Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 54. С. 55–62

УДК 517.958, 530.145.6

© *Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин*

ОТРАЖЕНИЕ АНДРЕЕВА В КОНТАКТЕ P-ВОЛНОВОЙ СВЕРХПРОВОДНИК–НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

В статье математически строго изучено отражение Андреева для матричного дифференциального гамильтониана Боголюбова–де Жена, описывающего электроны и дырки в одномерной гибридной структуре нормальный металл–p-волновой сверхпроводник. При этом используется описываемая в статье физически корректная симметризованная форма гамильтониана. Гамильтониан содержит в своем составе два дельтаобразных потенциала, один из которых моделирует примесь в сверхпроводнике, а второй характеризует «прозрачность» перехода нормальный металл–сверхпроводник. Доказано, что в случае топологической фазы имеет место полное андреевское отражение, т. е. налетающий со стороны нормального металла электрон с энергией в лакуне, имеющейся в спектре гамильтониана Боголюбова–де Жена (сверхпроводящей щели), с вероятностью единица отражается как дырка независимо от величины параметров в потенциалах, описывающих примесь и «прозрачность» перехода. Для нетопологической фазы найдены формулы для вероятностей отражения дырки (андреевское отражение) и электрона (нормальное отражение). В работе, как обычно при исследовании гибридных структур, используется метод «склейки».

Ключевые слова: отражение Андреева, гамильтониан Боголюбова–де Жена, спектр, задача рассеяния, вероятность отражения.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-05

Введение

А. Ф. Андреев впервые теоретически описал процесс перехода нормального тока в сверхпроводящий ток. Андреевское отражение возникает на стыке нормального (обычного) металла N, расположенного, например, в области $x < 0$, и сверхпроводника S в области $x > 0$ (см. [1,2]). Налетающий со стороны N электрон может отразиться от S обычным образом, как электрон (нормальное отражение) с вероятностью P_N, но может отразиться и как дырка (отражение Андреева) с вероятностью $P_A = 1 - P_N$. При полном (идеальном) андреевском отражении $P_A = 1$. Отражение дырки означает перемещение положительного заряда справа налево или, эквивалентно, отрицательного заряда слева направо, что порождает свободный электрон в S. Налетающий электрон, оказавшись в области $x > 0$, вместе с одним из свободных электронов сверхпроводника образует куперовскую пару в S [1]. Куперовские пары являются носителями сверхпроводящего тока [1]. Таким образом, полное отражение Андреева отвечает максимальному сверхпроводящему току в гибридной структуре.

В последние годы интерес к андреевскому отражению значительно вырос [2, 3]. Это связано с тем, что на границе N–S в сверхпроводнике, находящемся в топологической фазе [4], возникают майорановские локализованные состояния (МЛС) (см., например, [4–6]), которые активно изучаются на протяжении последних приблизительно полутора десятилетий. МЛС представляют собой устойчивые квазичастицы с нулевой энергией вида «частица плюс дырка», подчиняющиеся неабелевой статистике, и весьма перспективны для применения в будущих квантовых компьютерах [5,6]. При этом появление МЛС в структуре N–S приводит к возникновению идеального андреевского отражения, которое, в свою очередь, порождает при нулевой разности потенциалов пик дифференциального кондактанса (проводимости), т. е. максимум сверхтока, что может быть измерено в эксперименте и, вообще говоря, сигнализирует о появлении МЛС [3, 8–10].

В статье математически строго изучено отражение Андреева для гамильтониана Боголюбова–де Жена, описывающего одномерную структуру нормальный металл–p-волновой сверхпроводник и содержащего два дельтаобразных потенциала, один из которых моделирует примесь в сверхпроводнике, а второй характеризует «прозрачность» перехода N–S. Доказано, что в переходе N–S имеет место полное андреевское отражение в случае топологической фазы (т. е. налетающий со стороны нормального металла электрон всегда отражается как дырка). В нетопологической фазе получена формула для вероятности отражения P_A. Используемая методика в перспективе позволяет описать собственные функции данного гамильтониана для околонулевой энергии с целью определения их сходства с МЛС.

§ 1. Отражение Андреева

Рассмотрим гамильтониан для одномерной гибридной структуры нормальный металл–p-волновой сверхпроводник вида

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \theta(x)\mu_+ - \theta(-x)\mu_- & -\Delta\theta(x)\partial_x - \frac{\Delta}{2}\delta(x) \\ \Delta\theta(x)\partial_x + \frac{\Delta}{2}\delta(x) & \partial_x^2 + \theta(x)\mu_+ + \theta(-x)\mu_- \end{pmatrix}.$$

Здесь $\theta(x)$ — функция Хевисайда, $\mu_+(\mu_-)$ — химический потенциал сверхпроводника (нормального металла), $\Delta \in \mathbb{R}$ — параметр сверхпроводящего порядка. Слагаемые $\pm\Delta\delta(x)/2$ возникают при симметризации изначально не самосопряженного (в силу наличия выражения $\theta(x)\partial_x$) оператора по формуле $(H + H^*)/2$. Таким образом, для $x > 0$ имеем гамильтониан сверхпроводника, а для $x < 0$ — гамильтониан нормального металла. После преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$

$$\widehat{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\psi(x)\,dx$$

получаем гамильтонианы сверхпроводника и нормального металла

$$\widehat{H}_+(p) = \begin{pmatrix} p^2 - \mu_+ & -ip\Delta \\ ip\Delta & -p^2 + \mu_+ \end{pmatrix}, \quad \widehat{H}_-(p) = \begin{pmatrix} p^2 - \mu_- & 0 \\ 0 & -p^2 + \mu_- \end{pmatrix} \tag{1}$$

соответственно. Спектр H_- равен $(-\infty, \infty)$. Если $\mu - \Delta^2/2 \geqslant 0$, то спектр H_+ равен объединению промежутков

$$(-\infty, -|\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4}\,] \cup [\,|\Delta|\sqrt{\mu - \Delta^2/4}, \infty).$$

Если $\mu_+ - \Delta^2/2 < 0$, то спектр H_+ имеет вид $(-\infty, -|\mu_+|] \cup [|\mu_+|, \infty)$. Таким образом, спектр H_+ содержит лакуну (сверхпроводящую щель), симметричную относительно нуля, длиной $2|\Delta|\sqrt{\mu_+ - \Delta^2/4}$ в первом случае, и длиной $2|\mu_+|$ во втором случае (см. [7]).

Оператор H действует на функции вида $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))^T$, где T — транспонирование, $\psi_1(x)$ описывает электроны, а $\psi_2(x)$ — дырки.

Рассмотрим теперь гамильтониан $H + V$, где

$$V = \begin{pmatrix} V_0\delta(x) + V_1\delta(x-a) & 0 \\ 0 & -(V_0\delta(x) + V_1\delta(x-a)) \end{pmatrix},$$

слагаемые с $\delta(x)$ характеризуют контакт, а слагаемые с $\delta(x-a)$ — примесь в сверхпроводнике.

Ищем решения уравнения

$$(H+V)\psi = E\psi, \tag{2}$$

описывающие рассеяние для энергий E в щели. Интерес представляют вероятности отражения электрона, налетающего со стороны $x < 0$, по первой и второй компонентам, т. е. для частиц и дырок. Общие решения уравнений $(H_\pm - E)\psi_\pm(x) = 0$ ищем в виде $\psi_\pm(x) = (\psi^1_\pm, \psi^2_\pm)^T = (A_\pm, B_\pm)^T e^{i\alpha_\pm x}$, где $p = \alpha_\pm$ — решение уравнения $\det(\widehat{H}_\pm(p) - E) = 0$, а $(A_\pm, B_\pm)^T$ удовлетворяет равенству $(\widehat{H}_\pm(\alpha_\pm) - E)(A_\pm, B_\pm)^T = 0$. Найденные решения $\psi_\pm(x)$, зависящие от произвольных констант, «склеиваем» в точках $x = 0$ и $x = a$, пользуясь равенствами

$$\psi^1_+(0+) = \psi^1_-(0-), \quad \psi^2_+(0+) = \psi^2_-(0-), \quad \psi^1_+(a+) = \psi^1_-(a-), \quad \psi^2_+(a+) = \psi^2_-(a-), \tag{3}$$

$$4(\partial_x\psi^1_+(0+) - \partial_x\psi^1_-(0-)) - 2V_0(\psi^1_+(0+) + \psi^1_-(0-)) + \Delta(\psi^2_+(0+) + \psi^2_-(0-)) = 0, \tag{4}$$

$$4(\partial_x\psi^2_+(0+) - \partial_x\psi^2_-(0-)) - 2V_0(\psi^2_+(0+) + \psi^2_-(0-)) + \Delta(\psi^1_+(0+) + \psi^1_-(0-)) = 0, \tag{5}$$

$$2(\partial_x\psi^1_+(a+) - \partial_x\psi^1_-(a-)) - V_1(\psi^1_+(a+) + \psi^1_-(a-)) = 0, \tag{6}$$

$$2(\partial_x\psi^2_+(a+) - \partial_x\psi^2_-(a-)) - V_1(\psi^2_+(a+) + \psi^2_-(a-)) = 0. \tag{7}$$

Здесь полагаем $\delta(x)\cdot\psi^j(x) = \frac{1}{2}\delta(x)(\psi^j_+(0+) + \psi^j_-(0-))$ (аналогично для точки $x = a$), что отвечает симметричному распределению потенциальной энергии относительно данных точек. Таким образом, функция $\psi(x)$ непрерывна в точках $0, a$ согласно (3), а согласно (4)–(7) δ-функции, возникающие при дифференцировании скачка первой производной, взаимно уничтожаются с δ-функциями, входящими в гамильтониан H и в потенциалы.

Будем в дальнейшем предполагать, что μ_-, $\Delta > 0$, $|\mu_+| \ll \Delta^2$. В этом случае спектр H_+ совпадает с $\mathbb{R} \setminus (-|\mu_+|, |\mu_+|)$. Далее рассматривается $E \in (-|\mu_+|, |\mu_+|)$.

Рассмотрим случай топологической фазы $\mu_+ > 0$ [4]. Пусть вначале $x < 0$. Из равенства нулю $\det(\widehat{H}_-(p) - E) = 0$ получаем, согласно (1),

$$p^2 = \mu_-.$$

Отсюда

$$\widehat{H}_-(p) - E \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что для дырки и частицы с равными импульсами скорости противоположны, получаем общий вид решения уравнения (2), описывающего рассеяние налетающего электрона при $x < 0$:

$$\psi_-(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{\mu_-}x} = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + Be^{-i\sqrt{\mu_-}x} \\ Ae^{i\sqrt{\mu_-}x} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь первое слагаемое отвечает налетающему электрону, второе слагаемое — отраженной дырке, и третье слагаемое — отраженному электрону. Заметим, что $P_A = |A|^2$, $P_N = |B|^2$.

В случае $x > 0$ имеем

$$\det(\widehat{H}_+ - E) = -(p^4 - 2p^2(\mu_+ - \Delta^2/2) + \mu_+^2 - E^2) = 0,$$

тогда

$$p = \alpha^1_+ = \pm i\Delta + F_1(\mu_+), \quad p = \alpha^2_+ = \pm i\frac{\mu_+}{\Delta} + F_2(\mu_+),$$

где выражения $F_j(\mu_+)$, $j = 1, 2$, малы в силу предположения $\mu_+ \ll \Delta^2$ и далее опускаются.

Для $p = \pm i\Delta$ имеем

$$\det\left(\widehat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\Delta^2 & \pm\Delta^2 \\ \mp\Delta^2 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

откуда $\psi_+(x) = (1, \pm 1)^T e^{\mp \Delta x}$; если $p = \pm i\mu_+/\Delta$, то

$$\det\left(\widehat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\mu_+ & \pm\mu_+ \\ \mp\mu_+ & \mu_+ \end{pmatrix}$$

и $\psi_+(x) = (1, \pm 1)^T e^{\mp(\mu_+/\Delta)x}$.

Для убывания решения уравнения (2) при $x > a$ в равенствах для α_+^1 и α_+^2 выбираем знак «+». Таким образом, на промежутке $(a, +\infty)$ решение имеет вид:

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \\ Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Убывания решения на промежутке $(0; a)$ не требуется, поэтому $\psi_+(x)$ для $x \in (0, a)$ определена равенством:

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} + Le^{\Delta x} + Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \\ Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} - Le^{\Delta x} - Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Учитывая (3), перепишем (4)–(7) в виде

$$2(\partial_x \psi_+^1(0+) - \partial_x \psi_-^1(0-)) - 2V_0 \psi_-^1(0-) + \Delta \psi_-^2(0-) = 0, \tag{11}$$

$$2(\partial_x \psi_+^2(0+) - \partial_x \psi_-^2(0-)) - 2V_0 \psi_-^2(0-) + \Delta \psi_-^1(0-) = 0, \tag{12}$$

$$\partial_x \psi_+^1(a+) - \partial_x \psi_+^1(a-) - V_1 \psi_+^1(a+) = 0, \tag{13}$$

$$\partial_x \psi_+^2(a+) - \partial_x \psi_+^2(a-) - V_1 \psi_+^2(a+) = 0. \tag{14}$$

Положим $r_\pm = i\sqrt{\mu_-} \pm V_0$. Пользуясь (8), (9), запишем условия «склейки» (3), (11)–(14) в виде матричного уравнения

$$X(A, B, C, D, L, F, G, K)^T = (-1, 0, 2r_+, -\Delta, 0, 0, 0, 0)^T, \tag{15}$$

где матрица X имеет вид

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\Delta & 2r_- & -2\Delta & -\dfrac{2\mu_+}{\Delta} & 2\Delta & \dfrac{2\mu_+}{\Delta} & 0 & 0 \\
-2r_+ & \Delta & -2\Delta & -\dfrac{2\mu_+}{\Delta} & -2\Delta & -\dfrac{2\mu_+}{\Delta} & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{-\Delta a} & e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} & e^{\Delta a} & e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -e^{-\Delta a} & -e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} \\
0 & 0 & e^{-\Delta a} & e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -e^{\Delta a} & -e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -e^{-\Delta a} & -e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} \\
0 & 0 & \Delta e^{-\Delta a} & \dfrac{\mu_+}{\Delta}e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -\Delta e^{\Delta a} & -\dfrac{\mu_+}{\Delta}e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -e^{-\Delta a}(\Delta + V_1) & -e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a}\left(\dfrac{\mu_+}{\Delta} + V_1\right) \\
0 & 0 & \Delta e^{-\Delta a} & \dfrac{\mu_+}{\Delta}e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a} & \Delta e^{\Delta a} & \dfrac{\mu_+}{\Delta}e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a} & -e^{-\Delta a}(\Delta + V_1) & -e^{-\frac{\mu_+}{\Delta}a}\left(\dfrac{\mu_+}{\Delta} + V_1\right)
\end{pmatrix}.$$

Из линейных комбинаций четырех последних строк получим:

$$\begin{cases} \Delta e^{\Delta a} L + \dfrac{\mu_+}{\Delta} e^{\frac{\mu_+}{\Delta} a} F = 0, \\ e^{\Delta a} L + e^{\frac{\mu_+}{\Delta} a} F = 0, \end{cases}$$

отсюда в силу предположения $\mu_+ \ll \Delta^2$ имеем $L = F = 0$. Тогда из первых четырех строк получаем

$$\begin{cases} A - B = 1, \\ (\Delta + 2r_+)A + (2r_- - \Delta)B = 2r_+ + \Delta, \end{cases}$$

откуда $A = 1$, $B = 0$. Таким образом, $P_A = 1$ и имеет место полное андреевское отражение.

Пусть теперь $\mu_+ < 0$, что соответствует нетопологической фазе. В этом случае значения $p = \alpha_+^{1,2}$ и решение уравнения (2) на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, a)$ не изменятся, а для $x \in (a, +\infty)$ оно примет вид

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ge^{-\Delta x} + Ke^{(\mu_+/\Delta)x} \\ Ge^{-\Delta x} - Ke^{(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}.$$

Тогда получим уравнение (15) с матрицей $X' = \{x'_{i,j}\}$, совпадающей с X всюду кроме элементов $x'_{58} = -x'_{68} = -e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a}$, $x'_{78} = -x'_{88} = -e^{\frac{\mu_+}{\Delta}a}\left(\frac{\mu_+}{\Delta} - V_1\right)$. Следовательно, $A = \dfrac{d_1}{d}$, $B = \dfrac{d_2}{d}$, где $d = \det X'$, $d_{1(2)}$ получаются из d заменой первого (второго) столбца столбцом свободных членов (15). Несложно убедиться, что полного андреевского отражения в случае нетопологической фазы нет.

Итак, при сделанных выше предположениях с учетом вида матрицы

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta & 2r_- & -2\Delta & 0 & 2\Delta & 0 & 0 & 0 \\ -2r_+ & \Delta & -2\Delta & 0 & -2\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\Delta a} & 1 & e^{\Delta a} & 1 & -e^{-\Delta a} & 1 \\ 0 & 0 & e^{-\Delta a} & 1 & -e^{\Delta a} & 1 & -e^{-\Delta a} & 1 \\ 0 & 0 & \Delta e^{-\Delta a} & 0 & -\Delta e^{\Delta a} & 0 & -e^{-\Delta a}(\Delta + V_1) & V_1 \\ 0 & 0 & \Delta e^{-\Delta a} & 0 & \Delta e^{\Delta a} & 0 & -e^{-\Delta a}(\Delta + V_1) & -V_1 \end{pmatrix}$$

в случае $|\mu_+| \ll \Delta$, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *В случае топологической фазы $\mu_+ > 0$ независимо от значений параметров V_1, V_2 имеет место полное андреевское отражение $P_A = 1$. В случае нетопологической фазы $\mu_+ < 0$ и условия $|\mu_+| \ll \Delta$ справедливы следующие формулы для вероятностей андреевского P_A и нормального P_N отражения:*

$$P_A = |d_1/d|^2, \quad P_N = |d_2/d|^2,$$

где

$$d = -8V_1\Delta(\Delta+2r_+)\left(\Delta+V_1(1+e^{-\Delta a})\right)+16V_1r_+(2r_- -\Delta)\left(\Delta+V_1(1-e^{-\Delta a})\right),$$
$$d_1 = -32i\sqrt{\mu_-}\Delta V_1\left(\Delta+V_1(1+e^{-\Delta a})\right),$$
$$d_2 = 8V_1(2r_+ +\Delta)\left((2r_+ -\Delta)(\Delta+V_1(1-e^{-\Delta a}))+2\Delta(\Delta+V_1)\right), r_\pm = i\sqrt{\mu_-}\pm V_0.$$

С л е д с т в и е 1. *В нетопологической фазе при* $\mu_-=0$ *и* $a\to 0$ *имеем* $P_N\to 1$.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» в рамках конкурса на предоставление грантов УдГУ на поддержку молодых ученых «Научный потенциал»-2018, проект № 2018–03–02, а также частично поддержана грантом 15–8–2–12 УрО РАН и программой финансирования АААА-А16-116021010082-8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000.
2. Setiawan F., Brydon P.M.R., Sau J.D., Das Sarma S. Conductance spectroscopy of topological superconductor wire junctions // Phys. Rev. B. 2015. Vol. 91. Issue 21. 214513. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.214513
3. Liu C.-X., Sau J.D., Stanescu T.D., Das Sarma S. Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks // Phys. Rev. B. 2017. Vol. 96. Issue 7. 075161. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.075161
4. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems // Rep. Prog. Phys. 2012. Vol. 75. No. 7. 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
5. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors // Journal of the Physical Society of Japan. 2016. Vol. 85. No. 7. 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
6. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics // Rev. Mod. Phys. 2015. Vol. 87. Issue 1. P. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
7. Тинюкова Т.С. Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 222–230. https://doi.org/10.20537/vm180208
8. Sengupta K., Žutić I., Kwon H.-J., Yakovenko V.M., Das Sarma S. Midgap edge states and pairing symmetry of quasi-one-dimensional organic superconductors // Phys. Rev. B. 2001. Vol. 63. Issue 14. 144531. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.144531
9. Moore C., Zeng C., Stanescu T.D., Tewari S. Quantized zero-bias conductance plateau in semiconductor-superconductor heterostructures without non-Abelian Majorana zero modes // Phys. Rev. B. 2018. Vol. 98. Issue 15. 155314. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.155314
10. Vuik A., Nijholt B., Akhmerov A.R., Wimmer M. Reproducing topological properties with quasi-Majorana states // arXiv: 1806.02801v1 [cond-mat.mes-hall]. 2018. https://arxiv.org/abs/1806.02801v1

Поступила в редакцию 01.09.2019

Тинюкова Татьяна Сергеевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра математического анализа, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Чубурин Юрий Павлович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Удмуртский федеральный исследовательский центр УрО РАН, 426067, Россия, г. Ижевск, ул. Т. Барамзиной, 34.
E-mail: chuburin@udman.ru

Цитирование: Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин. Отражение Андреева в контакте p-волновой сверхпроводник–нормальный металл // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 55–62.

T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin

Andreev reflection in the p-wave superconductor–normal metal contact

Keywords: Andreev reflection, Bogolyubov–de Gennes Hamiltonian, spectrum, scattering problem, probability of reflection.

MSC2010: 81Q10, 81Q15

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-05

In this paper, the Andreev reflection is mathematically rigorously studied for the matrix differential Bogolyubov–de Gennes Hamiltonian. This Hamiltonian describes electrons and holes in a one-dimensional hybrid structure normal metal–p-wave superconductor. In this case, the physically correct symmetrized form of the Hamiltonian is used, which is described in the article. The Hamiltonian contains two delta-shaped potentials, one of which models an impurity in a superconductor, and the second characterizes the "transparency" of the junction normal metal–superconductor. It is proved that in the case of the topological phase there is an ideal Andreev reflection, i. e., an electron incident from the side of a normal metal (this electron has energy in the lacuna (superconducting gap), which is in the spectrum of the Bogolyubov-de Gennes Hamiltonian) with probability one, is reflected as a hole, regardless of the parameters of potentials describing the impurity and the "transparency" of the junction. For the nontopological phase, the formulas for probabilities of hole (Andreev) reflection and electron (normal) reflection are found. As is common in the study of hybrid structures, the matching method is used.

Funding. The research was funded by Udmurt State University in the framework of the grant support program for young researchers "Scientific potential–2018", project number 2018–03–02, and was funded partially by grant of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, project number 15–8–2–12, and by the financing program AAAA-A16-116021010082-8.

REFERENCES

1. Shmidt V.V. *Vvedenie v fiziku sverkhprovodnikov* (Introduction to the physics of superconductors), Moscow: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2000.
2. Setiawan F., Brydon P.M.R., Sau J.D., Das Sarma S. Conductance spectroscopy of topological superconductor wire junctions, *Phys. Rev. B*, 2015, vol. 91, issue 21, 214513. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.214513
3. Liu C.-X., Sau J.D., Stanescu T.D., Das Sarma S. Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks, *Phys. Rev. B*, 2017, vol. 96, issue 7, 075161. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.075161
4. Alicea J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, *Rep. Prog. Phys.*, 2012, vol. 75, no. 7, 076501. https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/7/076501
5. Sato M., Fujimoto S. Majorana fermions and topology in superconductors, *Journal of the Physical Society of Japan*, 2016, vol. 85, no. 7. 072001. https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.072001
6. Elliot S.R., Franz M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics, *Rev. Mod. Phys.*, 2015, vol. 87, issue 1, pp. 137–163. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.137
7. Tinyukova T.S. Majorana states in a p-wave superconducting nanowire, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 2, pp. 222–230. https://doi.org/10.20537/vm180208
8. Sengupta K., Žutić I., Kwon H.-J., Yakovenko V.M., Das Sarma S. Midgap edge states and pairing symmetry of quasi-one-dimensional organic superconductors, *Phys. Rev. B.*, 2001, vol. 63, issue 14, 144531. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.144531
9. Moore C., Zeng C., Stanescu T.D., Tewari S. Quantized zero-bias conductance plateau in semiconductor-superconductor heterostructures without non-Abelian Majorana zero modes, *Phys. Rev. B.*, 2018, vol. 98, issue 15, 155314. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.155314

10. Vuik A., Nijholt B., Akhmerov A.R., Wimmer M. Reproducing topological properties with quasi-Majorana states, 2018, arXiv: 1806.02801v1 [cond-mat.mes-hall]. https://arxiv.org/abs/1806.02801v1

Received 01.09.2019

Tinyukova Tat'yana Sergeevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Analysis, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: Ttinyukova@mail.ru

Chuburin Yurii Pavlovich, Doctor of Physics and Mathematics, Udmurt Federal Research Center, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. T. Baramzinoi, 34, Izhevsk, 426067, Russia.
E-mail: chuburin@udman.ru

Citation: T. S. Tinyukova, Yu. P. Chuburin. Andreev reflection in the p-wave superconductor–normal metal contact, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 55–62.