Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 54. С. 45–54

УДК 517.977

© *А. И. Мачтакова*

ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v,$$

где $D^{(\alpha)}f$ — производная по Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ функции f. Предполагается, что все убегающие используют одно и то же управление. Целью преследователей является поимка заданного числа убегающих. Убегающие используют программные стратегии, преследователи — программные контрстратегии, причем каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в начале координат, целевые множества — начала координат. В терминах начальных позиций и параметров игры получено достаточное условие поимки.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, преследователь, убегающий, дробная производная.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-04

Введение

В теории дифференциальных игр хорошо известны задача преследования группой преследователей одного убегающего и задача уклонения от группы преследователей одного убегающего [1–6]. Естественным обобщением указанных задач является ситуация конфликтного взаимодействия группы преследователей и группы убегающих. Цель группы преследователей — поимка заданного числа убегающих, цель группы убегающих противоположна [4–15].

Были получены [7] достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего в дифференциальной игре со многими преследователями и убегающими при условии, что убегающие используют одно и то же управление. Задача простого преследования группы скоординированных убегающих без фазовых ограничений рассматривалась в [8, 9], с фазовыми ограничениями — в [10]. Задача преследования группы скоординированных убегающих в примере Л. С. Понтрягина рассматривалась в [11, 12], в линейных дифференциальных играх — в [13, 14]. Поимке двух скоординированных убегающих посвящены работы [15, 16]. Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условиях, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начала координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [17], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [18]. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [19, 20].

В данной работе рассматривается задача о поимке заданного числа жестко скоординированных убегающих при условии, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего, а движение всех участников описывается линейной системой с дробными производными и простой матрицей. Терминальные множества — начала координат. В терминах начальных позииций и параметров игры получены достаточные условия поимки.

§ 1. Постановка задачи

Определение 1. Пусть $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно непрерывная функция, $\alpha \in (0,1)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)} f$ вида

$$\big(D^{(\alpha)} f\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\, ds, \quad \text{где } \Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\beta-1}\, ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра $G(n,m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$.

Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)} x_i = a x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)} y_j = a y_j + v, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, $V = \{v \mid \|v\| \leqslant 1\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Введем новые переменные $z_{ij} = x_i - y_j$. Тогда вместо систем (1.1), (1.2) получим систему

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0. \tag{1.3}$$

Обозначим через $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ri} X$, $\operatorname{co} X$, $\operatorname{aff} X$ соответственно внутренность, относительную внутренность, выпуклую оболочку и аффинную оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$. Будем предполагать, что начальные позиции x_i^0, $i \in I$, y_j^0, $j \in J$ таковы, что любые $k+1$ точек из совокупности $\{x_i^0,\ i \in I,\ y_j^0,\ j \in J\}$ аффинно независимы.

Измеримая функция $v\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 2. В игре $G(n,m)$ *происходит поимка убегающего* E_s, если существует $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0,+\infty)$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t, z_{ij}^0,\ i \in I,\ j \in J,\ v(t),\ t \in [0,+\infty))$, преследователей P_i, $i \in I$, момент $\tau \in [0,T]$, номер $r \in \{1,\ldots,n\}$ такие, что $z_{rs}(\tau) = 0$.

Определение 3. В игре $G(n,m)$ *происходит поимка не менее q убегающих,* если существует $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v(t)$, $t \in [0,\infty)$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v, s \in [0,\infty))$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad N \subset I, \quad |N| = q$$

такие, что преследователь P_l, $l \in N$ не позднее момента T осуществляет поимку убегающего E_β, $\beta \in M$, причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

§ 2. Вспомогательные результаты

О п р е д е л е н и е 4 (см. [21]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют положительный базис в $\mathbb{R}^k$, если для любого $x \in \mathbb{R}^k$ существуют положительные вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, такие, что

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s.$$

Л е м м а 1 (см. [9]). *Пусть* $a_1, \ldots, a_s$ *образуют положительный базис. Тогда для любых* $b_l, b_{l+1}, \ldots, b_s$ $(1 \leqslant l \leqslant s)$ *существует* $\mu_0 > 0$*, такое, что для всех* $\mu > \mu_0$

$$a_1, \ldots, a_{j-1}, b_l + \mu a_l, \ldots, b_s + \mu a_s$$

образуют положительный базис.

Л е м м а 2 (см. [9]). *Пусть* $x_i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, n$, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $j = 1, \ldots, m$, *и выполнены следующие условия:*

(1) $n + m \geqslant k + 2$*;*

(2) *в совокупности* $\{x_i - y_j, y_r - y_q, r \neq q, x_s - x_l, s \neq l\}$ *существуют* k *линейно независимых векторов.*

Тогда $\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i\} \cap \operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_j\} \neq \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $\{x_i - y_j\}$ *образуют положительный базис.*

Л е м м а 3 (см. [9]). *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ *— множество точек* $\mathbb{R}^k$*, причем* $n + m \geqslant k+2$*, любые* $k+1$ *точек аффинно независимы и* $\operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_m\} \neq \varnothing$. *Тогда существуют множества* $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $J \subset \{1, \ldots, m\}$ *такие, что* $|I| + |J| = k+2$,

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_m\} \neq \varnothing$$

и состоит из единственной точки.

Л е м м а 4 (см. [9]). *Пусть* $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ *— множество точек* $\mathbb{R}^k$*, причем* $n + m = k + 2$*, любые* $k + 1$ *точек аффинно независимы и, кроме того,*

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i\} \cap \operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_j\} \neq \varnothing, \quad x_{n+1} - y_{\beta_0} = \mu(y_{\beta_0} - y_1) = -\mu(y_1 - y_{\beta_0})$$

при некотором $\mu > 0$, $\beta_0 \in \{2, \ldots, m\}$. *Тогда*

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\{x_i, i = 1, \ldots, n\} \cap \operatorname{ri}\operatorname{co}\{y_j, j = 2, \ldots, m\} \neq \varnothing.$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad E_\rho(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l\rho^{-1} + \mu)}$$

— обобщенная функция Миттаг-Леффлера.

Л е м м а 5. *Пусть векторы* $b_1, \ldots, b_n$ *образуют положительный базис в* $\mathbb{R}^k$, $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$. *Тогда существует* $T > 0$ *такое, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется номер* q*, для которого справедливо неравенство*

$$E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(T-\tau)^\alpha, \alpha)\lambda(b_q, v(\tau))\, d\tau \leqslant 0.$$

Доказательство. Так как $\alpha \in (0,1)$, то в силу теоремы 4.1.1 [22, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ не имеет отрицательных корней при $\mu \in [\alpha,+\infty)$. Кроме того, $E_{1/\alpha}(z,\mu) \geqslant 0$ для всех $z \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$. Значит $E_{1/\alpha}(z,\mu) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^1$, $\mu \in [\alpha,\infty)$.

Определим функции

$$h_i(t,v(\cdot)) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\lambda(b_i,v(\cdot))\,d\tau.$$

Тогда

$$\max_{i\in I} h_i(t,v(\cdot)) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_i(t,v(\cdot)) = \frac{1}{n}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\sum_{i=1}^n \lambda(b_i,v(\cdot)) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\max_{i\in I}\lambda(b_i,v(\cdot))\,d\tau.$$

Так как $b_1,\ldots,b_n$ образуют положительный базис, то [21] существует $\delta > 0$ такое, что

$$\min_{v\in V}\max_{i\in I}\lambda(b_i,v(\cdot)) \geqslant \delta.$$

Кроме того, в силу [23, гл. 3, формула (1.15)]

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha,\alpha)\,d\tau = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1).$$

Поэтому

$$\max_{i\in I} h_i(t,v(\cdot)) \geqslant \frac{\delta}{n}t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1).$$

Рассмотрим функцию $H_0(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha,1) - \dfrac{\delta t^\alpha}{n}E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1)$.

Так как $a < 0$, то при $t \to +\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [22, формула (1.2.4)]

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,1) = -\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right), \quad E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1) = -\frac{1}{at^\alpha} + O\left(\frac{1}{t^{2\alpha}}\right).$$

Поэтому $H_0(t) = -\dfrac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)} + \dfrac{\delta}{an} + O\left(\dfrac{1}{t^{2\alpha}}\right)$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} H_0(t) = \dfrac{\delta}{an} < 0$.

Значит существует момент $T > 0$, для которого $H_0(T) < 0$.

Пусть $v(\cdot)$ — произвольная допустимая функция, $q \in \{1,2,\ldots,n\}$, для которого

$$\max_{i\in I} h_i(T,v(\cdot)) = h_q(T,v(\cdot)).$$

Тогда $E_{1/\alpha}(aT^\alpha,1) - h_q(T,v(\cdot)) \leqslant H_0(T) < 0$.

Лемма доказана. □

§ 3. Достаточное условие поимки одного убегающего

Теорема 1. *Пусть $a \leqslant 0$, $\operatorname{int}\operatorname{co}\{x_i^0\} \cap \operatorname{co}\{y_i^0\} \neq \varnothing$. Тогда в игре $G(n,m)$ происходит поимка хотя бы одного убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $a = 0$ рассмотрен в [24]. Пусть $a < 0$. Из условия теоремы следует, что $n + m \geqslant k + 2$. Согласно лемме 3, существуют множества $I \subset \{1, \dots, n\}$, $J \subset \{1, \dots, m\}$ такие, что

$$\operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{x_i^0, i \in I\right\} \cap \operatorname{ri}\operatorname{co}\left\{y_j^0, j \in J\right\} \neq \varnothing$$

и $|I| + |J| = k + 2$. Будем считать, что $I = \{1, \dots, q\}$, $J = \{1, \dots, l\}$, причем $q + l = k + 2$.

По лемме 2 набор $\left\{z_{i,j}^0, i \in I, j \in J\right\}$ образует положительный базис. Если $|J| = 1$, то поимка следует из теоремы 1 (см. [25]). Считаем, что $|J| \geqslant 2$.

Обозначим $c_\beta^\gamma = y_\beta^0 - y_\gamma^0$. Тогда $z_{i,\gamma}^0 = z_{i,1}^0 + c_1^\gamma$ для всех $i \in I, \gamma \in J, \gamma \neq 1$. Поэтому $\left\{z_{i,1}^0, i \in I, c_1^\gamma, \gamma \in J, \gamma \neq 1\right\}$ образует положительный базис.

Так как $n \geqslant k + 1$, то $q + \gamma - 1 \in \{q + 1, \dots, n\}$ для всех $\gamma \in J$, $\gamma \neq 1$.

В силу леммы 1, набор $\left\{z_{i,1}^0, i \in I, z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, \gamma \in J, \gamma \neq 1\right\}$ образует положительный базис при некотором $\mu > 1$.

Решение системы (1.3) представимо в виде [26, формула (19)]

$$z_{ij}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) z_{ij}^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha)(u_i(\tau) - v(\tau))\, d\tau. \tag{3.4}$$

Задаем стратегии преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = v(t) - \lambda(z_{i,1}^0, v(t)) z_{i,1}^0, \quad i \in I,$$

$$u_{q+\gamma-1}(t) = v(t) - \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(t))(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma), \quad \gamma \in J, \quad \gamma \neq 1.$$

Подставим заданные управления преследователей в систему (3.4). Получаем

$$z_{i1}(t) = z_{i1}^0 \left(E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau \right),$$

$$z_{q+\gamma-1,1}(t) =$$

$$= z_{q+\gamma-1,1}^0 \left(E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau))\, d\tau \right) -$$

$$- \mu c_1^\gamma \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau))\, d\tau.$$

Обозначим

$$h_i(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{i1}^0, v(\tau))\, d\tau,$$

$$h_{q+\gamma-1}^0(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-\tau)^\alpha, \alpha) \lambda(z_{q+\gamma-1,1}^0 + \mu c_1^\gamma, v(\tau))\, d\tau,$$

$$h_{q+\gamma-1}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - h_{q+\gamma-1}^0(t).$$

Тогда из системы (1.3) получаем

$$\begin{gathered} z_{i1} = z_{i1}^0 h_i(t), \\ z_{q+\gamma-1,1}(t) = z_{q+\gamma-1,1} h_{q+\gamma-1,1}(t) - \mu c_1^\gamma h_{q+\gamma-1}^0(t). \end{gathered} \tag{3.5}$$

По лемме 5 существует момент T и номер s такие, что $h_s(T) = 0$. Если $s \in I$, то $z_{s1}(T) = 0$ и в игре $G(n, m)$ произойдет поимка убегающего E_s. Если $h_{q+\gamma_0-1}(T) = 0$ при некотором $\gamma_0 \in J$, $\gamma_0 \neq 1$, то

$$z_{q+\gamma_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\gamma_0} h_{q+\gamma_0-1}^0(T).$$

Покажем, что

$$\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i(T), i \in I\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j(T), j \in J\} \neq \varnothing. \tag{3.6}$$

Из (3.5) имеем $z_{i1}^0 = \dfrac{z_{i1}(T)}{h_i(T)}$. Кроме того

$$z_{i\gamma}(t) - z_{i1}(t) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1)(z_{i\gamma}^0 - z_{i1}^0).$$

Поэтому для всех $\gamma \in J$, $\gamma \neq 1$ справедливо равенство

$$z_{i\gamma}^0 = z_{i1}^0 + \frac{z_{i\gamma}(T) - z_{i1}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} = \frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)} + \frac{z_{i\gamma}(T) - z_{i1}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} =$$
$$= \frac{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_i(T)}{h_i(T) E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} z_{i1}(T) + \frac{z_{i\gamma}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)}.$$

По условию, система $\left\{z_{ij}^0, i \in I, j \in J\right\}$ образует положительный базис. Следовательно, положительный базис образует набор

$$\left\{\frac{z_{i1}(T)}{h_i(T)}, \frac{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) - h_i(T)}{h_i(T) E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)} z_{i1}(T) + \frac{z_{i\gamma}(T)}{E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1)}\right\}.$$

Так как $h_i(T) > 0$, $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) > 0$ и $E_{1/\alpha}(aT^\alpha, 1) > h_i(T)$ при $a < 0$, то система векторов $\{z_{ij}(T), i \in I, j \in J\}$ образует положительный базис.

Используя лемму 3, получаем (3.6). Так как $z_{q+\gamma_0-1,1}(T) = -\mu c_1^{\gamma_0} h_{q+\gamma_0-1}^0$ и выполнено условие (3.6), то согласно лемме 4 имеем

$$\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i(T), i \in I, x_{q+\gamma_0-1}(T)\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j(T), j \in J, j \neq 1\} \neq \varnothing.$$

Считаем, что $\gamma_0 = 2$. Далее полагаем $I = \{1, 2, \ldots, q+1\}$, $J = \{2, \ldots, l\}$. Для полученных множеств I, J справедливо условие (3.6), при этом число убегающих, участвующих в данном условии, уменьшилось на 1. Принимая момент T за начальный, будем повторять рассуждения до тех пор, пока число убегающих не станет равным 1. Получим, что $\operatorname{ri} \operatorname{co} \{x_i(\tau), i \in I\} \cap \operatorname{ri} \operatorname{co} \{y_j(\tau), j \in J\} \neq \varnothing$ в некоторый момент $\tau > 0$, причем $|I| = k+1$, $|J| = 1$. Теперь поимка следует из теоремы 1 (см. [25]).

§ 4. Достаточное условие поимки заданного числа убегающих

Т е о р е м а 2. *Пусть $a \leqslant 0$ и для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - s$, найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, такое что*

$$\operatorname{int} \operatorname{co}\{x_i^0, i \in N\} \cap \operatorname{co}\{y_j^0, j \in M\} \neq \varnothing.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ происходит поимка не менее q убегающих.

Доказательство данной теоремы проводится аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [17] с использованием теоремы 1.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 18–51–41005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
2. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 14–24.
3. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. Ташкент: Фан, 1989.
4. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка, 1992.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 2009.
7. Сатимов Н., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. 1983. Т. 4. С. 3–6.
8. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 89–96. http://mi.mathnet.ru/at2745
9. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 5. С. 75–79.
10. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 238–245.
11. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Преследование группы убегающих в примере Понтрягина // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 623–628.
12. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. № 1. С. 47–60. https://doi.org/10.20537/vm080104
13. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 46–57. https://doi.org/10.20537/vm160104
14. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Задача преследования группы скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 6. С. 29–37.
15. Виноградова М.Н. О поимке двух убегающих в задаче простого преследования с фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 4. С. 3–8. https://doi.org/10.20537/vm110401
16. Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 41–48. http://mi.mathnet.ru/timm897
17. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 4. С. 724–726. http://mi.mathnet.ru/de6186
18. Сахаров Д.В. О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 1. С. 50–59. https://doi.org/10.20537/vm120106
19. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 81–85. http://mi.mathnet.ru/into171
20. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48–54. http://mi.mathnet.ru/at3222
21. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 606–617. http://mi.mathnet.ru/de328
22. Попов А.Ю., Седлецкий А.М. Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171. http://mi.mathnet.ru/cmfd182

23. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
24. Бичурина А.И. Преследование группы жестко скоординированных убегающих в одной линейной задаче с дробными производными // Известия Института математики и информатики Удмуртского университета. 2017. Т. 50. С. 13–20. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-02
25. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 54–59. https://doi.org/10.20537/vm170105
26. Чикрий А.А., Матичин И.И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // Доповіді Національної академії наук України. 2007. № 1. С. 50–55. http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/1877

Поступила в редакцию 15.08.2019

Мачтакова Алёна Игоревна, магистрант, кафедра дифференциальных уравнений, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Цитирование: А. И. Мачтакова. Преследование жестко скоординированных убегающих в линейной задаче с дробными производными и простой матрицей // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 45–54.

A. I. Machtakova
Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix

Keywords: differential game, group persecution, pursuer, evader, fractional derivatives.

MSC2010: 91A23, 49N70

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-04

In the finite-dimensional Euclidean space, the problem of pursuit of a group of evaders by a group of pursuers is considered, which is described by a system of the form

$$D^{(\alpha)}z_{ij} = az_{ij} + u_i - v,$$

where $D^{(\alpha)}f$ is the Caputo derivative of the order $\alpha \in (0, 1)$ of the function f. It is assumed that all evaders use the same control. The goal of the pursuers is to catch at least one of the evaders. The evaders use piecewise-program strategies, and the pursuers use piecewise-program counterstrategies. Every pursuer catches not more than one evader. The set of admissible controls is a ball of unit radius with the center at the origin, the target sets are the origin. In terms of initial positions and game parameters, a sufficient conditions for the capture are obtained.

Funding. This work was funded by RFBR, project number 18–51–41005.

REFERENCES

1. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects, *Cybernetics*, 1976, vol. 12, no. 3, pp. 484–485. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01070036
2. Chernous'ko F.L. A problem of evasion from many pursuers, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, issue 1, pp. 11–20. https://doi.org/10.1016/0021-8928(76)90105-2
3. Rikhsiev B.B. *Differentsial'nye igry s prostym dvizheniem* (Differential games with simple mothion), Tashkent: Fan, 1992.
4. Chikrii A. *Conflict-controlled processes*, Dordrecht: Springer, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
5. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* (Mathematical methods of control over multiple processes), Moscow: Moscow State University, 1990.
6. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* (Conflict interaction of groups of controlled objects), Izhevsk: Udmurt State University, 2009.
7. Satimov N., Mamatov M.Sh. On problems of pursuit and evasion away from meeting and differential games between groups of pursuers and evaders, *Dokl. Akad. Nauk UzSSR*, 1983, no. 4, pp. 3–6 (in Russian).
8. Petrov N.N. Simple pursuit after a group of evaders, *Automation and Remote Control*, 1997, vol. 58, no. 12, pp. 1914–1919.
9. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of the pursuit of a group of rigidly connected evaders, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, vol. 40, no. 5, pp. 749–753.
10. Vagin D.A., Petrov N.N. A problem of group pursuit with phase constraints, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 225–232. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00027-8
11. Vagin D.A., Petrov N.N. Pursuit of a group of evaders in the Pontryagin example, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 555–560. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.07.008
12. Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2008, issue 1, pp. 47–60 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm080104

13. Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 46–57 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160104
14. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of pursuit of a group of coordinated evaders in linear recurrent differential games, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, issue 6, pp. 770–778. https://doi.org/10.1134/S1064230712060081
15. Vinogradova M.N. On the capture of two evaders in a simple pursuit–evasion problem with phase restrictions, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, issue 4, pp. 3–8 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm110401
16. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timm897
17. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of the pursuit of a group of evaders, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de6186
18. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 1, pp. 50–59 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120106
19. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 732–736. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3779-z
20. Petrov N.N. On a group pursuit problem, *Automation and Remote Control*, 1996, vol. 56, no. 6, pp. 808–813.
21. Petrov N.N. About controllability of autonomous systems, *Differ. Uravn.*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de328
22. Popov A.Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 190, issue 2, pp. 209–409. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1255-3
23. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transformation and representation functions in complex area), M.: Nauka, 1966.
24. Bichurina A.I. Persecution of a group of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2017, vol. 50, pp. 13–20 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2017-50-02
25. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 1, pp. 54–59 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170105
26. Chikrii A.A., Machikhin I.I. On an analogue of the Cauchy formula for linear systems of any fractional order, *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky*, 2007, no. 1, pp. 50–55 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:1126.91011

Received 15.08.2019

Machtakova Alena Igorevna, Master Student, Department of Differential Equations, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: bichurina.alyona@yandex.ru

Citation: A. I. Machtakova. Persecution of rigidly coordinated evaders in a linear problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 45–54.