Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 54. С. 38–44

УДК 511.176

© *А. Е. Липин*

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, ОТНОСЯЩЕЙСЯ К ДИОФАНТОВЫМ УРАВНЕНИЯМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается сформулированная В. Н. Ушаковым задача о поиске треугольников с целыми длинами сторон a, b, c, удовлетворяющими соотношениям $a^2 = b^2 + c^2 + k$ и $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$, где k — целое число, отличное от нуля. В работе приводится необходимое и достаточное условие на число k, при котором такие треугольники существуют. Доказательство имеет конструктивный характер и позволяет, в случае выполнения критерия, указать бесконечное число троек (a, b, c), удовлетворяющих указанному свойству.

Ключевые слова: системы диофантовых уравнений, рекуррентные соотношения, числа Фибоначчи и Лукаса.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-03

§ 1. Постановка задачи

В 1998 году В. Н. Ушаков в [1] описал все целые неотрицательные решения системы уравнений

$$\begin{aligned} &a^2 = b^2 + c^2 + 1, \\ &\frac{a}{c} = \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Такая система уравнений возникает из задачи, сформулированной в 1998 Терри Дж. Невином, в которой ставился вопрос о выделении троек чисел, подобных тройке 915, 628, 610 (при этом упоминался Пифагор в связи с указанной тройкой). Система уравнений (1) была естественно сведена к уравнению Пелля и для ее решения была применена методика выделения решений этого уравнения (см., например, [2, 3]). При этом оказалось, что решения системы (1) связаны с последовательностями Фибоначчи [4], и при выяснении структуры решений системы (1) использовалась, в частности, достаточно активно формула Бине (см., например, [4]). Параллельно с последовательностями Фибоначчи в [1] изучались тесно связанные с ними последовательности Лукаса (см. [5]). Изучение этих последовательностей затем было продолжено в [6], где рассматривался вопрос о представлении чисел Фибоначчи и Лукаса в виде суммы трех квадратов натуральных чисел. Настоящая работа по своей тематике близка к указанным выше исследованиям. В ней одним из основных компонентов при описании исследуемой диофантовой системы уравнений являются последовательности Фибоначчи и Лукаса.

В 1999 году В. Н. Ушаков сформулировал следующую задачу: найти все треугольники с целыми длинами сторон a, b, c, которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &a^2 = b^2 + c^2 + k, \\ &\frac{a}{c} = \frac{3}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где k — ненулевое целое число.

Основной целью данной работы является доказательство следующего утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *существует решение системы* (2)*;*

(2) *существует бесконечно много решений системы* (2)*, удовлетворяющих неравенству треугольника;*

(3) *существуют целые числа α, β, для которых выполняется:*

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k; \tag{3}$$

(4) *для всякого простого числа p, сравнимого по модулю 5 с 2 или 3, p входит в факторизацию $|k|$ в четной степени.*

§ 2. Сведение задачи для системы (2) к уравнению $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$

Основной целью данного параграфа является доказательство эквивалентности первых трех пунктов теоремы 1.

Покажем, что из первого условия следует третье. Пусть некоторые $a, b, c \in \mathbb{N}$ удовлетворяют системе (2). Убедимся, что числа $\alpha = c$, $\beta = \frac{2b+c}{2}$ удовлетворяют уравнению (3). Во-первых, число β является целым в силу условия $a = \frac{3}{2}c$. Во-вторых,

$$\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = \frac{5}{4}c^2 - b^2 = \frac{9}{4}c^2 - b^2 - c^2 = a^2 - b^2 - c^2 = k.$$

Осталось доказать, что из третьего условия следует второе. Пусть некоторые $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют уравнению (3).

У т в е р ж д е н и е 1. $\exists \overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathbb{N}$: $|\overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2 + \overline{\alpha}\overline{\beta}| = |k|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы одно из чисел α, β равно нулю, возьмем $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ равными модулю другого. Иначе, если α и β имеют один знак, можно взять $\overline{\alpha} = |\alpha|$, $\overline{\beta} = |\beta|$. Если же α и β имеют разные знаки, положим $\overline{\alpha} = |\beta|$, $\overline{\beta} = |\alpha|$. □

Введем обозначение:

$$\overline{k} = \overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2 + \overline{\alpha}\overline{\beta}. \tag{4}$$

Обозначим $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности Фибоначчи и Лукаса, то есть последовательности, определяемые соотношениями $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$ и $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 3$, $\psi_n = \psi_{n-1} + \psi_{n-2}$ соответственно.

Определим последовательности $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \overline{\alpha}\varphi_n + \overline{\beta}\varphi_{n+1}, \\ \nu_n &= \overline{\alpha}\psi_n + \overline{\beta}\psi_{n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Легко видеть, что величины μ_n и ν_n положительны.

Заметим, что $\mu_n = \mu_{n-1} + \mu_{n-2}$, $\nu_n = \nu_{n-1} + \nu_{n-2}$.

Обозначим $\rho_n = \nu_n^2 - 5\mu_n^2$.

У т в е р ж д е н и е 2. $\rho_n = (-1)^n 4\overline{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\sigma_n = \nu_n\nu_{n+1} - 5\mu_n\mu_{n+1}$ Заявленное утверждение докажем индукцией по n одновременно с формулой $\sigma_n = (-1)^n 2\overline{k}$.

База индукции.

Заявленные формулы для ρ_1, ρ_2, σ_1 нетрудно проверить, выразив эти величины через $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, а затем воспользовавшись равенством (4).

Проверим шаг индукции.

$\rho_n = \nu_n^2 - 5\mu_n^2 = (\nu_{n-1} + \nu_{n-2})^2 - 5(\mu_{n-1} + \mu_{n-2})^2 = \rho_{n-1} + 2\sigma_{n-2} + \rho_{n-2} = (-1)^n 4k;$

$\sigma_n = \nu_n\nu_{n+1} - 5\mu_n\mu_{n+1} = \nu_n(\nu_n + \nu_{n-1}) - 5\mu_n(\mu_n + \mu_{n-1}) = \rho_n + \sigma_{n-1} = (-1)^n 2k.$ □

У т в е р ж д е н и е 3. *Существует бесконечно много натуральных значений n каждой четности, при которых обе величины μ_n и ν_n — четные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что четности φ_n и ψ_n совпадают. Значит, совпадают и четности μ_n и ν_n. Тогда достаточно исследовать только четность μ_n. Обозначим через $[\varphi_n]_2$ остаток от деления φ_n на 2. Легко видеть, что $[\varphi_n]_2 = 0$ тогда и только тогда, когда n делится на 3. В зависимости от четности α и β возможны четыре случая.

(1) α и β оба четные. Тогда μ_n четное при всех n.

(2) α нечетное, β четное. Тогда μ_n четное при $n \equiv 0 \pmod 3$.

(3) α и β оба нечетные. Тогда μ_n четное при всех $n \equiv 1 \pmod 3$.

(4) α четное, β нечетное. Тогда μ_n четное при $n \equiv 2 \pmod 3$.

□

Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$, при котором μ_n и ν_n — четные числа.

Положим $a = \frac{3}{2}\mu_n$, $b = \frac{1}{2}\nu_n$, $c = \mu_n$. Сразу заметим, что $a = \frac{3}{2}c$, и что все три числа натуральны. Нетрудно видеть, что $a^2 - b^2 - c^2 = -\frac{1}{4}\rho_n = -(-1)^n\overline{k}$. Так как $|\overline{k}| = |k|$, то при выборе нужной четности n получаем выполнение системы (2), при этом разным n будут соответствовать разные решения. Осталось убедиться, что числа a, b, c удовлетворяют неравенству треугольника.

Неравенство $a + b > c$ следует уже из того, что $a > c$.

Неравенство $b + c > a$ сводится к $\nu_n > \mu_n$, что легко вывести из определения последних.

Наконец, неравенство $c + a > b$ сводится к $5\mu_n > \nu_n$, что, в свою очередь, следует из $5\varphi_n > \psi_n$, а последнее легко доказать индукцией по n.

§ 3. Решение уравнения $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$

Основной целью данного параграфа является доказательство следующего утверждения.

Т е о р е м а 2. *Пусть $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\colon \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta = k$;

(2) *для всякого простого числа p, сравнимого по модулю 5 с 2 или 3, p входит в факторизацию $|k|$ в четной степени.*

Обозначим через A множество значений k, при которых выполняется первое условие, и через B — второе. Таким образом, наша цель состоит в доказательстве утверждения $A = B$.

Сначала научимся при всех простых p решать над полем $\mathbb{Z}_p$ следующее уравнение:

$$x^2 - y^2 + xy = 0. \tag{6}$$

Для всяких $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ обозначим $[a]_b$ остаток от деления a на b. Обозначим $b|a$ отношение «b делит a». Для всякой арифметической операции $\circ$ будем обозначать $\circ_b$ аналогичную операцию в поле $\mathbb{Z}_p$.

Утверждение 4. *Пусть p — простое число. Тогда:*

(1) *если $[p]_5 \in \{2,3\}$, то уравнение* (6) *имеет единственное решение* $(x=0, y=0)$*;*

(2) *если $[p]_5 \in \{0,1,4\}$, то $\exists \xi \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ $\forall a \in \mathbb{Z}_p$: $(x=a, y=[\xi a]_p)$ — решение уравнения* (6).

Доказательство. При $p=2$ заявленное утверждение нетрудно проверить непосредственно. Далее будем полагать, что $p>2$.

Сразу заметим, что при $x=0$, $y \neq 0$ равенство (6) выполняться не может. Поделив обе части уравнения (6) на x^2, получим квадратное уравнение относительно $y/_p x$ в поле $\mathbb{Z}_p$:

$$(y/_p x)^2 - y/_p x - 1 \equiv 0 \pmod p. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что дискриминант этого уравнения равен 5. Соответственно, уравнение (7) имеет корень тогда и только тогда, когда 5 является квадратичным вычетом в поле $\mathbb{Z}_p$. По квадратичному закону взаимности $[7,8]$ последнее эквивалентно тому, что p является квадратичным вычетом в поле $\mathbb{Z}_5$, а это выполняется тогда и только тогда, когда $[p]_5 \in \{0,1,4\}$, и отсюда немедленно получаем заявленное утверждение. □

Утверждение 5. *Пусть $k \in A$ и существует простое число p такое, что $[p]_5 \in \{2,3\}$ и $p|k$. Тогда $p^2|k$, причем $\frac{k}{p^2} \in A$.*

Доказательство. Как мы помним, $k \in A$ означает, что для некоторых целых α, β выполняется $k = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta$, откуда $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta \equiv 0 \pmod p$. Из утверждения 4 следует $p|\alpha$ и $p|\beta$. Тогда $k = p^2((\frac{\alpha}{p})^2 - (\frac{\beta}{p})^2 + \frac{\alpha}{p}\frac{\beta}{p})$, и отсюда получаем заявленное утверждение. □

Утверждение 6. *$A \subseteq B$.*

Доказательство. От противного: пусть множество $A \setminus B$ непусто. Возьмем в нем минимальный по модулю элемент k.

По определению $k \notin B$ число k имеет простой делитель p, для которого $[p]_5 \in \{2,3\}$. Тогда по утверждению 5 выполняется $p^2|k$ и $\frac{k}{p^2} \in A$. Нетрудно видеть, что $\frac{k}{p^2} \notin B$ и $|\frac{k}{p^2}| < |k|$ — противоречие с минимальностью $|k|$. □

Перейдем к доказательству обратного включения.

Утверждение 7. *Если $m, n \in A$, то $mn \in A$.*

Доказательство. Пусть $m = p^2 - q^2 + pq$, $n = r^2 - s^2 + rs$. Нетрудно убедиться, что при $\alpha = pr - qs + qr$, $\beta = ps - qr$ получаем $mn = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta$. □

Заметим, к слову, что $-1 \in A$ — подойдет набор $(\alpha = 1, \beta = -1)$.

Утверждение 8. *Пусть p простое число и $[p]_5 \in \{0,1,4\}$. Тогда $p \in A$.*

Доказательство. Согласно утверждению 4, существует $\xi \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ такое, что при любом $a \in \mathbb{Z}_p$ набор $(x=a, y=[\xi a]_p)$ является решением уравнения (6). Обозначим $b(a) = [\xi a]_p$. Обозначим $s = \lceil \sqrt{p} \rceil$. Так как p простое, то $s^2 > p$. Обозначим $B = \{b(a) \colon a \in \mathbb{Z}_p, a < s\}$.

Заметим, что при $a_1 \neq a_2$ выполняется $b(a_1) \neq b(a_2)$, так как $[b(a_1) - b(a_2)]_p = [\xi(a_1 - a_2)]_p$, где правая часть не делится на p. Тогда $|B| = s$. Упорядочим B по возрастанию: $B = \{b_1, \ldots, b_s\}$, $b_1 < \ldots < b_s$.

При всех i от 1 до $s-1$ положим $d_i = b_{i+1} - b_i$. Кроме того, положим $d_s = b_1 - b_s + p$. Очевидно, $d_1 + \ldots + d_s = p$ и все d_i положительны. Так как $p < s^2$, то найдется такое i, что $d_i < s$.

Таким образом, для некоторых $0 \leqslant a_1 < a_2 < s$ выполняется $0 < [b(a_2) - b(a_1)]_p < s$. Заметим, что $[b(a_2)-b(a_1)]_p = [\xi a_2 - \xi a_1]_p = [\xi(a_2-a_1)]_p = b(a_2-a_1)$. Положим $a_0 = a_2 - a_1$. Как мы показали, выполняется одновременно $0 < a_0 < s$ и $0 < b(a_0) < s$.

Рассмотрим подстановку $(x = a_0, y = b(a_0))$. Так как по определению функции b такой набор (x, y) является решением уравнения (6), то в $\mathbb{Z}$ имеем $x^2 - y^2 + xy = pn$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что при $p > 40$ выполняется $3s^2 < 4p$. Тогда при $p > 40$ выполняется

$$|pn| = |x^2 - y^2 + xy| < 3s^2 < 4p,$$

то есть $|n| < 4$. Так как при $|n| \in \{2, 3\}$ выполнялось бы $pn \in A \setminus B$, что противоречило бы утверждению (6), то $|n| \leqslant 1$. Наконец, $n \neq 0$, так как уравнение $x^2 - y^2 + xy = 0$ не имеет ненулевых решений в целых числах. Значит, $|n| = 1$.

Значит, хотя бы одно из чисел p, $-p$ принадлежит множеству A. Так как $-1 \in A$, то по утверждению 7 выполняется $p \in A$.

Осталось рассмотреть случай, когда $p \leqslant 40$. Для всех вошедших в этот промежуток удовлетворяющих посылке заявленного утверждения значений p пары (α, β) укажем явно.

$11\colon (3, 2)$, $19\colon (4, 3)$, $29\colon (5, 4)$, $31\colon (5, 3)$. □

Теперь заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}$ при $k = n^2$ решением уравнения (3) является пара $(\alpha = n, \beta = n)$, откуда A содержит все полные квадраты. Вкупе с утверждениями (7) и (8), а также замеченным нами фактом $-1 \in A$, это означает включение $B \subseteq A$ — таким образом, теорема 2 доказана, а значит, доказана и теорема 1.

Все вышесказанное дает следующий алгоритм генерации троек, удовлетворяющих системе (1).

Алгоритм генерации

1. Представить число k в виде $n^2 p_1 \cdots p_m$, где $p_1, \ldots, p_m$ — различные простые числа.

2. Если хотя бы одно из p_i сравнимо с 2 или 3 по модулю 5, то искомых троек не существует.

3. Иначе для каждого из p_i найдем числа α_i, β_i, для которых $\alpha_i^2 + \alpha_i\beta_i - \beta_i^2 = |p_i|$ — согласно утверждению 8, хотя бы в одной из таких пар числа α_i, β_i не превосходят корня из p_i.

4. По формуле из утверждения 7, найдем числа α и β, для которых $\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2 = k$.

5. Каким образом, имея числа α и β, найти бесконечное число троек (a, b, c), указано в первом параграфе.

Автор благодарит Н. В. Маслову из Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН за существенный вклад в работу. Тематика работы примыкает к [7, 8].

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект №18–01–00221).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н. Египетские треугольники и числа Фибоначчи // Империя математики. 2001. № 11. С. 21–50.
2. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. М.: Гостехиздат, 1957.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: ГИФМЛ, 1960.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1978.

5. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
6. Латушкин Я.А., Ушаков В.Н. О представлении чисел Фибоначчи и Люка в виде суммы трех квадратов // Математические заметки. 2012. Т. 91. Вып. 5. С. 711–719. https://doi.org/10.4213/mzm9359
7. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
8. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 26.09.2019

Липин Антон Евгеньевич, младший научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: tony.lipin@yandex.ru

Цитирование: А. Е. Липин. Об одной задаче, относящейся к диофантовым уравнениям второго порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 38–44.

A. E. Lipin

On a problem related to second-order Diophantine equations

Keywords: systems of diophantine equations, recurrence relations, Fibonacci and Lucas numbers.

MSC2010: 11B39

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-03

The article considers the problem set by V. N. Ushakov of finding triangles with integer lengths of sides a, b, c, satisfying the relations $a^2 = b^2 + c^2 + k$ and $\frac{a}{c} = \frac{3}{2}$, where k is a nonzero integer. We give a necessary and sufficient condition for the number k under which such triangles exist. The proof is constructive and allows, in the case of satisfying the criterion, to indicate an infinite number of triples (a, b, c) with the given property.

Funding. The studies was funded by RFBR, project number 18–01–00221.

REFERENCES

1. Ushakov V.N. Egyptian triangles and Fibonacci numbers, *Imperiya Matematiki*, 2001, no. 11, pp. 21–50 (in Russian).
2. Gel'fond A.O. *Reshenie uravnenii v tselykh chislakh* (Solving equations in integers), Moscow: Gostekhizdat, 1957.
3. Hinchin A.Ya. *Tsepnye drobi* (Continued fraction), Moscow: GIFML, 1960.
4. Vorob'ev N.N. *Chisla Fibonachchi* (Fibonacci numbers), Moscow: Nauka, 1978.
5. Coxeter H.S.M. *Introduction to geometry*. New York–London: John Wiley & Sons, 1961.
   Translated under the title *Vvedenie v geometriyu*, Moscow: Nauka, 1966.
6. Latushkin Ya.A., Ushakov V.N. On the representation of Fibonacci and Lucas numbers as the sum of three squares, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, issue 5–6, pp. 663–670.
   https://doi.org/10.1134/S0001434612050070
7. Gauss K.F. *Trudy po teorii chisel* (Works on number theory), Moscow: Academy of Sciences of USSR, 1959.
8. Davenport H. *The higher arithmetic: An introduction to the theory of numbers*, London: Hutchinson's University Library, 1952.
   Translated under the title *Vysshaya arifmetika. Vvedenie v teoriyu chisel*, Moscow: Nauka, 1965.

Received 26.09.2019

Lipin Anton Evgen'evich, Junior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: tony.lipin@yandex.ru

Citation: A. E. Lipin. On a problem related to second-order Diophantine equations, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 38–44.