$(\mathbb{F}_0^\star(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle) \tag{3.4}$$

является компактным T_1-пространством. Ниже, после некоторых построений в пространстве МСС на π-системе $\mathcal{E}$, мы коснемся вопроса о соотношении ТП (2.7) и (3.4).

§ 4. Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры

Сцепленность произвольного непустого семейства $\mathcal{S}$ есть следующее его свойство: $\forall S_1\in\mathcal{S}\ \forall S_2\in\mathcal{S}\ \ S_1\cap S_2\neq\varnothing$. В настоящем разделе приведена краткая сводка основных свойств МСС. Мы рассматриваем при этом сцепленные подсемейства $\mathcal{P}(E)$, полагая

$$(\mathrm{link})[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathcal{S}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) | S_1\cap S_2\neq\varnothing\ \forall S_1\in\mathcal{S}\ \forall S_2\in\mathcal{S}\}.$$

Если же $\mathfrak{X}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то

$$\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X}\in\mathcal{P}'(\mathfrak{X}) | X_1\cap X_2\neq\varnothing\ \forall X_1\in\mathcal{X}\ \forall X_2\in\mathcal{X}\} \tag{4.1}$$

есть семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$, $\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[E]\subset(\mathrm{link})[E]$, а

$$\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X}\in\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[E] | \forall\tilde{\mathcal{X}}\in\langle\mathfrak{X}-\mathrm{link}\rangle[E]\ \ (\mathcal{X}\subset\tilde{\mathcal{X}}) \Longrightarrow (\mathcal{X}=\tilde{\mathcal{X}})\} \tag{4.2}$$

есть семейство всех МСС, содержащихся в $\mathfrak{X}$. В качестве $\mathfrak{X}$ может, в частности, использоваться π-система $\mathcal{E}$.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Каждый фильтр π-системы $\mathcal{E}$ является сцепленным подсемейством $\mathcal{E}$:*

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \subset \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle[E].$$

Доказательство легко следует из определений. При этом (см. [13, (4.3)]) справедливо равенство

$$\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] = \{\mathcal{S}\in\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle[E] | \forall\Sigma\in\mathcal{E}\ \ (\Sigma\cap S\neq\varnothing\ \forall S\in\mathcal{S}) \Longrightarrow (\Sigma\in\mathcal{S})\} \tag{4.3}$$

(свойство, подобное отмеченному в (2.3) для у/ф π-системы). Предложение 4.1 дополняется свойством $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \subset \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, из которого (см. § 2) следует, что $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\neq\varnothing$. Подобно (2.4) имеем (см. [13, (4.5)]), что

$$\forall\mathcal{S}\in\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle[E]\ \exists\tilde{\mathcal{S}}\in\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] :\ \mathcal{S}\subset\tilde{\mathcal{S}}. \tag{4.4}$$

Из (4.2) и (4.3) легко следует, что (см. [13, раздел 4]) $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\ \forall S \in \mathcal{S}\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$

$$(S \subset \Sigma) \Longrightarrow (\Sigma \in \mathcal{S}) \tag{4.5}$$

(полезно сравнить (4.4) и (4.5) с (2.1)). Наконец, отметим, что (см. [13, раздел 4])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | A \cap B \in \mathcal{U}\ \forall A \in \mathcal{U}\ \forall B \in \mathcal{U}\}. \tag{4.6}$$

Ясно (см. (4.2), (4.3)), что $E \in \mathcal{S}\ \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Следуя [13], полагаем, что

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \overset{\triangle}{=} \{\ \mathfrak{L} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathfrak{L}\}\ \forall L \in \mathcal{E}) \\ \&\ (\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \overset{\triangle}{=} \{\ \mathfrak{L} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | \exists \Lambda \in \mathfrak{L}:\ \Lambda \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{gathered} \tag{4.7}$$

Тогда, в частности, $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|H] = \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})\ \forall H \in \mathcal{P}(E)$. Тем самым конструкции на основе у/ф и МСС удается связать между собой, что и будет использоваться в дальнейшем. При этом

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \overset{\triangle}{=} \{\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda]:\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]\} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

а потому определена (волмэновская) топология (см. [13, раздел 5])

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}])) \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

превращающая множество (4.3) в суперкомпактное T_1-пространство

$$(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle). \tag{4.8}$$

С другой стороны, из (2.9) легко следует, что $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}] = \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}$, и, как следствие,

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что (3.4) есть подпространство ТП (4.8). В этой связи отметим некоторые свойства ТП (3.4). Из определений параграфа 2 легко следует

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $(H_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{P}(E)^n$, *то*

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\bigcap_{i=1}^n H_i] = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|H_i].$$

Как следствие получаем представление (открытой) базы

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]) \in (\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})].$$

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Справедливо равенство*

$$\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]) = \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|H]\colon H \in \{\cap\}_\sharp(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])\}. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим (в пределах данного доказательства) через $\mathfrak{D}$ семейство в правой части (4.10). Требуется установить равенство $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]) = \mathfrak{D}$.

Пусть $\Omega \in \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}])$. Тогда для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $(\Omega_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]^n$

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i. \tag{4.11}$$

С учетом (2.9) для некоторого кортежа $(T_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]^n$ имеем, что $\Omega_j = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|T_j]$ $\forall j \in \overline{1,n}$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{n} T_i \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$$

и согласно предложению 4.2 (см. (4.11)) имеем свойство

$$\Omega = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\bigcap_{i=1}^{n} T_i] \in \mathfrak{D},$$

чем завершается проверка вложения $\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]) \subset \mathfrak{D}$. Осталось установить противоположное вложение.

Итак, пусть $\mathfrak{U} \in \mathfrak{D}$. Тогда для некоторого $\Gamma \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$ имеем равенство $\mathfrak{U} = \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Gamma]$. Для некоторых $r \in \mathbb{N}$ и $(\Gamma_i)_{i\in\overline{1,r}} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]^r$ имеем свойство: Γ есть пересечение всех множеств Γ_i, $i \in \overline{1,r}$. Тогда в силу (2.9) $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Gamma_j] \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]$ $\forall j \in \overline{1,r}$. Поэтому с учетом предложения 4.2 получаем, что

$$\mathfrak{U} = \bigcap_{i=1}^{r} \mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Gamma_i] \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]).$$

Итак, вложение $\mathfrak{D} \subset \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}])$ установлено. □

Итак, получено представление базы ТП (3.4) в терминах семейства $\{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$. Напомним теперь, что

$$[\{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])](L) = \{\Lambda \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}]) | L \subset \Lambda\} \ \forall L \in \mathcal{E}.$$

По свойствам базы имеем в силу предложения 4.3, что

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Lambda] \in N^0_{\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle}(\mathcal{U}) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) \ \forall L \in \mathcal{U} \ \forall \Lambda \in [\{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])](L). \tag{4.12}$$

Свойство (4.12) дополняется следующим представлением, вытекающим из предложения 4.3: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$, то

$$\{\mathbb{B} \in \{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}]) | \mathcal{U} \in \mathbb{B}\} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}|\Lambda] : \ \Lambda \in [\{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])](U)\}; \tag{4.13}$$

итак, (4.13) определяет локальную базу (фундаментальную систему окрестностей) у/ф $\mathcal{U}$ в ТП (3.4). Данное представление также реализуется в терминах семейства $\{\cap\}_{\sharp}(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$.

§ 5. Максимальные сцепленные системы, не являющиеся ультрафильтрами, 1

В настоящем разделе изучаются МСС из множества $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\setminus\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$. Будем называть такие МСС собственными (напомним, что $\mathcal{E} \in \pi[E]$, где E — непустое множество). Сначала отметим несколько совсем простых свойств.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $\mathfrak{L} \in \langle\mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$ *и* $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$, *то* $\mathfrak{L} \setminus \mathcal{F} \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного, предположим, что $\mathfrak{L} \setminus \mathcal{F} = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{L} \subset \mathcal{F}$, где согласно предложению 4.1 $\mathcal{F} \in \langle\mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle[E]$. В силу максимальности $\mathfrak{L}$ получаем, что $\mathfrak{L} = \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$. Тогда $A\cap B \in \mathfrak{L}\ \forall A \in \mathfrak{L}\ \forall B \in \mathfrak{L}$. В силу (4.6) $\mathfrak{L} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$, что невозможно. □

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$ *и* $\mathcal{S} \in \langle\mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle[E] \setminus \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$, *то* $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.6) следует, что $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$, а тогда

$$(\mathcal{U} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{S}). \tag{5.1}$$

По выбору $\mathcal{S}$ имеем из (5.1), что $(\mathcal{U} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{U} \notin \mathbb{F}^*(\mathcal{E}))$. Последнее означает (поскольку $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$), что $\mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \neq \varnothing$. □

П р е д л о ж е н и е 5.3. *Если* $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ *и* $\mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$, *то*

$$(\mathcal{U} \setminus \mathcal{S} \neq \varnothing)\&(\mathcal{S} \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing).$$

Доказательство легко следует из определения максимальности фильтров и сцепленных систем.

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Если* $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$, *то непременно*

$$\exists A \in \mathcal{M}\ \exists B \in \mathcal{M}\ \exists C \in \mathcal{M}:\ A \cap B \cap C = \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (4.6) имеем по выбору $\mathcal{M}$, что для некоторых $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$ выполнено $M_1 \cap M_2 \notin \mathcal{M}$. При этом, однако, $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{E}$ по определению π-системы (см. § 1). Из (4.3) вытекает, что $(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = \varnothing$ для некоторого множества $M_3 \in \mathcal{M}$. Поэтому имеем цепочку равенств $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (M_1 \cap M_2) \cap M_3 = \varnothing$. □

Следующее положение было анонсировано в [27].

Т е о р е м а 5.1. *Справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) = \\ = \{\mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] | \exists S_1 \in \mathcal{S}\ \exists S_2 \in \mathcal{S}\ \exists S_3 \in \mathcal{S}:\ S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing\}.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω множество в правой части (5.2). Тогда в силу предложения 5.4

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \subset \Omega. \tag{5.3}$$

Пусть $\mathcal{W} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ и для некоторых $W_1 \in \mathcal{W},\ W_2 \in \mathcal{W}$ и $W_3 \in \mathcal{W}$

$$W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \varnothing. \tag{5.4}$$

Поскольку каждый фильтр π-системы $\mathcal{E}$ замкнут относительно конечных пересечений (см. (2.1), (2.3)), из (5.4) следует, что $\mathcal{W} \notin \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Поэтому $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Итак,

$$\Omega \subset \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}).$$

С учетом (5.3) получаем требуемое утверждение. □

С л е д с т в и е 5.1. *Если* $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$, *то*

$$(A \cap B \cap C \neq \varnothing\ \ \forall A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}\ \forall C \in \mathcal{M}) \Longrightarrow (\ \mathcal{M} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})).$$

§ 6. Оснащение множества максимальных сцепленных систем топологией стоуновского типа

Рассмотрим другой (вообще говоря) вариант оснащения множества $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, действуя по аналогии с (2.5)–(2.7). Данный вариант называем стоуновским, имея в виду отмеченную в § 2 аналогию с пространством у/ф алгебры множеств. Отметим прежде всего, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0[E|\Sigma]:\ \Sigma\in\mathcal{E}\}\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]] \qquad (6.1)$$

(см. § 1). Тогда определена топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{E}]))\in(\mathrm{top})[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

которая превращает [13] множество $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle), \qquad (6.2)$$

для которого $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{E}])\in(\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ и, следовательно,

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{E}]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle]$$

((6.1) есть открытая предбаза ТП (6.2)). Согласно [13, предложение 6.5]

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}, \qquad (6.3)$$

а потому в виде (2.7) при $\mathcal{I}=\mathcal{E}$ имеем подпространство ТП (6.2). Кроме того, имеем [13, предложение 7.1] свойство

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle\subset\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle \qquad (6.4)$$

сравнимости двух характерных топологий на множестве $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ всех МСС. В дальнейшем для всяких множества X, $X\neq\varnothing$, и топологий $\tau_1\in(\mathrm{top})[X]$, $\tau_2\in(\mathrm{top})[X]$ со свойством $\tau_1\subset\tau_2$ триплет (X,τ_1,τ_2) называем битопологическим пространством (БТП); в этой связи см. монографию [30]. С учетом (6.4) получаем, что

$$(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle,\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle) \qquad (6.5)$$

есть БТП. Из (4.9), (6.3) и (6.4) получаем, что $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle\subset\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$, а потому

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle,\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])$$

также является БТП, которое логично рассматривать как подпространство БТП (6.5), поскольку (см. (4.9), (6.3))

$$(\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle=\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})})\&(\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}).$$

Напомним, что (см. [27, теорема 5.1]) при $\mathcal{E}\in\pi^\natural[E]$ непременно $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle=\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]$, а «единое» ТП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E\rangle)=(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}),\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E])$$

есть нульмерный компакт. Кроме того (см. [13, раздел 8]), при условиях

$$(\mathcal{E}\in(\mathrm{alg})[E])\vee(\mathcal{E}\in(\mathrm{top})[E])$$

справедливо равенство $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle$, а получающееся при упомянутых условиях «единое» ТП

$$(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle)=(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E],\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle)$$

является нульмерным суперкомпактом.

§ 7. Максимальные сцепленные системы, не являющиеся ультрафильтрами, 2

В настоящем разделе возвращаемся к теореме 5.1 и рассматриваем (в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$) множество МСС, не являющихся у/ф, с точки зрения представлений в терминах ТП (6.2).

Т е о р е м а 7.1. *Множество* $\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ *открыто в ТП* (6.2)*:*

$$\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle. \tag{7.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем (1.3). В самом деле, пусть

$$\mathcal{M} \in \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}). \tag{7.2}$$

Тогда из теоремы 5.1 и (7.2) вытекает, что для некоторых множеств

$$(M_1 \in \mathcal{M}) \,\&\, (M_2 \in \mathcal{M}) \,\&\, (M_3 \in \mathcal{M}) \tag{7.3}$$

справедливо равенство $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \varnothing$. Рассмотрим множества

$$\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_1], \ \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_2], \ \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_3], \tag{7.4}$$

каждое из которых содержит $\mathcal{M}$ в силу (4.7) и (7.3). Вместе с тем, каждое из множеств (7.4) является элементом семейства (6.1), поскольку $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$. По определению топологии $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle$ получаем, в частности, что

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_1] \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle) \,\&\, (\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_2] \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle) \,\&\\ \&\, (\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_3] \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle).\end{gathered} \tag{7.5}$$

В свою очередь, из (7.5) вытекает, что

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_1] \in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{M})) \,\&\, (\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_2] \in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{M}))\\ \&\, (\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_3] \in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{M})).\end{gathered} \tag{7.6}$$

Из (7.6) следует с очевидностью, что

$$\mathbb{G} \triangleq \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_1] \cap \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_2] \cap \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle^0[E|M_3] \in N^0_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{M}). \tag{7.7}$$

Пусть $\mathcal{T} \in \mathbb{G}$. Из (4.7) и (7.7) вытекает, что

$$(M_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (M_2 \in \mathcal{T}) \,\&\, (M_3 \in \mathcal{T}),$$

где $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E]$. По выбору M_1, M_2 и M_3 имеем из теоремы 5.1, что

$$\mathcal{T} \in \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}).$$

Итак, установлено, что $\mathbb{G} \subset \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$, а потому

$$\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \in N_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{M}).$$

Поскольку $\mathcal{M}$ (7.2) выбиралось произвольно, установлено, что

$$\langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \in N_{\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{E}\rangle}(\mathcal{S}) \ \ \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \text{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}).$$

С учетом (1.3) получаем требуемое свойство (7.1). □

В связи с вопросом о непустоте множества (7.1) всех собственных МСС π-системы $\mathcal{E}$ дополним [27, замечание 5.1]. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 7.2. *В общем случае $\mathcal{E} \in \pi[E]$ истинна эквиваленция*

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (\exists \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E}: \\ (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing)).\end{gathered} \tag{7.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинно свойство, указанное в правой части (7.8). Выберем $M_1 \in \mathcal{E}$, $M_2 \in \mathcal{E}$ и $M_3 \in \mathcal{E}$ со свойствами

$$(M_1 \cap M_2 \neq \varnothing)\,\&\,(M_2 \cap M_3 \neq \varnothing)\,\&\,(M_1 \cap M_3 \neq \varnothing)\,\&\,(M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \varnothing). \tag{7.9}$$

Ясно, что $M_1 \neq \varnothing$, $M_2 \neq \varnothing$ и $M_3 \neq \varnothing$. Введем в рассмотрение семейство $\mathcal{M} \triangleq \triangleq \{M_1; M_2; M_3\}$ (см. § 1), получая при этом непустое подсемейство $\mathcal{E}$: $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E})$. Согласно (7.9) $A \cap B \neq \varnothing\ \forall A \in \mathcal{M}\ \forall B \in \mathcal{M}$. С учетом (4.1) получаем, что $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle[E]$, а потому согласно (4.4) для некоторого $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ имеем вложение $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. При этом согласно (7.9) из последнего вложения вытекает, что $\exists A \in \mathcal{N}\ \exists B \in \mathcal{N}\ \exists C \in \mathcal{N}$: $A \cap B \cap C = \emptyset$. В силу теоремы 5.1 $\mathcal{N} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Итак,

$$\begin{gathered}(\exists \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E}: \\ (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)\,\&\,(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing)) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \neq \varnothing).\end{gathered} \tag{7.10}$$

Осталось установить противоположную импликацию. Итак, пусть

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \neq \varnothing. \tag{7.11}$$

С учетом (7.11) выберем и зафиксируем МСС $\mathcal{T} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$. Тогда с учетом теоремы 5.1 подберем множества $T_1 \in \mathcal{T}$, $T_2 \in \mathcal{T}$ и $T_3 \in \mathcal{T}$ так, что

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \varnothing. \tag{7.12}$$

В силу сцепленности $\mathcal{T}$ имеем, кроме того, что

$$(T_1 \cap T_2 \neq \varnothing)\,\&\,(T_2 \cap T_3 \neq \varnothing)\,\&\,(T_1 \cap T_3 \neq \varnothing). \tag{7.13}$$

Поскольку $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$, из (7.12) и (7.13) следует свойство, указанное в правой части (7.8). Итак (см. (7.11)), импликация, противоположная (7.10), установлена, чем и завершается доказательство (7.8). $\square$

При обосновании последней теоремы использовалась идея, отмеченная в [14, 4.18]. А именно: установлено, что собственные МСС существуют тогда и только тогда, когда исходная π-система $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию, определяемому правой частью (7.8). В этой связи представляется, что пример [14, 4.18] имеет весьма общий характер в части вопросов описания собственных МСС, а его роль в этих вопросах весьма существенна.

Заметим, что в общем случае $\mathcal{E} \in \pi[E]$ (и даже в менее общем случае $\mathcal{E} \in (\mathrm{LAT})_0[E]$) ситуация, когда собственные МСС отсутствуют, экзотической не является. В самом деле, напомним пример [31, раздел 5], полагая до конца параграфа, что $E = \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, $\overrightarrow{n, \infty} \triangleq \{\ k \in \mathbb{N} | n \leq k\}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Полагаем теперь, что $\mathcal{E} \in \{\ \overrightarrow{n, \infty}:\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$, если не оговорено противное. Тогда в нашем случае $\mathcal{E} \in (\mathrm{top})[E]$ и при этом $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{N}, \mathcal{E})$ есть T_0-пространство. Отметим, что $\mathfrak{U} \triangleq \{\ \overrightarrow{n, \infty}:\ n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ (здесь мы рассматриваем открытый у/ф в отличие от [31]). При этом пересечение всех множеств из $\mathfrak{U}$ пусто, то есть мы имеем свободный у/ф. Легко видеть, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) = \{\mathfrak{U}\}$ (учитываем тот факт, что $\mathcal{F} \subset \mathfrak{U}\ \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E})$).

Рассмотрим теперь множество всех собственных МСС на $\mathcal{E}$. Из определений §4 следует, что при $\mathcal{S} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ непременно

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{E} \setminus \{\varnothing\} = \mathfrak{U}; \tag{7.14}$$

поскольку $\mathfrak{U} \in \langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ (см. (4.2), (4.6)), то согласно (4.2) и (7.14) $\mathcal{S} = \mathfrak{U}$. Как следствие, $\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \{\mathfrak{U}\}$, и в результате

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) = \varnothing. \tag{7.15}$$

Впрочем (7.15) легко извлекается и из теоремы 7.2, поскольку утверждение в правой части (7.8) не выполняется в данном конкретном случае.

§ 8. К вопросу о суперкомпактности пространства ультрафильтров (частный случай)

В настоящем параграфе обсуждается один случай, когда ТП (3.4) является суперкомпактным. В этой связи отметим сначала одно очевидное замечание общего характера.

З а м е ч а н и е 8.1. Пусть π-система $\mathcal{E} \in \pi[E]$ такова, что

$$\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}). \tag{8.1}$$

Тогда согласно (4.9) $\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle$ и (см. (4.8), (8.1))

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^0\langle E \rangle) = (\langle \mathcal{E} - \mathrm{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{E}\rangle). \tag{8.2}$$

С учетом суперкомпактности ТП (4.8) имеем из (8.2), что (при условии (8.1)) и (3.4) есть суперкомпактное ТП. Пример такого рода был приведен в предыдущем параграфе (см. (7.15)). $\square$

Пусть (как обычно) $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. При $c \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}$ используем обычное соглашение $[c, d[\ \overset{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | (c \leqslant \xi) \,\&\, (\xi < d)\}$, допуская, однако, реализацию пустого множества (при $d \leqslant c$); см. [32, § 1.3]. Полагаем до конца статьи, что

$$E = [a, b[, \tag{8.3}$$

где $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. При $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ полагаем, что $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbb{R}$ — суть первый и второй элементы упорядоченной пары (плоского вектора) z соответственно, то есть $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. Полагаем до конца статьи, что

$$\mathcal{E} = \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[:\ z \in [a, b] \times [a, b]\}, \tag{8.4}$$

получая полуалгебру п/м E (8.3); см. [32, § 3.9]. В частности, $\mathcal{E} \in \pi[E]$; см. [32, (1.7.3)]. Рассматриваем далее ИП $(E, \mathcal{E})$ (пространство-стрелку), определяемое посредством (8.3), (8.4).

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Для ИП $(E, \mathcal{E})$, определяемого посредством* (8.3) *и* (8.4)*, имеет место свойство*

$$\begin{gathered} \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_3 \in \mathcal{E} \\ ((\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing). \end{gathered} \tag{8.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем $\Sigma_1 \in \mathcal{E},\ \Sigma_2 \in \mathcal{E}$ и $\Sigma_3 \in \mathcal{E}$, после чего подберем с учетом (8.4) $a_1 \in [a, b],\ b_1 \in [a, b],\ a_2 \in [a, b],\ b_2 \in [a, b],\ a_3 \in [a, b]$ и $b_3 \in [a, b]$ так, что

$$(\Sigma_1 = [a_1, b_1[) \,\&\, (\Sigma_2 = [a_2, b_2[) \,\&\, (\Sigma_3 = [a_3, b_3[). \tag{8.6}$$

Пусть $(\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)$. Тогда для $\overline{1,3} = \{1;2;3\}$,

$$(\mathbf{a} \triangleq \sup(\{a_i : \ i \in \overline{1,3}\}) \in \mathbb{R}) \,\&\, (\mathbf{b} \triangleq \inf(\{b_i : \ i \in \overline{1,3}\}) \in \mathbb{R})$$

получаем с учетом (8.6) неравенство $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. При этом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}[\in \mathcal{E}$ согласно (8.4) и справедливо свойство $[\mathbf{a}, \mathbf{b}[\neq \varnothing$. Кроме того, в силу (8.6) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}[\subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3$, а потому $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing$. Итак, установлена импликация

$$((\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing) \,\&\, (\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \varnothing).$$

Поскольку выбор Σ_1, Σ_2 и Σ_3 был произвольным, (8.5) установлено. □

Т е о р е м а 8.1. *Для ИП* (8.3)*,* (8.4) *справедливо равенство* (8.1).

Доказательство получается непосредственной комбинацией теоремы 7.2 и предложения 8.1 (см. также (4.6)).

С л е д с т в и е 8.1. *При условиях* (8.3)*,* (8.4) $\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E \rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})]$.

Доказательство вытекает из (4.9) и теоремы 8.1 с учетом суперкомпактности ТП (4.8). Таким образом, при условиях (8.3), (8.4) в виде (3.4) реализуется суперкомпактное T_1-пространство у/ф.

В связи с равенством (8.1) при условиях (8.3), (8.4) напомним, что конкретное представление упомянутого (в (8.1)) множества известно (см. [33, (6.11)]). Напомним это представление, полагая, что (как и в [33, § 6])

$$\mathfrak{U}^0_x \triangleq \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[: \ z \in [a, x[\times[x, b]\} \ \ \forall x \in]a, b].$$

Тогда согласно [33, (6.11)] и (8.1) имеем (при условиях (8.3),(8.4)), что

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \{(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] : \ x \in E\} \cup \{\mathfrak{U}^0_x : \ x \in]a, b]\}.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае собственные МСС отсутствуют в силу теоремы 8.1. Они, однако, «появляются», если заменить полуалгебру (8.4) алгеброй, которая ей порождена. Итак, пусть $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ есть def алгебра п/м E (8.3), порожденная полуалгеброй (8.4):

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{A}) \,\&\, (\forall \tilde{\mathcal{A}} \in (\mathrm{alg})[E] \ \ (\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{A}}) \Longrightarrow (\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}})). \tag{8.7}$$

Для нас сейчас существенно только первое вложение в (8.7), а также то, что

$$L_1 \cup L_2 \in \mathcal{A} \ \ \forall L_1 \in \mathcal{E} \ \forall L_2 \in \mathcal{E}. \tag{8.8}$$

Чтобы воспользоваться теоремой 7.2 в условиях замены $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}$, введем следующие два значения $\mathbf{t}_1 \in E$ и $\mathbf{t}_2 \in E$:

$$\left(\mathbf{t}_1 \triangleq a + \frac{2}{3}(b - a)\right) \,\&\, \left(\mathbf{t}_2 \triangleq a + \frac{b - a}{3}\right).$$

Получаем, что $\mathbb{L}_1 \triangleq [a, \mathbf{t}_1[\in \mathcal{E}$ и $\mathbb{L}_2 \triangleq [\mathbf{t}_2, b[\in \mathcal{E}$ таковы, что $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$. Наконец, имеем в силу (8.8), что

$$\mathbb{L}_3 \triangleq [a, \mathbf{t}_2[\cup[\mathbf{t}_1, b[\in \mathcal{A},$$

причем $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 \neq \varnothing$ и $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \neq \varnothing$. Вместе с тем $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \varnothing$. Поскольку

$$(\mathbb{L}_1 \in \mathcal{A}) \,\&\, (\mathbb{L}_2 \in \mathcal{A}) \,\&\, (\mathbb{L}_3 \in \mathcal{A}),$$

то по теореме 7.2 имеем свойство $\langle \mathcal{A} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) \neq \varnothing$. Итак, при замене $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{A}$ появляются собственные МСС. В то же время структура множества у/ф оказывается (см. [33, § 6]) более устойчивой к такой замене.

Список литературы

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
4. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 319 с.
5. Грызлов А.А., Бастрыков Е.С., Головастов Р.А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. https://doi.org/10.20537/vm100302
6. Грызлов А.А., Головастов Р.А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. https://doi.org/10.20537/vm130102
7. Головастов Р.А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24. https://doi.org/10.20537/vm120303
8. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
9. Архангельский А.В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.
10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
11. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
12. Ченцов А.Г. Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 293–311.
13. Ченцов А.Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
14. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
15. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
16. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977. 238 p.
17. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
18. Ченцов А.Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университа. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
19. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. No. 2. P. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
20. Ченцов А.Г. Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113–142. https://doi.org/10.20537/vm110112
21. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. XIV, 322 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
22. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht: Springer Netherlands, 2002. XIV, 408 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0
23. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 309–323.
24. Ченцов А.Г., Бакланов А.П. Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 292–311. https://doi.org/10.1134/S0371968515040226

25. Ченцов А.Г., Бакланов А.П., Савенков И.И. Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2016. Вып. 1 (47). С. 54–118. http://mi.mathnet.ru/iimi328
26. Ченцов А.Г. Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 268–293.
27. Ченцов А.Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
28. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
29. Ченцов А.Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101. https://doi.org/10.20537/vm140108
30. Dvalishvili B.P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: North-Holland, 2005. 422 p.
31. Ченцов А.Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2017. Т. 49. С. 55–79. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
32. Ченцов А.Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
33. Ченцов А.Г. Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 225–239.

Поступила в редакцию 04.12.2018

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел управляемых систем, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, кафедра прикладной математики и механики, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

A. G. Chentsov

Ultrafilters and maximal linked systems: basic relations

Citation: *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 53, pp. 138–157 (in Russian).

Keywords: bitopological space, maximal linked system, ultrafilter.

MSC2010: 28A33

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-53-12

Ultrafilters and maximal linked systems with elements in the form of sets from the fixed π-system with “zero” and “unit” are investigated. Ultrafilters are maximal linked systems, but, among them, maximal linked systems that are not ultrafilters can be situated. In this paper, special attention is given to the description of the set of maximal linked systems that are not ultrafilters (they are called characteristic). In their properties these maximal linked systems differ from ultrafilters essentially. Necessary and sufficient conditions for existence of the above-mentioned systems (we mean conditions with respect to the initial π-system) and some topological properties for the set of all maximal linked systems of this type are obtained. In addition, for the construction of the corresponding equipment (just as in the ultrafilter case), the schemes ascending to procedures used under Wallman extension and Stone compactums are used; but the above-mentioned schemes are realized in the case when the anticipating measurable (by sense)

structure is given by a π-system of general form. In particular, this allows one to envelop by a unique structure procedures for construction of spaces of ultrafilters and maximal linked systems for measurable and topological spaces. In the framework of this construction, bitopological spaces corresponding to Wallman and Stone variants of equipment arise naturally; in the first variant, for the case of maximal linked systems, the supercompact T_1-space is realized. Examples are given for which all maximal linked systems are ultrafilters; this corresponds to realization of supercompact ultrafilter space when the topology of Wallman type is used.

REFERENCES

1. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of stochastic processes), Moscow: Fizmatlit, 2005, 402 p.
2. Bourbaki N. *Topologie Generale*, Paris: Hermann, 1961, 263 p.
3. Engel'king R. *Obshchaya topologiya* (General topology), Moscow: Mir, 1986, 751 p.
4. Vladimirov D.A. *Bulevy algebry* (Boolean algebras), Moscow: Nauka, 1969. 319 p.
5. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100302
6. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130102
7. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 19–24 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120303
8. Neveu J. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Paris: Masson et CIE, 1964.
9. Arhangel'skii A.V. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996, pp. 1–117.
10. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations*, New York: Academic Press, 1972, 546 p. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11669-8
11. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988, xi+517 p.
12. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311.
13. Chentsov A.G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
14. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Basic constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006. 336 p.
15. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
16. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p.
17. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
18. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
19. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems, *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
20. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 1, pp. 113–142. https://doi.org/10.20537/vm110112
21. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability*, Dordrecht: Springer Netherlands, 1997, XIV, 322 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0805-0
22. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht: Springer Netherlands, 2002, XIV, 408 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1527-0

23. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On the question of construction of an attraction set under constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 40–55. https://doi.org/10.1134/S0081543815090035
24. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 291, issue 1, pp. 279–298. https://doi.org/10.1134/S0081543815080222
25. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of attainability with constraints of asymptotic nature, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2016, issue 1 (47), pp. 54–118. http://mi.mathnet.ru/eng/iimi328
26. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. 12–39. https://doi.org/10.1134/S0081543811090021
27. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
28. Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
29. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2014, issue 1, pp. 87–101. https://doi.org/10.20537/vm140108
30. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: North-Holland, 2005, 422 p.
31. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 49, pp. 55–79. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-49-03
32. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU-UPI, 2009, 389 p.
33. Chentsov A.G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. 48–62. https://doi.org/10.1134/S0081543812020046

Received 04.12.2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, Department of Controlled Systems, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru