Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2019. Том 54. С. 122–134

УДК 517.927.25

© *Т. К. Юлдашев*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТРАЖЕНИЕМ АРГУМЕНТА

Рассмотрены спектральные особенности в вопросе разрешимости и построения решений неоднородной краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с двумя спектральными параметрами, вырожденным ядром, интегральными условиями и отражением аргумента. Применен и развит метод вырожденного ядра. Получена система алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных интегрирования. Изучены особенности, возникающие при решении систем алгебраических уравнений. Вычислены соответствующие этим особенностям спектральные значения параметров. Установлены критерия однозначной разрешимости поставленной нелинейной задачи для регулярных значений спектральных параметров. При доказательстве однозначной разрешимости этой задачи применены метод последовательных приближений и метод сжимающих отображений. Для регулярных значений спектральных параметров показана непрерывность решения неоднородной краевой задачи по интегральным данным. Выявлено также условие малости этого решения. Для иррегулярных значений спектральных параметров изучены вопросы существования или отсутствия решений рассматриваемой нелокальной краевой задачи. Построены решения, соответствующие значениям спектральных параметров, в случае существования.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, отражение аргумента, интегральные условия, спектральные параметры, разрешимость.

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-09

§ 1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению начальных и граничных задач для обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Изучение спектральных свойств и построение решений для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами представляют большой теоретический и практический интерес. Спектральные задачи для дифференциальных уравнений изучались в работах многих математиков (см., напр. [1–7]). Как правила, в этих спектральных задачах рассмотрены однородные краевые задачи. Интегро-дифференциальные уравнения являются математическими моделями протекания многих физических процессов и работы технических систем (см. [8, 9]). В [10, 11] показаны приложения интегро-дифференциальных уравнений в теории систем автоматического регулирования. В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Нелокальные краевые задачи изучены, в частности в работах [12–14]. Спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными интегральными условиями рассматривались в [15–17]. В работах [18–25] для интегро-дифференциальных уравнений ставятся и изучаются разные постановки задач. Интегро-дифференциальные уравнения с вырожденным ядром и нелокальными интегральными условиями рассматривались в [10, 11, 26, 27]. В частности, в [11] рассмотрена более простая граничная задача для однородного интегро-дифференциального уравнения; в [27] рассмотрена такая же граничная задача с дополнительным условием переопределения; в [10] рассмотрена аналогичная краевая задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения со спектральными параметрами. Но, в этой работе не были изучены особенности уравнения при иррегулярных значениях спектральных параметров. В [26] рассмотрено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с отражением аргумента без спектральных особенностей.

В настоящей работе рассматривается более общая нелокальная краевая задача для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с неоднородными интегральными условиями, спектральными параметрами и отражением аргумента. В вопросе разрешимости и построения решений таких задач важную роль играет знание спектральных свойств параметров. Вычисляются регулярные и иррегулярные значения спектральных параметров, для которых изучаются вопросы разрешимости рассматриваемой задачи и в случае существования решений построятся эти решения. Здесь отметим, что наличие отражения в аргументе приводит к изменениям именно в вопросе разрешимости задачи при иррегулярных значениях спектральных параметров.

На отрезке $[-T;T]$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) + \nu \int_{-T}^{T} K(t,s) u(-s)\, ds = \alpha(t) f\left(\int_{-T}^{T} \Theta(\theta,\, u(\theta))\, d\theta \right) \tag{1.1}$$

при следующих нелокальных условиях в интегральной форме

$$u(T) + \int_{-T}^{T} u(t)\, dt = \varphi, \quad u'(T) + \int_{-T}^{T} u'(t)\, t\, dt = \psi, \tag{1.2}$$

где $T > 0$ — заданное действительное число, $\lambda > 0$ — действительный спектральный параметр, φ, $\psi = \mathrm{const}$; ν — действительный ненулевой спектральный параметр,

$$\alpha(t) \in C[-T;T], \quad \Theta(t,u) \in C[-T;T] \times \mathbb{R}), \quad K(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) b_i(s),$$
$$0 \neq a_i(t),\ b_i(s) \in C[-T;T].$$

Здесь предполагается, что каждая из систем функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^{k}$ и $\{b_i(s)\}_{i=1}^{k}$ линейно независима.

§ 2. Метод вырожденного ядра

С учетом вырожденности ядра уравнение (1.1) запишем в следующем виде

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = -\nu \int_{-T}^{T} \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s)\, u(-s)\, ds + \alpha(t) f(\cdot), \tag{2.1}$$

где $f(\cdot) = f\left(\int_{-T}^{T} \Theta(\theta,\, u(\theta))\, d\theta \right)$.

С помощью обозначения

$$\tau_i = \int_{-T}^{T} b_i(s) u(-s)\, ds \tag{2.2}$$

уравнение (2.1) перепишется в следующем виде

$$u''(t) + \lambda^2 u(t) = -\nu \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, \tau_i + \alpha(t) f(\cdot). \tag{2.3}$$

Интегрируя неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (2.3) на интервале $(-T;t)$, получим представление

$$u\,(t)=A_1\cos\lambda(t+T)+A_2\sin\lambda(t+T)+\eta\,(t), \tag{2.4}$$

где A_1, A_2 — пока произвольные постоянные,

$$\eta\,(t)=-\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\,h_i(t)+\frac{f\,(\cdot)}{\lambda}\,\delta_1(t),$$

$$h_i(t)=\int_{-T}^{t}\sin\lambda(t-s)a_i(s)\,ds,\quad i=\overline{1,\,k},\quad h_i(t)=\int_{-T}^{t}\sin\lambda(t-s)\alpha(s)\,ds.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 в (2.4) воспользуемся интегральными условиями (1.2) и относительно этих коэффициентов мы приходим к системе линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} A_1\sigma_1(\lambda)+A_2\sigma_2(\lambda) &= \varphi_0,\\ A_1\sigma_3(\lambda)+A_2\sigma_4(\lambda) &= \psi_0,\end{cases} \tag{2.5}$$

где

$$\sigma_1(\lambda)=\frac{\lambda\,\cos 2\lambda\,T+\sin 2\lambda\,T}{\lambda},\qquad \sigma_2(\lambda)=\frac{-\cos 2\lambda T+\lambda\sin 2\lambda T+1}{\lambda},$$

$$\sigma_3(\lambda)=\frac{-\lambda\,T\,\cos 2\lambda\,T+(1+\lambda^2)\sin 2\lambda\,T}{\lambda^2},\quad \sigma_4(\lambda)=\frac{(1+\lambda^2)\cos 2\lambda\,T+\lambda\,T\,\sin 2\lambda\,T-1}{\lambda^2},$$

$$\varphi_0=\varphi-\left(\eta\,(T)+\int_{-T}^{T}\eta\,(t)\,dt\right),\qquad \psi_0=\psi-\left(\eta'(T)+\int_{-T}^{T}t\cdot\eta'(t)\,dt\right).$$

Для однозначного определения A_1 и A_2 из СЛУ (2.5) вычислим значения спектрального параметра λ в коэффициентах $\sigma_i(\lambda)$, $i=\overline{1,4}$. Коэффициенты $\sigma_i(\lambda)$, $i=\overline{1,4}$, могут равняться нулю при некоторых значениях параметра λ из положительной полуоси $(0;\infty)$. Но, эти коэффициенты не могут одновременно обращаться в нуль, т. е. $\Lambda_i\cap\Lambda_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=\overline{1,4}$. Множество значений спектрального параметра λ, состоящих из положительных решений уравнений $\sigma_m(\lambda)=0$, обозначим Λ_m, $m=\overline{1,4}$. Примем также обозначение $\Lambda_5=(0;\infty)\setminus\left(\bigcup\limits_{m=1}^{4}\Lambda_m\right)$.

Очевидно, что, при нахождении неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 из СЛУ (2.5) возможно только одно из пяти случаев: **1)** $\sigma_1(\lambda)=0$; **2)** $\sigma_2(\lambda)=0$; **3)** $\sigma_3(\lambda)=0$; **4)** $\sigma_4(\lambda)=0$; **5)** $\sigma_m(\lambda)\neq 0$, $m=\overline{1,4}$.

Здесь

$$\sigma_5(\lambda)=\sigma_1(\lambda)\cdot\sigma_4(\lambda)-\sigma_2(\lambda)\cdot\sigma_3(\lambda)\neq 0,\quad \lambda\in\Lambda_5.$$

Тогда решая СЛУ (2.5), из (2.4) получаем, что

$$u\,(t,\nu,\lambda)=\varphi\,B_m\,(t)+\psi\,C_m\,(t)+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\tau_i\,D_{mi}(t)+\frac{f\,(\cdot)}{\lambda}\,E_m(t), \tag{2.6}$$

где $\lambda\in\Lambda_m,\ m=\overline{1,5}$,

$$D_{mi}\,(t)=B_m\,(t)\left[\int_{-T}^{T}h_i\,(t)\,dt+h_i\,(T)\right]+C_m\,(t)\left[\int_{-T}^{T}t\cdot h_i'\,(t)\,dt+h_i'\,(T)\right]-h_i\,(t);$$

$$E_m\,(t)=-B_m\,(t)\left[\int_{-T}^{T}\delta_1\,(t)\,dt+\delta_1\,(T)\right]-C_m\,(t)\left[\int_{-T}^{T}t\cdot\delta_1'\,(t)\,dt+\delta_1'\,(T)\right]+\delta_1\,(t),\ m=\overline{1,5};$$

$$B_1(t)=\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_2(\lambda)}-\frac{\sigma_4(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}\cdot\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)},\quad C_1(t)=\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)};$$

$$B_2(t)=\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_1(\lambda)}-\frac{\sigma_3(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cdot\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)},\quad C_2(t)=\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)};$$

$$B_3(t)=\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_1(\lambda)},\quad C_3(t)=\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)}-\frac{\sigma_2(\lambda)}{\sigma_1(\lambda)}\cdot\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_4(\lambda)};$$

$$B_4(t)=\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_2(\lambda)},\quad C_4(t)=\frac{\cos\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)}-\frac{\sigma_1(\lambda)}{\sigma_2(\lambda)}\cdot\frac{\sin\lambda(t+T)}{\sigma_3(\lambda)};$$

$$B_5(t)=\frac{1}{\sigma_5(\lambda)}\Big[\sigma_4(\lambda)\,\cos\lambda(t+T)-\sigma_3(\lambda)\,\sin\lambda(t+T)\Big],$$

$$C_5(t)=\frac{1}{\sigma_5(\lambda)}\Big[-\sigma_2(\lambda)\cos\lambda(t+T)+\sigma_1(\lambda)\sin\lambda(t+T)\Big];$$

$$h_i(t)=\int_{-T}^{t}\sin\lambda(t-s)\,a_i(s)\,ds,\ i=\overline{1,k},\quad \delta_1(t)=\int_{-T}^{t}\sin\lambda(t-s)\,\alpha(s)\,ds.$$

Подставляя (2.6) в (2.2), получаем систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\tau_i+\frac{\nu}{\lambda}\sum_{j=1}^{k}\tau_j H_{ij}^m=\varphi\,\Phi_{mi}+\psi\,\Psi_{mi}+\frac{f(\cdot)}{\lambda}X_{mi},\quad i=\overline{1,k},\quad m=\overline{1,5},\tag{2.7}$$

где

$$H_{ij}^m=\int_{-T}^{T}b_i(s)\,D_{mj}(-s)\,ds,\quad \Phi_{mi}=\int_{-T}^{T}b_i(s)\,B_{mi}(-s)\,ds,$$

$$\Psi_{mi}=\int_{-T}^{T}b_i(s)\,C_{mi}(-s)\,ds,\quad X_{mi}=\int_{-T}^{T}b_i(s)\,E_m(-s)\,ds.$$

Рассмотрим следующий определитель Фредгольма:

$$P_m(\nu,\lambda)=\begin{vmatrix}1+\frac{\nu}{\lambda}H_{11}^m & \frac{\nu}{\lambda}H_{12}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{1k}^m\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{21}^m & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{22}^m & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H_{2k}^m\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\nu}{\lambda}H_{k1}^m & \frac{\nu}{\lambda}H_{k2}^m & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H_{kk}^m\end{vmatrix},\quad m=\overline{1,5}.$$

СЛУ (2.7) однозначно разрешима при любых конечных правых частях, если выполняется следующее условие невырожденности определителя Фредгольма $\Delta_m(\nu,\lambda)\neq 0$. Здесь определитель $\Delta_m(\nu,\lambda)$ есть многочлен относительно $\frac{\nu}{\lambda}$ степени не выше k. Уравнение $\Delta_m(\nu,\lambda)=0$ имеет не более k различных корней. Их обозначим через μ_l^m, ($l=\overline{1,p_m}$, $1\leqslant p_m\leqslant k$). Тогда числа $\nu=\nu_{n+l}=\lambda_n\mu_l^m$ называются характеристическими числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1) или иррегулярными значениями спектрального параметра ν, где $n\in\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Другие значения спектрального параметра $\nu\neq\lambda_n\,\mu_l^m$ называются регулярными. Примем следующие обозначения множеств

$$\Omega_m=\left\{(\nu,\lambda):\,\nu=\lambda\mu_l^m,\,\lambda\in\Lambda_m\right\},\,\widetilde{\Omega}_m=\left\{(\nu,\lambda):\,\nu\neq\lambda\mu_l^m,\,\lambda\in\Lambda_m\right\},$$

$$l=\overline{1,p_m},\quad 1\leqslant p_m\leqslant k,\quad m=\overline{1,5}.$$

§ 3. Регулярный случай

Решая САУ (2.7) для регулярных спектральных значений из множеств $\widetilde{\Omega}_m$, получаем представление

$$u\,(t,\nu,\lambda) = I_m(t,\nu,\lambda;\,u) \equiv \varphi\, V_m(t,\nu,\lambda) + \psi\, W_m(t,\nu,\lambda) +$$

$$+\, U_m(t,\nu,\lambda)\, f\left(\int_{-T}^{T} \Theta\,(\theta,\, u\,(\theta))\, d\theta\right), \quad (\nu,\lambda) \in \widetilde{\Omega}_m, \tag{3.1}$$

где

$$V_m(t,\nu,\lambda) = B_m(t) - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)} D_{mi}(t),$$

$$W_m(t,\nu,\lambda) = C_m(t) - \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\widetilde{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)} D_{mi}(t),$$

$$U_m(t,\nu,\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left\{E_m(t) + \frac{\nu}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\widehat{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)}{\Delta_m(\nu,\lambda)} D_{mi}(t)\right\},$$

$$\Delta_{mi}(\nu,\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\frac{\nu}{\lambda}H^m_{11} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{1(i-1)} & \Phi_{m1} & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{1(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{1k} \\ \frac{\nu}{\lambda}H^m_{21} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{2(i-1)} & \Phi_{m2} & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{2(i+1)} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\nu}{\lambda}H^m_{k1} & \dots & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{k(i-1)} & \Phi_{mk} & \frac{\nu}{\lambda}H^m_{k(i+1)} & \dots & 1+\frac{\nu}{\lambda}H^m_{kk} \end{vmatrix},$$

определитель $\widetilde{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)$ получается из определителя $\Delta_{mi}(\nu,\lambda)$ заменой столбца Φ_{mi} на столбец Ψ_{mi}. Точно так же определитель $\widehat{\Delta}_{mi}(\nu,\lambda)$ получается из определителя $\Delta_{mi}(\nu,\lambda)$ заменой столбца Φ_{mi} на столбец X_{mi}, $m=\overline{1,5}$, $i=\overline{1,k}$.

Рассмотрим множество функций $\Big\{u(t)\,\Big|\,u(t)\in C[-T;\,T]\Big\}$. С введением нормы

$$\big\|\,u(t)\,\big\| = \max_{t\in[-T;\,T]}\big|\,u(t)\,\big|$$

оно становится банаховым пространством.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
(1) $\max\Big\{\big\|\,V_m\,(t,\nu,\lambda)\,\big\|;\ \big\|\,W_m\,(t,\nu,\lambda)\,\big\|;\ \big\|\,U_m\,(t,\nu,\lambda)\,\big\|\Big\} \leqslant \chi_{m0} < \infty$;
(2) $\Big|\,f\,(\gamma)\,\Big| \leqslant \chi_1 < \infty$;
(3) $\Big\|\,f\,(\gamma_1) - f\,(\gamma_2)\,\Big\| \leqslant L_0\,\Big\|\,\gamma_1-\gamma_2\,\Big\|$, $0 < L_0 = const < \infty$;
(4) $\Big\|\,\Theta\,(\theta,u_1) - \Theta\,(\theta,u_2)\,\Big\| \leqslant \Theta_0(\theta)\,\Big\|\,u_1-u_2\,\Big\|$;
(5) $\rho = \chi_{m0}\,L_0\displaystyle\int_{-T}^{T}\big\|\Theta_0(t)\big\|\,dt < 1$.

Тогда нелокальная краевая задача (1.1)*,* (1.2) *однозначно разрешима на отрезке* $[-T;T]$ *при спектральных значениях из множества* $\widetilde{\Omega}_m$ *для каждого* $m=\overline{1,5}$. *Решение этой задачи определяется из интегрального уравнения* (3.1) *и оно непрерывно по интегральным данным* φ *и* ψ. *Интегральное уравнение* (3.1) *решается методом последовательных приближений. Кроме того, если* φ *и* ψ *малы, то и решение краевой задачи* (1.1)*,* (1.2) *мало при* $|\nu| < 1$, *(*$\nu \neq 0$*) и достаточно больших* λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опишем общую схему доказательства теоремы. Применяем метод сжимающих отображений. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} u^{\,0}(t,\nu,\lambda) = \varphi\, V_m(t,\nu,\lambda) + \psi\, W_m(t,\nu,\lambda), \\ u^{\,j+1}(t,\nu,\lambda) = I_m(t,\nu,\lambda;\,u^{\,j}), \quad m=\overline{1,5}, \quad j=0,1,2,\dots, \quad t\in[-T;\,T]. \end{cases} \tag{3.2}$$

Нетрудно убедиться, что в силу первых двух условий теоремы справедливы оценки

$$\big\| \, u^0(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant |\, \varphi \,| \cdot \big\| \, V_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| + |\, \psi \,| \cdot \big\| \, W_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant \big(|\, \varphi \,| + |\, \psi \,|\big) \cdot \chi_{m0} < \infty, \quad (3.3)$$

$$\big\| \, u^j(t,\nu,\lambda) - u^0(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant |\, f\,(\gamma) \,| \cdot \big\| \, U_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant \chi_1 \cdot \chi_{m0} < \infty. \quad (3.4)$$

Для произвольного натурального $j \geqslant 1$ в силу третьего и четвертого условий теоремы из (3.2) получим

$$\big\|u^{j+1}(t,\nu,\lambda) - u^j(t,\nu,\lambda)\big\| \leqslant L_0 \big\|U_m(t,\nu,\lambda)\big\| \int_{-T}^{T} \big\|\Theta_0(\theta)\big\| \cdot \big\|u^j(\theta,\nu,\lambda) - u^{j-1}(\theta,\nu,\lambda)\big\| \, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \rho \cdot \big\| \, u^j(t,\nu,\lambda) - u^{j-1}(t,\nu,\lambda) \, \big\| < \big\| \, u^j(t,\nu,\lambda) - u^{j-1}(t,\nu,\lambda) \, \big\|. \quad (3.5)$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (3.5) следует, что оператор $I_m(t,\nu,\lambda;\, u)$, $m = \overline{1,5}$ в (3.1) является сжимающим. Из оценок (3.3)–(3.5) заключаем, что для оператора $I_m(t,\nu,\lambda;\, u)$, $m = \overline{1,5}$ существует единственная неподвижная точка (см., напр. [28, с. 389–401]). Следовательно, краевая задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима на отрезке $[-T;T]$ при спектральных значениях из множества $\widetilde{\Omega}_m$. Нетрудно видеть, что это решение ограничено по норме на отрезке $[-T;T]$. Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\big\| \, u^{j+1}(t,\nu,\lambda) - u\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant \frac{\rho^{j+1}}{1-\rho} \cdot \chi_1 \, \chi_{m0}.$$

Покажем непрерывность решения задачи (1.1) , (1.2) по интегральным данным φ и ψ. Пусть $u_1(t,\nu,\lambda)$ и $u_2(t,\nu,\lambda)$ два различных решения нелокальной интегральной задачи (1.1), (1.2), соответствующие двум различным значениям интегральных данных φ_1 и φ_2, ψ_1 и ψ_2, соответственно. Положим, что

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \delta_1, \quad |\psi_1 - \psi_2| < \delta_2, \quad 0 < \delta_1,\, \delta_2 = \text{const}\,.$$

Тогда с учетом этого, в силу условий теоремы, аналогично (3.3) и (3.5) имеем

$$|u_1(t,\nu,\lambda) - u_2(t,\nu,\lambda)| \leqslant (|\varphi_1 - \varphi_2| + |\psi_1 - \psi_2|) \cdot \chi_{m0} +$$

$$+ L_0 \, \big\| \, U_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \int_{-T}^{T} \big\| \, \Theta_0\,(\theta) \, \big\| \cdot \big\| \, u_1(\theta,\nu,\lambda) - u_2(\theta,\nu,\lambda) \, \big\| \, d\theta <$$

$$< \big(\delta_1 + \delta_2\big) \cdot \chi_{m0} + \rho \cdot \big\| \, u_1(t,\nu,\lambda) - u_2(t,\nu,\lambda) \, \big\|.$$

Отсюда получаем, что $\big\| \, u_1(t,\nu,\lambda) - u_2(t,\nu,\lambda) \, \big\| < \varepsilon$, где $\varepsilon = \big(\delta_1 + \delta_2\big) \cdot \chi_{m0}/(1-\rho)$.

Теперь покажем, что при малых φ и ψ, $|\nu| < 1$ ($\nu \neq 0$) и достаточно больших значениях λ решение краевой задачи (1.1), (1.2) является малым. Функция $u\,(t) \in C[-T;\, T]$ называется малой на отрезке $[-T;\, T]$, если для любого малого числа $\varepsilon > 0$ и для всех $t \in [-T;\, T]$ выполняется неравенство $|\, u\,(t) \,| < \varepsilon$. Для этой цели положим

$$|\, \varphi \,| < \frac{\varepsilon}{3\,\chi_{m0}}, \quad |\, \psi \,| < \frac{\varepsilon}{3\,\chi_{m0}}.$$

Также учтем, что $\big\| \, U_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и $\big|\, f\,(\gamma) \,\big| \leqslant \chi_1 < \infty$. Поэтому мы можем положить, что $\big\| \, U_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| < \frac{\varepsilon}{3\,\chi_{m1}}$ при $\lambda \to \infty$. Тогда при $|\nu| < 1$ ($\nu \neq 0$) и достаточно больших значениях λ имеем оценку

$$\big\| \, u\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \leqslant |\, \varphi \,| \cdot \chi_{m0} + |\, \psi \,| \cdot \chi_{m0} + \big\| \, U_m\,(t,\nu,\lambda) \, \big\| \cdot \chi_1 <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\,\chi_{m0}}\,\chi_{m0} + \frac{\varepsilon}{3\,\chi_{m0}}\,\chi_{m0} + \frac{\varepsilon}{3\,\chi_1}\,\chi_1 = \varepsilon.$$

Теорема доказана. □

§ 4. Иррегулярный случай

Теперь рассмотрим множества иррегулярных значений спектральных параметров

$$\Omega_m = \{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda\, \mu_l^m, \ \lambda \in \Lambda_m\}, \quad m = \overline{1, 5}.$$

В данном случае однородное СЛУ (ОСЛУ) имеет вид

$$\tau_i + \frac{\nu}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \tau_j H_{ij}^m = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad m = \overline{1, 5},$$

если выполняются условия ортогональности:

$$\Phi_{mi} = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, B_m(-s)\, ds = 0, \qquad \Psi_{mi} = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, C_m\,(-s)\, ds = 0,$$

$$X_{mi} = \int_{-T}^{T} b_i(s)\, E_m\,(-s)\, ds = 0.$$

Здесь отметим, что если $\alpha\ (t) \neq 0$, то задача (1.1), (1.2) не может иметь нетривиальных решения при иррегулярных значениях спектральных параметров $\Omega_m,\ m = \overline{1, 5}$. Но, если $\alpha\ (t) = 0$ для всех $t \in [-T;\, T]$, то задача (1.1), (1.2) может иметь бесконечное множество решений. Рассмотрим подробно.

Для случая $m = 1$ условия ортогональности имеют следующий вид: либо

$$\sin \lambda T = 0, \quad \lambda \in \Lambda_1, \tag{4.1}$$

либо

$$\cos \lambda T = 0, \quad \tan \lambda T = \sigma_{01}, \quad \lambda \in \Lambda_1, \tag{4.2}$$

где $\sigma_{01} = \sigma_4 / \sigma_3$.

Но условие (4.1) и условия в (4.2) не будут выполняться ни при каких значениях λ из множества Λ_1. Поэтому в данном случае задача (1.1), (1.2) не может иметь нетривиальные решения.

Рассмотрим второй случай $m = 2$, т. е. $\lambda \in \Lambda_2$. Условия ортогональности имеют следующий вид: либо

$$\sin \lambda T = 0, \quad \lambda \in \Lambda_2, \tag{4.3}$$

либо

$$\sin \lambda T = 0, \quad \tan \lambda T = \sigma_{01}, \quad \lambda \in \Lambda_2. \tag{4.4}$$

Множество $\left\{\frac{n\pi}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$ значений спектрального параметра λ обозначим через Λ_{20}. Для всех $\lambda \in \Lambda_{20}$ условие (4.3) выполняется. А для значений параметра λ из множества $\Lambda_2 \setminus \Lambda_{20} = \Lambda_{21}$ и условие (4.3) и условия в (4.4) не выполняются. Воспользуемся обозначениями

$$\Omega_{20} = \Big\{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda \mu_l^2, \ \lambda \in \Lambda_{20}\Big\}, \quad \Omega_{21} = \Big\{(\nu, \lambda): \ \nu = \lambda \mu_l^2, \ \lambda \in \Lambda_{21}\Big\}.$$

На множестве Ω_{20} ОСЛУ имеет некоторое число p_2 ($1 \leqslant p_2 \leqslant k$) линейно независимых ненулевых вектор-решений $\Big\{\tau_1^{(l)}, \tau_2^{(l)}, \ldots, \tau_k^{(l)}\Big\}$, $l = \overline{1, p_2}$. Функции $u_l(t, \nu, \lambda) = \mu_l^2 \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i^{(l)} D_{2i}(-t)$, $l = \overline{1, p_2}$, будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u\,(t, \nu, \lambda) = \mu_l^2 \sum_{i=1}^{k} D_{2i}(-t) \int_{-T}^{T} b_i(s)\, u\,(s, \nu, \lambda)\, ds, \quad (\nu, \lambda) \in \Omega_{20}. \tag{4.5}$$

Общее решение однородного интегрального уравнения (4.5) запишем в виде

$$u\,(t,\nu,\lambda)=\sum_{l=1}^{p_2}\gamma_{2l}\,u_l(t,\nu,\lambda),\quad (\nu,\lambda)\in\Omega_{20}, \tag{4.6}$$

где γ_{2l} — произвольные постоянные.

Рассмотрим третий случай $\lambda\in\Lambda_3$. Условия ортогональности имеют следующий вид: либо

$$\sin\lambda T=0,\quad \lambda\in\Lambda_3, \tag{4.7}$$

либо

$$\cos\lambda T=0,\quad \tan\lambda T=\sigma_{02},\quad \lambda\in\Lambda_3, \tag{4.8}$$

где $\sigma_{02}=\sigma_2/\sigma_1$.

Множество $\left\{\frac{(2n-1)\,\pi}{T}\right\}_{n=1}^{\infty}$ значений спектрального параметра λ обозначим через Λ_{30}. Для всех $\lambda\in\Lambda_{30}$ условие (4.7) выполняется. А для значений параметра λ из множества $\Lambda_3\setminus\Lambda_{30}=\Lambda_{31}$ условие (4.7) и условия в (4.8) не выполняются. Вводим обозначения

$$\Omega_{30}=\big\{(\nu,\lambda):\ \nu=\lambda\mu_l^3,\ \lambda\in\Lambda_{30}\big\},\quad \Omega_{31}=\big\{(\nu,\lambda):\ \nu=\lambda\mu_l^3,\ \lambda\in\Lambda_{31}\big\}.$$

На множестве Ω_{30} ОСЛУ имеет некоторое число p_3 ($1\leqslant p_3\leqslant k$) линейно независимых ненулевых вектор-решений $\left\{\tau_1^{(l)},\tau_2^{(l)},\ldots,\tau_k^{(l)}\right\}$, $l=\overline{1,p_3}$. Функции $u_l(t,\nu,\lambda)=\mu_l^3\sum\limits_{i=1}^{k}\tau_i^{(l)}D_{3i}(-t)$, $l=\overline{1,p_3}$, будут нетривиальными решениями соответствующего однородного уравнения

$$u\,(t,\nu,\lambda)=\mu_l^3\sum_{i=1}^{k}D_{3i}(-t)\int_{-T}^{T}b_i(s)\,u\,(s,\nu,\lambda)\,ds,\quad (\nu,\lambda)\in\Omega_{30}. \tag{4.9}$$

Общее решение однородного интегрального уравнения (4.9) запишем в виде

$$u\,(t,\nu,\lambda)=\sum_{l=1}^{p_3}\gamma_{3l}\,u_l(t,\nu,\lambda),\quad (\nu,\lambda)\in\Omega_{30}, \tag{4.10}$$

где γ_{3l} — произвольные постоянные.

Для случая $\lambda\in\Lambda_4$ условия ортогональности имеют следующий вид: либо

$$\sin\lambda T=0,\quad \lambda\in\Lambda_4, \tag{4.11}$$

либо

$$\cos\lambda T=0,\quad \tan\lambda T=\sigma_{02},\quad \lambda\in\Lambda_4. \tag{4.12}$$

Но условие (4.11) и условия в (4.12) не будут выполняться ни при каких значениях λ из множества Λ_4. Поэтому в данном случае задача (1.1), (1.2) не может иметь нетривиальные решения.

Теперь рассмотрим случай $(\nu,\lambda)\in\Omega_5$. В данном случае условия ортогональности имеют вид

$$\int_{-T}^{T}\left[\sigma_4(\lambda)\cos\lambda\,(t+T)+\sigma_3(\lambda)\sin\lambda\,(t+T)\right]\,dt=0,\quad \lambda\in\Lambda_5, \tag{4.13}$$

$$\int_{-T}^{T}\left[-\sigma_2(\lambda)\cos\lambda\,(t+T)-\sigma_1(\lambda)\sin\lambda\,(t+T)\right]\,dt=0,\quad \lambda\in\Lambda_5. \tag{4.14}$$

Условия (4.13) и (4.14) эквивалентны следующим условиям: либо

$$\sin \lambda T = 0, \quad \lambda \in \Lambda_5, \tag{4.15}$$

либо

$$\cos \lambda T = 0, \quad \tan \lambda T = \sigma_{01}, \quad \tan \lambda T = \sigma_{02}, \quad \lambda \in \Lambda_5. \tag{4.16}$$

Условие (4.15) не выполняется. Каждое уравнение из (4.16) имеет решение на множестве Λ_5. Но совокупности положительных решений уравнений в (4.16) не имеют общую часть. Поэтому и условия (4.16) в данном случае не выполняются.

Таким образом, доказано, что справедлива

Т е о р е м а 4.1. *Пусть* $\alpha(t) = 0$ *для всех* $t \in [-T; T]$. *Тогда нелокальная краевая задача* (1.1), (1.2) *на отрезке* $[-T;\, T]$ *имеет бесконечное множество решений: в виде функций* (4.6) *при иррегулярных пар спектральных значений* (ν, λ) *из числового множества* Ω_{20}*; в виде функций* (4.10) *при иррегулярных пар спектральных значений* (ν, λ) *из числового множества* Ω_{30}. *Эта краевая задача не имеет нетривиальные решения при иррегулярных пар спектральных значений* (ν, λ) *из числовых множеств* Ω_1, Ω_{21}, Ω_{31}, Ω_4 *и* Ω_5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калинин Е.Д. Решение многопараметрической спектральной задачи для слабосвязанных систем гамильтоновых уравнений второго порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 46–55. https://doi.org/10.7868/S0044466915010081
2. Смирнов Ю.Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 460–468. https://doi.org/10.7868/S0044466915030187
3. Назаров С.А. Разрушение циклов и возможность раскрытия спектральных лакун в квадратной решетке тонких акустических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 78–127. https://doi.org/10.4213/im8693
4. Alves M., Labovskiy S. On spectral problem for a functional differential equation with mixed continuous and discrete measure // Functional Differential Equations. 2018. Vol. 25. No. 1–2. P. 3–19.
5. Cetinkaya F.A., Mamedov K.R. A boundary value problem with retarded argument and discontinuous coefficient in the differential equation // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2017. Vol. 7. No. 1. C. 135–145. https://www.azjm.org/volumes/7-1.html
6. Nazarov S.A., Pérez M.E. On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary // Revista Matemática Complutense. 2018. Vol. 31. Issue 1. P. 1–62. https://doi.org/10.1007/s13163-017-0243-4
7. Nazarov S.A., Taskinen J. Essential spectrum of a periodic waveguide with non-periodic perturbation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2018. Vol. 463. Issue 2. P. 922–933. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.057
8. Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических цепей. Новосибирск: Наука, 1988.
9. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2001. Vol. 24. Issue 14. P. 1043–1053. https://doi.org/10.1002/mma.250
10. Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1687–1694. https://doi.org/10.1134/S0374064118120105
11. Юлдашев Т.К. О разрешимости одной краевой задачи для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 252–263. https://doi.org/10.1134/S0044466919020169

12. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103. http://mi.mathnet.ru/mm832
13. Иванчов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 4. С. 547–564. http://mi.mathnet.ru/de11062
14. Тихонов И.В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 133–166.
15. Даровская К.А., Скубачевский А.Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 147–160. http://mi.mathnet.ru/tsp20
16. Подъяпольский В.В. Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями // Матем. заметки. 1999. Т. 65. Вып. 5. С. 797–800. https://doi.org/10.4213/mzm1114
17. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1982. № 6. С. 12–21.
18. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Регуляризованные асимптотические решения начальной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Матем. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 28–38. https://doi.org/10.4213/mzm11220
19. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Кирг. гос. ун-т, 1957.
20. Вайнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения / Итоги науки. Сер. Мат. анал. Теор. вероятн. Регулир. 1962. М.: ВИНИТИ, 1964. С. 5–37. http://mi.mathnet.ru/intv82
21. Зарипов С.К. Построение аналога теоремы Фредгольма для одного класса модельных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с сингулярной точкой в ядре // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 46. С. 24–35. https://doi.org/10.17223/19988621/46/4
22. Искандаров С., Халилова Г.Т. Об оценках снизу решений и их производных линейного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 132. С. 43–49. http://mi.mathnet.ru/into162
23. Фалалеев М.В. Интегро-дифференциальные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах и их приложения // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. 2012. Т. 5. Вып. 2. С. 90–102. http://mi.mathnet.ru/iigum70
24. Сидоров Н.А. Решение задачи Коши для одного класса интегро-дифференциальных уравнений с аналитическими нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 7. С. 1309–1316. http://mi.mathnet.ru/de407
25. Юрко В.А. Обратные задачи для интегро-дифференциальных операторов первого порядка // Матем. заметки. 2016. Т. 100. Вып. 6. С. 939–946. https://doi.org/10.4213/mzm11112
26. Юлдашев Т.К. Обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение с вырожденным ядром и интегральным условием // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 4. С. 644–655. https://doi.org/10.14498/vsgtu1502
27. Yuldashev T.K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40. No. 2. P. 230–239. https://doi.org/10.1134/S199508021902015X
28. Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 26.07.2019

Юлдашев Турсун Камалдинович, к. ф.-м. н., доцент, Узбекско-Израильский совместный факультет, Национальный университет Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Цитирование: Т. К. Юлдашев. Спектральные особенности решения одной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма второго порядка с отражением аргумента // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 122–134.

T. K. Yuldashev

Spectral singularities of solutions to a boundary-value problem for the Fredholm integro-differential equation of the second order with reflection of argument

Keywords: integro-differential equation, boundary-value problem, reflection of argument, integral conditions, spectral parameters, solvability.

MSC2010: 34A34, 34B08, 34B15, 34D20

DOI: 10.20537/2226-3594-2019-54-09

The problems of solvability and construction of solutions to a nonlocal boundary-value problem for the nonlinear second-order nonlinear Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, integral conditions and reflection of the argument are considered. The method of the degenerate kernel for the Fredholm integral equation is applied and developed for the case of the second-order nonlinear integro-differential equation. The spectral values of the parameters are calculated and the features arising in solving systems of algebraic equations and in determining arbitrary constants are studied. Criteria for the unique solvability of the stated nonlinear problem for regular values of spectral parameters are established. The method of successive approximations and the method of contraction mappings are used. The continuity of the solution of a boundary-value problem with respect to integral data is shown. The condition of smallness of this solution is revealed. For the irregular values of the spectral parameters, the problems of the existence or nonexistence of solutions to the nonlocal boundary-value problem under consideration are studied and solutions of this problem in the case of existence are constructed.

REFERENCES

1. Kalinin E.D. Solving the multiparameter eigenvalue problem for weakly coupled systems of second order Hamilton equations, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 1, pp. 43–52. https://doi.org/10.1134/S096554251501008X
2. Smirnov Yu.G. Eigenvalue transmission problems describing the propagation of TE and TM waves in two-layered inhomogeneous anisotropic cylindrical and planar waveguides, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 3, pp. 461–469. https://doi.org/10.1134/S0965542515030173
3. Nazarov S.A. Breakdown of cycles and the possibility of opening spectral gaps in a square lattice of thin acoustic waveguides, *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 6, pp. 1148–1195. https://doi.org/10.1070/im8693
4. Alves M., Labovskiy S. On spectral problem for a functional differential equation with mixed continuous and discrete measure, *Functional Differential Equations*, 2018, vol. 25, no. 1–2, pp. 3–19.
5. Cetinkaya F.A., Mamedov K.R. A boundary value problem with retarded argument and discontinuous coefficient in the differential equation, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 135–145. https://www.azjm.org/volumes/7-1.html
6. Nazarov S.A., Pérez M.E. On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary, *Revista Matemática Complutense*, 2018, vol. 31, issue 1, pp. 1–62. https://doi.org/10.1007/s13163-017-0243-4
7. Nazarov S.A., Taskinen J. Essential spectrum of a periodic waveguide with non-periodic perturbation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 463, issue 2, pp. 922–933. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.03.057
8. Ushakov E.I. *Staticheskaya ustoichivost' elektricheskikh tsepei* (Static stability of electrical circuits), Novosibirsk: Nauka, 1988.
9. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2001, vol. 24, issue 14, pp. 1043–1053. https://doi.org/10.1002/mma.250

10. Yuldashev T.K. Nonlocal boundary value problem for a nonlinear Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 12, pp. 1646–1653. https://doi.org/10.1134/S0012266118120108
11. Yuldashev T.K. On the solvability of a boundary value problem for the ordinary Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, no. 2, pp. 241–252. https://doi.org/10.1134/S0965542519020167
12. Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the constructing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations, *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103. http://mi.mathnet.ru/eng/mm832
13. Ivanchov N.I. Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 4, pp. 591–609. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44
14. Tikhonov I.V. Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations, *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 333–363. https://doi.org/10.1070/IM2003v067n02ABEH000429
15. Darovskaya K.A., Skubachevsky A.L. A spectral problem with integral conditions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2011, vol. 179, no. 3, pp. 437–445. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0602-5
16. Pod”yapol’skii V.V. Abel summability of a system of root functions for a nonlocal problem with integral conditions, *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, no. 5, pp. 672–675. https://doi.org/10.1007/BF02743181
17. Shkalikov A.A. On the basis property of the eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions, *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Ser. 1. Matematika i mekhanika*, 1982, no. 6, pp. 12–21 (in Russian).
18. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F. Regularized asymptotic solutions of the initial problem for the system of integro-partial differential equations, *Mathematical Notes*, 2017, vol. 102, no. 1, pp. 22–30. https://doi.org/10.1134/S0001434617070033
19. Bykov Ya.V. *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsial’nykh uravnenii* (On some problems in the theory of integro-differential equations), Frunze: Kyrgyz State University, 1957.
20. Vainberg M.M. Integro-differential equations, *Itogi Nauki. Ser. Mat. Anal. Teor. Ver. Regulir. 1962*, Moscow: VINITI, 1964, pp. 5–37 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/intv82
21. Zaripov S.K. Constructing an analogue of the Fredholm theorem for a class of first-order model integro-differential equations with a singular point in the kernel, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2017, no. 46, pp. 24–35 (in Russian). https://doi.org/10.17223/19988621/46/4
22. Iskandarov S., Khalilova G.T. On lower estimates of solutions and their derivatives to a fourth-order linear integrodifferential Volterra equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 688–694. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3770-8
23. Falaleev M.V. Integro-differential equations with Fredholm operator on the highest derivative in Banach spaces and their applications, *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, issue 2, pp. 90–102 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/iigum70
24. Sidorov N.A. Solution of the Cauchy problem for a certain class of integro-differential equations with analytic nonlinearities, *Differentsial’nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 7, pp. 1309–1316. http://mi.mathnet.ru/eng/de407
25. Yurko V.A. Inverse problems for first-order integro-differential operators, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 876–882. https://doi.org/10.1134/S0001434616110286
26. Yuldashev T.K. An ordinary integro-differential equation with a degenerate kernel and an integral condition, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 644–655 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1502
27. Yuldashev T.K. On inverse boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with degenerate kernel and spectral parameter, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 2, pp. 230–239. https://doi.org/10.1134/S199508021902015X
28. Trenogin V.A. *Funktsional’nyi analiz* (Functional Analyses), Moscow: Nauka, 1980.

Received 26.07.2019

Yuldashev Tursun Kamaldinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Uzbek-Israel Joint Faculty, National University of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 4, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Citation: T. K. Yuldashev. Spectral singularities of solutions to a boundary-value problem for the Fredholm integro-differential equation of the second order with reflection of argument, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 122–134.