Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

А.Г. Родионова, Е.В. Новикова, Н.В. Родионова

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2019

УДК 517.1(07)
ББК 22.161я7
Р 605

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ
Рецензент: к.ф.-м.н. **А.Г. Ицков**

Родионова А.Г., Новикова Е.В., Родионова Н.В.
Р 605 Предел и непрерывность функции: учеб.-метод. пособие. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2019. – 48 с.

ISBN 978-5-4312-0727-3

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, изучающих математический анализ, как в рамках отдельного курса, так и в рамках других курсов высшей математики. Пособие может быть полезно преподавателям для проведения практических занятий и при подготовке индивидуальных заданий студентам.

Основу пособия составляет теоретический материал. В помощь студенту разобрано большое количество примеров, дано их подробное решение. Пособие можно использовать в качестве типового расчета. Нумерация заданий для студентов сквозная.

ISBN 978-5-4312-0727-3

УДК 517.1(07)
ББК 22.161я7

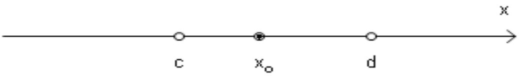
Предисловие

Учебно-методическое пособие состоит из двух глав. В каждой главе кратко изложен материал по заявленной теме. Разобраны примеры. В каждой главе приведены индивидуальные задания для студентов. Количество заданий достаточно как для занятий в аудитории, так и для самостоятельной подготовки студентов. Нумерация заданий сквозная. Уместно отметить, что в пособии особое внимание уделено тем темам, изучение которых вызывает у студентов наибольшие затруднения. Пособие может быть полезно преподавателям, студентам ВУЗов, учителям математики, ведущим занятия в профильных классах.

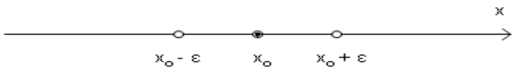
ГЛАВА I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 1. Множества в пространстве $\mathbb{R}$

Определение 1. Окрестностью $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$ назовем интервал (c,d), содержащий эту точку $\left(x_0 \in (c,d)\right)$.



Определение 2. ε-окрестностью точки $x_0 \in \mathbb{R}$ назовем интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, и обозначим его $U(x_0;\varepsilon) = U_\varepsilon(x_0)$.



Зафиксируем непустое множество $X \subset \mathbb{R}$.

Определение 3. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется точкой прикосновения множества X, если для любой окрестности $U(x_0)$ выполняется условие $U(x_0) \cap X \neq \varnothing$ (то есть в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X).

Замечание 1. Возможны 2 варианта: $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Определение 4. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества X, если $U^0(x_0) \cap X \neq \varnothing$ для любой «проколотой» окрестности $U^0(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\}$ (то есть в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X, отличные от x_0).

Замечание 2. Возможны 2 варианта: $x_0 \in X$ или $x_0 \notin X$.

Определение 5. Точка x_0 называется изолированной точкой множества X, если существует окрестность точки x_0, для которой выполняется условие $U(x_0) \cap X = \{x_0\}$.

Определение 6. Совокупность точек прикосновения множества X называется замыканием этого множества и обозначается $\overline{X}$ (или $[X]$).

Определение 7. Множество X называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием, то есть $X = \overline{X}$.

Определение 8. Точка $x_0 \in X$ называется внутренней, если существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $U(x_0) \subset X$.

Определение 9. Множество X называется открытым, если все его точки внутренние.

Пример 1. Рассмотрим множество $X = (0,2) \cup \{3\}$.

Здесь точки отрезка $[0,2]$ являются предельными точками множества X. Точка $\{3\}$ – изолированная точка. Замыкание множества $\overline{X}$ равно $[0,2] \cup \{3\}$. Легко видеть, что $X \neq \overline{X}$.

Пример 2. Отрезок $[a,b]$ – замкнутое множество.

Пример 3. Интервал (a,b) – открытое множество.

Теорема 1. Пересечение любого числа (конечного или бесконечного) замкнутых множеств – замкнутое множество.

Теорема 2. Объединение конечного числа замкнутых множеств – замкнутое множество.

Теорема 3. Пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.

Теорема 4. Объединение любого числа открытых множеств – открытое множество.

§ 2. Предел функции

Зафиксируем множества $X, Y \subset \mathbb{R}$ такие, что $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$, и произвольную функцию $f : X \to Y$.

Определение 1 (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$. Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in X\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

При этом пишем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ (читаем: предел равен A) или $f(x) \to A$ при $x \to x_0$ (читаем: $f(x)$ стремится к A).

Определение 2 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 (при $x \to x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\} \subset X$ $(x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N})$, сходящейся к x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A, то есть $\lim\limits_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n \neq x_0}} f(x_n) = A$.

Замечание 1. Из определения следует, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, то есть, вообще говоря, $x_0 \notin X$. Таким образом, понятие предела функции в точке целесообразно вводить только для предельных точек области определения X функции $f(x)$.

Упражнение 1. Напишите отрицание определений 1 и 2.

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

§ 3. Односторонние пределы

Определение 1 (по Коши). Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in X\colon x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon ,$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in X\colon x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

При этом пишем

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \quad (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A)$$

или

$$f(x_0+0)=A \quad (f(x_0-0)=A).$$

Замечание 1. Если $x_0=0$, то пишем $f(0+)$ ($f(0-)$).

Определение 2 (по Гейне). Число A называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если

$$\forall \{x_n\}\subset X: x_n>x_0 \ (x_n<x_0),\ x_n\to x_0 \ \Rightarrow\ f(x_n)\underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Теорема 1. Определения 1 и 2 эквивалентны.

Теорема 2. Если существуют пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$, причем $f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$, то существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$. Верно и обратное утверждение.

§ 4. Предел функции при $x\to\infty$

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(c,+\infty)$ (или на промежутке $(-\infty,-c)$), где $c>0$.

Определение 1 (по Коши). Число A называют пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta=\Delta(\varepsilon)>0:\forall x>\Delta\ (\forall x<-\Delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon,$$

и пишут $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ (соответственно $\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$).

Определение 2 (по Гейне). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n>c$ ($x_n<-c$), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к A.

Заметим, что определения 1 и 2 эквивалентны.

§ 5. Бесконечно большие функции

Определение 1. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой справа (слева) в точке x_0, если
$\forall E > 0 \ \exists \ \delta = \delta(E) > 0:$

$\forall x \in X\colon x_0 < x < x_0 + \delta \ \ (x_0 - \delta < x < x_0 \ ) \Rightarrow | \ f(x)| > E$,

и пишут $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$).

Если в определении 1 выполнено неравенство $f(x) > E$ ($f(x) < -E$), то говорят, что $f(x)$ – бесконечно большая знака плюс (минус) в точке x_0 справа (слева), и пишут

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty,$$

$$(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty).$$

Упражнение 1. Дайте определение бесконечно большой функции по Гейне.

Определение 2. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), если
$\forall E > 0 \ \exists \Delta = \Delta(E) > 0: \forall \, x > \Delta \ (\forall \, x < -\Delta) \Rightarrow | \ f(x)| > E,$
и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$).

Если в определении $f(x) > E$ ($f(x) < -E$), то говорят, что $f(x)$ – бесконечно большая со знаком плюс (минус).

Упражнение 2. Приведите определение бесконечно большой функции при $x \to \infty$ по Гейне.

§ 6. Свойства пределов функции

Теорема 1. Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

Теорема 2. Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то в некоторой окрестности $U(x_0)$ функция $f(x)$ ограничена.

Теорема 3 (о пределе промежуточной функции). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ и в некоторой окрестности $U(x_0)$ $(x \neq x_0)$ выполнено $f(x) \le h(x) \le g(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A.$

Теорема 4 (о предельном переходе в неравенствах). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и в некоторой окрестности $U(x_0)$ $(x \neq x_0)$ выполнено $f(x) \le g(x),$ то $A \le B.$

Теорема 5 (критерий Коши существования предела). Для того чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ необходимо и достаточно, чтобы функция была определена в некоторой окрестности точки $x_0,$ за исключением, может быть, самой этой точки, и для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ что для всех $x', x'' \in U_\delta(x_0)$ $(x' \neq x_0 \neq x'')$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$

Теорема 6. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$ где A и B – конечные числа, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B,$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\, g(x)\big) = A \cdot B, \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(В последней формуле требуется, чтобы $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0.$)

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = 6.$

Докажем это утверждение на языке ε и $\delta,$ то есть воспользуемся определением предела функции по Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0.$ Для всех $x \neq 3$ справедливо

$$\left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x-3|.$$

Следовательно, полагая $\delta = \varepsilon,$ получаем

$$\forall x: 0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|x-3|<\delta=\varepsilon.$$

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$. Доказательство провести двумя способами: по Гейне и по Коши.

По Гейне. Если $x_n \to 3$ $(x_n \neq 3)$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2=\lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} x_n=3\cdot 3=9.$$

По Коши. Зафиксируем какой-либо интервал, содержащий точку 3, в котором определена функция $f(x)=x^2$. Пусть, например, функция определена в интервале

$$U_{1/3}(3)=\left(3-\tfrac{1}{3},3+\tfrac{1}{3}\right)=\left(\tfrac{8}{3},\tfrac{10}{3}\right)=\left\{x:|x-3|<\tfrac{1}{3}\right\}.$$

Для любого $x\in U_{1/3}(3)$ справедливо $|x|<\frac{10}{3}$, поэтому

$$|x^2-9|=|x+3||x-3|\le(|x|+3)|x-3|<\tfrac{19}{3}|x-3|.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и положим $\delta=\min\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{19}\varepsilon\right\}$. Тогда для всех x таких, что $0<|x-3|<\delta$, имеет место неравенство $|x^2-9|<\frac{19}{3}\cdot\frac{3}{19}\varepsilon=\varepsilon$. Обсудим более подробно, как получилась последняя оценка. Действительно, если $\delta=\frac{1}{3}\le\frac{3}{19}\varepsilon$, то

$$|x^2-9|<\tfrac{19}{3}|x-3|<\tfrac{19}{3}\delta=\tfrac{19}{3}\cdot\tfrac{1}{3}\le\tfrac{19}{3}\cdot\tfrac{3}{19}\varepsilon=\varepsilon.$$

Если же $\delta=\frac{3}{19}\varepsilon<\frac{1}{3}$, то $|x^2-9|<\frac{19}{3}|x-3|<\frac{19}{3}\delta=\frac{19}{3}\cdot\frac{3}{19}\varepsilon=\varepsilon$.

В конце параграфа приведем два важных примера:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ (первый замечательный предел);

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\tfrac{1}{x})^x=e}$$ (второй замечательный предел),

где $e=2,718281\ldots$.

§ 7. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Все функции, рассматриваемые в настоящем параграфе, считаем определенными на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Пределы функции, конечные и бесконечные, будут рассматриваться при $x \to x_0$, где точка $x_0 \in X$ может быть как конечно, так и бесконечно удаленной.

Определение 1. Функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Пример 1. $f(x) = 1/x^2$ – бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Определение 2. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Пример 2. $f(x) = 1/x^2$ – бесконечно большая функция при $x \to 0$.

Теорема 1. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ является бесконечно малой.

Пример 3. $f(x) = x^3 + \sin x^2 / x$ – бесконечно малая функция при $x \to 0$. (Легко проверить, что обе функции x^3 и $\sin x^2 / x$ – бесконечно малые при $x \to 0$.)

Теорема 2. Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ на ограниченную функцию является бесконечно малой.

Пример 4. $f(x) = (x-3)^2 \cdot \sin\left(1/(x-3)\right)$ – бесконечно малая функция при $x \to 3$. Здесь $(x-3)^2 \to 0$ при $x \to 3$, а функция $\sin\left(1/(x-3)\right)$ ограничена.

Теорема 3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, $x \in X$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

Теорема 4. Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Теорема 5. Если функция $\alpha : X \to \mathbb{R}$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0, то функция $1/\alpha(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Приведем символические обозначения, часто употребляемые для сокращения записи. Пусть $a > 0$, тогда пишут:

$$\frac{a}{-0} = -\infty, \quad \frac{a}{+0} = +\infty, \quad \frac{a}{0} = \infty, \quad \frac{a}{-\infty} = -0, \quad \frac{a}{+\infty} = +0, \quad \frac{a}{\infty} = 0.$$

Отметим также неопределенности следующего вида:

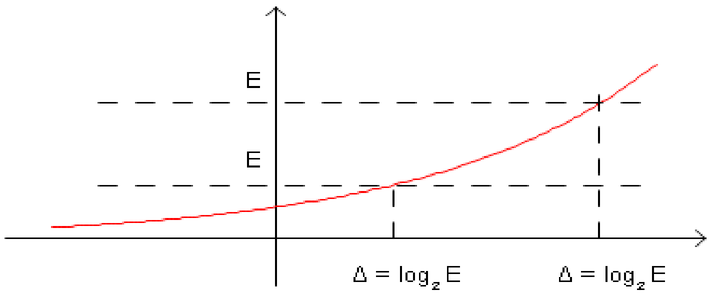
$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \big((+\infty) - (+\infty)\big).$$

Пример 5. Покажите на языке E и Δ, что $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$.

Решение. Зафиксируем $E > 1$ и рассмотрим неравенство $2^x > E$. Оно равносильно неравенству $x > \log_2 E$. Положив $\Delta \doteq \log_2 E$, получаем, что для всех $x > \Delta$: $2^x > 2^\Delta = E$. Таким образом,

$$\forall E > 1 \ \exists \Delta = \log_2 E > 0 : \ \forall x > \Delta \Rightarrow 2^x > E.$$

На рисунке показана зависимость Δ от E.



Пример 6. Покажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

Решение 1. Так как $f(x)=\sin x$ – ограниченная функция, а $g(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to+\infty$, то $\dfrac{\sin x}{x}=f(x)\cdot g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ (в силу теоремы 2).

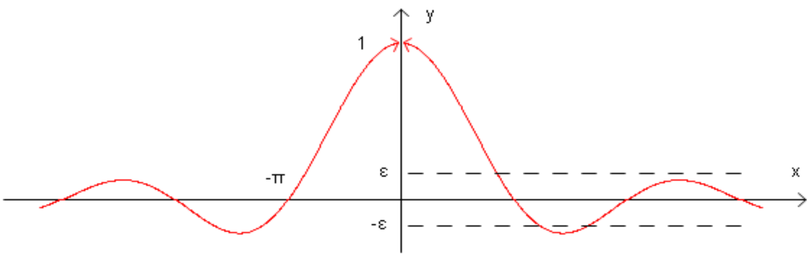
Решение 2. (На языке ε и Δ). Очевидно, $|\sin x|\le 1$ и $x>0$ (так как $x\to+\infty$). Для любого $\varepsilon>0$ справедлива цепочка эквивалентных неравенств:

$$|1/x|<\varepsilon \iff 1/x<\varepsilon \ (x>0) \iff x>\varepsilon^{-1}.$$

Положим $\Delta\doteq\varepsilon^{-1}$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\Delta=\varepsilon^{-1}:\ \forall\,x>\Delta \Rightarrow \left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Приводимый рисунок демонстрирует поведение функции.

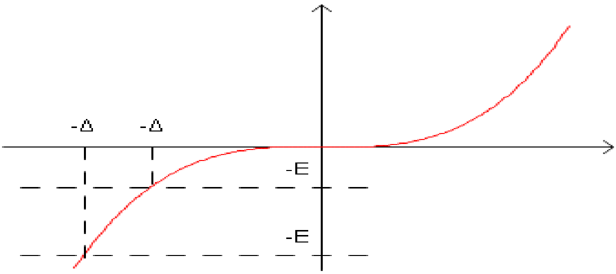


Пример 7. Покажите, что $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$

Решение. (На языке E и Δ). Очевидно, $x<0$ (так как $x\to-\infty$). Пусть $E>0$. Неравенства $x^3<-E$ и $x<-\sqrt[3]{E}$ равносильны. Положим $\Delta\doteq\sqrt[3]{E}$. Тогда

$$\forall\,E>0\ \exists\,\Delta=\sqrt[3]{E}:\ \forall\,x<-\Delta \Rightarrow x^3<-E.$$

На рисунке показана зависимость Δ от E.



ЗАДАНИЕ 1

Доказать по определению:

1. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$
2. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$
4. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = -6$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = 12$
6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$
7. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 4x + 3}{x + 3} = -2$
8. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x) = -1$
9. $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{5}{x - 2} = +\infty$
10. $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{7}{x - 3} = -\infty$
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x + 4} = 0$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

13. $\lim\limits_{x\to6+0}\dfrac{1}{x-6}=+\infty$

14. $\lim\limits_{x\to6-0}\dfrac{1}{x-6}=-\infty$

15. $\lim\limits_{x\to5+0}2^{\frac{1}{x-5}}=+\infty$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7}{x}=5$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{3x^2+7}=\dfrac{1}{3}$

18. $\lim\limits_{x\to3-0}7^{\frac{2}{x-3}}=0$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+4}=0$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{2-x}=0$

21. $\lim\limits_{x\to0}4^{\frac{1}{x^6}}=+\infty$

22. $\lim\limits_{x\to-1-0}3^{\frac{x-1}{x^2-1}}=0$

23. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=4$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_2\dfrac{2x+3}{x+5}=1$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+1}=2$

§ 8. Сравнение функций. О-символика

Рассмотрим вопрос сравнения функций в окрестности точки, в частности, вопрос сравнения бесконечно больших и бесконечно малых. Зафиксируем функции $f, g : X \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$ в окрестности точки x_0, если существует такая постоянная $c > 0$, что в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 выполняется неравенство

$$|f(x)| \le c\,|g(x)|.$$

В этом случае пишем $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$. (Читается: $f(x)$ есть О большое от $g(x)$ при $x \to x_0$.)

Пример 1. Так как $|\sin^2 x| \le |x^2|$ при $x \in (-1,1)$, то $\sin^2 x = \mathrm{O}(x^2)$ при $x \to 0$, а так как $|\sin^2 x| \le |x^2| \le |x|$ при $x \in (-1,1)$, то $\sin^2 x = \mathrm{O}(x)$ при $x \to 0$.

Утверждение 1. Если $f(x) = \varphi(x)\,g(x)$, $x \in X$, и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$, $x \to x_0$.

Определение 2. Будем говорить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to x_0$, если $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ и $g(x) = \mathrm{O}\big(f(x)\big)$ при $x \to x_0$. Пишем $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.

Утверждение 2. Если существует конечный ненулевой предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, то $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.

Замечание 1. Понятие «функции одного порядка» наиболее содержательно тогда, когда функции f и g являются либо бесконечно большими, либо бесконечно малыми при $x \to x_0$.

Если функции f и g бесконечно малые (бесконечно большие) при $x \to x_0$ и $f \approx g$, $x \to x_0$, то говорят, что f и g бесконечно малые (бесконечно большие) одного порядка при $x \to x_0$ (в точке x_0).

Пример 2. $\dfrac{2x^3}{1+x^5} \approx x^3$ при $x \to 0$, так как имеет место равенство $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3}{(1+x^5)\cdot x^3} = 2$.

Пример 3. $\dfrac{1+x^5}{2x^3} \approx x^2$ при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+x^5}{2x^5} = \dfrac{1}{2}$.

Определение 3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют эквивалентными (асимптотически равными) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, и пишут $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

Упражнение 1. Докажите следующие свойства.

1) Если $f \sim g$ при $x \to x_0$, то $g \sim f$ при $x \to x_0$ (свойство симметричности).

2) Если $f \sim g$ и $g \sim h$ при $x \to x_0$, то $f \sim h$ при $x \to x_0$ (свойство транзитивности).

3) $f \sim f$ при $x \to x_0$ (свойство рефлексивности).

Таким образом, название «эквивалентные» функции оправдано, так как все свойства, присущие отношению эквивалентности, выполнены.

При $x \to 0$ справедливы следующие эквивалентности бесконечно малых величин:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Упражнение 2. Покажите, что при $x \to 0$ справедливо

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \qquad a^x - 1 \sim x \ln a, \qquad \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}.$$

Утверждение 3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0,$ тогда при $x \to x_0$

$$\varphi(x) \sim \sin\varphi(x) \sim \arcsin\varphi(x) \sim \operatorname{tg}\varphi(x)$$
$$\sim \operatorname{arctg}\varphi(x) \sim \ln\left(1+\varphi(x)\right) \sim e^{\varphi(x)} - 1.$$

Пример 4. Справедливо $1-\cos 7x^2 \sim \frac{49}{2}x^4,\ x \to 0$.

Пример 5. Справедливо $\sin(x-2) \sim (x-2),\ x \to 2$.

Определение 4. Функцию $f(x)$ называют бесконечно малой по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, и пишут $f(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\right),\ x \to x_0$. (Читается: $f(x)$ есть о малое от $g(x)$ при $x \to x_0$.)

Замечание 2. Запись $f = \mathrm{o}(1),\ x \to x_0$, означает, что функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Замечание 3. Равенство $f(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\right),\ x \to x_0$, означает, что функция $f(x)$ принадлежит множеству функций, обладающих тем свойством, что предел отношения любой функции из этого множества к функции $g(x)$ при $x \to x_0$ равен нулю.

Пример 6. Доказать, что $\sin x^3 = \mathrm{o}(x^2),\ x \to 0.$

Соотношение имеет место, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{x^2} = 0.$

Приведите примеры функций, которые являются функциями класса $\mathrm{o}(x^3),\ x \to 0.$

Покажите, что имеют место следующие свойства «о малого» и «О большого» при $x \to x_0$.

1^0. $\quad \mathrm{o}(g) \pm \mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}(g) \pm \mathrm{O}(g) = \mathrm{O}(g),$

2^0. $\quad \mathrm{o}(\mathrm{C}g) = \mathrm{o}(g), C \neq 0, \qquad \mathrm{O}(\mathrm{C}g) = \mathrm{O}(g), C \neq 0,$

3^0. $\quad \mathrm{o}\big(\mathrm{o}(g)\big) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}\big(\mathrm{O}(g)\big) = \mathrm{O}(g),$

4^0. $\quad \mathrm{o}\big(\mathrm{O}(g)\big) = \mathrm{o}(g), \qquad \mathrm{O}\big(\mathrm{o}(g)\big) = \mathrm{o}(g).$

Упражнение 3. Покажите, что если $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$, то тем более $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$. Верно ли обратное? Приведите пример.

Теорема 1. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x \to x_0$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + \mathrm{o}\big(g(x)\big),\ x \to x_0. \qquad (*)$$

Замечание 4. Если выполняется $(*)$, то функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ при $x \to x_0$.

Пример 7. Главной частью многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \big(a_n \neq 0\big)$$

при $x \to \infty$ является функция $a_n x^n$, и можно записать

$$P_n(x) = a_n x^n + \mathrm{o}(x^n),\ \ x \to \infty.$$

Пример 8. Главной частью функции $f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$ при $x \to 0$ является функция $g(x) = 2x$. (Легко проверить равенство $2x + 3x^2 + x^3 = 2x + \mathrm{o}(2x)$.) С другой стороны, $2x + 3x^2 + x^3 = 2x + 3x^2 + \mathrm{o}(2x + 3x^2)$, $x \to 0$ Таким образом, функция $f(x)$ имеет, по крайней мере, две главные части.

Утверждение 4. Если функция $f(x)$ обладает при $x \to x_0$ главной частью вида $A(x - x_0)^n$, $A \neq 0$, где A и n – постоянные, то среди всех главных частей такого вида она определяется однозначно:

$$f(x)=A(x-x_0)^n+\mathrm{o}\left((x-x_0)^n\right),\ \ x\to x_0.$$

Пример 9. Выделить у функции $f(x)=3x^5+4x+7$ главную часть вида Ax^n при $x\to\infty$.

Решение. Полагая $A=3, n=5$, получим равенства

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+4x+7}{Ax^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+4x+7}{3x^5}=1,$$

поэтому главная часть имеет вид $3x^5$.

Пример 10. Выделить у функции $f(x)=3x^5+4x$ главную часть вида Ax^n при $x\to 0$.

Решение. Полагая $A=4, n=1$, получим равенства

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+4x}{Ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^5+4x}{4x}=1,$$

поэтому главная часть имеет вид $4x$.

Пример 11. Выделить у функции $f(x)=\sin 3(x^2-1)$ главную часть вида $A(x-1)^n$ при $x\to 1$.

Решение. Справедливы легко проверяемые соотношения

$$\sin 3(x^2-1)\sim 3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)\sim 6(x-1),\qquad x\to 1,$$

следовательно, главная часть имеет вид $6(x-1)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)\sim f_1(x),\ g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, и они равны: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

Замечание 5. Понятие главной части функции полезно при изучении поведения бесконечно малых и бесконечно больших функций сложного аналитического вида с последующей заменой функции на главную часть вида

$A(x-x_0)^n$ в окрестности точки x_0. Приведем пример применения метода выделения главной части при вычислении пределов. Поставим задачу вычисления предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3}{\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x}.$$

При $x\to 0$ справедливо

$$\ln(1+3x)\sim 3x,\quad \arcsin 6x\sim 6x,\quad \operatorname{tg}8x\sim 8x,\quad \sin 5x\sim 5x,$$

следовательно,

$$\ln(1+3x)=3x+o(x),\quad \arcsin 6x=6x+o(x),\quad x^3=o(x),$$

$$\operatorname{tg}8x=8x+o(x),\quad \sin^2 5x=25x^2+o(x^2)=o(x).$$

Таким образом, при $x\to 0$ имеем равенства

$$\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3=9x+o(x),$$

$$\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x=8x+o(x),$$

поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+\arcsin 6x+x^3}{\operatorname{tg}8x+\sin^2 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x+o(x)}{8x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{8x}=\frac{9}{8}.$$

ЗАДАНИЕ 2

Доказать соотношения:

1) $\sin^2(x-2)\sim(x-2)^2,\ x\to 2$
2) $\sin^2(x-2)=o(x-2),\ x\to 2$
3) $\sqrt[7]{1+x}-1\sim\frac{1}{7}x,\ x\to 0$
4) $\ln(1+3x^2)\approx x^2,\ x\to 0$
5) $7x^5+9x^2+4x\approx x^5,\ x\to\infty$
6) $7x^5+9x^2+4x\sim 4x,\ x\to 0$
7) $\ln\cos 3x\sim-\frac{9}{2}x^2,\ x\to 0$
8) $\cos x^2-1=o(x),\ x\to 0$

9) $\operatorname{tg}^3 3(x+3) \approx (x+3)^3,\ x \to -3$

10) $e^{\sin x^3} - 1 = \mathrm{o}(x^2),\ x \to 0$

11) $\arcsin 5\sqrt[3]{x} \sim 5\sqrt[3]{x},\ x \to 0$

12) $\sqrt{\cos 7x} - 1 \approx x^2,\ x \to 0$

13) $x^2 + 3x = \mathrm{O}\left(x\right),\ x \to 0$

14) $\log_2(1 - x + x^2) \sim -\dfrac{x}{\ln 2},\ x \to 0$

15) $7^{x^2 - x} - 1 \sim (x^2 - x)\ln 7,\ x \to 0$

16) $x^3 + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x},\ x \to 0$

17) $x^3 + \sqrt[3]{x} \sim x^3,\ x \to +\infty$

18) $x^2 - 4 \approx \sqrt{x} - \sqrt{2},\ x \to 2$

19) $x^2 \sin\frac{1}{x} = \mathrm{o}(x),\ x \to 0$

20) $x \sin\frac{1}{x} = \mathrm{O}(x),\ x \to 0$

21) $x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \mathrm{o}(x^2),\ x \to 0$

22) $x^2 \cos\frac{1}{x} = \mathrm{o}(1),\ x \to 0$

23) $\sqrt{2 - x} - 1 \approx \sqrt{5 - x} - 2,\ x \to 1$

24) $\cos 5x - \cos 7x \approx x^2,\ x \to 0$

25) $x \arcsin\sqrt{x} = \mathrm{o}(x),\ x \to 0+$

ГЛАВА II. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Приведем эквивалентные определения непрерывности функции в точке x_0.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2 (на языке $\varepsilon - \delta$, по Коши). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x из окрестности $U(x_0)$ из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Другими словами,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U(x_0): |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 3 (на языке последовательностей, по Гейне). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U(x_0)$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Через $\Delta x \doteq x - x_0$, $x \in U(x_0)$, обозначим приращение аргумента. Понятно, что $x = x_0 + \Delta x$.

Разность $\Delta y \doteq f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции $y = f(x)$, соответствующим данному приращению аргумента Δx.

Определение 4 (на языке приращений). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$ (бесконечно малому приращения аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции).

Определение 5. Функция $f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке x_0, если $f(x_0+0)=f(x_0)$ (соответственно $f(x_0-0)=f(x_0)$).

Замечание 1. Наличие различных определений одного и того же понятия удобно тем, что в разных ситуациях полезным оказывается то или иное определение.

Пример 1. Показать непрерывность функции $f(x)=x^3$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение (на языке приращений). Пусть $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0, тогда

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

– приращение функции. Далее, применяя теоремы о пределах сумм и произведений функций, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

ЗАДАНИЕ 3

Пользуясь одним из определений непрерывности функций, доказать, что функция непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. $f(x)=3x^3+2x$ в точке $x_0=1$
2. $f(x)=\ln 3x+e^{2x}$ в точке $x_0=2$
3. $f(x)=\cos^2 5x-x^2$ в точке $x_0=-1$
4. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ e^x, & x\ge 0 \end{cases}$ в точке $x_0=0$
5. $f(x)=2x^3+3x$ в точке $x_0=2$
6. $f(x)=x^4+2x^2$ в точке $x_0=1$
7. $f(x)=\cos 6x+x^3$ в точке $x_0=-1$
8. $f(x)=\begin{cases} \sin x/x, & x\ne 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$ в точке $x_0=0$

9. $f(x)=6x^2+7x$ в точке $x_0=-1$

10. $f(x)=\cos 2x+6x^2$ в точке $x_0=2$

11. $f(x)=4x^3+x^2$ в точке $x_0=-1$

12. $f(x)=\ln 5x-e^{3x-1}$ в точке $x_0=1$

13. $f(x)=\cos 3x+e^{4x+1}$ в точке $x_0=-1$

14. $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\cos^2 4x$ в точке $x_0=1$

15. $f(x)=6x+e^{2x}$ в точке $x_0=1$

16. $f(x)=\sqrt{2x-3}+\sin 4x$ в точке $x_0=0$

17. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ e^{2x}, & x>0 \end{cases}$ в точке $x_0=0$

18. $f(x)=4x^4+x^3$ в точке $x_0=-1$

19. $f(x)=\cos 7x+e^{5x-1}$ в точке $x_0=-1$

20. $f(x)=6x^2+2x+3$ в точке $x_0=2$

21. $f(x)=5x^2+e^{2x}$ в точке $x_0=1$

22. $f(x)=6x^2+1+\cos 3x$ в точке $x_0=0$

23. $f(x)=3x^2+6x+\sin 4x$ в точке $x_0=1$

24. $f(x)=\cos 4x-x^2$ в точке $x_0=-1$

25. $f(x)=\begin{cases} 2^x+1, & x\le 0, \\ x+2, & x>0 \end{cases}$ в точке $x_0=0$

§ 2. Точки разрыва

Определение 1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой этой точки. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если:

1) функция не определена в этой точке;

2) функция определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.

Точки разрыва классифицируются следующим образом.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

Величина $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то есть $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то точка x_0 называется точкой устранимого разрыва. Название «устранимый» оправдано, так как, положив $f(x_0)\doteq f(x_0-0)=f(x_0+0)$, получим непрерывную в точке x_0 функцию.

Определение 3. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если она не является точкой разрыва первого рода, то есть в этой точке, по крайней мере, один из односторонних пределов не существует.

Замечание 1. Здесь под пределом понимается лишь конечный предел.

Замечание 2. Если в точке x_0 один из односторонних пределов равен бесконечности, то прямая $x=x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

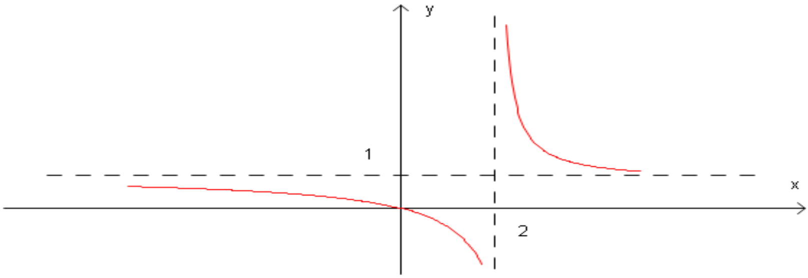
Пример 1. Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ имеет разрыв второго рода в точке $x_0=0$, так как не существует предела в этой точке. Покажем это. Для последовательности $x_n=\frac{2}{(2n+1)\pi}$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, а последовательность из значений функции $f(x_n)=\sin\frac{2n+1}{2}\pi=(-1)^n$ предела не имеет.

Пример 2. Функция $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв первого рода, причем устранимый, так как $\lim\limits_{x\to 0-} x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} x\sin\frac{1}{x} = 0$. Почему?

Если положить $f(0) = 0$, то разрыв будет устранен, функция станет непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Пример 3. Функция $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ имеет разрыв второго рода в точке $x_0 = 2$, так как $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$.

Прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота графика рассматриваемой функции. Ниже на рисунке приведено поведение данной функции в окрестности точки $x_0 = 2$.

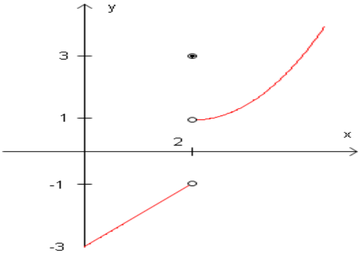


В качестве примера приведем шесть графиков функций $f(x)$, имеющих разрыв первого рода в точке $x_0 = 2$.

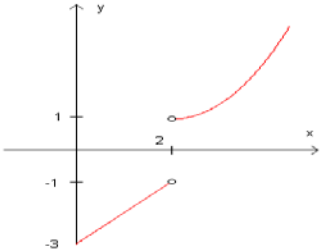
На первом рисунке функция $f(x)$ определена в точке x_0, а на втором не определена в этой точке.

На третьем рисунке $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, на четвертом $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0.

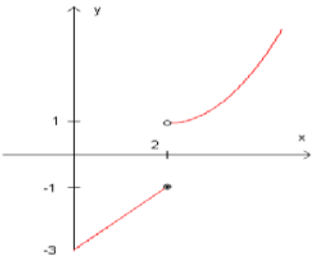
На пятом и шестом рисунках $f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0; на пятом рисунке функция определена в точке x_0, а на шестом не определена в этой точке.



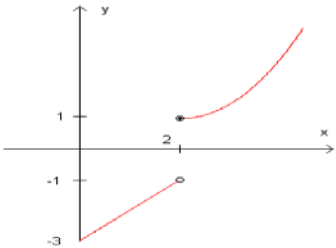
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ 3, & x=2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



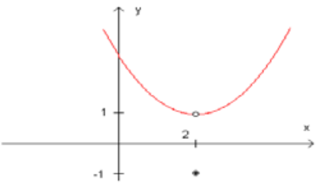
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



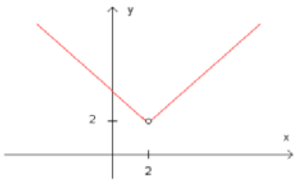
$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x\le 2 \\ x^2-4x+5, & x>2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<2 \\ x^2-4x+5, & x\ge 2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5, & x\ne 2 \\ -1, & x=2 \end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases} 4-x, & x<2 \\ x, & x>2 \end{cases}$$

ЗАДАНИЕ 4

Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ и указать тип её точек разрыва.

1) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-2}$

2) $f(x) = \log_2(x^2 + 2x)$

3) $f(x) = 2^{\frac{x}{x-3}}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^3 - 4x}$

5) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x-1}$

6) $f(x) = x \ln x$

7) $f(x) = \dfrac{x}{\sin 2x}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{x/(1-x)}}$

9) $f(x) = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$

10) $f(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x+2}{x}}$

11) $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$

12) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + 3x^2)}{2x}$

13) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 3x}$

14) $f(x)=\dfrac{\sin^2(x-2)}{x^2-4}$

15) $f(x)=\operatorname{ctg}3x+\ln(1+x^2)$

16) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}+\ln(2x^4+3)$

17) $f(x)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-5}$

18) $f(x)=\dfrac{4^{1/(x-4)}-1}{4^{1/(x-4)}+1}+\sin x$

19) $f(x)=\lg(x^2+1)+\dfrac{1}{(1-e^x)^{1/x}}$

20) $f(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{10x-2}+e^{x+3}$

21) $f(x)=2^{(x-4)/x}+x^2+3$

22) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-3}$

23) $f(x)=\lg\left(\dfrac{1}{\sin x}+1\right)+x^3$

24) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2-6x+8}+\ln(5+x^2)$

25) $f(x)=\operatorname{arcctg}(x^2+3)+\ln\dfrac{x}{1-x}$

§ 3. Основные теоремы

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие непрерывности в точке). Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна слева $\left(f(x_0-0)=f(x_0)\right)$ и непрерывна справа $\left(f(x_0+0)=f(x_0)\right)$, то есть

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).$$

Теорема 2 (об арифметических операциях над непрерывными функциями). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ также непрерывны в точке x_0 (в последнем случае требуется, чтобы $g(x)\neq 0$).

Теорема 3 (непрерывность сложной функции). Пусть функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u=f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y=f\left(\varphi(x)\right)$ непрерывна в точке x_0.

Теорема 4 (о локальной ограниченности непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 5 (о сохранении непрерывной функцией постоянного знака в окрестности точки). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$ (или $f(x_0)<0$), то в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)>0$ (соответственно $f(x)<0$).

Пример 1. Функция $f(x)=\cos x$ непрерывна в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$ и $f(x_0)=\cos x_0=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}>0.$ Существует такая окрестность точки $x_0=\frac{\pi}{3}$, в которой функция сохраняет знак. Например, $\cos x>0$ для всех $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{12}\right)$.

§ 4. Свойства непрерывных функций на промежутках

Определение 1. Функция $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то её непрерывность в точке $x=a$ (в точке $x=b$) означает непрерывность справа (слева).

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если множество её значений ограничено сверху (снизу), то есть

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ (\exists\, m \in \mathbb{R}) : \forall\, x \in X \ \Rightarrow\ f(x) \le M\ \ (f(x) \ge m).$$

При этом число M называется верхней границей, а m – нижней границей функции $f(x)$.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если она ограничена сверху и снизу:

$$\exists\, M > 0 : \forall\, x \in X \ \Rightarrow\ |f(x)| \le M.$$

Упражнение 1. Напишите с помощью кванторов следующие определения: $f(x)$ не ограничена сверху; $f(x)$ не ограничена снизу; $f(x)$ не ограничена. Приведите примеры.

Пример 1. Функция $f(x)=x^2$, $x \in (0;+\infty)$, ограничена снизу и не ограничена сверху, а функция $f(x)=x^2$, $x \in (0;1)$, ограничена и сверху и снизу.

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ задана и ограничена на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Наименьшая из верхних границ (обозначим ее β) функции $f(x)$ называется точной верхней гранью (лат. supremum) функции:

$$\beta \doteq \sup_{x\in X} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \forall\, x \in X \Rightarrow f(x) \le \beta, \\ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x' \in X : f(x') > \beta - \varepsilon. \end{cases}$$

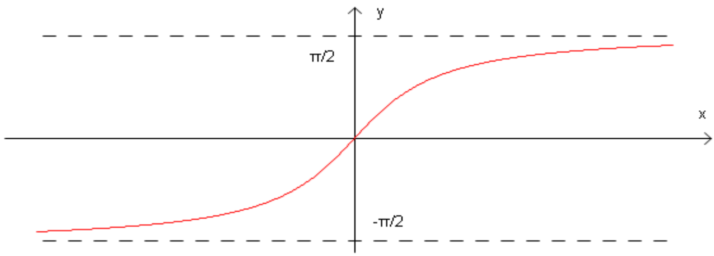
Наибольшая из нижних границ (обозначим ее α) функции $f(x)$ называется точной нижней гранью (лат. infimum):

$$\alpha \doteq \inf_{x\in X} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq \alpha, \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X : f(x') < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

Пример 2. Справедливы равенства

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2}, \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = -\tfrac{\pi}{2}.$$

На рисунке изображен график функции $y = \operatorname{arctg} x$:



Определение 5. Будем говорить, что функция $f(x)$ достигает в точке $x_0 \in X$ точной верхней (нижней) грани, то есть принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение, если $f(x_0) = \sup\limits_{x\in X} f(x) \quad (f(x_0) = \inf\limits_{x\in X} f(x))$.

В этом случае пишут

$$\sup_{x\in X} f(x) = \max_{x\in X} f(x) \qquad (\inf_{x\in X} f(x) = \min_{x\in X} f(x)).$$

Замечание 2. Наибольшее (наименьшее) значение функции называется также её максимальным (минимальным) значением.

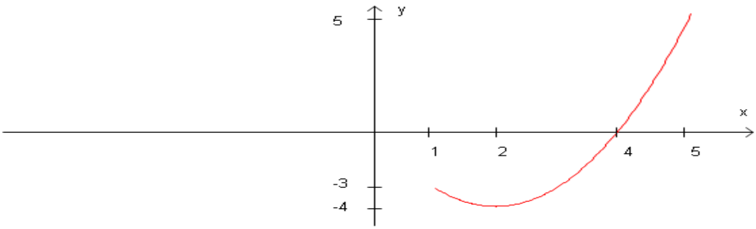
Пример 3. $\sup\limits_{x\in[0;\,\pi/6]} \sin x = \max\limits_{x\in[0;\,\pi/6]} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. В данном примере функция достигает точной верхней грани.

Пример 4. $\inf\limits_{x\in(0;\,\pi/6)} \sin x = 0$. В данном примере функция не достигает точной нижней грани.

Теорема 1 (теорема Вейерштрасса). Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем точной верхней и точной нижней грани.

Пример 5. Функция $f(x) = x^2 - 4x$ непрерывна на отрезке [1;5] и ограничена на нем: $|x^2 - 4x| \leq 5$. Действительно, существуют две точки $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$, принадлежащие отрезку [1;5], такие, что

$$f(x_1) = f(2) = -4 = \inf_{[1;5]} f(x), \quad f(x_2) = f(5) = 5 = \sup_{[1;5]} f(x).$$



Теорема 2 (теорема Больцано–Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = A,\ f(b) = B$ $(A \neq B)$, то для любого C, заключенного между числами A и B, существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $f(\xi) = C$.

Замечание 3. На теореме Больцано–Коши основан метод интервалов решения неравенств. Находят промежутки знакопостоянства функции (например, дробно-рациональной функции $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены), учитывая, что функция может менять знак только в точках разрыва и в тех точках, где $f(x) = 0$.

ЗАДАНИЕ 5

Решить неравенство методом интервалов:

1) $(x^2-4)\,x^3(x+2)>0$

2) $\dfrac{3-x^2}{x^4-16}\geq 0$

3) $(x^3-8)(x^4-1)\leq 0$

4) $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}\geq 0$

5) $(x^5-1)(2x+7)(3x-5)<0$

6) $\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{2x-3}\geq 0$

7) $(3x^2+2x-1)(x^2-4x-5)\leq 0$

8) $\dfrac{2x^2+5x+2}{8+2x-x^2}\leq 0$

9) $\dfrac{x^2}{x^6-1}>0$

10) $(16-x^4)(27+x^3)<0$

11) $\dfrac{1}{x^3+8}+\dfrac{1}{x^2-4}\geq 0$

12) $(x^4-4)(12-x^2)>0$

13) $\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{1}{x+5}<0$

14) $3x^4+5x^3+7x^2>0$

15) $\dfrac{7x-10}{x^4+4x^2-21}<0$

16) $2x^4-x^5+8x^3>0$

17) $(x^3-1)(4x^2-x-3)\leq 0$

18) $\dfrac{x^4-9x^2+8}{4x^2-5x+1}\le 0$

19) $\dfrac{1}{x+6}-\dfrac{1}{x+1}\ge\dfrac{1}{x^2+x}$

20) $15x-x^5-2x^3<0$

21) $\dfrac{2}{(x-3)^2}+\dfrac{5}{(x+7)^2}\ge 0$

22) $x^5-6x^4+12x^3-8x^2<0$

23) $\dfrac{6x-x^2-9}{x^2-x-6}\le 0$

24) $(4x-5x^2-6)(7x^2-x^3)\ge 0$

25) $\dfrac{10x-2}{5x^2+14x-3}>0$

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Пример 6. Доказать, что уравнение $x^5-3x^2-7=0$ имеет корень на отрезке $[1,2]$.

Определим функцию $f(x)=x^5-3x^2-7$. Она непрерывна на отрезке $[1,2]$ и на его концах принимает значения разных знаков: $f(1)=-9<0$, $f(2)=13>0$. Значит, она удовлетворяет условиям следствия 1 и обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке интервала $(1,2)$. Следовательно, уравнение имеет корень на отрезке $[1,2]$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется строго возрастающей (строго убывающей) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Функция, строго возрастающая или строго убывающая, называется строго монотонной.

Теорема 3. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$, тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна, строго возрастает (убывает) на отрезке с концами в точках $f(a)$ и $f(b)$.

Определение 7. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример 7. Доказать, что функция $f(x) = 3x - 2$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon/3$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |3x_1 - 2 - 3x_2 + 2| = 3|x_1 - x_2| < 3\delta = \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

Замечание 4. В определении функции, непрерывной на множестве X, в каждой точке $x \in X$ величина δ зависит не только от ε, но и от x. (Пишем $\delta = \delta(\varepsilon, x)$.) В случае же функции, равномерно непрерывной на множестве X, величина δ зависит только от ε и не зависит от значений аргумента $x \in X$. (Пишем $\delta = \delta(\varepsilon)$.)

Теорема 4. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, то она непрерывна на этом множестве.

Действительно, при $x_1 = x,\ \ x_2 = x_0$ справедливо $|x_1 - x_2| = |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Обратное утверждение не всегда истинно.

Теорема 5 (теорема Кантора). Функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Замечание 5. Теорема неверна, если отрезок $[a,b]$ заменить интервалом или полуинтервалом.

Пример 8. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$ на отрезке $[-1;1]$.

Точки разрыва функции $x = \pm 2$ не принадлежат отрезку $[-1;1]$. Функция непрерывна на отрезке $[-1;1]$, значит, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на нем.

Пример 9. Исследовать на равномерную непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ на интервале $(0;2)$.

Данная функция непрерывна на интервале $(0;2)$, но не является равномерно непрерывной на нем. Чтобы доказать это, достаточно показать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ существует, по крайней мере, одна пара точек x' и x'' из интервала $(0;2)$ такая, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

Пусть $\varepsilon = 1$, и рассмотрим две последовательности точек из интервала $(0;2)$: $x'_n = \dfrac{1}{2n-1}$ и $x''_n = \dfrac{1}{2n}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} x''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} (x'_n - x''_n) = 0$, а это значит, что

$$\forall\delta>0\ \exists n\in\mathbb{N}:\ |x_n'-x_n''|=\left|\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2n(2n-1)}<\delta.$$

При этом для разности значений функции имеем

$$|f(x')-f(x'')|=|(2n-1)^2-(2n)^2|=|1-4n|=4n-1>1=\varepsilon.$$

Это и означает, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0;2)$.

§ 5. Асимптоты

Определение 1. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\big(f(x)-(kx+b)\big)=0$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$. Верно и обратное: если $y=b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $f(x)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)} f(x)=b$.

Докажите, что прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ (при $x\to-\infty$) тогда и только тогда, когда

$$k=\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty\,(-\infty)}\big(f(x)-kx\big).$$

Данное утверждение порождает следующий алгоритм вычисления асимптоты графика функции $f(x)$.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{f(x)}{x}$. Если этот предел не существует или равен ∞, то асимптоты нет, если он существует и равен k, то переходим к пункту 2.

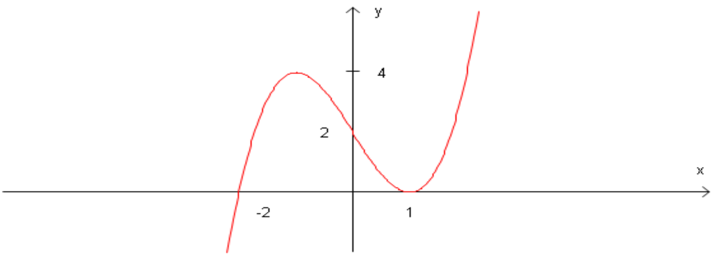
2. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\left(f(x)-kx\right)$. Если этот предел не существует или равен ∞, то асимптоты нет, если он существует и равен b, то переходим к пункту 3.

3. Выписать уравнение наклонной асимптоты в виде $y=kx+b$.

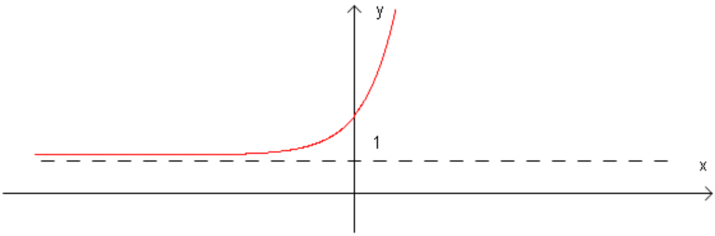
Замечание 1. Если $k=0$, то имеем горизонтальную асимптоту $y=b$.

Замечание 2. На практике могут возникнуть различные случаи асимптотического поведения функции.

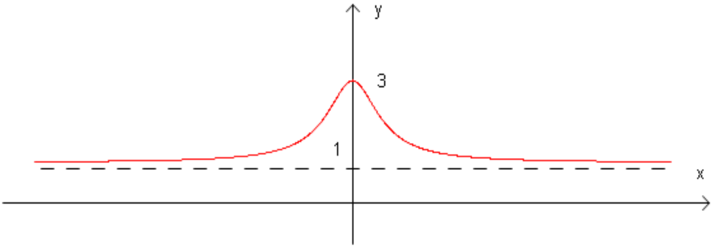
На рисунках изображены графики функций с различным асимптотическим поведением.



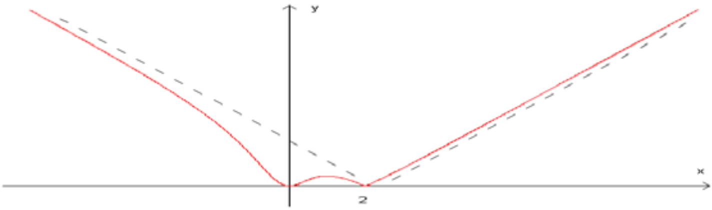
$f(x)=x^3-3x+2$



$f(x)=e^x+1$



$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2+1}$$



$$f(x)=\frac{x^2\,|x-2|}{x^2+1}$$

На первом рисунке наклонных асимптот нет. На втором рисунке имеется горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$. На третьем рисунке имеются горизонтальные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$. На четвертом рисунке имеются наклонные асимптоты при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

Пример 1. Найти асимптоту графика функции $f(x)=\dfrac{x^3+3}{3x^2+1}$. Выполним шаги согласно алгоритму:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{x^3+3}{x(3x^2+1)}=\dfrac{1}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\left(\dfrac{x^3+3}{3x^2+1}-\dfrac{1}{3}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty\,(-\infty)}\dfrac{9-x}{3(3x^2+1)}=0$

3. Уравнение асимптоты $y=\frac{1}{3}x$ при $x\to+\infty(-\infty)$.

ЗАДАНИЕ 6

Найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции $f(x)$.

1. $f(x)=\dfrac{2x^3+9x+8}{x^2-5}$
2. $f(x)=2^{\frac{x}{x-2}}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$
4. $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x+2}$
5. $f(x)=3^{\frac{x-3}{x}}$
6. $f(x)=\ln(x^2+x)$
7. $f(x)=\ln(x-2)$
8. $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-1}$
9. $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$
10. $f(x)=\ln(3x^2+1)$
11. $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$
12. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$
13. $f(x)=xe^x$
14. $f(x)=2xe^x$
15. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

16. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$

17. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$

18. $f(x)=7^{\frac{x+1}{x-2}}$

19. $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-16}$

20. $f(x)=\ln\dfrac{1}{x+2}$

21. $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$

22. $f(x)=\dfrac{4x-2}{5x^2}$

23. $f(x)=x+\ln x$

24. $f(x)=2x+\dfrac{3}{x}$

25. $f(x)=\ln(x^2-2)$

ЗАДАНИЕ 7

Доопределить по непрерывности функции в указанных точках:

1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ в точке $x_0=0$

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}, & x<-1\\ x, & x>-1\end{cases}$ в точке $x_0=-1$

3) $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{3x}$ в точке $x_0=0$

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ в точке $x_0=1$

5) $f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$ в точке $x_0=0$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{2+x}$ в точке $x_0=-2$

7) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-x}, & x<4\\ \dfrac{|x-4|}{x-4}, & x>4\end{cases}$ в точке $x_0=4$

8) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(x+3)^2}$ в точке $x_0=-3$

9) $f(x)=\dfrac{\ln(1+2x^2)}{4x^2}$ в точке $x_0=0$

10) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}$ в точке $x_0=4$

11) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{2x}$ в точке $x_0=0$

12) $f(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x_0=0$

13) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{e^{2x}-1}$ в точке $x_0=0$

14) $f(x)=\arcsin x\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}$ в точке $x_0=0$

15) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$ в точке $x_0=0$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{6-x}-3}{x^2-9}$ в точке $x_0=-3$

17) $f(x)=\dfrac{x\,\mathrm{arctg}\,x^2}{\arcsin^3 x}$ в точке $x_0=0$

18) $f(x)=\dfrac{\cos 3x-1}{\ln(7x^2+1)}$ в точке $x_0=0$

19) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x<0\\ -\dfrac{1}{x+1}, & x>0\end{cases}$

20) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot\sin^2\dfrac{1}{3x}$ в точке $x_0=0$

21) $f(x)=\dfrac{e^{x-3}-1}{x^2-9}$ в точке $x_0=3$

22) $f(x)=\dfrac{\sin(x+5)}{x^3+125}$ в точке $x_0=-5$

23) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2}, & x<-2\\ \sqrt{x+2}-1, & x>-2\end{cases}$ в точке $x_0=-2$

24) $f(x)=\cos\left(\pi+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{(\pi-x)^2}$ в точке $x_0=\pi$

25) $f(x)=\dfrac{1-\cos^3 x}{3x^2}$ в точке $x_0=0$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Дрофа, 2003. 704 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. М.: Интеграл-Пресс, 2010. 416 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 607 с.
4. Новикова Е.В., Родионова А.Г., Родионова Н.В. Начала математического анализа. Ижевск: Удмуртский университет, 2010. 84 с.
5. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2001. 480 с.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ: Астрель, 2005. 558 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Родионова Алла Григорьевна
Новикова Елена Вениаминовна
Родионова Надежда Витальевна

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Компьютерный набор Е.В. Павлова, Е.В. Шиляев
Верстка В.И. Родионов
Авторская редакция

Пописано в печать 07.11.19.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, Университетская, 1, корп. 4