Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений

Лекции по уравнениям математической физики.
Часть II.

Учебно-методическое пособие

Ижевск 2019

УДК 53:51(075.8)
ББК 22.311я73
Л436

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. Т.С.Быкова

Составитель: к.ф.-м.н., доц. Л.А. Белоусов

Л436 Лекции по уравнениям математической физики Часть II. /сост. Л.А. Белоусов. – Ижевск, 2019.-87 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов третьего курса, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Математика» и «Прикладная математика». Пособие включает 19 лекций по темам, соответствующим лекционному курсу «Уравнения математической физики», который читается преподавателями кафедры дифференциальных уравнений.

УДК 53:51(075.8)
ББК 22.311я73

Введение

Вторая часть методического пособия является изложением курса лекций, которые составитель читал в течение ряда лет студентам математического факультета Удмуртского госуниверситета. В курсе излагаются основные разделы теории уравнений математической физики.

В первой части излагаются главным образом основные факты, относящиеся к уравнению Лапласа.

Вторая же часть посвящена в основном уравнению теплопроводности и волновому уравнению.

Заметим, что отбор теоретического материала для нашего учебно-методического пособия является, естественно, неполным.

Надеемся, что пособие может оказаться полезным для студентов университета, изучающих уравнения математической физики.

Лекция[1] Г19.

§ 1 Операция усреднения и ее свойства.

Определим ядро усреднения $\omega_h(x)$ следующим образом. Пусть ω — произвольная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\omega \in C_0^\infty(E), \quad E = \{x : \quad |x| < 1\}$,
2) $\omega(x) \geqslant 0$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$,
3) $\int_E \omega(x)\, dx = 1$,
4) $\omega(x) = f(|x|) \quad$ (т.е. ω — функция от $|x|$).

Введем следующее обозначение:

$$\omega_h(x) = \frac{1}{h^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right).$$

Тогда, легко видеть, ядро усреднения $\omega_h(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $\omega_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,
2) $\omega_h(x) \geqslant 0$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$,
3) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x)\, dx = 1$,
4) $\omega_h(x) = g(|x|) \quad$ (т.е. ω_h — функция от $|x|$),
5) $\omega_h(x) = 0$ при любом $x : \quad |x| > h$. Пусть $f \in \L_2(\mathbb{R}^n)$. Свертка

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) f(y)\, dy$$

где ω_h – ядро усреднения, называется *средней функцией* для функции f.

Свойство 1. Пусть $f \in \L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ причем

$$D^\alpha f_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \{D_x^\alpha \omega_h(x-y)\} f(y)\, dy$$

Свойство 2. Пусть $f \in \L_2(\mathbb{R}^n)$ и пусть существует $D^\alpha f$ — производная в смысле Соболева. Тогда операции усреднения и дифференцирования перестановочны:

$$D^\alpha(f_h) = (D^\alpha f)_h,$$

Доказательство. Прежде всего отметим справедливость равенства

$$D_x^\alpha \omega_h(x-y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha \omega_h(x-y)$$

[1] Издание третье, исправленное. 1999 г.

В случае $|\alpha| = 1$ это равенство легко проверяется:

$$(\omega_h(x-y))'_x = (\omega_h)'(x-y) * (x-y)'_x = (\omega_h)'(x-y) = \\ = (-1)(\omega_h)'(x-y) * (x-y)'_y = -(\omega_h(x-y))'_y.$$

Из свойства 1 вытекает, что

$$D_x^\alpha f_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \{D_x^\alpha \omega_h(x-y)\} f(y)\, dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \{D_y^\alpha \omega_h(x-y)\} f(y)\, dy =$$

(теперь из определения производной в см. Соболева вытекает, что)

$$= (-1)^{2|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) D_y^\alpha f(y)\, dy = (D^\alpha f)_h,$$

т.к. $\omega_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Свойство3. Пусть $f \in Ł_2(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда справедливо неравенство

$$\|f_h\|_{Ł_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f\|_{Ł_2(\mathbb{R}^n)}$$

(норма усредненной функции в $Ł_2$ не превосходит нормы исходной функции).

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и положительностью ядра усреднения ω_h, получим

$$\|f_h\|^2_{Ł_2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) f(y)\, dy)^2\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \{\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\omega_h(x-y)} (\sqrt{\omega_h(x-y)} f(y))\, dy\}^2\, dx \leqslant \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \{\int_{\mathbb{R}^n} (\sqrt{\omega_h(x-y)})^2\, dy\} \{\int_{\mathbb{R}^n} (\sqrt{\omega_h(x-y)} f(y))^2\, dy\}\, dx \leqslant \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \{1\} \{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) f^2(y)\, dy\}\, dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f^2(y) \{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y)\, dx\}\, dy = \|f\|^2_{Ł_2(\mathbb{R}^n)}. \quad \square$$

Свойство 4. Пусть f равномерно непрерывная в $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда

$$f_h \rightrightarrows f \quad \text{при } h \to 0.$$

Доказательство. Функция f равномерно непрерывна. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Отметим, что в силу теоремы Коши и равенства

$$\omega_h(x - y) = 0 \quad \text{при } |x - y| \geqslant h$$

справедлива цепочка равенств

$$f_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) f(y)\, dy = \int_{|x-y|<h} \omega_h(x - y) f(y)\, dy =$$

$$= f(\xi) \int_{|x-y|<h} \omega_h(x - y)\, dy = f(\xi), \quad \text{где } |x - \xi| < h. \quad \square$$

Свойство 5. Пусть $f \in \text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Тогда

$$f_h \to f \text{ при } h \to 0 \text{ в } \text{Ł}_2(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. Отметим, что пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall f \in \text{Ł}_2(\mathbb{R}^n) \quad \exists \widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \quad \|f - \widetilde{f}\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Следовательно

$$\|f - f_h\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} = \|f - \widetilde{f} + \widetilde{f} - \widetilde{f}_h + \widetilde{f}_h - f_h\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant$$

$$\leqslant \|f - \widetilde{f}\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{f} - \widetilde{f}_h\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} + \|\widetilde{f}_h - f_h\|_{\text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)} < 3\varepsilon. \quad \square$$

Свойство 6. Пусть $f, g \in \text{Ł}_2(\mathbb{R}^n)$ — произвольные функции. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_h(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_h(x) g(x)\, dx.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Фубини, получим что

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \{\int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) g(y)\, dy\}\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) \omega_h(x - y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \omega_h(x - y)\, dx\}\, dy. \quad \square$$

Задача 1. Если $f \in H^1(a, b)$ и о.п. $f' = 0$, то $f \equiv const$ п.в.

Задача 2. Если $f \in H^1(a, b)$, то f эквивалентна на $[a, b]$ непрерывной функции.

Задача 3. Если $f \in H^1(-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0.$$

.

конец лекции Г19

Лекция Г20.

§ 2 Теорема вложения С.Л.Соболева.

Определение 1.Будем говорить, что $f \in S$, если
1) $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$,
2) $\forall m \in Z, \forall \alpha \exists c_{\alpha,m}: \quad |D^{\alpha} f|(1+|x|)^m \leqslant c_{\alpha,m}$
Пример 1. Если $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, то $f \in S$.
Пусть $\widehat{u}(\xi)$ образ Фурье функции $u(x)$:

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx, \quad (x,\xi) = x_1\xi_1 + ... + x_n\xi_n \tag{1}$$

Пусть $u(x)$ прообраз функции $\widehat{u}(\xi)$:

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{u}(\xi)\, d\xi,$$

Свойство 1. Пусть $u \in S$. Тогда

$$\widehat{D^{\alpha} u} = (i\xi)^{\alpha} \widehat{u}(\xi), \quad (i\xi)^{\alpha} = (i\xi_1)^{\alpha_1} \cdot ... \cdot (i\xi_n)^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1) и формулой интегрирования по частям, получим

$$\widehat{D^{\alpha} u} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} D_x^{\alpha} u(x)\, dx = \lim_{\rho\to\infty} \int_{|x|<\rho} e^{-i(x,\xi)} D_x^{\alpha} u(x)\, dx =$$
$$= \lim_{\rho\to\infty} ((-1)^{|\alpha|} \int_{|x|<\rho} D_x^{\alpha} e^{-i(x,\xi)} u(x)\, dx) = (i\xi)^{\alpha} \widehat{u}(\xi). \quad \square$$

Свойство 2. Если $u \in S$, то $\widehat{u} \in S$.

Справедливость свойства 2 вытекает из свойства 1 т.к. производная D_x^{α} переходит в домножение на $(i\xi)^{\alpha}$ и наоборот $(-ix)^{\alpha} \to D_{\xi}^{\alpha}$.

Задача 1. Найти $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}$.

Свойство 3. Пусть $u \in S$. Тогда справедливо равенство Парсеваля:

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2\, d\xi.$$

Пространство H_m.

Определение 2. Будем говорить, что $f \in H_m$, если

1) $\forall \alpha : \quad |\alpha| \leqslant m \quad \exists D^\alpha f$ в смысле Соболева.

2) $\exists \{g_n\} \subset S : \quad g_n \to f$ по норме $\|\cdot\|_{H_m}$, где

$$\|f\|_{H_m}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f|^2 \, dx.$$

Определим норму $\|\cdot\|_m$ равенством

$$\|f\|_m^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{f}|^2 \, d\xi.$$

Утверждение 1. На пространстве H_m нормы $\|f\|_m$ и $\|f\|_{H_m}$ эквивалентны.

Доказательство. Воспользуемся равенством Парсеваля и свойством 1, получим, что

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f}|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |(i\xi)^\alpha|^2 |\widehat{f}|^2 \, d\xi \tag{2}$$

Теперь справедливость утверждения 1 вытекает из (2) и из оценок

$$c_1(1 + |\xi|^2)^m \leqslant \sum_{|\alpha| \leqslant m} |(i\xi)^\alpha|^2 \leqslant c_2(1 + |\xi|^2)^m. \quad \square$$

Теорема. *Пусть $m, k \in Z_+ : \quad m > \frac{n}{2}$. Тогда, если $u \in H_{m+k}$, то после, быть может, исправления на множестве меры нуль $u \in C^k$ (т.е. $C^k \in H_{m+k}$). Кроме того существует константа M такая, что $\forall u \in H_{M+k}$*

$$\|u\|_{C^k} \leqslant M \|u\|_{H_{m+k}}$$

Норма в пространстве C^k определяется равенством

$$\|u\|_{C^k} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)|.$$

Докажем сначала оценку. Пусть α — фиксированный мультииндекс, причем $|\alpha| \leqslant k$. Тогда

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} (i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi) \, d\xi,$$

Следовательно, в силу неравенства Коши-Буняковского, получаем

$$\max_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha u(x)|\leqslant(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}|(i\xi)^\alpha||\widehat{u}(\xi)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant c_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}|\widehat{u}(\xi)|\,d\xi=c_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\frac{k+m}{2}}|\widehat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-\frac{m}{2}}\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant c_2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{k+m}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-m}\,d\xi=M\|u\|_m.$$

Последний интеграл сходится при $m>\frac{n}{2}$.

Докажем теперь включение. Пусть $f\in H_{m+k}$. Тогда существует такая последовательность $\{u_l\}\subset S$, что

$$\|u_l-f\|_{H_{m+k}}\quad\text{при } l\to\infty.$$

Значит эта последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна в H_{m+k}, т.е.

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N:\forall m,p>N\quad\|u_m-u_p\|_{H_l}<\varepsilon.$$

Следовательно и

$$\|u_m-u_p\|_{C^k}<\varepsilon M.$$

т.е. последовательность $\{u_l\}$ фундаментальна в C^k. Тогда в силу полноты C^k найдется $v\in C^k$:

$$v_l\to v\text{ при } l\to\infty\text{ в }\quad C^k.$$

С другой стороны

$$v_l\to f\text{ при } l\to\infty\text{ в }\quad H_m.$$

Значит

$$v_l\to f\text{ при } l\to\infty\text{ п.в.}$$

Следовательно $f=v$ п.в. $\square$

конец лекции Ґ20

Лекция Ґ21.

§ 3 Гиперболические системы уравнений первого порядка.

Общий вид системы уравнений 1-го порядка следующий:

$$u_t+\sum_{j=1}^{n}A^ju_{x_j}+Bu=f(t,x),\tag{1}$$

где A^j , B — матрицы; $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; u, f — вектор-функции:

$$u = \begin{pmatrix} u_1(t,x) \\ ... \\ u_N(t,x) \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ ... \\ f_N(t,x) \end{pmatrix}.$$

Определение. Система (1) называется *гиперболической*, если уравнение

$$\det \|\xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j\| = 0$$

(слева полином по ξ_0 степени N) при любом $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_n)$ имеет N действительных корней $\xi_0 = \psi(\xi', x)$. (Если это корни все различны, то система называется *строго* гиперболической).

Пример. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x}. \end{cases}$$

Тогда

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\det \|\xi_0 E + \xi_1 A^1\| = \begin{vmatrix} \xi_0 & -\xi_1 \\ -\xi_1 & \xi_0 \end{vmatrix} = \xi_0^2 - \xi_1^2 = 0.$$

Откуда вытекает, что $\xi_0 = \pm\xi_1$ действительно корни. Таким образом, система строго гиперболическая т.к. корни различны и действительны.

Пример некорректной постановки задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{3}$$

Предположим, что система (2) не гиперболическая, т.е. существует вектор $\xi = (\xi_0, ..., \xi_n)$: $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_n) \neq 0$ $\xi_0 = \beta + i\gamma$, где $\gamma \neq 0$ и выполняется следующее равенство:

$$\det \|\xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j\| = 0. \tag{4}$$

Из (4) следует, что (т.к. матрица вырожденная) найдется такой ненулевой вектор M, что будет справедливо равенство

$$(\xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j) M = 0. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (2) в следующем виде:

$$u = M\ e^{im\xi_0 t} e^{im(\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n)} m^{-1}, \tag{6}$$

Вычислим производные функции u:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = im\xi_0 u, \quad \frac{\partial u}{\partial x_j} = im\xi_j u.$$

Подставим их в уравнение (2), получим следующее равенство:

$$im(\xi_0 E + \sum_{j=1}^{n} \xi_j A^j) M = 0.$$

Последнее равенство справедливо в силу выбора вектора M. Значит u является решением уравнения (2).

Можно считать, что $m\gamma < 0$ (иначе заменим ξ_0 на комплексно сопряженное решение характеристического уравнения). Тогда из (6) вытекает, что

$$\max_x |u(0,x)| = \frac{|M|}{m} \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

$$\max_x |u(t,x)| = \frac{|M| e^{-m\gamma t}}{m} \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Вывод. Задача Коши для негиперболической системы (2) может быть некорректной.

§ 4 Гиперболические системы уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему уравнений 1-го порядка

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x), \quad f \equiv 0 \tag{1}$$

где A^j, B — постоянные матрицы. Причем A^j — симметрические матрицы: $A^j = (A^j)^T$. Следовательно, все собственные числа матрицы

$$\xi_1 A^1 + ... + \xi_n A^n$$

действительные, т.е. система (1) гиперболическая.

Пусть функция u удовлетворяет следующему начальному условию:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in H_m. \tag{2}$$

Ищем решение u такое, что при любом t справедливо включение

$$u(t,\cdot) \in H_s.$$

Определим преобразование Фурье равенством

$$\widehat{u}(t,\xi) = F_{x\to\xi} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} u(t,x)\, dx.$$

Тогда

$$\frac{\partial \widehat{u}(t,\xi)}{\partial t} = F_{x\to\xi} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t},$$

$$i\xi_j \widehat{u}(t,\xi) = F_{x\to\xi} u_{x_j}(t,x).$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (1) и получим следующее уравнение:

$$\widehat{u}_t + \sum_{j=1}^{n} A^j i\xi_j \widehat{u} + B\widehat{u} = 0 \tag{3}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно в $\mathbb{R}^n$ на $\overline{\widehat{u}}$, получим

$$(\widehat{u}_t, \overline{\widehat{u}}) + (\sum_{j=1}^{n} A^j i\xi_j \widehat{u}, \overline{\widehat{u}}) + (B\widehat{u}, \overline{\widehat{u}}) = 0. \tag{4}$$

Если к уравнению (3) возьмем комплексно сопряженное уравнение и затем домножим его на $\widehat{u}$, то получим следующее равенство:

$$(\overline{\widehat{u}}_t, \widehat{u}) - (\sum_{j=1}^{n} A^j i\xi_j \overline{\widehat{u}}, \widehat{u}) + (B\overline{\widehat{u}}, \widehat{u}) = 0 \tag{5}$$

Складывая соответственно левые и правые части (4) и (5), получим что

$$(\overline{\overline{u}}_t, \widehat{u}) + (\widehat{u}_t, \overline{\overline{u}}) + (B\widehat{u}, \overline{\overline{u}}) + (B\overline{\overline{u}}, \widehat{u}) = 0.$$

Обозначим через v следующую функцию:

$$v = (\widehat{u}, \overline{\overline{u}}).$$

Легко видеть, что справедлива оценка (т.к. матрица B постоянна)

$$v_t \leqslant M\ v \tag{6}$$

где M — некоторая положительная константа. Из (6) вытекает, что

$$(v_t - M\ v)e^{-Mt} \leqslant 0.$$

Следовательно

$$(ve^{-Mt})_t \leqslant 0$$

Значит

$$v(t) \leqslant v(0)e^{Mt} \text{ при любом } t > 0.$$

Таким образом имеем оценку $\forall t > 0$

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leqslant |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{Mt}. \tag{7}$$

Мы доказали следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи (1) — (2). Тогда существует положительная константа M, что при любом положительном $t > 0$ справедлива оценка

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leqslant |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 e^{Mt}.$$

Теорема единственности. *Пусть $\varphi \in H_m$, $\quad f \in C(R_+, H_m)$. Тогда решение задачи (1) — (2) (где функция f может быть и отлична от нуля) единственно в классе $C^1(R_+, H_m)$, где $m \geqslant 0$.*

Доказательство. (от противного). Предположим, что u_1, u_2 — два решения задачи (1) — (2). Пусть $w = u_1 - u_2$. Тогда w удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородному начальному условию: $w|_{t=0} = 0$. Из вышеприведенного утверждения следует, что $w \equiv 0$. $\square$

конец лекции Ґ21

Лекция Г22.

§ 5 Теорема существования решения гиперболической системы уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим задачу Коши

$$u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = f, \quad f = 0, \tag{1}$$

где $A^j \quad (j = 1, ..., n), \quad B$ — постоянные матрицы.

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

Определение 1. Функцию u назовем *классическим* решением задачи Коши (1),(2), если

1) u непрерывно дифференцируема при $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$,
2) u непрерывна при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$,
3) u удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Теорема. *Пусть* $\varphi \in H_m, m > \frac{n}{2} + 1$. *Тогда существует классическое решение* $u(t,x)$ *задачи Коши (1),(2)*

Доказательство. Перейдем к образу Фурье $\widehat{u}(t,\xi)$ решения $u(t,x)$:

$$\widehat{u}_t + \sum_{j=1}^{n} i\xi_j A^j \widehat{u} + B\widehat{u} = 0, \tag{3}$$

$$\widehat{u}|_{t=0} = \widehat{\varphi}(\xi) \tag{4}$$

Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром и с постоянными коэффициентами. Известно,что решения такой задачи Коши (3),(4) существуют на всей полуоси $t > 0$ при любом параметре ξ , т.е. $\widehat{u}(t,\xi)$ существует при $t \in [0,\infty)$.

Перейдем обратно к функции $u(t,x)$:

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \widehat{u}(t,\xi)\, d\xi$$

Тогда

$$u_{x_j}(t,x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} i\xi_j \widehat{u}(t,\xi)\, d\xi \tag{5}$$

Функция $\widehat{u}(t,\xi)$ непрерывна по t, а функция $e^{i(x,\xi)}$ непрерывна по x при $t>0$. Следовательно, подынтегральная функция в равенстве (5) непрерывна по t и по x при $t>0$. Теперь для доказательства непрерывности функции u_{x_j} достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в равенстве (5). Покажем равномерную сходимость интеграла:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e^{i(x,\xi)} i\xi_j \widehat{u}(t,\xi)|\,d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j||\widehat{u}(t,\xi)|\,d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_j||\widehat{\varphi}(\xi)|e^{Kt/2}\,d\xi \leqslant$$

(мы использовали оценку $|\widehat{u}(t,\xi)| \leqslant |\widehat{\varphi}(\xi)|e^{Kt/2}, t>0$ из последней лекции)

$$\leqslant e^{Kt/2}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-\frac{m-1}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{m}{2}}|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi \leqslant$$

(Здесь мы воспользовались неравенством Коши-Буняковского)

$$\leqslant e^{Kt/2}(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-m+1}\,d\xi)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m|\widehat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi)^{\frac{1}{2}} = ce^{Kt/2}||\varphi||_{H_m}.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-m+1}\,d\xi$$

сходится при $2(m-1)>n$.

Таким образом, если $m>\frac{n}{2}+1$, то функция u_{x_j} непрерывна.

Аналогично доказывается, что при $m>\frac{n}{2}$ справедливо равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n}|e^{i(x,\xi)}\widehat{u}(t,\xi)|\,d\xi \leqslant c_1||\varphi||_{H_m}.$$

Следовательно, функция $u(t,x)$ непрерывна, при $m>\frac{n}{2}$.

Можно показать, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\widehat{u}_t(t,\xi)\,d\xi$$

равномерно сходится в силу уравнения (2) и того, что интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}(\sum_{j=1}^n i\xi_j A^j\widehat{u}(t,\xi)+B\widehat{u}(t,\xi))\,d\xi$$

тоже сходится равномерно (т.к. A^j, B — постоянные матрицы). Следовательно, функция u_t тоже непрерывна. $\square$

Задача. Пусть u — решение задачи Коши с $f=0$, $\varphi\in S$. Доказать, что $u\in C^\infty$.

Интеграл Дюамеля.

Обозначим через L следующий дифференциальный оператор:

$$Lu = u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu$$

Рассмотрим задачу Коши с ненулевой правой частью:

$$\begin{cases} Lu = f(t,x), \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $v(t,x,\tau)$ — решение задачи Коши с нулевой правой частью:

$$\begin{cases} Lv = 0, \\ v|_{t=\tau} = f(\tau,x). \end{cases} \tag{7}$$

Утверждение. *Пусть u, v — соответственно решения задач (6),(7). Тогда справедливо равенство*

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x,\tau)\,d\tau$$

Доказательство. Равенство $u_{t=0} = 0$ очевидно. Покажем, что u удовлетворяет уравнению:

$$Lu = u_t + \sum_{j=1}^{n} A^j u_{x_j} + Bu = f(t,x) + \int_0^t L\ v(t,x,\tau)\,d\tau = f(t,x).$$

$\square$

Поверхность пространственного типа.

Рассмотрим некоторую область $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ограниченную поверхностью S при $t > 0$ и поверхностью Ω при $t = 0$.

Рис.1.Поверхность "пространственного типа".

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} Lu = f(t,x), & (t,x) \in G, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Возникает вопрос: при каких G задача Коши *корректна*?

Определение 1. Будем называть S *поверхностью пространственного типа*, если матрица

$$\nu_0 E + \sum_{j=1}^{n} \nu_j A^j \tag{9}$$

где ν единичная внешняя нормаль к G, неотрицательно определена:

$$< My, y > \geqslant 0 \quad \text{при любом } y \in \mathbb{R}^N.$$

Априорная оценка.

Предположим, что решение u задачи (8) существует и выведем одно "полезное неравенство". Домножим обе части уравнения (8) на $2u$ и проинтегрируем по области G_τ, где

$$G_\tau = \{(t,x) \in G : \quad 0 < t < \tau\},$$

получим, что

$$\int\int_{G_\tau} (u_t, 2u)\, dxdt + \sum_{j=1}^{n} \int\int_{G_\tau} (A^j u_{x_j}, 2u)\, dxdt +$$
$$+ \int\int_{G_\tau} (Bu, 2u)\, dxdt = \int\int_{G_\tau} (f, 2u)\, dxdt. \tag{10}$$

Первые два интеграла перепишем в виде

$$\int\int_{G_\tau} (u,u)_t\, dxdt, \quad \int\int_{G_\tau} (A^j u, u)_{x_j}\, dxdt$$

Интегрируя эти два интеграла по частям, из (10) выводим неравенство

$$\int_{\Omega_\tau} (u,u)\, dx - \int_{\Omega_0} (\varphi, \varphi)\, dx + \int_{S_\tau} (\nu_0 E u + \sum_{j=1}^{n} \nu_j A^j u, u)\, ds +$$
$$+ \int\int_{G_\tau} 2(Bu, u)\, dxdt \leqslant \int\int_{G_\tau} (f,f)\, dxdt + \int\int_{G_\tau} (u,u)\, dxdt.$$

Введем ограничение на матрицу B:

$$2(Bu, u) \geqslant (u, u).$$

Тогда

$$\int\int_{G_\tau} 2(Bu, u)\, dxdt \geqslant \int\int_{G_\tau} (u, u)\, dxdt.$$

В силу того, что S — поверхность пространственного типа, интеграл по поверхности S_τ положителен. Таким образом, получаем, что

$$\int_{\Omega_\tau} (u, u)\, dx \leqslant \int_{\Omega_0} (\varphi, \varphi)\, dx + \int\int_{G_\tau} (f, f)\, dxdt \qquad (11)$$

Это неравенство назовем *априорной оценкой.*

Таким образом, мы доказали

Утверждение. *Пусть S — поверхность пространственного типа, A_j — симметричные постоянные матрицы $(j = 1, ..., n)$; B — постоянная матрица: $2(Bu, u) \geqslant (u, u)$. Тогда справедливо неравенство (11), где u — классическое решение задачи (1),(2).*

Замечание. Если ограничение $2(Bu, u) \geqslant (u, u)$ не выполняется, то можно применить замену

$$u \quad \to \quad ue^{Kt}$$

Пример.

$$u_t + u_x = f$$

Пусть $u = ve^{kt}$. Тогда v — решение задачи Коши

$$v_t + v_x + kv = fe^{-kt}, \quad v|_{t=0} = \varphi(x).$$

Из оценки (11) вытекает, что

$$e^{-2k\tau} \int_{\Omega_\tau} (u, u)\, dx \leqslant \int_{\Omega_0} (\varphi, \varphi)\, dx + \int\int_{G_\tau} e^{-2kt} (f, f)\, dxdt$$

Назовем это неравенство *априорной оценкой-2.*

Следствие. Если область G ограничена поверхностью пространственного типа, то задача Коши

а) имеет *единственное* решение;

б) это решение *устойчиво.*

Сведение волнового уравнения к гиперболической системе уравнений 1-го порядка.

Задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = g(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

можно свести к гиперболической системе уравнений 1-го порядка с помощью следующей замены:

$$v = \begin{pmatrix} u \\ u_t \\ u_{x_1} \\ \dots \\ u_{x_n} \end{pmatrix}, \quad v|_{t=0} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \varphi_{x_1} \\ \dots \\ \varphi_{x_n} \end{pmatrix},$$

При этом (для простоты в случае $n=1$) матрица A^1 имеет следующий вид :

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix}.$$

конец лекции Ґ22

Лекция Ґ23.

§ 6 Волновое уравнение.

1 Вывод уравнения колебания струны.

Рис.1.Струна.

Пусть $u(t,x)$ — отклонение т. x от положения равновесия в момент времени t. Предположим, что

1) струна упругая (справедлив закон Гука);
2) струна гибкая (не оказывает сопротивления при сгибе);
3) толщиной струны пренебрегаем;
4) весом пренебрегаем;
5) отклонение от положения равновесия мало и углы малы;
6) колебание струны плоское и поперечное;

В основу вывода уравнения положим *принцип Даламбера*: сумма всех сил действующих на струну равна нулю.

Пусть $\rho(x)$ — плотность струны в т. x. $F(t,x)$ — плотность внешней силы, $-k(x)u_t$ — сила сопротивления среды. Тогда

$$ds = \sqrt{1+u_x^2}\,dx = (1+\frac{1}{2}u_x^2+...)\,dx \approx \, dx$$

Пусть $s(x_1,x_2)$ — длина дуги между точками x_1 и x_2. Тогда

$$s(x_1,x_2) = \int_{x_1}^{x_2} ds \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

— не зависит от времени t. Пусть $T(t,x)$ — сила натяжения струны. По закону Гука сила $T(t,x)$ пропорциональна длине $|x_2-x_1|$, значит она тоже не зависит от времени t.

Спроектируем силы, действующие на отрезке $[x_1,x_2]$ на ось Ox:

$$-T(x_1)\cos\alpha(x_1) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0 \tag{1}$$

По формуле Тейлора $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ при малом α. Значит $T(x_1) \approx T(x_2) = T$. Спроектируем все силы на ось Oy:

$$\begin{gathered}-T(x_1)\sin\alpha(x_1) + T(x_2)\sin\alpha(x_2) + \\ + \int_{x_1}^{x_2} F(t,x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} k(x)u_t\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)u_{tt}\,dx.\end{gathered} \tag{2}$$

При этом

$$\sin\alpha(x) \approx tg\alpha(x) = u_x \tag{3}$$

Значит из (3) вытекает, что

$$-T(x_1)\sin\alpha(x_1) + T(x_2)\sin\alpha(x_2) \approx -T(u_x(x_1) - u_x(x_2)) = T\int_{x_1}^{x_2} u_{xx}\,dx \tag{4}$$

Таким образом из (2) и (4) получаем уравнение

$$\int_{x_1}^{x_2} u_{xx}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} F(t,x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} k(x)u_t\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)u_{tt}\,dx \qquad (5)$$

Предположим, что *все подынтегральные выражения непрерывны* и продиффеенцируем равенство (5) по x_2, получим

$$Tu_{xx} + F(t,x) - k(x)u_t = \rho u_{tt}$$

Пусть $b = \frac{k}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}$, тогда

$$u_{tt} + bu_t = a^2 u_{xx} + f(t,x) \qquad (6)$$

— *уравнение колебания струны.* (См. Николенко "У М Ф").

2 Задача Коши для уравнения колебания струны. Задача Коши для волнового уравнения имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $f(t,x), \quad \varphi(x), \quad \psi(x)$ — заданные функции, $u(t,x)$ — неизвестная функция.

Определение 1. Классическим решением задачи Коши называется функция u непрерывно дифференцируемая в $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируемая в $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая уравнению и граничным условиям.

Теорема (существования решения). *Пусть справедливы включения $f(\cdot,\cdot) \in C((o,\infty)\times\mathbb{R}^1), \quad \varphi(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^1), \quad \psi(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует u — классическое решение задачи Коши (7) для уравнения колебания струны (n=1).*

Доказательство. Для $n = 1$ решение u можно представить в явном виде:

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)\,dyd\tau$$

Это *формула Даламбера.* Легко проверить, что u будет классическим решением задачи Коши. $\square$

3 Вывод формулы Даламбера.

Рассмотрим уравнение колебания струны с нулевой правой частью:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x), \quad f \equiv 0 \tag{8}$$

Приведем это уравнение к каноническому виду. Выпишем характеристическое уравнение:

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

Оно распадается на два уравнения:

$$dx = adt, \quad \text{и} \quad dx = -adt$$

Интегрируя, получаем

$$x - at = c_1, \quad \text{и} \quad x + at = c_2$$

Заменяя $c_1, \quad c_2$ на $\xi, \quad \eta$, получим следующую *замену* переменных

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases}$$

Тогда

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}(-a)^2 + 2u_{\xi\eta}a(-a) + u_{\eta\eta}a^2, \quad u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Подставляем в уравнение (8), получаем

$$u_{\xi\eta} = 0 \tag{9}$$

Обозначим $v = u_\xi$, тогда из (9) вытекает,что $v_\eta = 0$. Значит $v = g(\xi)$, где g — произвольная функция. Следовательно $u_\xi = g(\xi)$. Поэтому

$$u = \int g(\xi)\, d\xi + h(\eta), \quad \eta \text{ — параметр}$$

Обозначим интеграл через $f(\xi)$, получим общее решение уравнения (9):

$$u = f(\xi) + h(\eta).$$

Возвращаясь к переменным x, t, получим общее решение уравнения (8):

$$u = f(x - at) + h(x + at), \tag{10}$$

где f и h — произвольные функции. Потребуем чтобы это решение удовлетворяло и начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = f(x) + h(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) = f'(x)(-a) + h'(x)a. \tag{11}$$

Из системы (11) выразим f и h через φ и ψ. Для этого проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int_0^x \psi(y)\, dy = -af(x) + ah(x) + c \tag{12}$$

Умножим первое уравнение (11) на a и сложим с (12):

$$a\varphi(x) + \int_0^x \psi\, dx = 2ah(x) + c, \tag{12a}$$

Умножим снова первое уравнение (11) на a и вычтем (12):

$$a\varphi(x) - \int_0^x \psi\, dx = 2af(x) - c, \tag{13}$$

Из (10),(12a),(13) выводим

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(y)\, dy + \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(y)\, dy =$$
$$= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\, dy \tag{14}$$

Получили формулу *Даламбера* при $f = 0$.

Теорема (единственности). *Классическое решение задачи Коши для уравнения колебания струны единственно.*

Доказательство. Если предположить, что есть два решения u_1 и u_2,то их разность $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению колебания струны и нулевым начальным условиям:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad v|_{t=0}, \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Но при выводе формулы Даламбера было показано, что если функция v удовлетворяет уравнению колебания струны (8) с $f = 0$ и начальным условиям $v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x)$, то она представима в виде (14). Следовательно она тождественный нуль: $v \equiv 0$. Т.е. $u_1 = u_2$ $\square$

4 Интеграл Дюамеля.

Рассмотрим задачу Коши с ненулевой правой частью:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1 \\ u|_{t=0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^1, \\ u_t|_{t=0} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^1 \end{cases} \tag{15}$$

Пусть $v(t,x,\tau)$ — решение задачи

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1 \\ v|_{t=\tau} = 0, \quad x\in\mathbb{R}^1, \\ v_t|_{t=\tau} = f(\tau,x), \quad x\in\mathbb{R}^1 \end{cases} \tag{16}$$

Утверждение Если $v(t,x,\tau)$ — решение задачи (16), то

$$u(t,x) = \int_0^t v(t,x,\tau)\,d\tau \text{ (интеграл \textit{Дюамеля})} \tag{17}$$

будет решением задачи (15).

Доказательство. не представляет труда:

$$u_t = v(t,x,t) + \int_0^t v_t(t,x,\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Дифференцируя предпоследнее равенство по t, получим

$$u_{tt} = v_t(t,x,t) + \int_0^t v_{tt}(t,x,\tau)\,d\tau. \qquad u_{xx} = \int_0^t v_{xx}(t,x,\tau)\,d\tau.$$

Откуда в силу равенства $v_t(t,x,t) = f(t,x)$ получим

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x)$$

Из равенства (16) по формуле Даламбера (14) получаем

$$v(t,x,\tau) = \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)\,dy \tag{18}$$

Тогда из равенств (17) и (18) следует, что

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,y)\,dyd\tau$$

—решение задачи (15). □

конец лекции Г23

5 Корректность задачи Коши для уравнения колебания струны.

Определение Задача У М Ф *корректна*, если

1) решение существует;

2) решение единственно;

3) решение непрерывно зависит от начальных и граничных условий а также от правой части уравнения (устойчиво).

Проверим устойчивость решения задачи Коши:

Утверждение Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$: $\| \varphi \|_{C(\mathbb{R})} < \delta$, $\| \psi \|_{C(\mathbb{R})} < \delta$, $\| f \|_{C([0,T]\times\mathbb{R}^1)} < \delta$, то $\| u \|_{C([0,T]\times\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Действительно.

$$\| u \|_{C([0,T]\times\mathbb{R}^1)} = \sup_{0<t<T, x\in\mathbb{R}^1} |u(t,x)| = \sup_{0<t<T, x\in\mathbb{R}^1} \left|\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}\right| +$$

$$+ \sup_{0<t<T, x\in\mathbb{R}^1} \left|\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy\right| + \sup_{0<t<T, x\in\mathbb{R}^1} \left|\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(t,y)\,dyd\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi \|_{C(\mathbb{R}^1)} + \frac{1}{2a} 2aT \| \psi \|_{C(\mathbb{R}^1)} + \frac{1}{2a} 2aT^2 \| f \|_{C([0,T]\mathbb{R}^1)} <$$

$$< \delta(1+T+T^2) < \varepsilon.$$

□

6. Фазовая плоскость.

Плоскость на которой изображены независимые переменные t, x называется *фазовой*.

Рис.1. Фазовая плоскость.

Для задания решения u задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^1 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1 \end{cases} \tag{1}$$

в точке $M_0 = (t_0, x_0)$ нам необходимо знать функцию φ в точках P_0 и Q_0, функцию ψ на отрезке $[P_0, Q_0]$, и функцию f в треугольнике $\Delta P_0 M Q_0$ (это видно из формулы Даламбера).

Определение $\Delta P_0 M_0 Q_0$, ограниченный характеристиками $x + at = c_1, \quad x - at = c_2$, проходящими через т M_0, называется *областью зависимости* решения u задачи (1) в т. M_0.

Задачи Корректна ли задача Коши в области G:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (t,x) \in G \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in \Omega, \\ u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

где G — одна из следующих областей:

Рис.2. Область $G_1 = \{(t,x): \quad t < 1 - |x|, \quad t > 0\}$.

Рис.3. Область $G_2 = \{(t,x): \quad t < 1 - 2|x|, \quad t > 0\}$.

Рис.4. Область $G_3 = \{(t,x): \quad t < 1 - x^2, \quad t > 0\}$.

Рис.5. Область $G_4 = \{(t,x): \quad t < \sqrt{1 - x^2}, \quad t > 0\}$.

Рис.6. Область $G_5 = \{(t,x): \quad t < 1 - |x|/2, \quad t > 0\}$.

Рис.7. Область $G_6 = \{(t,x): \quad t < \frac{1-x^2}{2}, \quad t > 0\}$.

Задача 2 Корректна ли задача Коши в области G:

$$\begin{cases} u^1_t - \frac{1}{2}u^2_x = 0, \quad (t,x) \in G \\ u^2_t - \frac{1}{2}u^1_x = 0, \quad (t,x) \in G \\ u^1|_{t=0} = \varphi, \quad x \in \Omega, \\ u^2|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

где G — одна из приведенных выше областей.

Задача 3 Найти $u(t,x)$:

$$u_t + u_x = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x).$$

Задача 4 Корректна ли данная задача Коши

$$u_t + u_x = 0, \quad u|_\gamma = \varphi(x). \quad \gamma = \{(t,x): \quad t = \sin x\} \quad ?$$

7. Задача для полубесконечной струны.

Струна называется полубесконечной, если один конец известен, а другой нет. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad x > 0, \\ u_t|_{t=0} = \psi, \quad x > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad t > 0. \quad \text{условие жесткого закрепления конца струны} \end{cases} \tag{3}$$

Продолжим функции φ и ψ на всю ось нечетным образом:

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Задача свелась к задаче Коши на всей оси, ее решение определяется формулой Даламбера:

$$u(t,x) == \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy \tag{4}$$

Легко видеть граничное условие выполняется:

$$u(t,0) == \frac{\varphi(-at)+\varphi(+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{+at} \psi(y)\,dy = 0$$

Пример Пусть $\psi = 0$ а функция φ имеет вид

Рис.8. Функция $y = \varphi(x)$.

Можно изобразить решение $u(t,x)$ при $t = 1/2a$, $t = 1/a$, $t = 2/a$, $t = 3/a$.

8. Задача Коши для уравнения колебания мембраны. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t|_{t=0} = \psi, \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{5}$$

При достаточно гладких заданных функциях φ, ψ, f классическое решение u можно выписать в явном виде

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \int_{|x-\xi|<a(t-\tau)} \frac{f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{|x-\xi|<at)} \frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|x-\xi|<at)} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{a^2t^2 - |x-\xi|^2}}$$

где $x, \xi \in \mathbb{R}^2$, $|x-\xi| = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}$. Эта формула называется *формулой Пуассона.*

9. Задача Коши для волнового уравнения. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t|_{t=0} = \psi, \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{6}$$

При достаточно гладких заданных функциях $\varphi, \quad \psi, \quad f$ классическое решение u можно выписать в явном виде

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \int_{|x-\xi|<at} \frac{1}{|x-\xi|} f(\tau - \frac{x-\xi}{a}, \xi)\, ds d\tau +$$
$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at)} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{t} \int_{|x-\xi|=at)} \varphi(\xi)\, d\xi)$$

Это *формула Кирхгофа.*

§ 7 Смешанная задача для уравнения колебания струны

Рассмотрим уравнение:

$$\rho(x) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}) - q(x) u + f(t,x), \quad t>0, \quad 0<x<l, \tag{1}$$

где $p>0, \quad \rho>0, \quad q \geqslant 0; \quad \{\rho, q\} \in C[0,l], \quad p \in C^1[0,l]$. Кроме того зададим *начальные* условия

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in [0,l], \\ u_t|_{t=0} = \psi, \quad x \in [0,l], \end{cases} \tag{2}$$

и *граничные* условия

$$\begin{cases} \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \mu_1(t), \\ \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что выполнены *условия согласования*:

$$\begin{cases} \alpha \varphi(0) + \beta \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} = \mu_1(0), \\ \gamma \varphi(l) + \delta \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} = \mu_2(0) \end{cases} \tag{4}$$

Требуется найти $u \in C^2((0,T)\times(0,l)) \bigcap C^1([0,T]\times[0,l])$, удовлетворяющее (1)–(4).

Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. рассматривается на примере.

Пример

$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \tag{5}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \quad u|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad u_t|_{t=0} = x. \tag{6}$$

1) *Обнулим граничные условия* с помощью следующей замены неизвестной функции:

$$u(t,x) = v(t,x) + A(t)x^2 + B(t)x + C(t) \tag{7}$$

$$\begin{cases} v(0,x) = 0, \\ v(\pi,x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 + C, \\ \pi t = 0 + A(\pi t)^2 + B\pi t + C \end{cases}$$

Подходящей тройкой будет, например, $A = 0, \quad B = t, \quad C = 0$. Тогда

$$u = v + xt \tag{8}$$

Уравнение и начальное условие перепишется в виде:

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t - 3x = v_{xx} + 2v_x + 2t - 3x - 2t, \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x \end{cases}$$

Дифференцируя (8) по t получим

$$u_t = v_t + x \quad \Rightarrow \quad x = u_t|_{t=0} = v_t|_{t=0} + x, \quad \Rightarrow \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Таким образом мы получили задачу аналогичную первоначальной:

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t = v_{xx} + 2v_x, \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v(0,x) = 0, \quad v(\pi,x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

2) *Решим задачу Штурма-Лиувилля*:

$$\begin{cases} X'' + 2X' = \lambda X, \\ X(0) = 0, \\ X(\pi) = 0. \end{cases}$$

где $X = X(x)$ — функция от x. Выпишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k - \lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad k = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

Рассмотрим три случая а) $1+\lambda>0$. Тогда

$$X = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Из граничных условий вытекает, что

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{k_1 \pi} + c_2 e^{k_2 \pi} = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

б) $1+\lambda=0$. Тогда

$$X = (c_1 x + c_2) e^{-x}$$

Из граничных условий следует, что

$$c_2 = 0; \quad c_1 \pi e^{-\pi} = 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

в) $1+\lambda<0$. Тогда

$$k_{12} = -1 \pm i\beta, \quad \beta = \sqrt{-1-\lambda},$$

Из граничных условий вытекает, что

$$c_2 = 0; \quad c_1 e^{-\pi} \sin\beta\pi = 0, \quad \Rightarrow \quad \pi\beta = k\pi, \quad \Rightarrow \quad \beta = k, \quad k \in Z.$$

Итак, решение задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$X_k(x) = Ce^{-x}\sin kx, \quad \lambda = -1-k^2, \quad k \in Z. \tag{10}$$

3) Ищем *решение* задачи (9) в *виде ряда*:

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) e^{-x} \sin kx$$

где T_k — неопределенная пока еще функция. Дифференцируя почленно формально этот ряд, из (9) получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'' X_k - 3\sum_{k=1}^{\infty} T_k' X_k = \sum_{k=1}^{\infty} T_k (X_k'' + 2X_k') =$$

$$(\text{ в силу равенства (10)}) \ = \sum_{k=1}^{\infty} T_k (\lambda_k X_k). \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях X_k получаем

$$T_k'' - 3T_k' = \lambda_k T_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{12}$$

Из начального условия выводим

$$v|_{t=0} = e^{-x}\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)e^{-x}\sin kx, \quad \Rightarrow T_1(0) = 1, T_k(0) = 0 \text{ при } k \neq 1. \tag{13}$$

Аналогично

$$v_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)e^{-x}\sin kx = 0, \quad \Rightarrow T_k'(0) = 0 \quad \text{при } k \in Z. \tag{14}$$

Следовательно $T_k = 0$ при $k \neq 0$. Характеристическое уравнение для (13) при $k = 1$ имеет вид

$$m^2 - 3m - \lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

Значит

$$T_1 = (c_1 e^t + c_2 e^2 t).$$

Из начальных условий (13),(14) найдем константы $c_1, \quad c_2$:

$$1 = c_1 + c_2, \quad 0 = 2c_1 + c_2, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 2.$$

Откуда находим $T_1 = (-e^{2t} + e^t)$. Следовательно $v = (-e^{2t} + e^t)e^{-x}\sin x$.
Ответ:

$$u = xt + (-e^{2t} + e^t)e^{-x}\sin x.$$

§ 8 Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение:

$$LX(x) \equiv (p(x)X'(x))' - q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

где $p > 0, \quad \rho > 0, \quad q \geqslant 0; \quad \{\rho, q\} \in C[0, l], \quad p \in C^1[0, l].$

Метод разделения переменных для уравнения колебания струны. рассматривается на примере.

Пример

$$u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \tag{5}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = \pi t, \quad u|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad u_t|_{t=0} = x. \tag{6}$$

1) *Обнулим граничные условия* с помощью следующей замены неизвестной функции:

$$u(t,x) = v(t,x) + A(t)x^2 + B(t)x + C(t) \tag{7}$$

$$\begin{cases} v(0,x) = 0, \\ v(\pi,x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 + C, \\ \pi t = 0 + A(\pi t)^2 + B\pi t + C \end{cases}$$

Подходящей тройкой будет, например, $A = 0, \quad B = t, \quad C = 0$. Тогда

$$u = v + xt \tag{8}$$

Уравнение и начальное условие перепишется в виде:

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t - 3x = v_{xx} + 2v_x + 2t - 3x - 2t, \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x \end{cases}$$

Дифференцируя (8) по t получим

$$u_t = v_t + x \quad \Rightarrow \quad x = u_t|_{t=0} = v_t|_{t=0} + x, \quad \Rightarrow \quad v_t|_{t=0} = 0.$$

Таким образом мы получили задачу аналогичную первоначальной:

$$\begin{cases} v_{tt} - 3v_t = v_{xx} + 2v_x, \\ v|_{t=0} = e^{-x}\sin x, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad v(0,x) = 0, \quad v(\pi,x) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

2) *Решим задачу Штурма-Лиувилля*:

$$\begin{cases} X'' + 2X' = \lambda X, \\ X(0) = 0, \\ X(\pi) = 0. \end{cases}$$

где $X = X(x)$ — функция от x. Выпишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k - \lambda = 0, \quad \Rightarrow \quad k = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

Рассмотрим три случая а) $1+\lambda>0$. Тогда

$$X = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

Из граничных условий вытекает, что

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{k_1\pi} + c_2 e^{k_2\pi} = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 0.$$

б) $1+\lambda=0$. Тогда

$$X = (c_1 x + c_2)e^{-x}$$

Из граничных условий следует, что

$$c_2 = 0; \quad c_1 \pi e^{-\pi} = 0, \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0.$$

в) $1+\lambda<0$. Тогда

$$k_{12} = -1 \pm i\beta, \quad \beta = \sqrt{-1-\lambda},$$

Из граничных условий вытекает, что

$$c_2 = 0; \quad c_1 e^{-\pi}\sin\beta\pi = 0, \quad \Rightarrow \quad \pi\beta = k\pi, \quad \Rightarrow \quad \beta = k, \quad k \in Z.$$

Итак, решение задачи Штурма-Лиувилля имеет вид:

$$X_k(x) = Ce^{-x}\sin kx, \quad \lambda = -1-k^2, \quad k \in Z. \tag{10}$$

3) Ищем *решение* задачи (9) в *виде ряда*:

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)e^{-x}\sin kx$$

где T_k — неопределенная пока еще функция. Дифференцируя почленно формально этот ряд, из (9) получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'' X_k - 3\sum_{k=1}^{\infty} T_k' X_k = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(X_k'' + 2X_k') =$$

$$(\text{ в силу равенства } (10)) \ = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\lambda_k X_k). \tag{11}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях X_k получаем

$$T_k'' - 3T_k' = \lambda_k T_k, \quad k = 1, 2, ... \tag{12}$$

Из начального условия выводим

$$v|_{t=0} = e^{-x}\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)e^{-x}\sin kx, \quad \Rightarrow T_1(0) = 1, T_k(0) = 0 \text{ при } k \neq 1. \tag{13}$$

Аналогично

$$v_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0)e^{-x}\sin kx = 0, \quad \Rightarrow T_k'(0) = 0 \quad \text{при } k \in Z. \tag{14}$$

Следовательно $T_k = 0$ при $k \neq 0$. Характеристическое уравнение для (13) при $k = 1$ имеет вид

$$m^2 - 3m - \lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2$$

Значит

$$T_1 = (c_1 e^t + c_2 e^2 t).$$

Из начальных условий (13),(14) найдем константы $c_1, \quad c_2:$

$$1 = c_1 + c_2, \quad 0 = 2c_1 + c_2, \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 2.$$

Откуда находим $T_1 = (-e^{2t} + e^t)$. Следовательно $v = (-e^{2t} + e^t)e^{-x}\sin x$.
Ответ:

$$u = xt + (-e^{2t} + e^t)e^{-x}\sin x.$$

§ 8 Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим уравнение:

$$LX(x) \equiv (p(x)X'(x))' - q(x)X(x) = \lambda\rho(x)X(x), \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

где $p > 0, \quad \rho > 0, \quad q \geqslant 0; \quad \{\rho, q\} \in C[0, l], \quad p \in C^1[0, l].$

Кроме того, зададим *граничные* условия

$$\begin{cases} \alpha X'(0) + \beta X(0) = 0, & \alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \\ \gamma X'(l) + \delta X(l) = 0, & \gamma^2 + \delta^2 \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Требуется найти нетривиальную функцию $X \in C^2(0, l) \bigcap C^1[0, l]$, удовлетворяющую (1)–(2).

Утверждение. *Существует последовательность* $\{\lambda_k\}$ *собственных значений задачи Штурма-Лиувилля:* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, *причем* $\lambda_k \to \infty$ *когда* $k \to \infty$. *Причем все* λ_k *являются простыми собственными числами, т.е. для одного* λ_k *существует единственная собственная функция* $X_k(x)$.

Доказательство. первой части мы опускаем (см. ?). Остановимся на второй части. Пусть X_k^1 и X_k^2 — две линейно независимые собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующие одному λ_k:

$$L\,X_k^1 = \lambda_k \rho X_k^1, \quad L\,X_k^2 = \lambda_k \rho X_k^2.$$

Тогда для любых констант c_1, c_2 верно равенство $L\,X = \lambda_k \rho X$, где $X = c_1 X_k^1 + c_2 X_k^2$. Причем $X_k^1, \quad X_k^2$ удовлетворяют граничным условиям (2) $\Rightarrow$ X удовлетворяет (2). Тогда найдутся константы c_1, c_2 такие, что $X(0) = \beta$ и $X'(0) = \alpha$. Подставляя это в (2), получаем, что $\alpha^2 + \beta^2 = 0$. Это противоречит условию (2). $\square$

Свойство 2. *Собственные функции* X_k *ортогональны с весом* ρ:

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x)\,dx = 0, \quad \text{при } k \neq m.$$

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} (p(x)X_k'(x))' - q(x)X_k(x) = \lambda_k \rho(x) X_k(x), \\ (p(x)X_m'(x))' - q(x)X_m(x) = \lambda_m \rho(x) X_m(x) \end{cases}$$

Умножаем первое из них на X_m, и вычитаем второе, умноженное на X_k, и интегрируем по x от 0 до l:

$$\int_0^l (p(x)X_k')' X_m - (p(x)X_m')' X_k\,dx = (\lambda_k - \lambda_m) \int_0^l \rho X_k X_m\,dx.$$

Проинтегрируем по частям левую часть, получим, что

$$-\int_0^l p(x)X_k' X_m' - p(x) X_m' X_k'\,dx + p(X_k' X_m - X_m' X_k)|_0^l = 0,$$

т.к. из краевого условия (2) имеем

$$\begin{cases} \alpha X_k'(0) + \beta X_k(0) = 0, \\ \alpha X_m'(0) + \beta X_m(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} X_k'(0) & X_k(0) \\ X_m'(0) & X_m(0) \end{pmatrix} = 0,$$

аналогично

$$\det\begin{pmatrix} X_k'(l) & X_k(l) \\ X_m'(l) & X_m(l) \end{pmatrix} = 0.$$

Следовательно

$$(\lambda_k - \lambda_m)\int_0^l \rho X_k X_m \, dx = 0.$$

□

Свойство 3. *Если* $p(x)X_k'(x)X_k(x)|_0^l \leqslant 0$ *, то собственные числа* λ_k *неположительны:* $\lambda_k \leqslant 0$ *.*

Доказательство. Уравнение

$$(p(x)X_k'(x))' - q(x)X_k(x) = \lambda_k \rho(x) X_k(x)$$

умножим на X_k и проинтегрируем по x от 0 до l :

$$\int_0^l (p(x)X_k')' X_k \, dx - \int_0^l q X_k^2 \, dx = \lambda_k \int_0^l \rho X_k^2 \, dx$$

Интегрируем первый интеграл по частям, получаем:

$$-\int_0^l p(x) X_k' X_k' \, dx + p(x) X_k' X_k|_0^l \leqslant 0$$

□

Свойство 4. *Любую функцию* Φ *класса* $C^2(0,l)\bigcap C^1[0,l]$ *можно разложить в ряд:*

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k X_k(x),$$

где

$$\Phi_k = \frac{1}{\parallel X_k \parallel^2}\int_0^l \rho(x)\Phi(x)X_k(x)\, dx, \quad \parallel X_k \parallel^2 = \int_0^l \rho(x) X_k^2 \, dx$$

(Без доказательства).

конец лекции Г24

§ 9 Корректность смешанной задачи для уравнения колебания струны

Рассмотрим уравнение:

$$\rho(x)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - q(x)u + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{1}$$

где $p > 0, \quad \rho > 0, \quad q \geqslant 0; \quad \{\rho, q\} \in C[0,l], \quad p \in C^1[0,l]$. Кроме того зададим *начальные* условия

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in [0,l], \\ u_t|_{t=0} = \psi, \quad x \in [0,l], \end{cases} \tag{2}$$

и *граничные* условия

$$\begin{cases} \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \mu_1(t), \\ \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases} \tag{3}$$

Предположим, что выполнены *условия согласования*:

$$\begin{cases} \alpha\varphi(0) + \beta \frac{\partial \varphi(0)}{\partial x} = \mu_1(0), \\ \gamma\varphi(l) + \delta \frac{\partial \varphi(l)}{\partial x} = \mu_1(l) \end{cases} \tag{4}$$

Требуется найти классическое решение смешанной задачи для уравнения колебания струны: $u \in C^2((0,T) \times (0,l)) \bigcap C^1([0,T) \times [0,l])$, удовлетворяющее (1)–(4).

Обозначим через $E(t)$ следующий *интеграл энергии*:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho(x)u_t^2 + p(x)u_x^2 + q(x)u^2)\, dx \tag{5}$$

Теорема. *Классическое решение задачи (1)-(4) с* $\alpha\beta = 0$ *и* $\gamma\delta = 0$ *единственно*

Доказательство. Пусть существуют два решения u_1, u_2 и обозначим через v разность $u_1 - u_2$. Тогда v будет решением следующей задачи:

$$\rho v_{tt} = (pv_x)_x - qv, \quad \begin{cases} \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \mu_1(t), \\ \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases} \tag{6}$$

Тогда выпишем интеграл энергии

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho(x)v_t^2 + p(x)v_x^2 + q(x)v^2)\,dx. \qquad (7)$$

Найдем производную по t от этого интеграла

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^l (\rho(x)v_t v_{tt} + p(x)v_x v_{xt} + q(x)vv_t)\,dx =$$

$$= \int_0^l v_t(\rho(x)v_{tt} - (p(x)v_x)_x + q(x)v)\,dx \equiv 0.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$\int_0^l p(x)v_x v_{xt}\,dx = p(x)v_x v_t|_o^l - \int_0^l v_t(p(x)v_x)_x\,dx.$$

Значит

$$E(t) \equiv const.$$

Кроме того

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho(x)v_t^2|_{t=0} + p(x)v_x^2|_{t=0} + q(x)v^2|_{t=0})\,dx = 0.$$

т.к. $v|_{t=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x|_{t=0} = 0$. Следовательно $E(t) \equiv 0$. Значит

$$v_t \equiv 0, \quad v_x \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad v = const$$

Теперь из условия $v|_{t=0} = 0$ вытекает, что $v \equiv 0$. $\square$

Непрерывная зависимость решения от начальных условий.

Теорема. *Пусть* $p > 0, \quad \rho > 0, \quad q \geqslant 0; \quad \{\rho, q\} \in C[0,l], \quad p \in C^1[0,l]$. *Пусть* u *— классическое решение задачи (1) — (4), с* $\alpha\beta = 0$ *и* $\gamma\delta = 0$, $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что* $\| u(0,\cdot) \| < \delta \quad \Rightarrow \quad \| u(t,\cdot) \| < \varepsilon$ *при любом* $t \in [0,T]$

Доказательство. Пусть

$$\| u(t,\cdot) \|^2 \equiv E(t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^l (\rho(x)u_t^2 + p(x)u_x^2 + q(x)u^2)\,dx$$

(удовлетворяет всем аксиомам нормы). Тогда в силу выведенного ранее свойства $E(t) \equiv const$ можем написать

$$\| u(t,\cdot) \| \leqslant \| u(0,\cdot) \| < \delta = \varepsilon$$

$\square$

конец лекции Г25

Рис.1.Прямоугольная мембрана.

Лекция Ѓ26.

§ 10 Свободные колебания прямоугольной мембраны.

Рассмотрим уравнение вида

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad (x, y) \in Ц, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

и граничным условием

$$u|_\sigma = 0. \tag{3}$$

Ищем частное решение уравнения (1) в виде

$$u(t, x, y) = T(t)v(x, y). \tag{4}$$

Тогда

$$T''v = a^2T(v_{xx} + v_{yy}) \tag{5}$$

Поделив последнее уравнение на Tv, получим

$$\frac{T''}{T(t)} = \frac{a^2(v_{xx} + v_{yy})}{v(x, y)} = -\lambda^2 \tag{6}$$

(функция, зависящая лишь от t равна функции, зависящей лишь от x и y $\Rightarrow$ она константа).

$$\begin{cases} T'' = -\lambda^2 T, \\ v_{xx} + v_{yy} = -\frac{\lambda^2}{a^2}v, \quad v|_\sigma = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решим сначала второе уравнение системы (7): ищем v в виде

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \tag{8}$$

Тогда

$$X''Y + XY'' = -\frac{\lambda^2}{a^2}XY \tag{9}$$

Делим обе части на XY, получаем, что

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{\lambda^2}{a^2} = -\mu^2 \tag{10}$$

(функция, зависящая лишь от x равна функции, зависящей лишь от y $\Rightarrow$ она константа). Тогда

$$\begin{cases} X'' = -\mu^2 X, \qquad X(0) = X(l) = 0, \\ Y'' = (\mu^2 - \frac{\lambda^2}{a^2})Y, \qquad Y(0) = Y(m) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Решение первого уравнения системы (11) имеет вид

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \mu_k = (\frac{k\pi}{l})^2, \quad k = 1, 2, ... \tag{12}$$

Тогда решение второго уравнения системы (11) имеет вид

$$Y_k(y) = \sin\frac{n\pi y}{m}, \quad \lambda_{k,n}^2 = a^2\pi^2(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2}) \tag{13}$$

Подставляя значения $\lambda_{k,n}$ в первое уравнение системы (7): $T'' = -\lambda^2 T$, получаем

$$T_{k,n} = A_{k,n}\sin\lambda_{k,n}t + B_{k,n}\cos\lambda_{k,n}t \quad \Rightarrow$$

$$u_{k,n}(t,x,y) = (A_{k,n}\sin\lambda_{k,n}t + B_{k,n}\cos\lambda_{k,n}t)\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

— частное решение уравнения (1), где $\lambda_{k,n} = a\pi\sqrt{(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2})}$.

Таким образом, ищем решение задачи (1)—(3) в виде

$$u(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{k,n}(t,x,y) \tag{14}$$

и потребуем, чтобы выполнялись граничные условия:

$$\varphi(x,y) = u(0,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{k,n}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m},$$

$$\psi(x,y) = u_t(0,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{k,n}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{m}$$

где $B_{k,n}$ и $A_{k,n}$ — коэффициенты Фурье функций φ и ψ. Мы не будем здесь рассматривать вопросы сходимости ряда (14).

§ Свободные колебания круглой мембраны.

Этот параграф был уже прочитан в лекции Ѓ11.

конец лекции Ѓ26

Лекция Ѓ27.

§ 11 Обобщенные решения первой краевой задачи для волнового уравнения.

Рис.1.Область Q_T .

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q_T, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \\ u|_S = 0 \end{cases} \tag{1) — (4}$$

где $Q_T = (0,T) \times \Omega$. Поверхность $S = (0,T) \times \partial\Omega$ не является поверхностью пространственного типа. Поэтому появилось граничное условие.

Обозначим буквой L следующий дифференциальный оператор:

$$Lu = u_{tt} - \Delta u \tag{5}$$

Умножая уравнение (1) на $\Phi \in C^\infty(Q_T)$ и интегрируя по x, t , получаем

$$\int_{Q_T} (Lu - f)\Phi \, dx \, dt = 0. \tag{6}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{Q_T} (u_{tt} - \Delta u - f(t,x))\Phi \, dx \, dt = -\int_{Q_T} (u_t\Phi_t - \sum_{j=1}^n u_{x_j}\Phi_{x_J} - f\Phi) \, dx \, dt +$$

$$+ \int_{\partial Q_T} (u_t\Phi n_0 - \sum_{j=1}^n u_{x_j}\Phi n_j) \, ds = 0.$$

последний интеграл представим в виде

$$\int_{\Omega_T} u_t \Phi\, dx - \int_{\Omega} u_t \Phi\, dx - \int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi\, ds.$$

Пусть

$$M_1 = \{\varphi \in C^\infty(Q_T) \quad \varphi = 0 \quad \text{в окрестности } (S \cup \{t = T\})\}$$

Пусть

$$M_2 = \{\varphi \in C^\infty(Q_T) \quad \varphi = 0 \quad \text{в окрестности } (S \cup \{t = 0\})\}$$

Определение 1. Обозначим

$$\overset{-\circ}{W}{}_2^1(Q_T) = \overline{M}_1 \quad (\text{замыкание по норме } H^1(Q_T)\,).$$

$$\overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T) = \overline{M}_2 \quad (\text{замыкание по норме } H^1(Q_T)\,)$$

Если $\Phi = 0$ на верхнем основании, то

$$\int_{\Omega_T} u_t \Phi\, dx = 0.$$

Если $\Phi = 0$ на боковой поверхности S цилиндра G_T, то

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi\, ds = 0.$$

Если выполнены следующие условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \equiv 0, \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \equiv 0,$$

то тогда

$$\int_{\Omega_0} u_t \Phi\, dx = 0.$$

Определение 2. Функция $u \in \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$ называется *обобщенным решением* задачи (1)—(4), с $\varphi = \psi = 0$, $f \in \mathrm{Ł}_2(Q_T)$, если для любой функции $\Phi \in \overset{-\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$ верно равенство

$$\int_{Q_T} (u_t \Phi_t - \sum_{j=1}^{n} u_{x_j} \Phi_{x_J} - f\Phi)\, dx\, dt = 0. \tag{7}$$

(здесь все производные понимаются в смысле С.Л.Соболева).

Теорема (единственности). *Обобщенное решение задачи (1) — (4) если существует, то единственно.*

Доказательство. Предположим, что есть два решения $u_1(t), u_2(t)$. Тогда функция $w = u_1 - u_2$ удовлетворяет следующему интегральному равенству: для любой функции $\tilde{\Phi} \in \overset{-\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$,

$$\int_{Q_T} (w_t \tilde{\Phi}_t - \sum_{j=1}^{n} w_{x_j} \tilde{\Phi}_{x_J})\, dx\, dt = 0. \tag{8}$$

По определению пространства $\overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$, если $w \in \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$, то существует последовательность $\{v_N\} \subset M_2$ такая, что

$$v_N \to w \quad \text{при } N \to \infty \text{ в } H^1.$$

В качестве Φ_N возьмем функцию вида

$$\Phi_N(t) = \begin{cases} \int_t^{t_1} v_N\, dt, & t < t_1; \\ 0 \quad t \geqslant t_1 \end{cases}. \tag{9}$$

$$J_N = \int_{Q_T} (-(v_N)_t (\Phi_N)_t + \sum_{j=1}^{n} (v_N)_{x_j} (\Phi_N)_{x_j})\, dx\, dt \tag{10}$$

Покажем, что $J_N \to 0$. Воспользуемся равенством (8). Из обеих частей равенства (10) вычтем соответствующие части равенства (8), получим что

$$J_N = \int_{Q_T} (-(v_N)_t (\Phi_N)_t + w_t \tilde{\Phi}_t + \sum_{j=1}^{n} ((v_N)_{x_j} (\Phi_N)_{x_j}) - w_{x_j} \tilde{\Phi}_{x_j})\, dx\, dt \to 0$$

при $N \to \infty$ т.к. равенство (8) верно для любой функции $\tilde{\Phi} \in \overset{-\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$, то возьмем

$$\tilde{\Phi} = \lim_{n \to \infty} \Phi_N.$$

В формуле (10) вместо Φ_N подставим правую часть равенства (9), получим

$$J_N = \int_{Q_{t_1}} (-(v_N)_t(-v_N)_t + \sum_{j=1}^{n}((v_N)_{x_j} \int_t^{t_1} (v_N)_{x_j}\, dt)\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{Q_{t_1}} ((-v_N)^2)_t - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}(\int_t^{t_1} (v_N)_{x_j}\, dt)^2\, dx\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_1}} ((-v_N)^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \sum_{j=1}^{n}(\int_0^{t_1} (v_N)_{x_j}\, dt)^2\, dx \to$$

$$\to \frac{1}{2}\int_{\Omega_{t_1}} ((w)^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \sum_{j=1}^{n}(\int_0^{t_1} (w)_{x_j}\, dt)^2\, dx.$$

при $N \to \infty$ т.к. $v_N \to w$ при $N \to \infty$ в H^1. Значит $w \equiv 0$. $\square$

конец лекции Г27

Лекция Г28.

§ 12 Метод Галеркина

Теорема существования решения. *Для любой функции $f \in Ł_2(Q_T)$ существует обобщенное решение задачи (1) — (4).*

Доказательство. Выберем базис $\{\varphi_k\} \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$:

$$\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega), \quad k \in N; \quad \|\varphi_k\|_{Ł_2(\Omega)} = 1; \quad (\varphi_k, \varphi_n) = \delta_{kn}.$$

1. Строим приближенное решение: ищем $u^N(t,x)$ в виде линейной комбинации функций φ_k из базиса:

$$u^N(t,x) = \sum_{k=1}^{N} c_k(t)\varphi_k(x). \tag{11}$$

Подставим это приближенное решение вместо u в (1), спроектируем его на первые N элементов базиса, получим

$$\int_\Omega (u_{tt}^N - \Delta u^N - f)\varphi_j(x)\, dx = 0, \quad j = 1, ..., N. \tag{12}$$

Из (12) вытекает система обыкновенных дифференциальных уравнений с постлянными коэффициентами. Значит эта система

$$\frac{d^2c_j(t)}{dt^2}-\sum_{k=1}^{N}c_k(t)\int_{\Omega}(\Delta\varphi_k(x))\varphi_j(x)\,dx-\int_{\Omega}f(t,x)\varphi_j(x)\,dx=0$$

с нулевыми начальными условиями: $c_j(0)=0,\quad c_j'(0)=0,\quad j=1,...,N$ имеет единственное решение, причем на всем отрезке $[0,T]$. (Здесь мы предполагаем, что $f\in C^{\infty}(Q_T)$, это, как будет показано чуть позже, не ограничивает общности доказательства).

Таким образом, для любого N существует $u^N(t,x)$ — приближенное решение задачи (1) — (4) с нулевыми начальными условиями: $u^N(0,x)=0,\ \ u_t^N(0,x)=0$.

2. Теперь покажем, что u^{N_k} при больших N_k сходится к некоторому пределу — точному решению задачи (1) — (4).

Докажем компактность семейства $u^N(t,x)$ в слабой топологии. Домножим (12) на $(c_j)_{tt}$ и просуммируем по j от 0 до N, получим что

$$\int_{\Omega}(u_{tt}^N-\Delta u^N-f)u_t^N\,dx=0. \tag{13}$$

Среднее слагаемое проинтегрируем по частям, получим

$$\int_{\Omega}\frac{1}{2}(u_t^N)_t^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(u_{x_i}^N)_t^2-fu_t^N\,dx=0 \tag{14}$$

Интегрируя по t от 0 до τ, получим что

$$\int_{\Omega_\tau}\frac{1}{2}(u_t^N)^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(u_{x_i}^N)^2\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int_0^\tau\int_{\Omega}fu_t^N\,dx\,dt+\int_{\Omega_0}\frac{1}{2}(u_t^N)^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(u_{x_i}^N)^2\,dx. \tag{15}$$

Последние два интеграла в равенстве (15) равны 0 т.к. $u^N(0,x)=0$, $u_t^N(0,x)=0$. Таким образом

$$\int_{\Omega_\tau}\frac{1}{2}(u_t^N)^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(u_{x_i}^N)^2\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\int_0^T\int_{\Omega}(u_t^N)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T\int_{\Omega}f^2\,dx\,dt. \tag{16}$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0)$$

Интегрируя (16) по τ от 0 до T, получим что

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2}(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(u_{x_i}^N)^2 \, dx\, dt \leqslant \frac{\varepsilon T}{2} \int_{Q_T} (u_t^N)^2 \, dx\, dt + \frac{T}{2\varepsilon} \int_{Q_T} f^2 \, dx\, dt. \quad (17)$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2T}$, из (17) выводим

$$\int_{Q_T} \frac{1}{4}(u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(u_{x_i}^N)^2 \, dx\, dt \leqslant T^2 \int_{Q_T} f^2 \, dx\, dt. \quad (18)$$

Из формулы Ньютона-Лейбница в силу равенства $u^N(0,x) = 0$ следует, что

$$u^N(t,x) = \int_0^t u_t^N(\tau, x)\, d\tau.$$

Выведем оценку для u^N:

$$\int_{Q_T} (u^N)^2 \, dx\, dt \leqslant \int_{Q_T} (\int_0^t u_t^N(\tau,x)\, d\tau)^2 \, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{Q_T} (\int_0^t 1^2 \, d\tau)(\int_0^t (u_t^N)^2 \, d\tau)\, dx\, dt \leqslant T^2 \int_{Q_T} (u_t^N(\tau,x))^2 \, dx\, d\tau.$$

Таким образом мы получили оценку

$$\|u^N\|^2_{W_2^1(Q_T)} = \int_{Q_T} (u^N)^2 + (u_t^N)^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{x_i})^2 \, dx\, dt \leqslant c\|f\|_{\mathrm{L}_2(Q_T)},$$

где константа c зависит лишь от T.

Воспользуемся теоремой о слабой компактности шара в Банаховом пространстве X: "Шар в сепарабельном Банаховом пространстве слабо компактен". В частности, для любой последовательности u^N из шара существует $u \in X$, и можно выбрать подпоследовательность u^{N_k} слабо сходящуюся к u:

$$\forall h \in X^*, \quad < u^{N_k}, h > \to < u, h >, \quad n_k \to \infty.$$

Таким образом, существуют $u \in Ł_2(Q_T)$, $y \in Ł_2(Q_T)$, $g_j \in Ł_2(Q_T)$ такие, что справедливы следующие соотношения:

$$u^{N_k} \to u \text{ слабо в } Ł_2(Q_T),$$

$$u_t^{N_k} \to y \text{ слабо в } Ł_2(Q_T),$$

$$u_{x_j}^{N_k} \to g_j \text{ слабо в } Ł_2(Q_T).$$

Покажем, что $y = u_t$, $g_j = u_{x_j}$, $j = 1, ..., n$. По определению производной в смысле Соболева, и в силу того что классическая производная $u_t^{N_k}$ является и о.п., имеем $\forall \varphi \in C_0^\infty(Q_T)$:

$$\begin{array}{ccc} \int_{Q_T} u_t^{N_k} \varphi \, dx \, dt & = & -\int_{Q_T} u^{N_k} \varphi_t \, dx \, dt \\ \downarrow & N_k \to \infty & \downarrow \\ \int_{Q_T} y\varphi \, dx \, dt & = & -\int_{Q_T} u\varphi_t \, dx \, dt \end{array}$$

Таким образом, $y = u_t$ в смысле Соболева.

Равенство $g_j = u_{x_j}$ доказывается аналогично.

Очевидно, что $u \in \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$.

3. *"Предельный переход"*. Покажем, что u удовлетворяет уравнению (1). Пусть

$$\Phi_M(t, x) = \sum_{k=1}^{M} b_k(t) \varphi_k(x), \quad b_k(T) = 0.$$

Умножим обе части уравнения (12) на $b_j(t)$ и просуммируем по j от 0 до M , получим что

$$\int_{Q_T} (u_{tt}^N - \Delta u^N - f) \Phi_M(t, x) \, dx \, dt = 0, \quad N > M$$

Интегрируя по частям по t и по x_j , получим что

$$\int_{Q_T} (-u_t^N (\Phi_M)_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_j}^N (\Phi_M)_{x_j} - f\Phi_M \, dx \, dt = 0. \tag{19}$$

(Если в первоначальной задаче было $f \in Ł_2(Q_T)$, то найдется такая последовательность f^N , что $f^N \to f$ в $Ł_2$. Поэтому в равенстве (17) функцию f можно заменить на f^N). Устремим $N_k \to \infty$, получим, что

$$\int_{Q_T} (-u_t (\Phi_M)_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_j} (\Phi_M)_{x_j} - f\Phi_M \, dx \, dt = 0. \tag{20}$$

Множество функций вида Φ_M всюду плотны в пространстве $\overset{-\circ}{W}{}^1_2(Q_T)$ поэтому равенство (20) останется справедливо, если мы функцию Φ_M заменим произвольной функцией Φ из пространства $\overset{-\circ}{W}{}^1_2(Q_T)$. $\square$

конец лекции Ѓ28

Лекция Ѓ29.

§ 13 Задача Гурса.

Пусть $Ц = [0, l] \times [0, m]$. Рассмотрим уравнение

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + cu = f(x, y) \quad (x, y) \in [0, l] \times [0, m]. \tag{1}$$

$$u(0, y) = \psi(y), \quad y \in [0, m] \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad x \in [0, l] \tag{3}$$

Рис.1.Область определения решения $u(x, y)$.

Определение. Классическим решением этой задачи Гурса назовем функцию u: $u \in C(\overline{Ц}) \cap C^2(Ц)$ согласованную с (1) — (3).

Замечание. Прямые $x = 0, \quad y = 0$ — характеристики уравнения (1). (Если выписать характеристическое уравнение $dx\,dy = 0$, то его решения имеют вид $x = const, \quad y = const$).

Эту задачу Гурса (1) — (3) мы сведем к интегральному уравнению типа *Вольтерра.*

Утверждение. Решение u задачи (1) — (3) существует и единственно, если $\varphi \in C^1[0, l], \quad \psi \in C^1[0, m]$ и выполнено условие согласования: $\varphi(0) = \psi(0)$ (т.к. $\varphi(0) = u(0, 0) = \psi(0)$).

Доказательство. Введем специальную замену неизвестной функции

$$v(x, y) = u_x, \quad w = u_y.$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$w_x = f - av - bw - cu \tag{4}$$

$$u_y = f - av - cu - bw \tag{5}$$

$$u_y = w \tag{6}$$

Граничные условия примут вид

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad v(x,0) = \varphi'(x) \quad x \in [0,l]; \quad w(0,y) = \psi'(y) \quad y \in [0,m] \tag{7}$$

Замечание. Задачи (1) — (3) и (4) — (7) эквивалентны.

Задачу (4) — (7) сведем к интегральной следующим образом: (4) интегрируем по x от 0 до x; (5) интегрируем по y от 0 до y; (6) интегрируем по y от 0 до y. Получаем что

$$\begin{cases} w(x,y) = \psi'(y) + \int_0^x \{f(\xi,y) - av(\xi,y) - bw(\xi,y) - cu(\xi,y)\}\,d\xi \\ v(x,y) = \varphi'(x) + \int_0^y \{f(x,\eta) - av(x,\eta) - bw(x,\eta) - cu(x,\eta)\}\,d\eta \\ u(x,y) = \varphi(x) + \int_0^y w(x,\eta)\,d\eta. \end{cases} \tag{8}$$

Задача (4) — (7) эквивалентна интегральной системе (8).

Построим приближенное решение $t_k = (u_k, v_k, w_k)$ задачи (8). Нулевое приближение зададим равенством

$$\begin{cases} w_0(x,y) = \psi'(y) + \int_0^x f(\xi,y)\,d\xi \\ v_0(x,y) = \varphi'(x) + \int_0^y f(x,\eta)\,d\eta \\ u_0(x,y) = \varphi(x). \end{cases} \tag{9}$$

А $k+1$-е приближение определим следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} w_{k+1}(x,y) = w_0(x,y) + \int_0^x \{-av_k(\xi,y) - bw_k(\xi,y) - cu_k(\xi,y)\}\,d\xi \\ v_{k+1}(x,y) = v_0(x,y) + \int_0^y \{-av_k(x,\eta) - bw_k(x,\eta) - cu_k(x,\eta)\}\,d\eta \\ u_{k+1}(x,y) = u_0(x,y) + \int_0^y w_k(x,\eta)\,d\eta. \end{cases} \tag{10}$$

Докажем, что существует такая тройка $t = (u, v, w)$ такая, что

$$u_k \rightrightarrows u, \quad v_k \rightrightarrows v, \quad w_k \rightrightarrows w \quad (k \to \infty)$$

Отметим, что

$$t_{k+1} = t_0 + \sum_{i=0}^{k} (t_{i+1} - t_i) \tag{11}$$

Докажем сходимость этого ряда. Для этого оценим каждую разность $t_{i+1} - t_i$. Покажем по индукции, что существуют константы A и B:

$$\|t_{i+1} - t_i\| = \max\{|u_{i+1} - u_i|, |v_{i+1} - v_i|, |w_{i+1} - w_i|\} \leqslant BA^i \frac{(x+y)^i}{(i-1)!}, \quad (12)$$

i=0,1,2,... Для $i = -1$,считая что $t_{-1} = 0$, из формулы (9) имеем

$$\max\{|u_0 - u_{-1}|, \quad |v_0 - v_{-1}|, \quad |w_0 - w_{-1}|\} \leqslant B \quad (13)$$

Предположим, что для $i = -1, 0, ..., k_0$ оценка (12) верна и докажем ее для $i = k_0 + 1$. Из системы (10) выводим

$$\begin{cases} (w_{k+1} - w_k)(x,y) = \int_0^x \{-a(v_k - v_{k-1}) - b(w_k - w_{k-1}) - c(u_k - u_{k-1})\}\, d\xi \\ (v_{k+1} - v_k)(x,y) = \int_0^y \{-a(v_k - v_{k-1}) - b(w_k - w_{k-1}) - c(u_k - u_{k-1})\}\, d\eta \\ (u_{k+1} - u_k)(x,y) = \int_0^y (w_k - w_{k-1})\, d\eta. \end{cases} \quad (14)$$

Откуда следует что

$$\|t_{k+1} - t_k\| \leqslant B \ \frac{A^{k-1}}{(k-2)!} \max\{|a|, |b|, |c|\}$$
$$\max\{\int_0^x (\xi + y)^{k-1}\, d\xi, \quad \int_0^y (x+\eta)^{k-1}\, d\eta\} \leqslant B \frac{A^k (x+y)^k}{(k-2)!}, \quad (15)$$

где $A = \max_{(x,y)\in Ц}\{|a|, |b|, |c|\}$. Тем самым оценка (12) доказана. Ряд

$$B + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (x+y)^k}{(k-2)!}$$

мажорирует ряд (11). Поэтому последний сходится равномерно при любых $(x, y) \in \overline{Ц}$ по признаку Вейерштрасса. Следовательно сумма этого ряда — непрерывная вектор-функция. $\square$

Теорема единственности. *Классическое решение задачи Гурса единственно*

Доказательство. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность решения $u = 0$ при $\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad f = 0$. Система (4) — (6) примет вид

$$\begin{cases} w(x,y) = \int_0^x \{f(\xi,y) - av(\xi,y) - bw(\xi,y) - cu(\xi,y)\}\, d\xi \\ v(x,y) = \int_0^y \{f(x,\eta) - av(x,\eta) - bw(x,\eta) - cu(x,\eta)\}\, d\eta \\ u(x,y) = \int_0^y w(x,\eta)\, d\eta. \end{cases}$$

Можно показать по индукции, что

$$\max\{|u|,|v|,|w|\}(x,y) \leqslant B_1\ \frac{A^k(x+y)^k}{(k-1)!}$$

Отметим, что

$$B_1\ \frac{A^k(x+y)^k}{(k-1)!} \to 0, \qquad \text{при } k \to \infty$$

Значит $\max\{|u|,|v|,|w|\}(x,y) = 0$ при любых $(x,y) \in$ Ц. $\square$

конец лекции Ґ29

Лекция Ґ30

глава 4. Параболические уравнения.

§ 14 Задача Коши для уравнения теплопроводности. .

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2\ \Delta u + f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in R^n. \tag{1}$$

где $a > 0$, $u(t,x)$ — температура тела в момент t в точке x. $f(t,x)$ — плотность внешних источников тепла. Начальная температура определяется равенством

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{2}$$

Фундаментальным решением уравнения теплопроводности называют следующую функцию:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\exp\Big\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\xi_i)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}$$

(эту функцию называют еще *ядром Пуассона*).

Свойства:

1) $\Gamma(x,t;\xi,\tau) > 0$, при $t > \tau$;

2) $\Gamma(x,t;\xi,\tau) \to \begin{cases} 0, & t \to \tau, \quad x \neq \xi \\ \infty, & t \to \tau, \quad x = \xi \end{cases}$

3) $\Gamma_t = a^2\ \Delta\Gamma$

4) $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = 1$

5) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ — температура в точке x в момент t от мгновенного точечного источника в точке ξ в момент τ.

Доказательство п.3 в случае $n=1$. Проведем замену $s = \frac{y-x}{a\sqrt{2(t-\tau)}}$. Тогда $ds = \frac{dy}{a\sqrt{2(t-\tau)}}$ и

$$\int_{\mathbb{R}^1} \Gamma(x,t;\xi,\tau)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1. \quad \square$$

Определение 1.*Классическим решением* $u(t,x)$ задачи (1) — (2), назовем функцию $u(t,x)$ непрерывно дифференцируемую по $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируемую по $x \in \mathbb{R}^n$, обращающую уравнение (1) в тождество при всех $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющее начальному условию (2).

Утверждение 1. Пусть $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ — непрерывная ограниченная функция и пусть $f \in C([0,T];C^1(\mathbb{R}^n))$. Тогда классическое решение u задачи Коши (1) — (2) существует.

Доказательство. Формально решение задачи Коши (1) — (2) можно выписать в виде формулы Пуассона:

$$u(t,x) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\exp\Big\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}{4a^2t}\Big\}\,dy +$$
$$+\int_0^t \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,y)\exp\Big\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big\}\,dy\,d\tau. \quad (3)$$

Справедливость уравнения (1) устанавливается непосредственной подстановкой. Однако, мы не можем подставить нуль вместо t для проверки начального условия (2) т.к. уже первый интеграл в (3) теряет смысл. Тем не менее справедливо следующее утверждение:

$$|u(t,x)-\varphi(y)| \to 0 \text{ при } t\to 0, \quad y\to x. \quad (4)$$

Для простоты докажем соотношение (4) в случае $f=0$. Действительно, используя свойство 4 и замену $s=\frac{y-x}{a\sqrt{2t}}$, получаем цепочку равенств

$$|u(t,x)-\varphi(y)| = |\int_{\mathbb{R}^1}\Gamma(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi)\,d\xi - \varphi(y)\int_{\mathbb{R}^1}\Gamma(x,t;\xi,\tau)\,d\xi| =$$
$$= |\int_{\mathbb{R}^1}\Gamma(x,t;\xi,\tau)(\varphi(\xi)-\varphi(y))\,d\xi| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{\mathbb{R}^1} e^{-\frac{s^2}{2}}(\varphi(x+sa\sqrt{2t})-\varphi(y))\,ds| = I. \quad (5)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, тогда найдется $N > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-\infty}^{-N} e^{-\frac{s^2}{2}} 2M\, ds| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{N}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} 2M\, ds| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

где $M = \sup_{y\in\mathbb{R}^1} |\varphi(y)|$. Тогда из (5) следует что

$$I \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-N}^{+N} e^{-\frac{s^2}{2}} (\varphi(x + sa\sqrt{2t}) - \varphi(y))\, ds|. \tag{6}$$

Функция φ непрерывная в т x. Поэтому

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : \quad |x - x_1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

. Следовательно

$$|\varphi(x + sa\sqrt{2t}) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |y - x| < \frac{\delta}{2}, \quad 0 < t < \frac{1}{2\pi}(\frac{\delta}{2aN})^2 = t_* \tag{7}$$

Тогда из (6) и (7) вытекает что

$$I < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|\int_{-N}^{+N} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds|\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x| < \frac{\delta}{2}, \quad t < t_*.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$|u(t, x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < t < t_*, \quad |y - x| < \delta(\varepsilon).$$

Вопросы гладкости решения мы рассмотрим несколько позже. □

Задача 1. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи Коши: $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(t, x)$.

Задача 2. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи Коши: $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$, $\quad u|_{t=0} = \varphi(x)$

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(x) = A, \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(x) = B,$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция. Найти $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$

Задача 3. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши: $u_t = u_{xx}$, $t>0$, $-\infty < x < +\infty$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} A, & x<0 \\ \varphi(x), & x\in[0,1], \\ B, & x\geqslant 1 \end{cases}$$

— непрерывная функция. Найти $\lim_{t\to+\infty} u(t,x)$.

Задача 4. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши: $u_t = u_{xx}$, $t>0$, $-\infty < x < +\infty$, $u|_{t=0} = \cos nx$ Найти $\lim_{n\to+\infty} u(t,x,n)$.

Задача 5. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши: $u_t = u_{xx} - 2u + f(t,x)$, $t>0$, $-\infty < x < +\infty$, $u|_{t=0} = 0$. Существует ли функция G , такая, что

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^1} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi\, d\tau \quad ?$$

Задача 6. Рассмотрим задачу[2]:

$$u_t = u_{xx} - 2u + f(t,x), \quad t>0, \quad -\infty<x<+\infty, \quad \alpha>0,$$

$f(t+2\pi,x) = f(t,x)$ $\forall\, t (f\in C^1(\mathbb{R}^{\times}\mathbb{R}^n)$. Существует ли 2π - периодическое по t решение $u(t,x)$? (В упомянутой статье можно найти решение этой задачи)

конец лекции Ґ30

Лекция Ґ31

§ 15 Ряды Фурье.

Рассмотрим функцию $f\in C[0,2\pi]$ такую, что $f(0)=f(2\pi)$. *Возникает вопрос:*" Можно ли ее представить в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx) \quad ? \tag{1}$$

[2] Белоусов Л. А., Тонков Е. Л. Некоторые математические задачи, связанные с одной моделью химического катализа // Известия Института математики и информатики УдГУ.Ижевск. 1997. Вып.1(9).С.3-62.

Напомним, что система из синусов и косинусов обладает свойством ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x+\cos(m+n)x \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, m = n \neq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x-\cos(m+n)x \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x-\sin(m-n)x \, dx = 0.$$

Кроме того $\forall\ m \in N$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0$$

Воспользовавшись этим, получим:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье (интегралы в смысле Лебега). Таким образом функции $f \in Ł_2(0;2\pi)$ сопоставляется ряд Фурье

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Теорема Лебега. *Если $f_1 \in Ł_2(0;2\pi)$ и $f_2 \in Ł_2(0;2\pi)$ и имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду.*

Доказательство. (от противного). Пусть $f = f_1 - f_2$. И пусть $f \in C[0,2\pi]$; $f \neq 0$. Тогда существует отрезок $[a,b] \subset [0,2\pi]$: $\forall\ x \in [a,b]$ $f(x) \geqslant m > 0$. При этом f ортогональна всем тригонометрическим полиномам т.е. f имеет нулевые коэффициенты Фурье. Значит $\forall\ \varphi$ — тригонометрического полинома справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\, dx = 0. \tag{3}$$

Пусть $\varphi(x) = \psi^n(x)$ где

$$\psi(x) = 1 + \cos(x - \frac{1}{2}(a+b)) - \cos(\frac{1}{2}(a-b)) = A + \cos(x - B).$$

Рис.1. $\psi(x) \geqslant 1$ при $x \in [a,b]$, $\quad |\psi(x)| < 1$ при $x \notin [a,b]$.

Отметим, что $\psi(a) = 1$, $\quad \psi(b) = 1$. Разобьем интеграл (3) на два интеграла

$$0 = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\varphi(x)\,dx + \int_{[0,2\pi]\setminus[a,b]} f(x)\varphi(x)\,dx \qquad (4)$$

Отметим, что $|\varphi(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0,2\pi] \setminus [a,b]$ т.к. $|\psi(x)| \leqslant 1$. Следовательно

$$|\int_{[0,2\pi]\setminus[a,b]} f(x)\varphi(x)\,dx| \leqslant \max_x |f(x)|(2\pi - |b-a|) < \infty$$

С другой стороны (т.к. $f(x) \geqslant m$ и $\psi(x) > (1+\delta)$, $x \in [a',b']$)

$$\int_{[a,b]} f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant \int_{[a',b']} m(1+\delta)^n\,dx \geqslant |a'-b'| m(1+\delta)^n \to \infty$$

при $n \to \infty$. Это противоречит (4). Следовательно $f \equiv 0$.

2. Пусть теперь $f \in \text{Ł}_2(0;2\pi)$. И пусть

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \text{п.в. (по т. Лебега)}$$

$$\Rightarrow \quad F(0) = 0, \quad F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \pi\, a_0 = 0.$$

Значит F — непрерывная периодическая функция. Найдем ее коэффициенты Фурье

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} F(x)\,d\sin nx \underbrace{=}_{\text{по частям}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi n} F(x)\,\sin nx\Big|_0^{2\pi}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx}_{\pi b_n}. \quad \Rightarrow \quad A_n = 0\ \forall\ n \geqslant 1.$$

Аналогично

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} F(x)\,d\cos nx \underbrace{=}_{\text{по частям}}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\pi n}F(x)\,\cos nx\Big|_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx}_{\pi a_n}. \quad \Rightarrow \quad B_n = 0\ \forall\ n \geqslant 1.$$

Кроме того

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = 2\pi C, \quad C = const$$

Тогда функция $F(x) - C$ имеет все коэффициенты Фурье — нули. С другой стороны $\int_0^x f(x)\,dx \in C[0,2\pi]$ если $f \in \text{Ł}_1(0,2\pi)$ Значит $F(x)-C \in C[0,2\pi]$. Следовательно $F(x) - C \equiv 0$, т.е.

$$\begin{cases} F(x) \equiv C \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(x) \equiv 0. \quad \square$$

§ 16 Ортогональные системы в $\text{Ł}_2(0,2\pi)$.

Система

$$\begin{array}{llll} 1, & \cos x, & \cos 2x, & \ldots \\ & \sin x, & \sin 2x, & \ldots \end{array}$$

полная.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}$ называется *ортонормированной* системой функций в $\text{Ł}_2(0,2\pi)$, если

1) $(\varphi_n, \varphi_m)_{\text{Ł}_2(0,2\pi)} = 0$, при $n \neq m$,

2) $\|\varphi_n\|_{\text{Ł}_2(0,2\pi)} = 1$.

Определение Система $\{\varphi_n\}$ — полная, если

$$(\forall\ f \in \text{Ł}_2(0,2\pi), \quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n \quad \text{и}\ \forall\ n\ c_n = 0) \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Неравенство Бесселя. Пусть система $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная, а $f \in \text{Ł}_2(0,2\pi)$. И пусть

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n, \quad c_n = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Обозначим через J следующий интеграл

$$J = \int_0^{2\pi} (f(x) - \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(x))^2\, dx.$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
0 \leqslant J &= \int_0^{2\pi} (f(x) - \sum_{n=1}^{m} c_n \varphi_n(x))(f(x) - \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_n(x))\, dx = \\
&= \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \sum_{n=1}^{m} c_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \varphi_n(x) f(x)\, dx}_{c_n} - \sum_{k=1}^{m} c_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \varphi_k(x) f(x)\, dx}_{c_k} - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_n c_k \int_0^{2\pi} \varphi_n(x)\varphi_k(x)\, dx}_{c_n^2} = \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx - \sum_{n=1}^{m} c_n^2. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливо неравенство *Бесселя*:

$$\sum_{n=1}^{m} c_n^2 \leqslant \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx < \infty. \qquad (2)$$

Замечание. Если $f \in \mathrm{Ł}_2(0, 2\pi)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ сходится.

Докажем теперь равенство Парсеваля. Пусть $f_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ — частичные суммы ряда. Тогда

$$\|f_m - f_n\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} (f_m - f_n)^2\, dx = \sum_{i=n}^{m} c_i^2 = |r_m - r_n| \qquad (3)$$

Мы обозначили через r_m сумму $\sum_{i=1}^{m} c_i^2$. Тогда из сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2$ вытекает фундаментальность последовательности r_m:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N :\ \forall\, n > N,\ m > N \quad |r_m - r_n| < \varepsilon.$$

Следовательно последовательность f_m фундаментальна в $\mathrm{Ł}_2(0, 2\pi)$. Ввиду полноты пространства $\mathrm{Ł}_2(0, 2\pi)$ существует функция g к которой сходится наша последовательность f_m.

Покажем, что функции g и f имеют одни и те же коэффициенты Фурье. (Тем самым мы докажем, что $g = f$):при $m > n$

$$c_n = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f_m(x)\varphi_n(x)\,dx \to \int_0^{2\pi} g(x)\varphi_n(x)\,dx = A_n$$

Таким образом мы доказали, что $g = f$.

Теперь воспользуемся равенством (1):

$$\begin{array}{ccccc} J & = & \int_0^{2\pi}(f(x) - \sum_{n=1}^m c_n\varphi_n(x))^2\,dx & = & \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \sum_{n=1}^m c_n^2. \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & = & \int_0^{2\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx & = & \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - \sum_{n=1}^\infty c_n^2. \end{array}$$

Следовательно справедливо равенство *Парсеваля*:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

Утверждение. Если $f_m \xrightarrow{\text{Ł}_2} g$, то $\forall\ \varphi \in \text{Ł}_2(0,2\pi)$ справедливо соотношение $(f_m,\varphi)_{\text{Ł}_2} \to (g,\varphi)_{\text{Ł}_2}$.

Доказательство. $|(f_m - g)_{\text{Ł}_2}| \leqslant \|f_m - g\|_{\text{Ł}_2}\|\varphi\|_{\text{Ł}_2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad (f_m,\varphi)_{\text{Ł}_2} \to (g,\varphi)_{\text{Ł}_2} \quad \square$

Задача. Для того, чтобы функция $f \in \text{Ł}_2(0,2\pi)$ принадлежала $H^1(0,2\pi)$ необходимо и достаточно чтобы сходился ряд с общим членом $n^2(a_n^2 + b_n^2)$, где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n \geqslant 1$$

При этом

$$\|f\|_{H^1}^2 = \int_0^{2\pi} f^2 + f'^2\,dx = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) + \pi(\frac{a_0}{2})^2$$

конец лекции Г31

Лекция Ґ32

§ 17 1-ая краевая задача. Принцип максимума

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2\,\Delta u + f(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

где $a > 0$, $u(t,x)$ — температура тела в момент t в точке x. $f(t,x)$ — плотность внешних источников тепла. Начальная температура определяется равенством

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Кроме того выполняется граничное условие

$$u|_S = \psi(t,x). \tag{3}$$

где $S = [0,T] \times \partial\Omega$.

Рис.1. Область Ц.

Определение 1. Будем называть u *классическим решением* задачи (1) — (3), если выполняются следующие три условия:

1) $u \in C(\overline{\text{Ц}}), \quad \text{Ц} = (0,T) \times \Omega,$
2) $u_t, \quad u_{xx} \in C((0,T) \times \Omega),$
3) u согласовано с (1) — (3).

Принцип максимума. Пусть u — классическое решение первой краевой задачи (1) — (3) с $f = 0$. Тогда $\forall (t,x) \in \text{Ц}$ справедлива оценка

$$\min_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} u(\tau,y) \leqslant u(t,x) \leqslant \max_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} u(\tau,y). \tag{4}$$

Доказательство. От противного. Пусть $(t_*, x_*) \in \text{Ц}$ — точка максимума:

$$u(t_*, x_*) = \max_{(t,x)\in \text{Ц}} u(t,x) = M.$$

Обозначим
$$m = \max_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} u(\tau, y).$$
Предполагаем, что $M > m$. Нам понадобится вспомогательная функция
$$v(t,x) = u(t,x) + \frac{M-m}{2nd^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{*i})^2, \tag{5}$$
где $d = diam\,\Omega$. Значит
$$\max_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} v(\tau,y) \leqslant m + \frac{M-m}{2nd^2}d^2 = m + \frac{M-m}{2n} = m(1-\frac{1}{2n}) + \frac{M}{2n} < M.$$
Но $v(t_*, x_*) = M$. Тогда функция v достигает max внутри области Ц либо при $t = T$ (это множество обозначим через $\tilde{\text{Ц}}$). Пусть точка $(t_1, x_1) \in \tilde{\text{Ц}}$ такая, что
$$v(t_1,x_1) = \max_{(\tau,y)\in\tilde{\text{Ц}}} v(\tau,y), \quad \Rightarrow \quad (v_t - a^2\Delta v)|_{(t_1,x_1)} \geqslant 0.$$

Рис.2. Точки максимума: $v_t(t_1,x_1) \geqslant 0, \quad \Delta v(t_1,x_1) \leqslant 0$.

С другой стороны в силу равенства (5) верно неравенство
$$(v_t - a^2\Delta v) = (u_t - a^2\Delta u) - a^2\frac{M-m}{2nd^2}2n < 0.$$
Противоречие. Одно из двух неравенств (4) доказано.

Заменим u на $-u$ ($-u$ — тоже будет решением уравнения теплопроводности). Тогда max и min поменяются местами. Значит второе неравенство в (4) тоже справедливо. □

Следствие 1. Классическое решение первой краевой задачи если существует, то *единственно.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 два решения задачи (1) — (3). Пусть $v = u_1 - u_2$. Тогда

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, \\ v|_{t=0} = 0, \\ v|_S = 0 \end{cases}$$

Из принципа максимума вытекает, что

$$v \equiv 0 \quad \Rightarrow u_1 \equiv u_2 \qquad \square$$

Следствие 2. Классическое решение первой краевой задачи *устойчиво* к возмущению начального и граничных условий.

Доказательство. Пусть u^1 и u^2 два решения задачи (1) — (3):

$$\begin{cases} u^1_t = a^2 \Delta u^1 + f, \\ u^1|_{t=0} = \varphi^1, \\ u^1|_S = \psi^1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2_t = a^2 \Delta u^2 + f, \\ u^2|_{t=0} = \varphi^2, \\ u^2|_S = \psi^2 \end{cases}$$

Предположим, что выполнены два неравенства:

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\|_{C(\Omega)} \leqslant \varepsilon \quad \|\psi^1 - \psi^2\|_S \leqslant \varepsilon.$$

Тогда неравенство

$$\|u^1 - u^2\|_{C(\text{Ц})} \leqslant \varepsilon.$$

вытекает из принципа максимума: если $v = u^1 - u^2$ то

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, \\ v|_{t=0} = \varphi^1 - \varphi^2, \\ v|_S = \psi^1 - \psi^2 \end{cases}$$

Из принципа максимума следует, что

$$-\varepsilon \leqslant \min_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} v(\tau, y) \leqslant v(t,x) \leqslant \max_{(\tau,y)\in S\cup\Omega} v(\tau, y) \leqslant \varepsilon$$

Значит

$$\|v\|_{C(\text{Ц})} \leqslant \varepsilon \quad \square$$

§ 18 Метод разделения переменных (с обоснованием).

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2\, u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Частное решение уравнения теплопроводности будем искать в виде

$$u = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение получим

$$T'X = a^2 T X''$$

Поделив на a^2TX, выводим

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T' = -\lambda^2 a^2 T, \\ X'' = -\lambda^2 X, \quad X(0) = X(\pi) = 0. \quad \text{(З.Ш.-Л.)} \end{cases}$$

Решая задачу Штурма-Лиувилля, получим

$$X_k = \sin kx, \quad k = 1, 2, ... \quad \lambda_k = k.$$

Значит $T_k' = -a^2\lambda_k^2 T_k \quad \Rightarrow \quad T_k = c_k e^{-a^2k^2t}$. Следовательно решение u можем подставить в виде формального ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-a^2k^2t} \sin kx \tag{7}$$

Покажем, что этот ряд является классическим решением, если начальное условие достаточно гладкое.

Теорема. *Пусть* $\varphi(0) = \varphi(\pi)$ *и* $\varphi \in C^1[0;\pi]$. *Тогда функция* $u(t,x)$, *представленная рядом (7), является классическим решением задачи (6).*

Доказательство. Отметим, что если $\varphi \in C^1[0;\pi]$, то

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\ c_k \cos kx$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\int_0^\pi (\varphi')^2\,dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k\ c_k)^2 < +\infty.$$

Значит в силу неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|k\ c_k|\frac{1}{k} \leqslant \{\sum_{k=1}^{\infty}(k\ c_k)^2\}^{\frac{1}{2}}\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Следовательно ряд (7) сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Поэтому $u \in C(\overline{\text{Ц}})$.

Зафиксируем некоторое число $t_1 > 0$. Тогда при любом $t > t_1$ верны оценки

$$|u_{xx}(t,x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|k^2\ c_k e^{-a^2k^2t}\sin kx| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|k^2\ c_k|e^{-a^2k^2t} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}|k^2\ c_k|e^{-a^2kt_1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\ k\ q^k = M\frac{q}{(1-q)^2} < +\infty,$$

где $M = \max|kc_k|,\quad q = e^{-a^2t_1} < 1$. Следовательно справедливо включение $u_{xx} \in C(\text{Ц})$.

Аналогично доказывается, что $u_t \in C(\text{Ц})$. $\square$

Замечание. Первая краевая задача для уравнения теплопроводности некорректна при $t \in (-\infty, 0]$ (т.к. $c_k e^{-a^2t} \to +\infty$ при $t \to -\infty$).

конец лекции Ґ32

Лекция Ґ33

§ 19 2-ая краевая задача для уравнения теплопроводности. Энергетическая оценка

Рис.1. Область Ц.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2\ \Delta u + f(t,x), \quad 0 < t < T, \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

где $a > 0$, $u(t,x)$ — температура тела в момент t в точке x. $f(t,x)$ — плотность внешних источников тепла. Начальная температура определяется равенством

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Кроме того выполняется граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S = \psi(t,x). \tag{3}$$

где $S = [0,T] \times \partial\Omega$, n — единичная внешняя нормаль к поверхности S.

Определение 1. Будем называть u *классическим решением* второй краевой задачи (1) — (3) , если выполняются следующие три условия:

1) $u \in C^1(\overline{\text{Ц}}), \quad \text{Ц} = (0,T) \times \Omega$,
2) $u_{xx} \in C(\text{Ц})$,
3) u согласовано с (1) — (3).

Энергетическая оценка.

Утверждение Пусть $f = 0, \quad \psi = 0$, и пусть u — решение второй краевой задачи (1) — (3). Тогда справедлива оценка

$$\int_\Omega u^2(t,x)\,dx \leqslant \int_\Omega \varphi^2(x)\,dx. \tag{4}$$

Доказательство. Домножим уравнение (1) на $2u$ и проинтегрируем по x по области Ω:

$$\int_\Omega \underbrace{u_t\ 2u}_{(u^2)_t}\,dx = a^2\int_\Omega \Delta u\,2u\,dx = -2a^2\int_\Omega \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2\,dx + 2a^2\int_{\partial\Omega} u\ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{0}\ ds \leqslant 0.$$

Последнее равенство верно в силу формулы Грина. Следовательно

$$\int_\Omega (u^2)_t\,dx \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\ t > 0 \quad \int_\Omega u^2(t,x)\,dx \leqslant \int_\Omega u^2(0,x)\,dx \quad \square$$

Следствие Классическое решение 2-й краевой задачи единственно.

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 два решения задачи (1) — (3). Пусть $v = u_1 - u_2$. Тогда

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, \\ v|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n}\big|_S = 0 \end{cases}$$

Из энергетической оценки вытекает, что

$$\int_\Omega v^2(t,x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad v \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 \equiv u_2 \qquad \square$$

Следствие 2. Классическое решение 2-й краевой задачи *устойчиво* к возмущению начального условия.

Доказательство. Пусть u^1 и u^2 два решения задачи (1) — (3):

$$\begin{cases} u^1_t = a^2\Delta u^1 + f, \\ u^1|_{t=0} = \varphi^1, \\ \frac{\partial u^1}{\partial n}\Big|_S = \psi \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2_t = a^2\Delta u^2 + f, \\ u^2|_{t=0} = \varphi^2, \\ \frac{\partial u^2}{\partial n}\Big|_S = \psi \end{cases}$$

Пусть $v = u^1 - u^2$. Тогда

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, \\ v|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial n}\big|_S = \varphi^1 - \varphi^2 \end{cases}$$

Из энергетической оценки (4) вытекает, что

$$\int_\Omega v(t,x)\,dx \leqslant \int_\Omega (\varphi^1 - \varphi^2)^2\,dx = \|\varphi^1 - \varphi^2\|^2_{Ł_2(\Omega)} \quad \Rightarrow$$

$$\max_{t\in[0,\pi]} \|v^2(t,\cdot)\|^2_{Ł_2(\Omega)} \leqslant \|\varphi^1 - \varphi^2\|^2_{Ł_2(\Omega)}. \tag{5}$$

Предположим, что выполнено неравенство:

$$\|\varphi^1 - \varphi^2\|_{Ł_2(\Omega)} \leqslant \delta = \varepsilon.$$

Тогда из оценки (5) вытекает неравенство

$$\max_{t\in[0,\pi]} \|u^1(t,\cdot) - u^2(t,\cdot)\|_{Ł_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon. \quad \square$$

конец лекции Ѓ33

Лекция Г34

§ 20 Принцип максимума для неограниченной области

Утверждение. *Пусть u — классическое решение задачи Коши*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f, \quad f \equiv 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x). \end{cases} \tag{1}$$

из класса ограниченных функций:

$$\exists M > 0 : \ \forall\, t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \ |u(t,x)| \leqslant M \tag{2}$$

Тогда $\forall\, t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$\inf_{y\in\mathbb{R}^n} \varphi(y) \leqslant u(t,x) \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \varphi(y) \tag{3}$$

Доказательство. Нам понадобится вспомогательная функция

$$v(t,x) = 2a^2tn + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \Rightarrow \quad v_t = a^2\Delta v.$$

Обозначим через $w_\pm$ следующие функции

$$w_\pm(t,x) = \underbrace{\pm u(t,x) + M_1}_{\geqslant 0 \text{ при } t=0} + \underbrace{\varepsilon v(t,x)}_{\geqslant 0 \text{ при } t\geqslant 0}, \quad \varepsilon > 0,$$

где $M_1 = \sup|\varphi|$. Пусть

$$\exists\ (t_0, x_0) : \ t_0 > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}^n : \ u(t_0, x_0) > M_1. \tag{4}$$

Пусть Ц $= (0,T) \times Q_R(0)$ — цилиндр, такой что

1) $(t_0, x_0) \in$ Ц,
2) $w_\pm|_{t=0} \geqslant 0$,
3) $w_\pm|_S \geqslant 0$, где S — боковая поверхность цилиндра.

Пункты 1 и 2, очевидно, выполняются. Установим справедливость пункта 3.

$$w_\pm(t,x)|_S = \underbrace{\pm u(t,x) + M_1}_{\text{ограничена}} + \varepsilon \underbrace{v(t,x)}_{\geqslant R^2} \geqslant 0$$

при достаточно большом R. По принципу максимума для Ц получаем что

$$\forall\ t \in [0,T],\ x \in Ц \quad w_{\pm}(t,x) \geqslant 0.$$

Следовательно

$$-M_1 - \varepsilon v(t_0,x_0) \leqslant u(t_0,x_0) \leqslant M_1 + \varepsilon v(t_0,x_0).$$

Устремим $\varepsilon \to 0$, получим $-M_1 \leqslant u(t_0,x_0) \leqslant M_1$. Это противоречит с (4). Для случая $M_1 = \sup\varphi(y) = -\inf\varphi(y)$ утверждение доказано. Общий случай сводится к этому прибавлением к функции u некоторой константы c. $\square$

Следствие 1. Классическое решение задачи Коши единственно в классе ограниченных функций.

Следствие 2. Классическое решение задачи Коши устойчиво к возмущению начального условия.

Задача 1. Ограниченное решение u задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

единсвенно в этом классе. Доказать.

Замечание Условие ограниченности функции u в "принципе максимума" можно заменить условием

$$|u(t,x)| \leqslant Me^{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Задача 2. Решение u задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = e^{x} \end{cases}$$

единственно в классе (5). Доказать.

§ 21 Интеграл Дюамеля.

Решение задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(t,x) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

сводится к решению задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v \\ v|_{t=\tau} = f(\tau,x) \end{cases}$$

с помощью интеграла Дюамеля

$$u(t,x)=\int_0^t v(t,x,\tau)\,d\tau.$$

Действительно $u|_{t=0}=0$ Кроме того

$$u_t=v(t,x,\tau)+\int_0^t v_t(t,x,\tau)\,d\tau=$$

$$f(t,x)+\int_0^t a^2\Delta v(t,x,\tau)\,d\tau=a^2\Delta u+f(t,x)$$

□

конец лекции Ѓ34

Лекция Ѓ35

§ 22 Монотонные операторы. Основная теорема существования решения.

1.Теоремы о неподвижных точках.

Теорема Брауэра. *Пусть n-мерный ($n\geqslant 1$) шар $S_0(r)$ непрерывно отображается в себя, т.е. каждой точке $x\in S_0(r)$ отвечает точка $Ax\in S_0(r)$, причем отображение A непрерывно. Тогда по крайней мере одна точка $x_0\in S_0(r)$ при этом отображении переходит в себя, т.е.*

$$Ax_0=x_0$$

Доказательство. см. в книге И.Г.Петровского "Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений." — М. : Наука, 1970. на с.233. □

Теорема об остром угле. *Пусть T — непрерывный на шаре $S_0(r)$ оператор такой, что*

$$(T(x'),x')\geqslant 0 \quad \text{при любом} \quad x'\in\partial S_0(r).$$

Тогда существует $x_0\in S_0(r)$ такое, что $T(x_0)=0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $T(x)\neq 0$ при любом $x\in S_0(r)$. Рассмотрим оператор

$$A(x)=-\frac{T(x)}{\|T(x)\|}r. \tag{1}$$

Для этого оператора A выполнено условие теоремы Брауэра о неподвижной точке. Из этой теоремы вытекает, что существует точка $x_0 \in S_0(r)$ такая, что $A(x_0) = x_0$. Тогда $\|a(x_0)\| = r$ в силу равенства (1). Следовательно и

$$\|x_0\| = r. \tag{2}$$

С другой стороны

$$(T(x_0), x_0) = -(T(x_0), \frac{T(x)}{\|T(x)\|}r) = -\|T(x_0)\|r < 0. \tag{3}$$

Соотношения (1) и (2) противоречат условию теоремы. $\square$

Монотонные операторы.

Простым примером монотонного оператора может служить оператор

$$A(u) = -\frac{\partial}{\partial x}(|\frac{\partial u}{\partial x}|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}), \quad p \geqslant 2, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

В частности, при $p = 2$ он имеет вид $A(u) = -u_{xx}$.

Мы приведем доказательство существования решения задачи:

$$A(u) = f, \quad x \in \Omega.$$

для так называемых монотонных операторов A. Нам понадобятся некоторые определения.

Пусть B — рефлексивное, сепарабельное банахово пространство (таким является, например, L_2 или $H^1(\Omega)$), и пусть A — некоторый оператор на B такой, что $A : B \to B^*$.

Определение 1. Оператор A *ограничен*, если он любое ограниченное множество M из пространства B переводит в ограниченное множество $A(M)$ в пространстве B^*.

Определение 2. Оператор A *монотонен*, если

$$< A(x) - A(y), x - y > \geqslant 0 \quad \forall x, y \in B. \tag{5}$$

Определение 3. Оператор A λ*-непрерывен* (полунепрерывен), если при любых $x, y, z \in B$ функция

$$< A(x + \lambda y), z >: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1 \tag{6}$$

непрерывна по λ на всей прямой $\mathbb{R}^1$.

Теорема. *Пусть B — рефлексивное сепарабельное банахово пространство. Пусть оператор $A : B \to B^*$ обладает следующими свойствами:*

а) оператор A ограничен и λ-непрерывен;

б) оператор A монотонен;

в) оператор A коэрцитивен:

$$\frac{< A(x), x >}{\|x\|} \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|x\| \to \infty.$$

Тогда отображение $A : B \to B^*$ — эпиморфизм (т.е. $A(B) = B^*$ или, другими словами, для любого $y \in B^*$ существует $x \in B$ такое, что $A(x) = y$).

Доказательство. будет состоять из пяти этапов. Пусть $w_1, \dots, w_m, \dots$ — " базис" в B (т.е. при любом m элементы $w_1, \dots, w_m, \dots$ линейно независимы и конечные линейные комбинации элементов w_j плотны в B). Такой базис существует т.к. в силу сепарабельности пространства B существует счетное всюду плотное в B множество P ? можно считать, P это последовательность v_j). Теперь можно выбирать подпоследовательность w_j такую, что при любом m $w_1, \dots, w_m$ линейно независимы.

Пусть f — некоторый фиксированный элемент из B^*. Найдем x из пространства B такое, что

$$A(x) = f. \tag{5}$$

1. Сначала найдем функцию u_m вида

$$u_m = c_1 w_1 + \ldots + c_m w_m, \tag{6}$$

удовлетворяющую системе уравнений

$$< A(u_m), w_j > = < f, w_j >, \quad j = 1, \dots, m. \tag{7}$$

Утверждение 1. При любом $f \in B^*$ система уравнений (7) имеет решение u_m .

Доказательство. Пусть $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$. Введем оператор $G_m(\cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$G_m(c) = \{\widetilde{A}_1(c), \dots, \widetilde{A}_m(c)\}, \tag{6}$$

где

$$\widetilde{A}_j(c) =< A(c_1w_1 + \ldots + c_mw_m), w_j > - < f, w_j >, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Легко видеть, что разрешимость системы (7) будет доказана, если мы докажем существование $c^0 \in \mathbb{R}^m$ такого, что

$$G_m(c^0) = 0. \tag{10}$$

Для доказательства существования c^0 воспользуемся теоремой об остром угле. Покажем, что условия этой теоремы выполняются, если норма $\|c\|$ достаточно велика. (Здесь $\|c\| = \|u_m\|_B$ где c и u_m связаны равенством (6)). Из равенства (8) и (9) вытекает, что

$$(G_m(c), c) = \sum_{j=1}^{m} A_j(c)c_j =< A(u_m) - f_m, u_m >\geqslant 0. \tag{11}$$

Последнее неравенство справедливо в силу оценки

$$< f, u_m >\leqslant \|f\|_*\|u_m\|_B$$

(это неравенство — прямое следствие определения нормы $\|\cdot\|_*$ и того, что

$$\frac{< A(u_m), u_m >}{\|u_m\|_B} \geqslant \|f\|_*,$$

если норма $\|u_m\|_B$ достаточно велика (свойство коэрцитивности оператора A). Таким образом, из теоремы об остром угле вытекает справедливость утверждения 1.

2. *Утверждение* 2. Пусть u_m — некоторая последовательность элементов пространства B такая, что u_m является решением системы уравнений (6),(7) при соответствующем m. Тогда существует такая константа M, зависящая лишь от f, что при любом $m \in N$ справедлива оценка

$$\|u_m\|_B \leqslant M.$$

Доказательство. Умножая обе части j-го уравнения системы (7) на c_j и суммируя по j, получаем, что

$$< A(u_m), u_m >=< f, u_m > .$$

Откуда в силу неравенства

$$< f, u_m >\leqslant \|f\|_* \|u_m\|_B$$

вытекает оценка

$$\frac{< A(u_m), u_m >}{\|u_m\|_B} \leqslant \|f\|_*, \quad (m = 1, 2, \dots) \tag{13}$$

Из этой оценки (13) и свойства коэрцитивности оператора следует неравенство (12). Утверждение 2 доказано □

3. *Замечание* 1. Из ограниченности оператора A (свойство (a)) вытекает, что существует такая константа M_1, зависящая лишь от f, что при любом m

$$\|A(u_m)\|_* \leqslant M_1 \tag{14}$$

Замечание 2. В силу теоремы о слабой компактности шара в рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве B из ограниченной последовательности $\{u_m\}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m'}\}$. Обозначим предел этой подпоследовательности через u:

$$u_{m'} \overset{\text{сл.}}{\to} u \quad \text{при} \quad m' \to \infty \tag{15}$$

По той же причине существует подпоследовательность $\{u_{m''}\}$ последовательности $\{u_{m'}\}$ такая, что

$$A(u_{m''}) \overset{\text{сл.}}{\to} \Psi \quad \text{при} \quad m'' \to \infty \tag{16}$$

где $\Psi \in B^*$.

4. Покажем, что последовательность $\{A(u_{m''})\}$ слабо сходится к f:

$$A(u_{m''}) \overset{\text{сл.}}{\to} f \quad \text{при} \quad m'' \to \infty.$$

В самом деле перейдем в равенстве (7) к пределу при $m'' \to \infty$ при фиксированном $j \quad (j < m'')$ получим, что

$$< f, w_j >=< A(u_{m''}), w_j >\to< \Psi, w_j > \quad \text{при } m'' \to \infty.$$

Последнее соотношение вытекает из соотношения (16).

Таким образом, справедливо

$$f = \Psi$$

т.к. $w_1, \ldots, w_m, \ldots$ — "базис" в B.

5. Вспоминаем, что оператор A монотонен, т.е. при любом $v \in B$ и при любом m справедливо неравенство

$$< A(u_m) - A(v), u_m - v > \geqslant 0$$

или

$$< A(u_m), u_m > - < A(u_m), v > - < A(v), u_m > + < A(v), v > \geqslant 0 \qquad (17)$$

Здесь мы воспользуемся билинейностью скобки двойственности. Отметим, что в силу (15)

$$< A(u_{m'}), u_{m'} > = < f, u_{m'} > \to < f, u > \quad \text{при } m' \to \infty. \qquad (18)$$

Устремляя в (17) $m'' \to \infty$, и учитывая (18), получаем

$$< f, u > - < f, u > - < A(v), u > + < A(v), v > \geqslant 0$$

или

$$< f - A(v), u - v > \geqslant 0. \qquad (19)$$

Полагаем $u - v = \lambda w$, (тогда $v = u - \lambda w$). Подставляя в (19), получаем, что

$$\lambda < f - A(u - \lambda w), w > \geqslant 0.$$

Устремляя $\lambda \to 0+$, выводим

$$< f - A(u), w > \geqslant 0.$$

С другой стороны, устремляя $\lambda \to 0-$, получаем, что

$$< f - A(u), w > \leqslant 0.$$

Таким образом, при любом $w \in B$ справедливо равенство

$$< f - A(u), w > = 0.$$

Откуда

$$f = A(u).$$

Таким образом теорема доказана. $\square$

Задача. Доказать, что в банаховом пространстве $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ справедливы следующие соотношения:

$$\sin mx \overset{\text{сл.}}{\to} 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

но

$$\| \sin mx \|^2 = \pi$$

3. Теорема единственности.

Оператор $A : B \to B^*$ называется строго монотонным, если

$$< A(u) - A(v), u - v > \quad > 0 \quad \text{при } u \neq v.$$

Утверждение. Пусть оператор A строго монотонен. Тогда при любом $f \in B^*$ решение u задачи (1) единственно.

Доказательство. Допустим, что для некоторого $f \in B^*$ существует два решения задачи (1) u_1 и u_2. Тогда $A(u_1) = A(u_2)$. Следовательно

$$< A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2 >= 0.$$

Это противоречит строгой монотонности оператора A $\square$

конец лекции Ґ35

Лекция Ґ36

§ 23 Метод Галеркина для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u|_S = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где S — боковая поверхность цилиндра $Q_{\mathrm{T}} = (0,T) \times \Omega$. Пусть u — классическое решение задачи (1). Тогда для любой $\Phi \in C^\infty, \quad \Phi|_S = 0$ справедливо интегральное равенство

$$\int_{Q_T} (u_t - a^2 \Delta u - f(t,x)) \Phi(t,x) \, dx \, dt = 0.$$

Интегрируя по частям получим, что

$$\int_{Q_T} u_t \Phi - a^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} \Phi_{x_i} - f \Phi \, dx \, dt = \int_S \sum_{i=1}^n u_{x_i} n_i \Phi \, ds.$$

Пусть

$$M_2 = \{\varphi \in C^\infty(Q_T) \quad \varphi = 0 \quad \text{ в окрестности } (S \cup \{t = 0\})\}$$

Определение 1. Обозначим

$$\overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T) = \overline{M}_2 \quad \text{(замыкание по норме } H^1(Q_T)\text{)}$$

Если $\Phi = 0$ на боковой поверхности S, то

$$\int_S \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} n_i \Phi \, ds = 0.$$

Определение 2. Функция $u \in \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$ называется *обобщенным решением* задачи (1), с $\varphi = 0, \quad f \in \text{Ł}_2(Q_T)$, если для любой функции $\Phi \in C^\infty(Q_T), \quad \Phi|_S = 0, \quad \Phi|_{t=T} = 0$ верно равенство

$$\int_{\Omega_T} u_t \Phi - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} \Phi_{x_i} - f\Phi \, dx\, dt = 0.$$

(здесь все производные понимаются в смысле С.Л.Соболева).

Теорема существования. *Пусть* $\varphi = 0, \quad f \in \text{Ł}_2(Q_T)$ *Тогда существует обобщенное решение задачи (1).*

Доказательство. Выберем базис в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, ортонормированный в $\text{Ł}_2(\Omega)$: $\{\varphi_k\} \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ (или $\varphi_k \in C_0^\infty(\Omega)$), $(\varphi_k, \varphi_n)_{\text{Ł}_2} = 0$, если $n \neq k$, $\|\varphi_n\|_{\text{Ł}_2} = 1$

Пример такого базиса в $\overset{\circ}{H}{}^1(0, \pi)$:

$$\varphi_k(x) = \sin kx, \quad k = 1, 2, ...$$

1. Ищем приближенное решение в виде

$$u^N = \sum_{i=1}^{N} c_i(t) \varphi_i(x)$$

Коэффициенты c_i находим из подстановки u^N в уравнение теплопроводности и проектируем его на первые N элементов базиса, получаем систему уравнений:

$$\int_\Omega (u_t^N - \Delta u^N - f)\varphi_k(x)\, dx = 0, \quad k = 1, ..., N, \tag{3}$$

$$u^N|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

Условиями (3),(4) коэффициенты c_i определяются однозначно: подставим u^N в (3), получим систему О.Д.У:

$$c_k(t)_t - \sum_{i=1^N} c_i(t) b_{ik} - f_k(t) = 0, \quad c_k(0) = 0 \quad k = 1, ..., N;$$

где

$$b_{ik} = \int_\Omega \varphi_k \, \Delta\varphi_i \, dx, \quad f_k(t) = \int_\Omega \varphi_k \, f(t,x) \, dx. \tag{5}$$

Здесь мы будем предполагать, что $f \in C(Q_T)$. Система линейных дифф. уравнений с постоянными коэффициентами имеет решение c_k, $k = 1, ..., N$ на всей полуоси $t > 0$. Таким образом приближенное решение u^N построили.

2. Покажем, что из последовательности u^N можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Покажем, что существует шар в $\overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$, содержащий эту последовательность. Умножим обе части равенства (3) на c_k и просуммируем по k, получим

$$\int_\Omega (u_t^N - \Delta u^N - f) u^N \, dx = 0.$$

Интегрируем по частям, получим

$$\int_\Omega \frac{1}{2}((u^N)^2)_t + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^N)^2 \, dx = \int_\Omega f u^N \, dx.$$

Интегрируем последнее равенство по t от 0 до τ:

$$\int_{\Omega_\tau} \frac{1}{2}((u^N)^2) \, dx - \int_{\Omega_0} \frac{1}{2}((u^N)^2) \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{Q_\tau} (u_{x_i}^N)^2 \, dx \, dt =$$
$$= \int_{Q_\tau} f u^N \, dx \, dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{Q_\tau} (u^N)^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{Q_\tau} f^2 \, dx \, dt \tag{7}$$

Интегрируем обе части последнего неравенства по τ от 0 до T получим

$$\int_{Q_T} \frac{1}{2}((u^N)^2) \, dx \, dt \leqslant \frac{\varepsilon T}{2} \int_{Q_T} ((u^N)^2) \, dx \, dt + \frac{T}{2\varepsilon} \int_{Q_T} f^2 \, dx \, dt \tag{8}$$

Выберем ε такое, что $2\varepsilon T$. Тогда из формулы (8) вытекает, что

$$\frac{1}{4}\int_{Q_T}((u^N)^2)\,dx\,dt \leqslant T^2\int_{Q_T} f^2\,dx\,dt \tag{9}$$

Из (7) в силу того, что $u^N(0)=0$ следует, что $\tau=T$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\tau}(u^N_{x_i})^2\,dx\,dt \leqslant \frac{\varepsilon T}{2}\int_{Q_T}((u^N)^2)\,dx\,dt+\frac{T}{2\varepsilon}\int_{Q_T} f^2\,dx\,dt \tag{10}$$

Из формулы (10), полагая $\varepsilon=\frac{1}{T}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{Q_\tau}(u^N_{x_i})^2\,dx\,dt \leqslant (2T+\frac{T}{2})\int_{Q_T} f^2\,dx\,dt \tag{11}$$

Оценим теперь u_t^N: вспомним равенство (3):

$$\int_\Omega(u_t^N-\Delta u^N-f)\varphi_k(x)\,dx=0$$

Умножая обе части равенства (3) на $(c_k)_t$ и суммируя по k от 0 до N получим

$$\int_\Omega(u_t^N-\Delta u^N-f)u_t^N\,dx=0.$$

Откуда вытекает, что

$$\int_\Omega(u_t^N)^2\,dx=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}(u^N)_{x_i}(u_t^N)_{x_i}\,dx+\int_\Omega f u_t^N\,dx \tag{12}$$

Интегрируем по t от 0 до τ, получим

$$\int_{Q_\tau}(u_t^N)^2\,dx\,dt=-\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}((u^N)_{x_i})^2\,dx+\int_{Q_\tau} f u_t^N\,dx\,dt$$

В силу положительности среднего интеграла, имеем

$$\int_{Q_\tau}(u_t^N)^2\,dx\,dt \leqslant \int_{Q_\tau} f u_t^N\,dx\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{Q_\tau}(u_t^N)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{Q_\tau} f^2\,dx\,dt. \tag{13}$$

3. По теореме о слабой компактности шара в сепарабельном банаховом пространстве и пользуясь неравенством

$$\int_{Q_T} (u_t^N)^2 \, dx \, dt \leqslant \int_{Q_T} f^2 \, dx \, dt.$$

которое вытекает из предыдущего при $\varepsilon = 1$ и $\tau = T$, получаем подпоследовательность $\{u^{N'}\}$ и такой элемент $u \in \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$, что справедливы следующие соотношения: (при $N' \to \infty$)

$$u^{N'} \to u \text{ слабо в } \overset{+\circ}{W}{}_2^1(Q_T),$$

$$u^{N'} \to u \text{ слабо в } \text{Ł}_2(Q_T),$$

$$u^{N'} \to u \text{ слабо в } \text{Ł}_2(Q_T),$$

$$u^{N'} \to u \text{ слабо в } \text{Ł}_2(Q_T),$$

4.*Предельный переход.* Введем обозначение

$$\Phi_M = \sum_{k=1}^{n} b_k(t)\varphi_k(x), \quad b_k(T) = 0.$$

Из формулы (3), умножая k-е уравнение на $b_k(t)$, и суммируя по k от 0 до M, получим что для любого $t > 0$ и для любого $M : M < N$

$$\int_{\Omega} (u_t^N - \Delta u^N - f)\Phi_M(x) \, dx = 0, \tag{14}$$

Откуда

$$\int_{\Omega_T} u_t^N \Phi_M - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^N (\Phi_M)_{x_i} - f\Phi_M \, dx \, dt = 0.$$

Устремляя N' к $+\infty$, получим следующее равенство:

$$\int_{\Omega_T} u_t \Phi_M - a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} (\Phi_M)_{x_i} - f\Phi_M \, dx \, dt = 0. \tag{15}$$

Множество функций вида Φ_M всюду плотно в $C^\infty(Q_T)$:

$$\Phi|_S = 0, \quad \Phi|_{t=T} = 0,$$

поэтому формула (15) верна при любых Φ, подставленных в(15) вместо Φ_M. $\square$

конец лекции Γ́36

§ 24 Теорема Ковалевской (существования решения).

Определение1. Функцию $f(x_1, ..., x_n)$ называют аналитической в точке $x = 0$, если она раскладывается в ряд

$$f(x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}, \tag{1}$$

который сходится в окрестности точки $x = 0$. Здесь α — мультииндекс, $\alpha \geqslant 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$D_0^m u = \sum_{|\alpha| \leqslant m, \alpha_0 \leqslant m-1} a_\alpha(x) D^\alpha u + f_1(x), \tag{2}$$

$$D_0^k u|_{x_0=0} = \varphi_k(x'), \quad k = 0, ..., m-1, \quad x' \in \Omega \tag{3}$$

Теорема Ковалевской. *Пусть a_α и f_1 — аналитические в окрестности $Q(\widetilde{x})$ функции точки $\widetilde{x} = (0, \widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$, и $\varphi_k(x')$ — аналитические в окрестности $Q^0(\widetilde{x}')$ точки $\widetilde{x}' = (0, \widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_n)$. Тогда существует $Q^1(\widetilde{x})$ в которой существует и единственно аналитическое решение u задачи Коши (2) — (3).*

Доказательство единственности. Пусть

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant \infty} c_\alpha x^\alpha \tag{4}$$

— решение задачи (2) —(3). Тогда c_α однозначно определяются по функции $u(x)$:

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u(x)|_{x=0}, \quad \text{где} \quad \alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n! \tag{5}$$

Покажем, что условия (2) — (3) однозначно определяют коэффициенты c_α. Пусть сначала $\alpha_0 = 0, ..., m-1$:

$$D_0^k u|_{x_0=0} = \varphi(x'), \quad k = 0, ..., m-1. \tag{6}$$

Применим к обеим частям равенства (6) оператор $D^{\alpha'}$, где α' — мультииндекс: $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получим

$$D^{\alpha'}D_0^k u|_{x_0=0} = D^{\alpha'}\varphi(x'), \quad k=0,...,m-1. \tag{7}$$

Таким образом из (7) и (5) мы знаем все c_α при $\alpha_0 = 0,...,m-1$.

Из уравнения (3) вычислим $D_0^m u$ и $D^{\alpha'}D_0^m u|_{x_0=0}$:

$$D^{\alpha'}D_0^m u = D^{\alpha'}(\sum_{|\alpha|\leqslant m, \alpha_0\leqslant m-1} a_\alpha(x)D^\alpha u + f_1(x)). \tag{8}$$

Откуда

$$D^{\alpha'}D_0^m u|_{x_0=0} = D^{\alpha'}(\sum_{|\alpha|\leqslant m, \alpha_0\leqslant m-1} a_\alpha(x)D^\alpha u + f_1(x))|_{x_0=0}. \tag{9}$$

т.е. любую производную с $D^\alpha u$ при $x_0 = 0$ с $\alpha_0 \leqslant m$ мы знаем.

Далее по индукции (для $k \geqslant m+1$): Применим D_0^{k+1-m} к уравнению (3), получим

$$D^{\alpha'}D_0^{k+1}u|_{x_0=0} = D^{\alpha'}D_0^{k+1-m}(\sum_{|\alpha|\leqslant m, \alpha_0\leqslant m-1} a_\alpha(x)D^\alpha u + f_1(x))|_{x_0=0}. \tag{10}$$

Правая часть уже определена. Таким образом, все производные, а следовательно и все коэффициенты определяются однозначно. Единственность доказана $\square$

Прежде чем приступить к доказательству существования решения задачи Коши (2) — (3), покажем, что эта задача Коши для произвольных линейных систем сводится к задаче Коши для систем первого порядка.

Проиллюстрруем это на примере одного уравнения второго порядка:

$$u_{tt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_{0,i}(t,x)u_{tx_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)u_{x_i} +$$
$$+ b_0(t,x)u_t + c(t,x)u + f(t,x) \tag{12}$$

где a, b, c, f — аналитические функции своих аргументов в окрестности начала координат.

Задача Коши для этого уравнения состоит в поиске решения, удовлетворяющего следующим начальным условиям:

$$u(0, x_1, ..., x_n) = \varphi_0(x_1, ..., x_n),$$

$$u_t(0,x_1,...,x_n)=\varphi_1(x_1,...,x_n) \tag{13}$$

где φ_0 и φ_1 — аналитические функции в $Q(0)$.

Если $u(t,x)$ — решение задачи (12) — (13), то функции u, $u_0=u_t$, $u_k=u_{x_k}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_{0,i}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)u_i+b_0u_t+cu+f(t,x)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial x_k}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_0,$$

и начальным условиям

$$u(0,x)=\varphi_0(x),\quad u_t(0,x)=\varphi_1(x),\quad u_k(0,x)=\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_k}. \tag{15}$$

Справедливо и обратное утверждение.

Утверждение Если функции $u,u_0,u_1,...,u_n$ удовлетворяют уравнениям (14),(15), то во всей этой окрестности G функция u будет решением задачи (12) — (13).

Доказательство. Из уравнений $\frac{\partial u}{\partial t}=u_0$ и $\frac{\partial u_k}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial x_k}$ вытекает, что $\frac{\partial}{\partial t}(u_k-\frac{\partial u}{\partial x_k})=0$. Значит $u_k-\frac{\partial u}{\partial x_k}$ не зависит от t. Из начального условия при $t=0$ $u_k=\frac{\partial u}{\partial x_k}$. Значит это равенство справедливо во всей окрестности G. Подставляя u_0 и u_k в уравнение (12), мы получаем, что уравнение (12) удовлетворяется всюду в области G. $\square$

Итак, мы показали, что система (12) эквивалентна (14), если при $t=0$ $u_k=\frac{\partial u}{\partial x_k}$. При произвольных же начальных условиях система (14) в некотором смысле богаче решениями, чем уравнение (12), т.к. произвольные начальные условия не обязаны быть связанными соотношением $u_k=\frac{\partial u}{\partial x_k}$

Задача. Задачу Коши для уравнения типа Ковалевской любого порядка можно свести к задаче Коши для некоторой системы первого порядка.

Таким образом, достаточно доказать теорему Ковалевской для линейной системы первого порядка вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}a_{ij}^{k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{N}b_{ij}(t,x)u_j+c_i \tag{16}$$

с аналитическими коэффициентами при произвольных аналитических начальных условиях

$$u_i(0, x_1 \dots, x_n) = \varphi_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, N) \tag{17}$$

Случай произвольных аналитических функций φ легко сводится к случаю $\varphi \equiv 0$. Для этого вместо прежних неизвестных функций u_i мы введем новые неизвестные $v_i = u_i - \varphi_i$. Функции v_i будут удовлетворять системе уравнений:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t,x) v_j + \widetilde{c}_i, \tag{18}$$

Для сокращения записи мы обозначили свободный член через $\widetilde{c}_i$:

$$\widetilde{c}_i = (c_i + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(t,x) \varphi_j);$$

при этом

$$v_i(0, x) \equiv 0. \tag{19}$$

Доказательство существования. Мы показали, что начальные условия (19) и правая часть $\widetilde{c}_i$ системы уравнений (18) вполне определяют коэффициенты разложения функций u_i в степенные ряды по $t, x_1, \dots, x_n$. Мы даже можем представить эти функции в виде формальных степенных рядов. Однако, пока неизвестно будут ли эти ряды сходится. Для доказательства сходимости воспользуемся *методом мажорант.*

Определение. Мажорантой для функции ψ аналитической в некоторой окрестности нуля называют всякую функцию $F(t, x)$ аналитическую в этой окрестности, у которой все коэффициенты разложения в степенной ряд по $t, x_1, \dots, x_n$ положительны или равны нулю, и не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов разложения ψ.

Пусть

$$\psi(x_0, x) = \sum_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$$

Пусть ряд сходится в некоторой точке $x = a$, где $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, где $|\alpha_i| > 0 \quad \forall i$. Тогда $\exists\, M : \quad \forall\, \alpha \quad |c_\alpha a^\alpha| \leqslant M$. Следовательно

$$|c_\alpha| \leqslant \frac{M}{|a_0|^{\alpha_0} \cdot \ldots \cdot |a_n|^{\alpha_n}}.$$

Поэтому функция

$$S=\frac{M}{(1-\frac{x_0}{|a_0|})(1-\frac{x_1}{|a_1|})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{x_n}{|a_n|})}=$$
$$=M\sum_{\alpha_0}^{\infty}\Big(\frac{x_0}{|a_0|}\Big)^{\alpha_0}\sum_{\alpha_1}^{\infty}\Big(\frac{x_1}{|a_1|}\Big)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\sum_{\alpha_n}^{\infty}\Big(\frac{x_n}{|a_n|}\Big)^{\alpha_n}=$$
$$=\sum_{\alpha}\frac{Mx^{\alpha}}{|a_0|^{\alpha_0}\cdot\ldots\cdot|a_n|^{\alpha_n}}.$$

является мажорантой для функции ψ.

Аналогично доказывается, что функция

$$G(x)=\frac{M}{1-\frac{\beta^{-1}x_0+x_1+\ldots+x_n}{a}},\quad \text{где}\quad a=\min\{|a_0|,\ldots,|a_n|\}$$

является мажорантой для ψ, т.к.

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\beta^{-1}x_0+x_1+\ldots+x_n}{a}\Big)^k=M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{a^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!\beta^{\alpha_0}}x^{\alpha}.$$

Подберем числа M и a так чтобы функция $G(x)$ стала мажорантой для всех коэффициентов системы (?). Далее выберем мажорирующую систему:

$$\beta^{-1}\frac{\partial U_i}{\partial t}=\frac{M}{1-\frac{\beta^{-1}x_0+x_1+\ldots+x_n}{a}}\Big(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{N}U_j+1\Big).$$

Не фиксируя пока начальных данных, будем искать решение системы в виде

$$U_1(x)=U_2(x)=\ldots=U_n(x)=U(x)=U(z),$$

где $z=\beta^{-1}x_0+x_1+\ldots+x_n$. Подставив в систему получим, что $U(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$\beta^{-1}\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{M}{1-\frac{z}{a}}\Big(Nn\frac{dU}{dz}+NU+1\Big).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде

$$\frac{dU}{NU+1}=\frac{A(z)dz}{\frac{1}{\beta}-NnA(z)}=B(z)dz \tag{20}$$

β выбираем настолько маленьким чтобы было в окрестности $Q(z)$ $\frac{1}{\beta} - NnA(z) > 0$. Тогда $B(z)$ в этой $Q(z)$ будет аналитической функцией. Покажем, что частное решение уравнения (20) имеет вид

$$U(z) = \frac{1}{N}\{e^{N\int_0^z B(\xi)\,d\xi} - 1\}$$

и дает нам искомую мажоранту для решения исходной задачи. Так как функции $U_i(x) = U(x_0 + \ldots + x_n)$ удовлетворяют мажорирующей системе, то для доказательства этого утверждения достаточно убедится в том, что при $t = 0$ $U(z)$ раскладывается в ряд по $x_1, \ldots, x_n$ с положительными коэффициентами. (т.е. является мажорантой тождественного нуля).

Действительно в разложении $B(z)$ все коэффициенты положительны:

$$B(z) = \frac{\beta A(z)}{1 - \beta A(z)Nn} = \beta A(z)\Big(1 + \beta NnA(z) + \beta^2 N^2 n^2 A^2(z) + \ldots\Big)$$

где

$$A(z) = M\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{a}\Big)^k.$$

Следовательно и $B(z)n$ и $U(z)$ обладают этим свойством. Т.е. это действительно мажоранта.

Отсюда следует сходимость степенных рядов, представляющих решение исходной задачи (17),(18). $\square$

Замечание Для систем, не имеющих типа Ковалевской, вообще говоря, теорема неверна. Например

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Решение

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}.$$

Однако этот ряд расходится в каждой точке $t \neq 0$.

§ 25 Аналитичность решения уравнения Лапласа.

Пусть $u(x_1, ..., x_n)$ — решение уравнения Лапласа. Докажем, что это решение аналитично по всем аргументам.

Утверждение 1. . *Пусть* u *— решение уравнения Лапласа:*

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда u *аналитически зависит от* x_1 .

Доказательство. Заменим x_1 на $x_1 + iy_1$, u на U :

$$U(y_1, x_1, ..., x_n) = u(x_1 + iy_1, x_2, ..., x_n), \quad U|_{y_1=0} = u(x). \tag{2}$$

Из условия Коши-Римана т.е.

$$U_{x_1} + iU_{y_1} = 0 \tag{2}$$

дифференцируя это равенство по x_1 или по y_1 , получаем, что

$$U_{x_1x_1} + iU_{x_1y_1} = 0, \quad U_{y_1x_1} + iU_{y_1y_1} = 0 \tag{2a}$$

Откуда легко выводим, что

$$U_{x_1x_1} + iU_{y_1y_1} = 0. \tag{3}$$

Кроме того, функция U удовлетворяет уравнению

$$\Delta_x U = 0 \tag{4.}$$

Из (3),(4) вытекает что

$$\begin{cases} U_{y_1y_1} = U_{x_2x_2} + ... + U_{x_nx_n}, \\ U|_{y_1=0} = u(x), \\ U_{y_1}|_{y_1=0} = -\frac{1}{i}U_{x_1}|_{y_1=0} = -\frac{1}{i}u_{x_1}(x). \quad \text{(из (2))} \end{cases} \tag{5}$$

Следовательно, классическое решение U задачи (5) существует. $\square$

Утверждение 2. . *Решение задачи (5) удовлетворяет условию Коши-Римана:* $U_{x_1} + iU_{y_1} = 0$.

Доказательство. Введем обозначение

$$w = U_{x_1} + iU_{y_1}$$

и докажем, что $w \equiv 0$. Этим мы докажем, что условия Коши-Римана выполняются:

$$\begin{cases} w_{y_1 y_1} = w_{x_2 x_2} + \ldots + w_{x_n x_n}, \\ w|_{y_1=0} = (U_{x_1} + iU_{y_1})|_{y_1=0} = u_{x_1} - \frac{i}{i} u_{x_1} = 0, \\ w_{y_1}|_{y_1=0} = (U_{x_1} + iU_{y_1})_{y_1}|_{y_1=0} = (U_{x_1 y_1} + iU_{y_1 y_1})|_{y_1=0} \overset{(2a)}{=} \\ = (-\frac{1}{i} U_{x_1 x_1} + iU_{y_1 y_1})|_{y_1=0} \overset{(5)}{=} iU_{x_1 x_1}|_{y_1=0} + i(U_{x_2 x_2} + \ldots + U_{x_n x_n})|_{y_1=0} \overset{(2)}{=} \\ = iu_{x_1 x_1} + i(u_{x_2 x_2} + \ldots + u_{x_n x_n}) = i\Delta u = 0. \end{cases}$$

т.е. w — решение волнового уравнения при нулевых начальных условиях: $w|_{y_1=0} = 0$ и $w_{y_1}|_{y_1=0} = 0$. Следовательно $w \equiv 0$. $\square$

Вывод: Решение уравнения Лапласа — *аналитическая* функция своих аргументов.

Задача. Пусть f — аналитическая функция. Доказать, что решение u уравнения $\Delta u = f(x)$ — *аналитическая* функция.

конец лекции Ґ37