Н. А. Соловьева, Т. С. Тинюкова, Д. Л. Федоров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Ижевск 2019

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Н. А. Соловьева, Т. С. Тинюкова, Д. Л. Федоров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Ижевск 2019

ББК 22.161
УДК 517.1
С 60

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент доктор физико–математических наук, профессор, ведущий научный сотр-к отдела теор. физики УдмФИЦ УрО РАН Ю. П. Чубурин

Соловьева Н. А., Тинюкова Т. С., Федоров Д. Л.

С 60 Математический анализ в примерах и задачах. Предел числовой последовательности: учебное пособие/ Н. А. Соловьева, Т. С. Тинюкова, Д. Л. Федоров — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2019. — 64 с.

ISBN 978-5-4312-0744-0

Учебное пособие посвящено изучению одного из разделов математического анализа — теории пределов числовых последовательностей. Приводятся основные понятия данной теории и подробные решения типовых задач. Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений института математики, информационных технологий и физики. Пособие будет полезно и для студентов других направлений нематематического профиля.

ББК 22.161
УДК 517.1

ISBN 978-5-4312-0744-0

Введение

Предлагаемое учебное пособие посвящено изучению теории пределов числовых последовательностей - одного из разделов математического анализа, который лежит в основе математического образования и необходим для понимания и освоения всех курсов фундаментальной и прикладной математики, компьютерных наук и их приложений.

Задачи освоения данного раздела математического анализа:
1. получить базовые знания по математическому анализу;
2. выработать общематематическую культуру: умение логически мыслить, устанавливать логические связи между понятиями, знать основные алгоритмы решения задач математического анализа, применять полученные знания для решения прикладных задач.

Особенностью данного пособия является логически замкнутое, последовательное и систематичное изложение теоретического и практического материала по разделу «Пределы числовых последовательностей», представленного в виде необходимых теоретических сведений, разобранных примеров и упражнений, которые можно использовать на практических занятиях и для самостоятельной работы студента.

Изучение дисциплины «Математический анализ» позволит сформировать следующие компетенции обучающегося:

- способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

- способность использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности.

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений института математики, информационных технологий и физики (01.03.01 Математика, 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.03 Механика и математическое моделирование, 02.03.01 Математика и компьютерные науки), а также будет полезно и для студентов других направлений нематематического профиля.

1 . Метод математической индукции

Метод математической индукции является важным способом доказательства утверждений, зависящих от натурального аргумента. В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции.

Доказательство справедливости утверждения $S(n)$ для любого натурального n методом математической индукции проводится в три этапа:

1. База индукции. Проверяется справедливость утверждения $S(n)$ для $n = 1$ (если доказывается, что утверждение $S(n)$ справедливо для $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$, то база индукции проверяется для $n = n_0$);

2. Индукционное предположение. Предполагается справедливость утверждения $S(n)$ при некотором натуральном $n = k$;

3. Индукционный переход. Доказывается справедливость утверждения $S(n)$ для числа $n = k+1$, отталкиваясь от индукционного предположения.

П р и м е р 1.1. Доказать, что число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ кратно 3 при любом $n \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е.

1. База индукции. При $n = 1$ число $a_1 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 9$ кратно 3.

2. Индукционное предположение. Пусть утверждение справедливо при $n = k$, т.е. число $a_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ кратно 3.

3. Индукционный переход. Установим, что при $n = k + 1$ число

$$a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$$

кратно 3.

В самом деле,

$$\begin{gathered}a_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) = \\ = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = \\ = (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3(k^2 + 3k + 3) = a_k + 3(k^2 + 3k + 3).\end{gathered}$$

Таким образом, a_{k+1} представили в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых кратно 3 (a_k кратно 3 в силу индукционного предположения). Следовательно, a_{k+1} кратно 3.

Таким образом, если равенство верно при $n = k$, то оно верно и при $n = k + 1$. Следовательно, формула верна при любом натуральном n.

П р и м е р 1.2. Доказать методом математической индукции, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}. \tag{1.1}$$

Р е ш е н и е.

1. База индукции. Проверим справедливость равенства (1.1) при $n = 1$. Получим верное равенство $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$.

2. Индукционное предположение. Пусть равенство (1.1) верно при $n = k$, т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}. \tag{1.2}$$

3. Индукционный переход. Покажем, что равенство (1.1) верно при $n = k + 1$, т.е.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \tag{1.3}$$

Используя индукционное предположение, заменим сумму всех кроме последнего слагаемых в левой части равенства (1.3) на $\frac{k}{k+1}$ (см. (1.2)), получим

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}.$$

П р и м е р 1.3. Доказать методом математической индукции неравенство Бернулли

$$(1+a)^n \geqslant 1+a\cdot n \tag{1.4}$$

при всех $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $a>-1,\ a\in\mathbb{R}$.

Р е ш е н и е.

1. База индукции. При $n=0$ неравенство (1.4) имеет вид

$$(1+a)^0 \geqslant 1+a\cdot 0,$$
$$1\geqslant 1$$

и, очевидно, верно.

2. Индукционное предположение. Пусть неравенство (1.4) справедливо при $n=k$, т.е.

$$(1+a)^k \geqslant 1+a\cdot k. \tag{1.5}$$

3. Индукционный переход. Покажем, что

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a\cdot(k+1). \tag{1.6}$$

Умножим обе части неравенства (1.5) на положительное число $(1+a)$, получим

$$(1+a)^k \cdot (1+a) \geqslant (1+a\cdot k)\cdot(1+a),$$
$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a+a\cdot k+a^2\cdot k. \qquad (1.7)$$

Поскольку $a^2 \geqslant 0$, имеем

$$1+a+a\cdot k+a^2\cdot k \geqslant 1+a+a\cdot k = 1+a(k+1). \qquad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует справедливость неравенства (1.6). На основании принципа математической индукции заключаем, что неравенство Бернулли верно при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Задачи

Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$:

1. число $7^n - 1$ кратно 6 ;
2. число $5^n - 4n + 15$ кратно 16;
3. число $n(2n^2 - 3n + 1)$ кратно 6;
4. число $2n^3 + 3n^2 + 7n$ кратно 6;
5. число $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11;
6. число $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19.

Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верны равенства:

7. $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
8. $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$;
9. $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$;

10. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

11. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

12. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

13. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$;

14. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

15. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$ при $n \geqslant 2$;

16. $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

Доказать, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства:

17. $2^n > 5n$ при $n \geqslant 5$;

18. $3^n > 5n + 1$ при $n \geqslant 3$;

19. $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} < \dfrac{5n-2}{2n}$;

20. $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ при $n \geqslant 2$.

2. Верхние и нижние грани множества вещественных чисел

Под множеством будем понимать совокупность каких-либо элементов. Множества можно задавать следующими способами: перечислением элементов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ или с помощью признака, которым обладают элементы данного множества, например,

$$A = \left\{ a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество вещественных чисел A называется **ограниченным снизу**, если найдется число m такое, что каждый элемент множества A равен или больше m, т.е.

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \geqslant m.$$

Число m называется **нижней гранью множества** A.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим множество $A = (1;3)$. A ограниченное снизу множество. Например, число $m_1 = -1$ является его нижней гранью. Нижняя грань не единственная, число $m_2 = 0$ (как и любое число менее или равное 1) также является нижней гранью множества A.

На числовой оси множество находится правее каждой своей нижней грани (см. рис. 1).

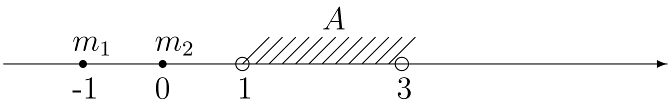

Рис. 1

П р и м е р 2.2. Покажем, что множество $B = (-\infty; 1)$ не является ограниченным снизу. Запишем отрицание к определению 2.1:

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists b_m \in B \quad b_m < m.$$

Для любого (сколь угодно малого) числа m найдется элемент b_m множества B меньший числа m (см. рис. 2).

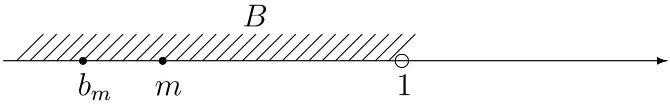

Рис. 2

Элемент b_m множества B можно выбрать не единственным способом. Пусть $b_m = m - 1$. Если $m = -2$, то $b_m = -2 - 1 = -3$. Следовательно, множество B не является ограниченным снизу.

О п р е д е л е н и е 2.2. Множество вещественных чисел A называется **ограниченным сверху**, если найдется число M такое, что каждый элемент множества A равен или меньше M, т.е.

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall a \in A \quad a \leqslant M.$$

Число M называется **верхней гранью множества** A.

О п р е д е л е н и е 2.3. Множество называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.

П р и м е р 2.3. Множество $A = (1; 3)$ ограниченное сверху. Число $M_1 = 4$ является его верхней гранью. Верхняя грань не единственная. Например, число $M_2 = 5$ (как и любое число большее или равное 3) также является верхней гранью множества A (см. рис. 3).

Множество находится левее каждой своей верхней грани.

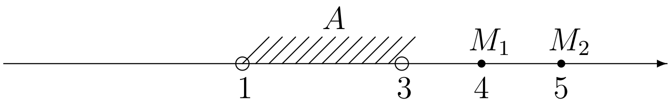

Рис. 3

П р и м е р 2.4. Покажем,что множество $B = (0; +\infty)$ не является ограниченным сверху. Запишем отрицание к определению 2.2:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists b_M \in B \quad b_M > M.$$

Для любого (сколь угодно большого) числа M найдется элемент b_M множества B больший числа M (см. рис. 4).

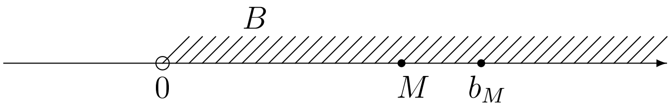

Рис. 4

Элемент b_M множества B можно выбрать не единственным способом. Например, $b_M = M+3$. Если $M = 50$, то $b_M = 50+3 = 53$. Следовательно, множество B не является ограниченным сверху.

О п р е д е л е н и е 2.4. Число s называется **точной нижней гранью** множества A и обозначается $\inf A$, если:
1) $\forall a \in A \quad a \geqslant s$ (s является нижней гранью A);
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A \quad a_\varepsilon < s + \varepsilon$.

Если множество A не является ограниченным снизу, то $\inf A = -\infty$.

П р и м е р 2.5. Пусть $A = (1; 3)$. Покажем, что $\inf A = 1$. Пункт 1) в определении 2.4 примет вид:

$$\forall a \in (1; 3) \quad a \geqslant 1$$

и, очевидно, справедлив. Рассмотрим пункт 2)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in (1;3) \quad a_\varepsilon < 1 + \varepsilon.$$

Это означает, что, если мы «немного» добавим к 1 (а именно, мы добавляем значение ε, которое считаем малым), то найдется элемент нашего множества, который будет меньше $1+\varepsilon$ (см. рис. 5); это означает, что $\inf A$ нельзя увеличить, даже, если увеличение очень мало, нарушается пункт 1).

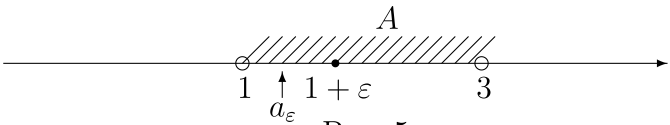

Рис. 5

Например, можно взять $a_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ (середину отрезка $[1; 1+\ \varepsilon]$) или $a_\varepsilon = 1 + \frac{\varepsilon}{3}$. Значение a_ε определяется не единственным образом.

О п р е д е л е н и е 2.5. Число S называется **точной верхней гранью** множества A и обозначается $\sup A$, если:
1) $\forall a \in A \quad a \leqslant S$ (S является верхней гранью A);
2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : \quad a_\varepsilon > S - \varepsilon$.

Если множество A не является ограниченным сверху, то $\sup A = +\infty$.

П р и м е р 2.6. Пусть $A = (1;3)$. Исходя из определения 2.5, покажем, что $\sup A = 3$. Рассмотрим сначала пункт 1) определения 2.5:

$$\forall a \in (1;3) \quad a \leqslant 3,$$

он справедлив. Пункт 2) примет вид:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in (1;3) \quad a_\varepsilon > 3 - \varepsilon,$$

т.е. если мы «немного» вычтем из 3 (вычитаем малое положительное значение ε), то найдется элемент множества A такой, что он будет больше $3-\varepsilon$ (см. рис. 6); это означает, что $\sup A$ нельзя (даже «немного») уменьшить, иначе нарушается справедливость пункта 1).

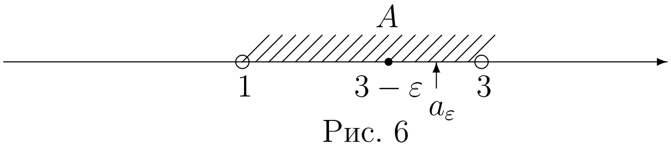

Рис. 6

Например, можно взять $a_\varepsilon = 3 - \frac{\varepsilon}{2}$ (середину отрезка $[3-\varepsilon; 3]$) или $a_\varepsilon = 3 - \frac{2\varepsilon}{3}$.

О п р е д е л е н и е 2.6. Пусть задано множество A и

$$\exists m \in A \quad \forall a \in A \quad a \geqslant m.$$

Число m называется **минимальным элементом** множества A и обозначается $\min A$.

П р и м е р 2.7. Множество $A = [1; 3)$ имеет минимальный элемент $\min A = 1$.

П р и м е р 2.8. Множество $A = (1; 3)$ не имеет минимального элемента. Покажем это. Запишем отрицание к определению 2.6:

$$\forall m \in A \quad \exists a_m \in A \quad a_m < m.$$

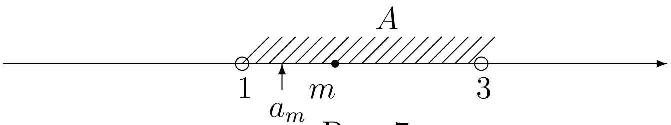

Рис. 7

Элемент a_m можно выбрать не единственным способом. Например, $a_m = \frac{1+m}{2}$ (середина отрезка $[1, m]$) или $a_m = 1 + \frac{m-1}{3}$.

Определение 2.7. Пусть задано множество A и

$$\exists M \in A \quad \forall a \in A \quad a \leqslant M.$$

Число M называется **максимальным элементом** множества A и обозначается $\max A$.

Пример 2.9. Множество $A = (1; 3]$ имеет максимальный элемент $\max A = 3$.

Пример 2.10. Множество $A = (1; 3)$ не имеет максимального элемента. Покажем это. Запишем отрицание к определению 2.7:

$$\forall M \in A \quad \exists a_M \in A \quad a_M > M.$$

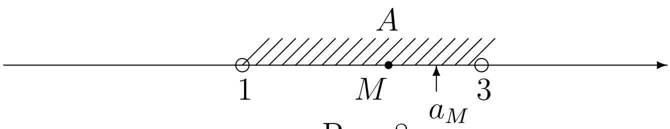

Рис. 8

Элемент a_M определяется не единственным образом (см. рис. 8). Например, $a_M = \frac{M+3}{2}$ (середина отрезка $[M, 3]$).

Замечание 2.1. Если множество A имеет максимальный (минимальный) элемент, то $\max A = \sup A$ ($\min A = \inf A$).

Задачи

а) Установите или опровергните ограниченность A снизу и сверху, с указанием нижней и верхней граней. В случае неограниченности множества докажите это;
б) найдите максимальный $\max A$ и минимальный $\min A$ элементы множества A. В случае их отсутствия докажите это;
в) найдите $\sup A$ и $\inf A$ данного множества.

1. $A = [-2, 3)$.
2. $A = [-1, 4]$.
3. $A = \mathbb{N}$.
4. $A = \mathbb{Z}$.
5. $A = \left\{\dfrac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
6. $A = \left\{\dfrac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
7. $A = \left\{3^{-n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
8. $A = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.
9. $A = \left\{n^2\left(1+(-1)^n\right), n \in \mathbb{N}\right\}$.
10. $A = \left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Ограниченные числовые последовательности

О п р е д е л е н и е 3.1. Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n, то множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ называют числовой последовательностью (или просто последовательностью).

Последовательность обозначают $\{x_n\}$, где x_n называют общим или n-м членом последовательности.

Способы, используемые для задания последовательности:

1) с помощью формулы общего члена последовательности. Например, формула $x_n = 3n, n \in \mathbb{N}$, задает последовательность $\{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$;

2) с помощью рекуррентной формулы, т.е. формулы, выражающей n-й член последовательности через предыдущие. Например, формула $x_{n+1} = x_n + 2$, $x_1 = 1$ задает последовательность $\{1, 3, 5, \ldots\}$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число M такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $x_n \leqslant M$, т.е.

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leqslant M. \tag{3.1}$$

П р и м е р 3.1. Доказать, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 3n + 4} \right\} \tag{3.2}$$

ограничена сверху.

Р е ш е н и е. Общий член последовательности — это правильная дробь (числитель строго меньше знаменателя).

$$x_n = \frac{n^2+2n}{n^2+3n+4} = 1 - \frac{n+4}{n^2+3n+4} < 1 \qquad (3.3)$$

Следовательно, $x_n < 1 = M$ и $\{x_n\}$ ограниченная сверху.

О п р е д е л е н и е 3.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если

$$\exists m \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant m. \qquad (3.4)$$

О п р е д е л е н и е 3.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т.е.

$$\exists m, M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leqslant x_n \leqslant M. \qquad (3.5)$$

Критерий ограниченности числовой последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ ограниченна, тогда и только тогда, когда существует число M^* такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leqslant M^*$, т.е.

$$\exists M^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leqslant M^*. \qquad (3.6)$$

О п р е д е л е н и е 3.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется неограниченной , если

$$\forall M \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |x_n| > M. \qquad (3.7)$$

П р и м е р 3.2. Исследовать последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

Р е ш е н и е. Заданная последовательность является ограниченной, так как для любого натурального номера $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство:

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

То есть последовательность является ограниченной снизу $m = 0$, а сверху $M = 1$, а значит, является ограниченной.

П р и м е р 3.3. Исследовать последовательность

$$\{x_n\} = \{2^{(-1)^n}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

Р е ш е н и е. Последовательность $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots\right\}$ ограничена снизу $\frac{1}{2}$, сверху 2, т.е. ограничена.

П р и м е р 3.4. Исследовать последовательность

$$\{x_n\} = \{(-1)^n n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

Р е ш е н и е. Запишем (3.7) для данной последовательности

$$\forall M \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |(-1)^n n| = n > M. \tag{3.8}$$

Утверждение (3.8) верно, если положить, например, $n = [M] + 1$, где $[M]$ — целая часть числа (наибольшее целое число, не превосходящее числа M). Таким образом, $\{x_n\}$ неограниченная.

П р и м е р 3.5. Исследовать последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\frac{\cos n}{\sqrt{n^4 + 1}}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

на ограниченность.

Р е ш е н и е. Т.к. выполняются неравенства $|\cos n| \leqslant 1$, $\sqrt{n^4+1} > n^2$, то

$$|x_n| = \left|\frac{\cos n}{\sqrt{n^4+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1.$$

Следовательно, последовательность ограничена.

П р и м е р 3.6. Доказать, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\frac{n^3+n}{n^2+3n+2}\right\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

неограниченная.

Р е ш е н и е. Справедлива оценка

$$|x_n| = \left|\frac{n^3+n}{n^2+3n+2}\right| = \frac{n^3+n}{n^2+3n+2} >$$
$$> \frac{n^3}{n^2+3n^2+2n^2} = \frac{n}{6}.$$

Если $\dfrac{n}{6} > M^*$ $(n > 6M^*)$, то и $|x_n| > M^*$. Таким образом, (3.7) верно при $n = [6M^*] + 1$.

Задачи

Исследовать последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ на ограниченность, если

1. $x_n = 100 - n^2$.
2. $x_n = n^3 - 2$.
3. $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$.
4. $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$.
5. $x_n = (-1)^n 2^n$.
6. $x_n = (-1)^n 5^n$.
7. $x_n = (-1)^n \cdot n^2$.
8. $x_n = (-1)^{n+1} \cdot n^3 - 1$.
9. $x_n = n^{(-1)^n}$.
10. $x_n = n^{2(-1)^{n+1}}$.
11. $x_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{9n - 1}$.
12. $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 5n}{4 - n}$.
13. $x_n = \dfrac{(n+2)(n-2n^2)}{2n^3 - 1}$.
14. $x_n = \dfrac{(n^2-2)(1+n)}{1+n^3}$.
15. $x_n = \dfrac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-1)}, n > 1$.
16. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^3+4}}{(n+2)(\sqrt{n}+3)}$.
17. $x_n = \sqrt{4n^2+2} - 2n$.
18. $x_n = 3n - \sqrt{3+9n^2}$.
19. $x_n = \sqrt{n^4+n^3} - \sqrt{n^4-n^3}$.
20. $x_n = \sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n}$.

4 . Предел числовой последовательности

О п р е д е л е н и е 4.1. Число a называют **пределом числовой последовательности** $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для любого натурального $n \geqslant N_\varepsilon$ верно неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Если a является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и говорят, что последовательность x_n сходится к a.

О п р е д е л е н и е 4.2. **ε–окрестностью точки** a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Определение предела числовой можно сформулировать еще таким способом: для каждого положительного ε существует такое натуральное N_ε, что для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ элементы последовательности $\{x_n\}$ принадлежат ε–окрестности точки a или, другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ вне ε–окрестности находится только конечное число членов последовательности.

Числовые последовательности, сходящиеся к нулю называют **бесконечно малыми**.

П р и м е р 4.1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \frac{1}{n}$, бесконечно малая.

Р е ш е н и е. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Решим неравенство $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ относительно n, получим

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \frac{1}{\varepsilon} < n. \tag{4.3}$$

Утверждение (4.3) справедливо, например, при $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$, т.е. само это число, если оно целое, или ближайшее слева целое число, если $\frac{1}{\varepsilon} \notin \mathbb{Z}$). Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Равенство $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ позволяет нам вычислить значение N_ε для каждого положительного ε. Например, при $\varepsilon = 0,2$ имеем $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{0,2}\right] + 1 = 6$. А при $\varepsilon = 0,03$ находим $N_\varepsilon = 34$. При уменьшении ε значение N_ε увеличивается.

Изобразим члены последовательности $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ на числовой прямой:

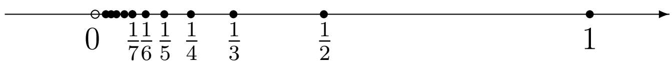

Рис. 1

Видим, что элементы x_n числовой последовательности всё ближе приближаются к нулю при возрастании n. Другими словами, какую бы окрестность нуля мы не взяли, вне этой окрестности либо конечное число членов последовательности, либо их вообще нет.

П р и м е р 4.2. Исходя из определения, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2} = 0.$$

Р е ш е н и е. Перепишем определение 4.1 для данного случая:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\frac{2n-1}{n^2}\right| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Усилим неравенство $\frac{2n-1}{n^2} < \varepsilon$. И вместо (4.4) запишем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \frac{2n}{n^2} < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Мы увеличили дробь $\frac{2n-1}{n^2}$, увеличив её числитель. А если большая величина $\frac{2n}{n^2}$ будет меньше ε, то и меньшая величина $\frac{2n-1}{n^2}$ также не превзойдет ε. Таким образом, если выполнено (4.5), то выполнено и (4.4). Умножим неравенство в (4.5) на n и разделим на ε, получим $\frac{2}{\varepsilon} < n$. Отсюда находим $N_\varepsilon = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$.

П р и м е р 4.3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-5}{n+1} = 1$.

Р е ш е н и е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\frac{n-5}{n+1} - 1\right| < \varepsilon. \tag{4.6}$$

Перепишем неравенство $\left|\frac{n-5}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ в виде $\frac{6}{n+1} < \varepsilon$, отсюда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \frac{6}{\varepsilon} - 1 < n. \tag{4.7}$$

Утверждение (4.7) справедливо, например, при $N_\varepsilon = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right]$.

П р и м е р 4.4. Пользуясь определением, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \neq 1.$$

Р е ш е н и е. Запишем отрицание к (4.1)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad |x_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{4.8}$$

Последнее неравенство в (4.8) для данной числовой последовательности $\left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right| \geqslant \varepsilon$ рассмотрим для четных и нечетных значений n, а именно, $1 - \frac{1}{n+1} \geqslant \varepsilon$ для четных n и $1 + \dfrac{1}{n+1} \geqslant \varepsilon$ для нечетных n. Неравенство для нечетных n выполнено для $\varepsilon_1 = 1$. Левая часть неравенства $1 - \frac{1}{n+1} \geqslant \varepsilon$ увеличивается с возрастанием n, поэтому для четных n выберем $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ (соответствует $n = 1$). Таким образом, при значении $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \frac{1}{2}$ неравенство $\left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right| \geqslant \varepsilon$ справедливо для $\forall n \in \mathbb{N}$. Получили

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n = N + 1 \geqslant N \quad \left|\frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right| \geqslant \varepsilon$$

(значение n определяется неоднозначно, можно выбрать любое натуральное число превосходящее N, например, $n = 3N$).

О п р е д е л е н и е 4.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для каждого $E > 0$ существует такое натуральное N, что для любого $n \geqslant N$ верно неравенство $|x_n| > E$ или

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |x_n| > E;$$

пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность имеет бесконечный предел.

Бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ сходится к $+\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n > E;$$

пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Бесконечно большая последовательность $\{x_n\}$ сходится к $-\infty$, если

$$\forall E > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad x_n < -E; \tag{4.9}$$

пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной и расходящейся.

П р и м е р 4.5. Исходя из определения, доказать

$$\lim_{n\to\infty}(n^2-1) = +\infty.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \quad n^2-1>E$$

или

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \quad n>\sqrt{E+1}. \tag{4.10}$$

Утверждение (4.10) верно, например, при $N=[\sqrt{E+1}]+1$.

П р и м е р 4.6. Исходя из определения, доказать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n+1} = -\infty.$$

Р е ш е н и е. Запишем (4.9) для данной числовой последовательности

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \quad \frac{-n^2}{n+1}<-E. \tag{4.11}$$

Справедлива оценка

$$\frac{n^2}{n+1}\geqslant\frac{n^2}{n+n}=\frac{n}{2}.$$

Усиливая неравенство, запишем утверждение, из справедливости которого будет следовать справедливость (4.11)

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \quad \frac{n}{2}>E. \tag{4.12}$$

При $N=[2E]+1$ (4.12) верно.

П р и м е р 4.7. Исходя из определения, доказать

$$\lim_{n\to\infty}\big((-1)^n\cdot n^2+5\big)=\infty.$$

Р е ш е н и е. Покажем, что

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad \forall n\geqslant N \quad |(-1)^n\cdot n^2+5|>E. \tag{4.13}$$

Заметим, что

$$(-1)^n\cdot n^2+5=\begin{cases} n^2+5, & n-\text{четное},\\ -n^2+5 & n-\text{нечетное}.\end{cases}$$

Усилим неравенство в (4.13)

$$\forall E>0 \quad \exists N\in\mathbb{N} \quad N\geqslant 3 \quad \forall n\geqslant N \quad n^2-5>E. \tag{4.14}$$

При $N=\max\{3,[2E]+1\}$ (4.14) верно.

Задачи

Исходя из определения предела числовой последовательности, докажите равенства

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1+(-1)^{n+1}}{n} = 0.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(-1)^n}{n} = 0.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{1+n} = -1.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2} = 1.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+3n^2}{n^2} = 3.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2}{\sqrt[3]{2n-9}} = 0.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n+1}} = 0.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{\pi n}{2} = 0.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n+1}} = 0.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-2}{n^3} = 0.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^3+1} = 0.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} (-0,1)^n = 0.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} 0,3^n = 0.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n}} = 2.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n} = 0, |q| \leqslant 1.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{0,2^n}{5n} = 0.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{(n+1)4^n} = 0.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n2^n} = 0.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \neq 0.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{(n+1)4^n} \neq 1.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{n} \neq 0.$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{1+n} \neq 1.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+n}{3-n}\right) \neq -2.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4+n}{1+n}\right) \neq 0.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} (n+3)^2 = +\infty.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty.$

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty.$

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{2n+1} = +\infty.$

33. $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2+4) = -\infty.$

34. $\lim\limits_{n\to\infty} (2-\sqrt{n+6}) = -\infty.$

35. $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n\right) = \infty.$

36. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi + 2\pi \mathrm{n}}{4}\right) = \infty.$

5. Вычисление пределов числовых последовательностей с помощью простейших преобразований

Т е о р е м а 5.1. (об арифметических свойствах пределов числовых последовательностей). Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, т.е. существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:

1) последовательности $\{x_n \pm y_n\}$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

2) последовательность $\{x_n y_n\}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n;$$

3) последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ также сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

если $y_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют неопределенностями. Основные виды неопределенностей:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty), (1^\infty), (0^\infty), \left(\infty^0\right).$$

Все другие выражения неопределенностями не являются и принимают вполне конкретное конечное или бесконечное значение.

Раскрывать неопределенности позволяет упрощение вида общего члена последовательности (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.).

Пример 5.1. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{10n^2+12n}.$$

Решение. При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Вынесем в числителе старшую степень n^3, а в знаменателе n^2, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{10n^2+12n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(10+\frac{12}{n}\right)}.$$

Используя теорему 5.1, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{10+\frac{12}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(10+\frac{12}{n}\right)}=\infty.$$

Пример 5.2. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{2n^4+n^2+1}.$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-1}{2n^4+n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{n\left(2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

П р и м е р 5.3. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^2-(2n-1)^2}{n^2+2n+1}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)^2-(2n-1)^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+10n}{n^2+2n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(5+\frac{10}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{10}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{10}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = 5.$$

П р и м е р 5.4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)},$$

где

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0,$$
$$Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1}n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0.$$

Р е ш е н и е. Вынесем в числителе n^k, а в знаменателе n^m, получим

$$P_k(n) = n^k\left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k}\right),$$
$$Q_m(n) = n^m\left(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \cdots + \frac{b_0}{n^m}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{a_0}{n^k})}{n^m(b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \cdots + \frac{b_0}{n^m})}.$$

Таким образом,

если $k > m$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \infty;$$

если $k < m$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = 0;$$

если $k = m$, то по теореме 5.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_m(n)}{Q_m(n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^m}} = \frac{a_m}{b_m}.$$

Замечание 5.1. При вычисление предела последовательности, n–ый член которой является частным двух многочленов, т.е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, необходимо вынести старшие степени в числителе и знаменателе. Возможны следующие случаи:

1) если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя, то предел равен ∞;

2) если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя, то предел равен 0;

3) если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя, то предел равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Пример 5.5. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + \ldots + (2n-1)}{3n^2}.$$

Р е ш е н и е. Применим в числителе формулу суммы n членов арифметической прогрессии $S_n = (a_1 + a_n)n/2$. Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{3n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+(2n-1))n}{2\cdot 3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

П р и м е р 5.6. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+3n^2n!}{5(n+2)!+n!}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+3n^2n!}{5(n+2)!+n!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!+3n^2n!}{5(n+2)(n+1)n!+n!} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1+3n^2}{5(n+2)(n+1)+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+1}{5n^2+15n+11} = \frac{3}{5}.$$

П р и м е р 5.7. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n}+\sqrt[5]{32n^{10}+1}}{(n+\sqrt[4]{n})\sqrt[3]{n^3-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^{5/6}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{5/6}}+\sqrt[5]{32+\frac{1}{n^{10}}}}{\left(1+\frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^3}}} = 2.$$

П р и м е р 5.8. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2\cdot 4^n}{4^{n+1} - 5}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} + 2\cdot 4^n}{4^{n+1} - 5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n\cdot 3 + 2\cdot 4^n}{4^n\cdot 4 - 5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(3\cdot\frac{3^n}{4^n} + 2\right)}{4^n\left(4 - \frac{5}{4^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\frac{3^n}{4^n} + 2}{4 - \frac{5}{4^n}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

П р и м е р 5.9. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right).$$

Р е ш е н и е. Умножим и разделим на выражение

$$\sqrt{n^2+2n+3} + n,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3} - n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3} + n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3-n^2}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{3}{n})}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} + 1\right)} = 1.$$

Задачи

Вычислите пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+4n)^2 + n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2-3n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4-n)^3 - (3-n)^3}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2-n)^3 + (1-n)^3}{(1+n)^2 - (1+n)^4}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{n^4+2}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^n}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+1)!}{(n+2)!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+1)!+(3n+2)!}{(3n+3)!-(3n+2)!}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+3}+n^2}{\sqrt[4]{n^{12}+2n+1}-n^2}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n^3-\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^3+3}-\sqrt{n+5}}{\sqrt[3]{n^3+2}-\sqrt{n-1}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}-\sqrt{n-2}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-3^{n+1}}{2^{n+1}+2^{n+2}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n(n+6)}-n\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{4+8n^3}-2n\right)$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n+\sqrt[3]{3-n^3}\right)$.

6 . Число e

О п р е д е л е н и е 6.1. Числом e называется предел числовой последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

П р и м е р 6.1. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{3}{2}} =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

П р и м е р 6.2. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n\cdot\frac{n-1}{n-1}} =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = e^1 = e.$$

П р и м е р 6.3. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n^2} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n^2\cdot\frac{-(n+1)}{2}\cdot\frac{2}{-(n+1)}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)}{2}}\right)^{\frac{2n^2}{-(n+1)}} = (e^{-\infty}) = 0.$$

П р и м е р 6.4. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3}\right)^{2-n+n^2}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3}{n^3}\right)^{2-n+n^2} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{(2-n+n^2)\cdot\frac{n^2}{3}\cdot\frac{3}{n^2}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}}\right)^{\frac{3(2-n+n^2)}{n^3}} = e^0 = 1.$$

П р и м е р 6.5. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2+1}.$$

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2+1} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(2n^2+1)\cdot\frac{n+1}{n+1}} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{\frac{2n^2+1}{n+1}} = (e^{+\infty}) = +\infty.$$

Задачи

Вычислите пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{n}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{6n}\right)^{n}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{n^2}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{5n}\right)^{n^2}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n-1}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3n}\right)^{3n}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n^2+2n+7}\right)^{1-n^2}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{6-n^2+3n}\right)^{2n^2-6n}.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{n^2}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6}{n^2+8}\right)^{1-n^2}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3}\right)^{4+n^2}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-n^3}{-n^3-1}\right)^{n^2+1}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3-3n+8}{4+2n^3}\right)^{n^2+1}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2n+3n^2}{3n^2-8n}\right)^{5n}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-n^2}{4-n^2}\right)^{6n^3}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n^2+2}\right)^{2n^3}.$

7. Подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности

О п р е д е л е н и е 7.1. Последовательность

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\},$$

полученная из $\{x_n\}$, удалением ряда ее членов без изменения порядка следования оставшихся членов, называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

П р и м е р 7.1. Рассмотрим числовую последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Выпишем две ее подпоследовательности

$$\{x_{n_k}\} = \left\{\frac{1}{2k}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\},$$

$$\{x_{n_l}\} = \left\{\frac{1}{5l-1}\right\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}.$$

О п р е д е л е н и е 7.2. Точка $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ называется **частичным пределом последовательности** $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к a.

О п р е д е л е н и е 7.3. Верхним (нижним) частичным пределом последовательности называется число, которое является наибольшим (наименьшим) частичным пределом последовательности. Верхний и нижний частичные пределы обозначаются, соответственно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то верхний частичный предел равен плюс бесконечности $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$. Соответственно, если последовательность не ограничена снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

П р и м е р 7.2. Рассмотрим числовую последовательность

$$\{y_n\} = \{(-1)^n\}$$

и две ее подпоследовательности

$$\{y_{n_k}\} = \{y_{2k}\} = \left\{(-1)^{2k}\right\} = \{1, 1, 1, \ldots\}, \quad \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = 1,$$

$$\{y_{n_l}\} = \{y_{2l+1}\} = \left\{(-1)^{2l+1}\right\} = \{-1, -1, -1, \ldots\}, \quad \lim_{l\to\infty} y_{n_l} = -1.$$

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n = -1$.

П р и м е р 7.3. Найдите все частичные пределы числовой последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \sin\frac{\pi n}{2}$. Выпишите верхний и нижний пределы $\{x_n\}$.

Р е ш е н и е. Выпишем несколько первых членов последовательности $\{x_n\} = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\}$. Члены последовательности повторяются через четыре шага за счет периодичности функции $\sin(x)$. Таким образом, можно выделить следующие подпоследовательности:

1) $n = 1 + 4k$, $x_{n_k} = \sin\frac{\pi(1+4k)}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$,

2) $n = 2 + 2k$, $x_{n_k} = \sin\frac{\pi(2+4k)}{2} = \sin(\pi + 2\pi k) = 0$,

3) $n = 2 + 4k$, $x_{n_k} = \sin\frac{\pi(3+4k)}{2} = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$.

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1$.

Задачи

Найдите все частичные пределы числовой последовательности $\{x_n\}$. Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

1. $x_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2. $x_n = \dfrac{1+n}{n}$.

3. $x_n = (-1)^n \dfrac{4n-1}{n+6}$.

4. $x_n = (-1)^{n-1} \dfrac{n+6}{n-1}$.

5. $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$.

6. $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

7. $x_n = 2^{(-1)^n n}$.

8. $x_n = \dfrac{4}{3^{(-1)^n n}}$.

9. $x_n = \dfrac{n\cos(\pi n/2)+2}{n+1}$.

10. $x_n = \dfrac{1-n\sin(\pi n/4)}{2n-7}$.

11. $x_n = (\cos(\pi n/4))^{n+1}$.

12. $x_n = (\sin(\pi n/4))^{n}$.

13. $x_n = \dfrac{(1+\sin(\pi n/2))+\lg n}{\lg(3n)}$.

14. $x_n = \dfrac{(1+\cos(\pi n))+\lg n}{\lg(5n)}$.

15. $x_n = n^{\sin(\pi n/2)}$.

16. $x_n = n^{\sin(\pi n/3)}$.

8. Предел монотонной последовательности

О п р е д е л е н и е 8.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей (убывающей)*, если для каждого номера n выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$. Возрастающие и убывающие последовательности называются *строго монотонными.*

О п р е д е л е н и е 8.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если для каждого номера n выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$. Возрастающие и убывающие последовательности называются *нестрого монотонными.*

В некоторых случаях приведённые неравенства могут не выполняться для малых значений n. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$ является монотонной при достаточно больших n.

Для проверки строгой или нестрогой монотонности часто применяют один из двух способов:

1) если разность двух соседних членов последовательности $x_{n+1} - x_n > 0$ (или < 0), то последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая (или убывающая); если же $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$), то последовательность $\{x_n\}$ — неубывающая (невозрастающая);

2) если последовательность $\{x_n\}$ состоит из положительных чисел и частное двух соседних членов $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ (или < 1), то последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая (или убывающая); если же $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant 1$ (или $\leqslant 1$), то последовательность $\{x_n\}$ — неубывающая (или невозрастающая).

П р и м е р 8.1. Покажем, что последовательность

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1}$$

является возрастающей.

Для этого рассмотрим разность двух соседних членов последовательности:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1} = \frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}.$$

Последнее выражение, очевидно, является положительным при каждом натуральном n. Следовательно последовательность x_n является возрастающей.

П р и м е р 8.2. Пусть $x_n = \frac{2^n}{n!}$. Рассмотрим частное соседних членов последовательности:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1}.$$

Отсюда видно, что при $n \geqslant 2$ отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, следовательно последовательность x_n является убывающей начиная со второго элемента.

Т е о р е м а 8.1 (Вейерштрасса). *Если $\{x_n\}$ — неубывающая или возрастающая, но ограниченная сверху последовательность, то она имеет предел, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$. Аналогично, если последовательность $\{x_n\}$ — невозрастающая или убывающая, но ограничена снизу, то она имеет предел, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$.*

Теорема Вейерштрасса обычно используется для доказательства существования предела последовательности, заданной рекуррентно.

П р и м е р 8.3. Пусть $x_1 = 0$ и $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{2}$ при $n = 1, 2, \ldots$ Требуется найти предел этой последовательности. Докажем с помощью метода математической индукции, что $x_n < 1$ для всех n. При $n = 1$ это неравенство выполняется. Предположим, что оно выполняется также при некотором $n = k$. Тогда $x_{k+1} = \frac{x_k+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху числом 1. Теперь установим монотонность последовательности. Рассмотрим разность соседних членов:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + 1}{2} - x_n = \frac{1 - x_n}{2} > 0, \text{ так как } x_n < 1.$$

Это значит последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая. По теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Обозначим этот предел через a. Легко установить, что тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$. Тогда из определения самой последовательности и арифметических свойств предела получаем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 1}{2} \Longleftrightarrow a = \frac{a+1}{2}.$$

Полученное уравнение имеет единственное решение $a = 1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

П р и м е р 8.4. Пусть $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ для $n = 1, 2, \ldots$ Убедимся сначала, что все элементы последовательности ограничены сверху числом 2. При $n = 1$ это утверждение верно. Если предположить, что при некотором натуральном k будет $x_k < 2$, то получим

$$x_{k+1} < \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2.$$

Методом математической индукции тогда заключаем $x_n < 2$ при всех n. Заметим также из определения самой последовательности, что $x_n > 0$ для всех n. Исследуем теперь монотонность последовательности x_n. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2 + x_n} - x_n = \frac{2 + x_n - x_n^2}{\sqrt{2 + x_n} + x_n} = \frac{(2 - x_n)(1 + x_n)}{\sqrt{2 + x_n} + x_n}$$

В последнем выражении числитель и знаменатель принимают положительные значения при всех n. Следовательно $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность x_n возрастающая. По теореме Вейерштрасса она имеет предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Поэтому из определения последовательности получаем[1]

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + x_n} \Longleftrightarrow a = \sqrt{2 + a}.$$

Получившееся иррациональное уравнение имеет единственный корень $a = 2$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

В рассмотренных примерах этап доказательства существования предела является принципиально важным. Если опустить этот этап и перейти непосредственно к вычислению значения предела, можно получить ошибочные результаты. В связи с этим приведём следующий пример.

П р и м е р 8.5. Пусть $x_n = 2^{n-1}$. Эту же последовательность можно задать равенствами $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$ при $n = 1, 2, \ldots$ Если предположить, что последовательность имеет конечный предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 2x_n \Longleftrightarrow a = 2a.$$

[1] Помимо арифметических свойств предела, здесь также используется свойство непрерывности функции $y = \sqrt{x}$. Понятие непрерывности изучается позже в теме «Предел функции».

Отсюда заключаем, что $a = 0$. Однако в действительности эта последовательность является бесконечно большой и $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1} = +\infty$. Причина возникшего противоречия заключается как раз в том, что данная последовательность не имеет конечного предела.

В некоторых случаях, когда последовательность оказывается не монотонной, целесообразно применять теорему Вейерштрасса к её подпоследовательностям.

П р и м е р 8.6. Рассмотрим последовательность, заданную равенствами $x_{n+1} = 2 - \frac{x_n}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$. Из определения последовательности выводим $x_n = 2 - \frac{x_{n-1}}{2}$, откуда получаем

$$x_{n+1} = 2 - \frac{2 - \frac{x_{n-1}}{2}}{2} = 1 + \frac{x_{n-1}}{4}. \tag{8.1}$$

Методом математической индукции покажем, что подпоследовательность из элементов с нечётными номерами x_{2k-1} ограничена сверху числом $\frac{4}{3}$, а подпоследовательность с чётными номерами x_{2k} ограничена снизу этим же числом. Замечаем, что $x_1 < \frac{4}{3}$ и $x_2 = \frac{7}{4} > \frac{4}{3}$. Предположим, что наши предположения выполняются для некоторых значений k. Тогда из равенства (8.1) получаем

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= 1 + \frac{x_{2k-1}}{4} < 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}, \\ x_{2k+2} &= 1 + \frac{x_{2k}}{4} > 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ограниченность обеих подпоследовательностей доказана. Покажем, что подпоследовательность x_{2k-1} возрастающая, а подпоследовательность x_{2k} убывающая. Из равенства (8.1) следует

$x_{n+1} - x_{n-1} = 1 - \frac{3}{4}x_{n-1}$. Поэтому

$$x_{2k+1} - x_{2k-1} = 1 - \frac{3}{4}x_{2k-1} > 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 0,$$
$$x_{2k+2} - x_{2k} = 1 - \frac{3}{4}x_{2k} < 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 0.$$

Из монотонности и ограниченности каждой из подпоследовательностей по теореме Вейерштрасса следует существование их пределов: $a_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$ и $a_2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$. В равенстве (8.1) положим сначала $n = 2k - 1$, а затем $n = 2k$ и перейдём в обоих случаях к пределу при $k \to \infty$. Получим уравнения

$$a_i = 1 + \frac{1}{4}a_i, \quad \text{где } i = 1 \text{ или } 2.$$

Отсюда находим $a_1 = a_2 = \frac{4}{3}$. Так как пределы подпоследовательностей равны, то вся последовательность сходится к этому же пределу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{4}{3}$.

Приведём ещё один пример последовательности, заданной рекуррентно, но не имеющей предела.

Пример 8.7. Пусть $x_1 = 3$, $x_{n+1} = x_n^2 + x - 4$. Если предположить, что эта последовательность имеет предел, придём к уравнению $a = a^2 + a - 4$, откуда возможными значениями предела будут числа $a = \pm 2$. Однако, ни одно из них не является пределом последовательности. Покажем методом математической индукции, что для всех n выполняется неравенство $x_n \geqslant 2 + n$. При $n = 1$ неравенство верно. Пусть неравенство верно также при некотором значении k. Заметим, что функция $f(x) = x^2 + x - 4$ является возрастающей на промежутке $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Поэтому

$$x_{k+1} = f(x_k) \geqslant f(2+k) = (2+k)^2+2+k-4 = 2+k^2+5k \geqslant 2+k+1.$$

Тем самым, неравенство доказано. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(2+n)=\infty$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Задачи

Доказать монотонность и ограниченность числовой последовательности, найти предел последовательности x_n.

1. $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2},\ x_1 = 1.$ 2. $x_{n+1} = \dfrac{3x_n - 1}{4},\ x_1 = 0.$

3. $x_{n+1} = x_n^2 + x_n - \dfrac{1}{4},\ x_1 = 1.$ 4. $x_{n+1} = 2x_n^2 - x_n + \dfrac{3}{8},\ x_1 = \dfrac{1}{2}.$

5. $x_{n+1} = \sqrt{x_n - 2} + 2,\ x_1 = 4.$ 6. $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n^2},\ x_1 = \dfrac{1}{2}.$

Доказать монотонность и ограниченность подпоследовательностей x_{2k-1} и x_{2k}, найти предел последовательности x_n.

7. $x_{n+1} = \dfrac{3 - x_n}{2},\quad x_1 = 2.$ 8. $x_{n+1} = \dfrac{3}{2 + x_n},\quad x_1 = 0.$

Показать, что последовательность не имеет предела.

9. $x_{n+1} = \dfrac{3}{n},\quad x_1 = 1.$ 10. $x_{n+1} = 2x_n - 1,\quad x_1 = 2.$

Материалы для проведения коллоквиума по теме «Предел последовательности»

В этом пункте пособия приведены рекомендуемые материалы для проведения коллоквиума по математическому анализу. Рассмотрены теоретические вопросы и теоретические упражнения.

Решения предлагаемых упражнений должны сопровождаться подробными рассуждениями. Если предложенное в упражнении утверждение является верным, то оно должно быть доказано в соответствии с определениями используемых понятий или с применением подходящих теорем. Если же утверждение является ложным, это нужно подтвердить подходящим примером.

1. Грани числовых множеств. Ограниченные множества. Точная верхняя и нижняя грани множеств. Теорема о существовании точных верхней и нижней граней ограниченного множества.

2. Определение предела числовой последовательности. Теорема о единственности предела.

3. Ограниченные последовательности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.

4. Арифметические свойства предела: умножение на число, предел модуля, предел суммы и разности.

5. Арифметические свойства предела: пределы произведения и частного.

6. Переход к пределу в неравенствах. Принцип двух милиционеров.

7. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса о пределе ограниченной монотонной последовательности.

8. Последовательности, сходящиеся к $\pm\infty$, бесконечно большая последовательность. Неограниченность бесконечно большой последовательности.

9. Определение числа e.

10. Принцип вложенных отрезков.

11. Частичный предел последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса о существовании частичного предела. Верхний и нижний пределы последовательности.

12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

Теоретические упражнения по теме «Предел последовательности»

1. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, причём $x_n > 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Можно ли тогда утверждать, что последовательность $\{x_n^{y_n}\}$ также ограничена?

2. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и отлична от нуля для всех $n = 1, 2, \ldots$ Можно ли утверждать тогда, что последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ также ограничена?

3. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, причём $x_n > 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Можно ли тогда утверждать, что последовательность $\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\}$ также ограничена?

4. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а $\{y_n\}$ не ограничена. Можно ли тогда утверждать, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ также не ограничена?

5. Привести примеры бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

6. Пусть $\{x_n\}$ — неограниченная последовательность и $x_n \neq 0$. Следует ли отсюда, что последовательность $\frac{1}{x_n}$ является ограниченной?

7. Приведите пример последовательности $\{x_n\}$ такой, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n = 1$.

8. Приведите пример последовательности $\{x_n\}$ такой, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^n = +\infty$.

9. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

10. Пусть последовательность $\{x_n\}$ — монотонная (строго или нестрого). Следует ли отсюда, что последовательность $\{|x_n|\}$ также является монотонной?

11. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются монотонными (строго или нестрого). Следует ли отсюда, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ также является монотонной?

12. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, а последовательность $\{y_n\}$ монотонна (строго или нестрого). Можно ли утверждать, что последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ является ограниченной?

Контрольная работа по теме «Предел последовательности»

Вариант 1.

1. Исследуйте числовую последовательность $\{x_n\}$ на ограниченность, если

$$x_n = \frac{2n+3}{2n}\cos n.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2n-3} = \frac{1}{2}.$$

3. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(1-n)^2}{1+3n}.$$

4. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[8]{n^2+1}+\sqrt[3]{n}}{(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[7]{n})\sqrt{n}}.$$

5. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{3n+1}.$$

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = \frac{5+n(-1)^{n+1}}{3+4n}.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности $\{x_n\}$ и найдите его, если $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$.

8*. Приведите пример бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2 - y_n^2) = 5$.

Вариант 2.

1. Исследуйте числовую последовательность $\{x_n\}$ на ограниченность, если

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{2 + n}.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n - 1}{6n} \neq \frac{1}{3}.$$

3. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 - 1} - n\right).$$

4. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{3n - n^2} + \sqrt[2]{n^3}}{(4n + \sqrt[5]{n})\sqrt{n}}.$$

5. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 - 2}\right)^{1 - n^2}.$$

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = \left(\cos \frac{\pi n}{2}\right)^n.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности $\{x_n\}$ и найдите его, если $x_1 = \dfrac{9}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 8x_n + 20$.

8*. Приведите пример бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2-y_n^2) = -3$.

Вариант 3.

1. Исследуйте числовую последовательность $\{x_n\}$ на ограниченность, если

$$x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}.$$

2. Используя определение предела числовой последовательности, докажите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{1-n} = -\infty.$$

3. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + 2n! \cdot n^2}{2n(n+1)! - 7n}.$$

4. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)}{4+5n}.$$

5. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+3n-1}{4n+n^2}\right)^{n^2}.$$

6. Найдите все частичные пределы числовой последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi + 2\pi n}{4}.$$

Выпишите верхний и нижний пределы данной последовательности.

7. Докажите существование предела последовательности $\{x_n\}$ и найдите его, если $x_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$.

8*. Приведите пример бесконечно малых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n^2} = 1$.

Ответы

к разделу 2.

1. A ограничено, $\max A\ \nexists$, $\min A = -2$, $\sup A = 3$, $\inf A = -2$.
2. A ограничено, $\max A = 4, \min A = -1, \sup A = 4, \inf A = -1$.
3. A ограничено только снизу, $\max A\ \nexists$, $\min A = 1$, $\sup A = +\infty$, $\inf A = 1$.
4. A не ограничено, $\max A \nexists$, $\min A\ \nexists$, $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$.
5. A ограничено, $\max A = 2$, $\min A\ \nexists$, $\sup A = 2$, $\inf A = 0$.
6. A ограничено, $\max A = 2$, $\min A\ \nexists$, $\sup A = 2$, $\inf A = 1$.
7. A ограничено, $\max A = 1/3$, $\min A\ \nexists$, $\sup A = 1/3$, $\inf A = 0$.
8. A ограничено, $\max A = 1$, $\min A = 0$, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.
9. A ограничено только снизу, $\max A\ \nexists$, $\min A = 0$, $\sup A = +\infty$, $\inf A = 0$.
10. A ограничено,$\max A = 1,5,\min A = 0$, $\sup A = 1,5$, $\inf A = 0$.

к разделу 5.

1. $\dfrac{12}{17}$; **2.** $-\dfrac{1}{2}$; **3.** 0; **4.** 0; **5.** $\dfrac{1}{2}$; **6.** 2; **7.** 1,2; **8.** $\dfrac{12}{7}$; **9.** $+\infty$; **10.** 0; **11.** 0; **12.** 5; **13.** $+\infty$; **14.** $+\infty$; **15.** 4; **16.** $-\infty$; **17.** $\dfrac{1}{2}$; **18.** 3; **19.** 0; **20.** 0.

к разделу 6.

1. $e^{1/4}$; **2.** $e^{1/6}$; **3.** $+\infty$; **4.** $+\infty$; **5.** e^{-1}; **6.** e^{-2}; **7.** e^5; **8.** e^4; **9.** e; **10.** e^{14}; **11.** 1; **12.** 1; **13.** $e^{-3/2}$; **14.** $e^{50/3}$; **15.** 0; **16.** 0.

к разделу 7.

1. 2. **2.** -1. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** 3. **6.** 0. **7.** 1. **8.** 1.

к разделу 8.

1. 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

3. $-4, 4$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 4$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -4$.

4. 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

5. $\pm 1 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

6. ± 1, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

7. 0, $+\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

8. 0, $+\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

9. ± 1, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

10. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\pm\dfrac{1}{2}$, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$.

11. ± 1, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

12. ± 1, 0; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1$.

13. 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

14. 1; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

15. $0, 1, +\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

16. $0, 1, +\infty$; $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Список литературы

[1] **Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа/ Г.Н. Берман. — Москва : Лань 2016.**

[2] **Вавилов В.В. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие/ В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. — М.: Наука, 1990. — 608с.**

[3] **Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной:Учеб.пособие для вузов рек.МО РФ / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. — 2-е изд.,перераб. — М. : Высш. шк., 2002. — 724с.**

[4] **Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб.пособие для вузов/ Б.П. Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558с.**

[5] **Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.)/ В.А. Зорич. — М.: МЦНМО, 2012. — 818 с.**

[6] **Ильин В.А. Математический анализ. Ч. 1 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров/ В.А. Ильин, В.А Садовничий, Б.Х. Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.**

[7] **Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1/ Л.Д. Кудрявцев. — М. : Издательство Юрайт, 2017.**

[8] **Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие/ Под ред. Л.Д. Куд-**

рявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

[9] Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин [и др.]. — Москва : Айрис Пресс, 2013. — 574 с.

[10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. для вузов рек. МО РФ : в 3-х т. Т.1/ Г.М. Фихтенгольц. - 8-е изд. — М. : Физматлит, 2006. — 679 с.

[11] Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 / В.С. Шипачев, А.Н. Тихонов. - Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 248с.

Содержание

Учебное издание

Соловьева Надежда Александровна
Тинюкова Татьяна Сергеевна
Федоров Дмитрий Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ.
ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 00.12.2019. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 7,67. Уч. изд. л. 0,00.
Тираж 20 экз. Заказ №

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4.