# ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

## ТОМ 57

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

**Материалы четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции (Казань, 7 – 12 сентября 2019 г.)**

**Казанское математическое общество**
**2019**

Институт математики и механики
им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского)
федерального университета

Казанское математическое общество

N. I. Lobachevsky Institute of
Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga region)
Federal University

Kazan Mathematical Society

**Издание осуществлено при финансовой поддержке лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения" механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (грант правительства РФ, проект 14.W03.31.0031).**

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2
Т78

**Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества**

Научный редактор – С. Р. Насыров
Составители – А.А. Агафонов, И.А. Кох

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. – Т. 57. – 388 с.

ISBN 978-5-9690-0568-6

Сборник содержит материалы четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», организованной Казанским (Приволжским) федеральным и Московским государственным университетами, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН при содействии Регионального научно-образовательного математического центра КФУ и Академии наук Республики Татарстан. Школа-конференция проведена с 7 по 12 сентября 2019 года.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2

ISBN 978-5-9690-0568-6

***analytical components of a harmonic mapping.***

**Keywords**: harmonic, univalent, $n$-valent, convex functions, shear construction.

УДК 517.958, 530.145.6

# АНДРЕЕВСКОЕ ОТРАЖЕНИЕ В СТРУКТУРЕ $p$-ВОЛНОВОЙ СВЕРХПРОВОДНИК–НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

Т.С. Тинюкова[1], Ю.П. Чубурин[2]

1 *ttinyukova@mail.ru*; Удмуртский государственный университет
2 *chuburin@udman.ru*; Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук

*В работе математически строго изучено отражение Андреева для гамильтониана Боголюбова – де Жена в случае одномерной p–волновой сверхпроводящей структуры при наличии потенциала. Доказано, что на стыке нормального металла и сверхпроводника в топологической фазе имеет место полное андреевское отражение (т.е. налетающий со стороны нормального металла электрон отражается как дырка) независимо от наличия примеси.*

**Ключевые слова**: гамильтониан Боголюбова – де Жена, спектр, задача рассеяния, вероятность прохождения, отражение Андреева.

В последние приблизительно полтора десятилетия в теории сверхпроводимости активно разрабатывается новое направление, связанное с теоретическим открытием в сверхпроводящих структурах майорановских локализованных состояний (устойчивые квазичастицы с нулевой энергией вида «частица плюс дырка», подчиняющиеся неабелевой статистике), весьма перспективных для применения в будущих квантовых компьютерах [1].

Андреевское отражение возникает на стыке нормального (обычного) металла $N$ и сверхпроводника $S$. Налетающий со стороны $N$ электрон может отразиться от $S$ обычным образом, как электрон (нормальное отражение) с вероятностью $P_N$, но может отразиться и как дырка (отражение Андреева) с вероятностью $P_A = 1 - P_N$. При полном (идеальном) андреевском отражении $P_A = 1$. Поскольку майорановские состояния возникают на границе $N - S$, возникает вопрос о связи между ними и андреевским отражением (см., например, [2]). В работе математически строго изучено отражение Андреева для гамильтониана Боголюбова–де Жена в случае одномерной $p$–волновой сверхпроводящей структуры при наличии потенциала. Доказано, что на стыке нормального металла и сверхпроводника имеет место полное андреевское отражение независимо от наличия примеси. Используемая методика позволяет описать собственные функции данного гамильтониана для нулевой энергии с целью определения их сходства с майорановскими состояниями.

Рассмотрим гамильтониан для структуры нормальный металл – $p$-волновой сверхпроводник вида

$$(H\psi)(n) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \theta(x)\mu_+ - \theta(-x)\mu_- & -\Delta\theta(x)\partial_x - \frac{\Delta}{2}\delta(x) \\ \Delta\theta(x)\partial_x + \frac{\Delta}{2}\delta(x) & \partial_x^2 + \theta(x)\mu_+ + \theta(-x)\mu_- \end{pmatrix},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Таким образом, для $x > 0$ имеем гамильтониан сверхпроводника, а для $x < 0$ — гамильтониан нормального металла. В импульсном представлении (после преобразования Фурье $\widehat{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\psi(x)\,dx$) получаем гамильтонианы сверхпроводника и нормального металла

$$\widehat{H}_+(p) = \begin{pmatrix} p^2-\mu_+ & -ip\Delta \\ ip\Delta & -p^2+\mu_+ \end{pmatrix},$$

$$\widehat{H}_-(p) = \begin{pmatrix} p^2-\mu_- & 0 \\ 0 & -p^2+\mu_- \end{pmatrix} \qquad (1)$$

соответственно. Спектр $H_-$ равен $(-\infty,\infty)$, а спектр $H_+$ имеет лакуну (сверхпроводящую щель), симметричную относительно нуля (см. [3]). Оператор $H$ действует на фунции вида $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))^T$, где $T$ – транспонирование, $\psi_1(x)$ описывает частицы, а $\psi_2(x)$ – дырки.

Рассмотрим теперь гамильтониан $H+V$, где

$$V = \begin{pmatrix} V_0(\delta(x)+\delta(x-a)) & 0 \\ 0 & -V_0(\delta(x)+\delta(x-a)) \end{pmatrix}$$

(слагаемые с $\delta(x)$ в потенциале характеризуют контакт, а слагаемые с $\delta(x-a)$ – примесь в сверхпроводнике). Ищем решение уравнения $(H+V)\psi = E\psi$ для задачи рассеяния при малых $E$, т.е. для энергий в щели. Интерес представляют вероятности отражения электрона, налетающего со стороны нормального металла, по первой и второй компонентам, т.е. для частиц и дырок. Решения уравнений $(H_\pm - E)\psi_\pm(x) = 0$ ищем в виде $\psi_\pm(x) = (\psi_\pm^1, \psi_\pm^2)^T = (A_\pm, B_\pm)^T e^{i\alpha_\pm x}$, где $\alpha_\pm$ — решение уравнения $\det(\widehat{H}_\pm(p) - E) = 0$, а $(A_\pm, B_\pm)^T$ удовлетворяет равенству $\left(\widehat{H}_\pm(\alpha_\pm) - E\right)(A_\pm, B_\pm)^T = 0$. Найденные решения $\psi_\pm(x)$, зависящие от произвольных констант, «склеиваем», пользуясь равенствами

$$\psi_+^1(0+) = \psi_-^1(0-), \quad \psi_+^2(0+) = \psi_-^2(0-), \qquad (2)$$

$$4(\partial_x\psi_+^1(0+) - \partial_x\psi_-^1(0-)) - 2V_0(\psi_+^1(0+) + \psi_-^1(0+)) + \Delta(\psi_+^2(0+) + \psi_-^2(0+)) = 0, \qquad (3)$$

$$4(\partial_x\psi_+^2(0+) - \partial_x\psi_-^2(0-)) - 2V_0(\psi_+^2(0+) + \psi_-^2(0+)) + \Delta(\psi_+^1(0+) + \psi_-^1(0+)) = 0. \qquad (4)$$

Здесь полагаем $\delta(x)\cdot\psi^j(x) = \frac{1}{2}(\psi_+^j(0+) + \psi_-^j(0-))$, что отвечает симметричному расположению примеси относительно нуля. Таким образом, функция $\psi(x)$ непрерывна в нуле согласно (2), а согласно (3), (4) $\delta$-функции, возникающие при дифференцировании скачка первой производной, взаимно уничтожаются с $\delta$-функциями, входящими в потенциал.

## Андреевское отражение со «склейкой» в нуле

Рассмотрим случай $x < 0$. Предположим, что $E = i\varepsilon$ (что означает открытость системы) и $\mu_- >> |\varepsilon|$. Из равенства $\det(\widehat{H}_-(p) - E) = 0$ получаем, согласно (1),

$$p^2 = \mu_- \pm i\varepsilon. \qquad (5)$$

Отсюда $p = \alpha_-^{1,2} = \pm\sqrt{\mu_-} - \dfrac{i\varepsilon}{2\sqrt{\mu_-}} + o(\varepsilon)$ (знак перед вторым слагаемым выбираем для убывания функции при $x \to -\infty$) и

$$\hat{H}_-(p) - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Далее для краткости отбрасываем слагаемые порядка $O(\varepsilon)$. Учитывая вид волновой функции налетающего электрона и тот факт, что для дырки и частицы с равными импульсами скорости противоположны, получаем

$$\psi_-(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{\mu_-}x} = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + Be^{-i\sqrt{\mu_-}x} \\ Ae^{i\sqrt{\mu_-}x} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай $x > 0$. Предположим, что $|E| << \mu_+ << \Delta^2$ (следовательно, имеет место топологическая фаза [1]). Имеем

$$\det(\hat{H}_+ - E) = -(p^4 - 2p^2(\mu_+ - \Delta^2/2) + \mu_+^2 - E^2) = 0,$$

тогда

$$p = \alpha_+^1 = \pm i\Delta + F_1(\mu_+,\varepsilon), \quad p = \alpha_+^2 = \pm i\frac{\mu_+}{\Delta} + F_2(\mu_+,\varepsilon),$$

где $F_j(\mu_+,\varepsilon)$, $j = 1,2$, малы в силу предположения $\mu_+ << \Delta$ и далее опускаются. В равенствах для $\alpha_+^1$ и $\alpha_+^2$ выбираем знак «+» для убывания волновой функции при $x > 0$. Пусть для определенности $\Delta > 0$, тогда в случае $p = i\Delta$ имеем

$$\det\left(\hat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\Delta^2 & \Delta^2 \\ -\Delta^2 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

откуда $\psi_+(x) = (1,1)^T e^{-\Delta x}$; если $p = i\mu_+/\Delta$, то имеем

$$\det\left(\hat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\mu_+ & \mu_+ \\ -\mu_+ & \mu_+ \end{pmatrix},$$

$\psi_+(x) = (1,1)^T e^{-(\mu_+/\Delta)x}$. Таким образом, для $x > 0$:

$$\psi_+(x) = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\Delta x} + D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(\mu_+/\Delta)x} = \begin{pmatrix} Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} \\ Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть $r_\pm = \pm 4i\sqrt{\mu_-} - 2V_0$. Пользуясь (6), (7), запишем (2)–(4) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ \Delta & r_+ & -3\Delta - 2V_0 & -4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta \\ r_- & \Delta & -3\Delta - 2V_0 & -4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r_- \\ \Delta \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим $B = 0$, $A = 1$. Вероятность полного андреевского отражения (когда отражаются только «дырки») равна $|A|^2 = 1$.

### Андреевское отражение со «склейкой» в двух точках

Как и ранее $\psi_-(x)$ определяется (6). Функция $\psi_+(x)$ для $x \in (0, a)$ определена равенством (убывания не требуется):

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} + Le^{\Delta x} + Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \\ Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} - Le^{\Delta x} - Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}; \tag{8}$$

для $x > a$ (волновая функция должна убывать на этом промежутке):

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \\ Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь (6), (8), запишем (2)–(4) и аналогичные условия в точке $x = a$ в виде системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta & -t_+ & q_- & s_- & -q_+ & r_+ & 0 & 0 \\ t_- & \Delta & q_- & s_- & q_+ & -r_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_- & v_- & w_+ & v_+ & -w_- & -v_- \\ 0 & 0 & w_- & v_- & -w_+ & -v_+ & -w_- & -v_- \\ 0 & 0 & h_-w_- & s_+v_- & -h_+w_+ & r_-v_+ & q_+w_- & s_-v_- \\ 0 & 0 & h_-w_- & s_+v_- & h_+w_+ & -r_-v_+ & q_+w_- & s_-v_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ K \\ L \\ G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -t_- \\ -\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

здесь

$$w_\pm = e^{\pm\Delta a},\ v_\pm = e^{\pm\frac{\mu_+}{\Delta}a},\ q_\pm = -3\Delta \pm 2V_0,$$
$$h_\pm = 5\Delta \pm 2V_0,\ s_\pm = \pm 4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta,$$
$$r_\pm = \pm 4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 - \Delta,\ t_\pm = -4i\sqrt{\mu_-} \pm 2V_0.$$

Из (9) находим $B = 0$, $A = 1$. Таким образом, несмотря на наличие примеси, здесь также имеет место полное андреевское отражение.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» в рамках конкурса на предоставление грантов УдГУ на поддержку молодых ученых «Научный потенциал»-2018 (проект № 2018-03-02)

### Литература

1. Alicea J. *New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems* // Rep. Prog. Phys. – 2012. –75(076501). – 36 p. DOI:10.1088/0034-4885/75/7/076501

2. Zhongbo Yan, Shaolong Wan. *A study on the tunneling spectroscopy of an N–pS junction and an N–hS junction* // New Journal of Physics. – 2014. – 16(093004). – DOI:10.1088/1367-2630/16/9/093004.

3. Тинюкова Т. С. *Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Вып. 2 – С. 222–230. DOI: 10.20537/vm180208.

## ANDREEV REFLECTION AT THE CONTACT OF A $p$-WAVE SUPERCONDUCTOR IS A NORMAL METAL

T.S. Tinyukova, Yu.P. Chuburin

*In the paper, the Andreev reflection for the Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian with the potential in the case of the one-dimensional p-wave superconducting structure is mathematically rigorously studied. It is proved, that in the junction normal-metal – superconductor in the topological phase, the perfect Andreev reflection takes place (i.e., the incident from the normal metal electron is reflected as a hole) without reference to an impurity.*

Keywords: Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian, spectrum, scattering problem, transmission probability, Andreev reflection.

УДК 517.518.85

## О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А.Ю. Трынин[1]

1 *tayu@rambler.ru*; Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

*Изучаются аппроксимативные свойства обобщений классических синк приближений, построенных с помощью значений линейных дифференциальных операторов второго порядка с потенциалами ограниченной вариации. Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщений синк приближений для функций ограниченной вариации. Отдельно рассматриваются условия равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ и на отрезке $[0,\pi]$.*

**Ключевые слова**: равномерная сходимость, синк приближения, ограниченная вариация, синк-аппроксимации.

В результате численных экспериментов в работах [1] и [2] были открыты операторы синк-аппроксимаций или усечённые кардинальные функции Уиттекера. Для важного случая равноотстоящих узлов интерполирования эти операторы давали существенно лучшие результаты приближения, чем алгебраические интерполяционные многочлены. В дальнейшем была доказана теорема отсчётов, в которой установлена возможность приближения функций из некоторых классов аналитических функций кардинальными функциями Уиттекера (см., например, [3]. В данной работе продолжаются исследования аппроксимативных свойств некоторых обобщений синк приближений, предложенных в [4], [5], [6].

Пусть $\rho_\lambda \geq 0$ $\rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном $\lambda$ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса $\rho_\lambda$ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле:

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \tag{1}$$

# АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ