

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 17, стр. 190–207 (2020)

DOI 10.33048/semi.2020.17.014

УДК 519.175

MSC 05C30

О РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ
ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В.И. РОДИОНОВ

ABSTRACT. In two previous works of the author, published in this journal, a series of formulas are obtained related to the themes of enumeration of partial orders (finite topologies). In the first work, a formula is proved that reduces the calculation of the number $T_0(n)$ of all partial orders defined on an n -set to the calculation of the numbers $W(p_1, \dots, p_k)$ of partial orders of a special form. In the second paper, a partially convolute formula is obtained for the number $T_0(n)$. Relations of a recurrent nature are obtained that relate the individual values $W(p_1, \dots, p_k)$. Explicit formulas are presented for calculating the individual values $W(p_1, \dots, p_k)$. In this paper, we obtain new recurrence relations that relate the separate numbers $W(p_1, \dots, p_k)$ between themselves. The obtained equations are enough to calculate without the computer the numbers $T_0(n)$ for all $n < 9$. To calculate the number $T_0(9)$ of these relations not enough (the number of required numbers $W(p_1, \dots, p_k)$ is 128, and the rank of the system matrix is 123; there are not enough five equations generating the desired rank). We admit the presence of some general regularity generating new formulas.

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает исследования [1, 2].

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве $X \doteq \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных

RODIONOV, V.I., ON RECURSION RELATIONS IN THE PROBLEM OF ENUMERATION OF POSETS.

© 2020 Родионов В.И.

Поступила 2 декабря 2019 г., опубликована 25 февраля 2020 г.

транзитивных орграфов, определенных на X ; кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0 -топологий, определенных на X . Пусть $T_0(n) \doteq \text{card } \mathcal{T}_0(X)$. Очевидно, $T_0(n) = \text{card } \mathcal{V}_0(X) = \text{card } \mathcal{V}_0^0(X)$. В работе [1] доказана формула

$$(1) \quad T_0(n) = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k),$$

сводящая подсчет числа $T_0(n)$ всех частичных порядков, определенных на n -множестве (помеченных T_0 -топологий), к вычислению чисел $W(p_1, \dots, p_k)$ частичных порядков специального вида. Суммирование ведется по всем упорядоченным наборам (p_1, \dots, p_k) натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$. В работах [1, 2] получены семейства уравнений связи между отдельными числами $W(p_1, \dots, p_k)$. Так, если D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ k & k-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то согласно [1] справедливо

$$(2) \quad W(p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) = W(p_1, \dots, p_k), \quad \pi \in D_k.$$

В [2] доказаны два семейства формул: формулы рекуррентного характера

$$(3) \quad \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p+1, q_1, \dots, q_r) \\ = \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} (r+1) W(p, q_1, \dots, q_r), \\ p \geq 0, \quad m \geq 1,$$

$$(4) \quad W(p, 1, q, 1) = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (2^{q-r} + 1)^p W(p, 1, r) + \sum_{r=0}^p \binom{p}{r} (2^{p-r} + 1)^q W(q, 1, r)$$

(полагаем по определению $W(0, q_1, \dots, q_r) \doteq W(q_1, \dots, q_r)$, $W(p, 1, 0) \doteq W(p, 1)$ и $W(q, 1, 0) \doteq W(q, 1)$) и явные формулы

$$(5) \quad W(p) = 1, \quad W(p, q) = 2^{pq}, \quad W(p, 1, q) = \sum_{r=0}^q \binom{q}{r} (2^r + 2^q)^p,$$

$$(6) \quad W(p, 2, q) = \sum_{q_1 + \dots + q_4 = q} \frac{q!}{q_1! \dots q_4!} (2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^{q_1+q_3} + 2^q)^p,$$

$$(7) \quad W(p, 1, 1, q) - W(p, 2, q) = \sum_{q_1+q_2+q_3=q} \frac{q!}{q_1! q_2! q_3!} (2^{q_1} + 2^{q_1+q_2} + 2^q)^p.$$

(В формулах (4)–(7) параметры $p, q \in \mathbb{N}$, формулах (6), (7) переменные $q_i \geq 0$). Кроме того, согласно [2] для натурального $n \geq 2$ справедливо равенство

$$(8) \quad T_0(n) = n T_0(n-1) + \sum_{(p_1, \dots, p_k)} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{(p_1+1)! p_2! \dots p_k!} k p_1 W(p_1, \dots, p_k),$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам (p_1, \dots, p_k) натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n-1$. Понятно, что количество слагаемых в формуле (8) в два раза меньше, чем в формуле (1).

Соотношения (2)–(7) позволяют вычислить числа $T_0(n)$ для всех $n \leq 7$ (без применения ЭВМ; за счет решения системы линейных уравнений (2)–(7) относительно величин $W(p_1, \dots, p_k)$ и применения формулы (8)). В [2] отмечено, что для вычисления числа $T_0(8)$ данных соотношений не достаточно (не хватает всего трех уравнений относительно величин $W(p_1, \dots, p_k)$, порождающих требуемый ранг матрицы системы).

В настоящей работе в дополнение к (2)–(7) получено новое соотношение рекуррентного характера (см. формулу (27)), связывающее между собой отдельные значения $W(p_1, \dots, p_k)$. Уравнений (2), (3), (27) достаточно для вычисления без применения ЭВМ числа $T_0(8)$. Для вычисления числа $T_0(9)$ данных соотношений не достаточно (количество неизвестных чисел $W(p_1, \dots, p_k)$, фигурирующих в формуле (8), равно 128, а ранг матрицы системы (2), (3), (27) равен 123; не хватает всего пяти уравнений, порождающих требуемый ранг).

Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи. Заметим еще, что благодаря компьютерным вычислениям [3] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leq 18$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество. Функции $X^2 \rightarrow B$ называем *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X , порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma: X^2 \rightarrow B, \quad \chi_\sigma(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot, \cdot)$ обозначаем через $\sigma(\cdot, \cdot)$. С другой стороны, всякая функция $\chi: X^2 \rightarrow B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x, y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x, y) = 1$. Отображение $\sigma \rightarrow \sigma(\cdot, \cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\text{card } X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяется функциональное представление, позволяющее получать содержательные результаты в наиболее общей форме (см., например, родственные работы [4]–[7], посвященные исследованию подграфов графа бинарных отношений).

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X . В терминах характеристических функций справедливо утверждение: *включение $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда*

$$(9) \quad \begin{aligned} &\sigma(x, x) = 1 \text{ для всех } x \in X, \\ &\sigma(x, y) \sigma(y, z) \leq \sigma(x, z) \text{ для всех } x, y, z \in X, \end{aligned}$$

$$\sigma(x, y) \sigma(y, x) = \delta_{xy} \text{ для всех } x, y \in X \text{ (где } \delta_{xy} \text{ — символ Кронекера).$$

Далее полагаем $\text{card } X < \infty$. Для любого частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$(10) \quad S(\sigma) \doteq \{y \in X: \sigma(x, y) = \delta_{xy} \text{ для всех } x \in X\} \neq \emptyset,$$

а если $\emptyset \neq Y \subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (есть частичный порядок на множестве Y). Неравенство $S(\sigma) \neq \emptyset$ доказано в [4] (предложение 2).

Распространим определение чисел $W(p_1, \dots, p_k; m)$ на произвольные упорядоченные наборы (p_1, \dots, p_k, m) целых неотрицательных аргументов. Полагаем

$$(13) \quad W(0; m) \doteq T_0(m), \quad W(p_1, \dots, p_k; 0) \doteq W(p_1, \dots, p_k),$$

а если $p_i = 0$ для некоторого i , то полагаем

$$(14) \quad W(p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_k; m) \doteq W(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k; m).$$

Предложение 2. Для целых неотрицательных чисел p_1, \dots, p_k и натурального m справедливы равенства

$$(15) \quad W(p_1, \dots, p_k; m) = \sum_{q=1}^m (-1)^{q-1} \binom{m}{q} W(p_1, \dots, p_k, q; m-q),$$

$$(16) \quad W(p_1, \dots, p_k; m) = \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r),$$

где суммирование во второй формуле ведется по всем упорядоченным наборам (q_1, \dots, q_r) натуральных чисел таких, что $q_1 + \dots + q_r = m$.

При $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ формулы доказаны в работе [1] (формула (15) в лемме 1, а формула (16) в лемме 3). При $p_1 = \dots = p_k = 0$ формулы принимают вид

$$\underbrace{W(0, \dots, 0; m)}_{T_0(m)} = \sum_{q=1}^m (-1)^{q-1} \binom{m}{q} \underbrace{W(0, \dots, 0, q; m-q)}_{W(q; m-q)},$$

$$\underbrace{W(0, \dots, 0; m)}_{T_0(m)} = \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} \underbrace{W(0, \dots, 0, q_1, \dots, q_r)}_{W(q_1, \dots, q_r)}.$$

(В сносках воспользовались определениями (12)–(14).) Последние формулы, действительно, имеют место (первая формула доказана в лемме 2 [1], а вторая — это формула (1)). Наконец, в случае, когда переменные p_1, \dots, p_k не равны нулю одновременно, следует в формулах (15), (16) избавиться от нулевых аргументов, оставив лишь натуральные параметры p_i (воспользовавшись определениями (12)–(14)), и сослаться на изложенную выше ситуацию, когда $p_{i_1}, \dots, p_{i_r} \in \mathbb{N}$. \square

Через $\mathcal{V}(p_1, \dots, p_k; m)$ обозначим совокупность всех тех $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k; m)$, что в блочном представлении (11) типа (p_1, \dots, p_{k+1}) (где $p_{k+1} = m$) наддиагональный блок $\sigma^{k, k+1}$ — невырожденный (то есть в каждом столбце блока имеется хотя бы одна единица; в приводимом ниже блочном представлении этот блок обозначен символом *):

$$(17) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline e_{p_1} & & & & \\ \hline 0 & \ddots & & & \\ \hline \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \hline 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & * \\ \hline & & 0 & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_k \\ m = p_{k+1} \end{array} .$$

Распространим определение чисел $V(p_1, \dots, p_k; m) \doteq \text{card } \mathcal{V}(p_1, \dots, p_k; m)$ на все наборы (p_1, \dots, p_k, m) целых неотрицательных чисел. Полагаем

$$(18) \quad V(p_1, \dots, p_k, 0; m) \doteq \delta_{m0} W(p_1, \dots, p_k), \quad V(p_1, \dots, p_k; 0) \doteq W(p_1, \dots, p_k),$$

а если $p_i = 0$ для некоторого $i < k$, то полагаем

$$(19) \quad V(p_1, \dots, p_{i-1}, 0, p_{i+1}, \dots, p_k; m) \doteq V(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k; m).$$

Теорема 1. Для целых неотрицательных чисел p_1, \dots, p_k, q, m справедливо

$$(20) \quad W(p_1, \dots, p_k, q; m) = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} V(p_1, \dots, p_k, q+r; m-r),$$

$$(21) \quad V(p_1, \dots, p_k, q; m) = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} W(p_1, \dots, p_k, q+r; m-r).$$

Доказательство. Упорядоченный набор чисел p_1, \dots, p_k обозначим через \bar{p} .

Полагаем сначала, что $m \in \mathbb{N}$. Пусть $p \doteq p_1 + \dots + p_k$, $n \doteq p + q + m$,

$$X \doteq \{1, \dots, n\}, \quad Y \doteq \{p+1, \dots, n\}, \quad M \doteq \{p+q+1, \dots, n\}, \quad Q \doteq Y \setminus M.$$

Для элементов множества $\mathcal{W}(\bar{p}, q; m)$ справедливо блочное представление

$$X \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} & e_{p_1} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & e_{p_k} & \\ Q & 0 & \ddots & 0 & e_q \\ Y & & & & \\ M & & 0 & & \end{array} \right. \begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ p_k \\ q \\ m \end{array}$$

Легко заметить, что для любого $\sigma \in \mathcal{W}(\bar{p}, q; m)$ разность Q содержится в опорном множестве $S(\sigma|_{Y^2})$ (см. определение (10) и комментарии к нему). Для любого $\alpha \subseteq M$ через $\mathcal{W}_\alpha(\bar{p}, q; m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(\bar{p}, q; m)$, у которых $S(\sigma|_{Y^2}) = Q \cup \alpha$, разбив, тем самым, множество $\mathcal{W}(\bar{p}, q; m)$ на попарно непересекающиеся классы $\mathcal{W}_\alpha(\bar{p}, q; m)$. Следовательно,

$$W(\bar{p}, q; m) = \text{card } \mathcal{W}(\bar{p}, q; m) = \sum_{\alpha \subseteq M} \text{card } \mathcal{W}_\alpha(\bar{p}, q; m).$$

Пусть $\alpha = \emptyset$. При $q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, q; m) = \mathcal{V}(\bar{p}, q; m)$ (так как для любого $\sigma \in \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, q; m)$ блок $Q \times M$ — невырожденный: в силу предложения 1 для любого $y \in M$ существует $x \in Q$ такое, что $\sigma(x, y) = 1$), поэтому $\text{card } \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, q; m) = V(\bar{p}, q; m)$. Пусть $q = 0$. Допустим, что $\text{card } \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, 0; m) \neq 0$. Для любого $\sigma \in \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, 0; m)$ имеем $Q = \emptyset$ и $S(\sigma|_{M^2}) = S(\sigma|_{Y^2}) = Q \cup \alpha = \emptyset$, что противоречит (10). Значит, $\text{card } \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, 0; m) = 0$. В силу (18) имеет место равенство $V(\bar{p}, 0; m) = 0$, поэтому $\text{card } \mathcal{W}_\emptyset(\bar{p}, q; m) = V(\bar{p}, q; m)$ для всех q .

Легко понять, что если непустые $\alpha, \beta \subseteq M$ таковы, что $|\alpha| = |\beta|$, то

$$\text{card } \mathcal{W}_\alpha(\bar{p}, q; m) = \text{card } \mathcal{W}_\beta(\bar{p}, q; m) = \text{card } \mathcal{W}_\gamma(\bar{p}, q; m),$$

где $\gamma \doteq \{p+q+1, \dots, p+q+r\} \subseteq M$, $r \doteq |\alpha| = |\beta| \in [1, m]$. Так как для всех $\sigma \in \mathcal{W}_\gamma(\bar{p}, q; m)$ имеет место равенство $S(\sigma|_{Y^2}) = \{p+1, \dots, p+q+r\}$, то

$\mathcal{W}_\gamma(\bar{p}, q; m) = \mathcal{V}(\bar{p}, q + r; m - r)$, поэтому $\text{card } \mathcal{W}_\gamma(\bar{p}, q; m) = V(\bar{p}, q + r; m - r)$, что и доказывает равенство (20) при $m \in \mathbb{N}$.

При $m = 0$ в соответствии с определениями (13) и (18) левая и правая части формулы (20) равны одному и тому же числу $W(p_1, \dots, p_k, q)$.

Обозначим через Σ правую часть формулы (21), тогда в силу (20) справедливо равенство

$$\Sigma = \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{s=0}^{m-r} \binom{m-r}{s} V(\bar{p}, q+r+s; m-r-s).$$

Заменив индекс s на $t = r + s$ и поменяв порядок суммирования, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{t=0}^m \left[\sum_{r=0}^t (-1)^r \binom{t}{r} \right] \binom{m}{t} V(\bar{p}, q+t; m-t) \\ &= \sum_{t=0}^m \delta_{t0} \binom{m}{t} V(\bar{p}, q+t; m-t) = V(\bar{p}, q; m) = V(p_1, \dots, p_k, q; m), \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (21). □

3. ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Теорема 2. *Для любых $p \geq 0, q \geq 0, m \geq 0$ имеет место равенство*

$$(22) \quad \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} W(p, q, r+1; m-r) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{(p-k)q} \sum_{l=0}^q \binom{q}{l} W(k, l; m).$$

Доказательство. В соответствии с формулой (21) левая часть в (22) равна $V(p, q, 1; m)$. В силу (17) для элементов множества $\mathcal{V}(p, q, 1; m)$ справедливо блочное представление (11) типа (p_1, \dots, p_4) :

$$(23) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline e_p & & & \\ \hline 0 & e_q & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \dots 1 \\ \hline 0 & & 0 & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} p = p_1 \\ q = p_2 \\ 1 = p_3 \\ m = p_4. \end{array}$$

Блок σ^{34} имеет высоту, равную 1, и, как блок * из (17), он невырожденный, поэтому состоит целиком из единиц. В частном случае $p = q = 0$ формула (22) принимает вид $V(0, 0, 1; m) = W(0, 0; m)$. Равенство, действительно, имеет место, так как оба числа равны $T_0(m)$ (см. (23) при $p = q = 0$ и (13)–(14) соответственно). Далее полагаем, что числа p и q не равны нулю одновременно.

Понятно, что блоки σ^{13} и σ^{23} имеют ширину, равную 1 (являются столбцами), и, по крайней мере, один из них не пуст. Пусть $y \doteq p + q + 1 \geq 2$,

$$P \doteq \{1, \dots, p\}, \quad Q \doteq \{p + 1, \dots, p + q\}, \quad R \doteq \{y\}, \quad M \doteq \{y + 1, \dots, y + m\}.$$

Тогда можно сказать, что блоки σ^{13} и σ^{23} — это столбцы $P \times R$ и $Q \times R$ соответственно. Для любых $\alpha \subseteq P$ и $\mu \subseteq Q$ полагаем $\alpha' \doteq P \setminus \alpha$ и $\mu' \doteq Q \setminus \mu$. Через $\mathcal{V}_{\alpha\mu}(p, q, 1; m)$ обозначим множество всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{V}(p, q, 1; m)$, у

Теорема 3. Для любых $p \geq 0$, $q \geq 0$, $m \geq 1$ имеет место равенство

$$(27) \quad \sum_{q_1 + \dots + q_r = m+1} (-1)^{m+1-r} \frac{m!}{(q_1-1)! q_2! \dots q_r!} W(p, q, q_1, \dots, q_r) \\ = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{(p-k)q} \sum_{l=0}^q \binom{q}{l} \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(k, l, q_1, \dots, q_r).$$

Доказательство. В силу (16) для правой части (22) (обозначим ее Σ_1) имеем

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^{(p-k)q} \sum_{l=0}^q \binom{q}{l} \sum_{q_1 + \dots + q_r = m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(k, l, q_1, \dots, q_r),$$

что совпадает с правой частью (27). Согласно (13) и (16) для левой части (22) (обозначим ее Σ_2) справедлива цепочка равенств

$$\Sigma_2 - (-1)^m W(p, q, m+1) = \Sigma_2 - (-1)^m W(p, q, m+1; 0) \\ = \sum_{r=0}^{m-1} (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{p_1 + \dots + p_s = m-r} (-1)^{m-r-s} \frac{(m-r)!}{p_1! \dots p_s!} W(p, q, r+1, p_1, \dots, p_s) \\ = \sum_{t=1}^m \sum_{p_1 + \dots + p_s = m+1-t} (-1)^{m-s} \frac{m!}{(t-1)! p_1! \dots p_s!} W(p, q, t, p_1, \dots, p_s) \\ = \sum_{\substack{t+p_1 + \dots + p_s = m+1 \\ t \leq m}} (-1)^{m-s} \frac{m!}{(t-1)! p_1! \dots p_s!} W(p, q, t, p_1, \dots, p_s).$$

Сначала сделали замену переменной суммирования $r = t - 1$, а затем перешли от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно. Сделав замену $q_1 = t$, $q_i = p_{i-1}$, $i = 2, \dots, r = s + 1$, получаем

$$\Sigma_2 = (-1)^m W(p, q, m+1) \\ + \sum_{\substack{q_1 + \dots + q_r = m+1 \\ q_1 \leq m}} (-1)^{m+1-r} \frac{m!}{(q_1-1)! q_2! \dots q_r!} W(p, q, q_1, \dots, q_r).$$

Внеся слагаемое $(-1)^m W(p, q, m+1)$ в общую сумму, избавляемся в ней от ограничения $q_1 \leq m$ и получаем левую часть формулы (27). \square

4. ЗНАЧЕНИЯ $W(p_1, \dots, p_k)$ ПРИ $p_1 + \dots + p_k = 7$

В работе [2] представлены все числа $W(p_1, \dots, p_k)$ такие, что $p_1 + \dots + p_k \leq 6$. Их общее количество — 63. В приводимых ниже вычислениях мы применяем эти числа без каких-либо оговорок. (Данные значения можно получить и методами настоящей работы.) При $p_1 + \dots + p_k = 7$ количество неизвестных чисел $W(p_1, \dots, p_k)$ равно 64, а при $p_1 + \dots + p_k = 8$ таких чисел — 128.

В силу уравнений (2) при $p_1 + \dots + p_k = 7$ имеется 17 классов неизвестных:

$$A \doteq W(7), \quad B \doteq W(6, 1) = W(1, 6), \quad C \doteq W(5, 2) = W(2, 5), \\ D \doteq W(5, 1, 1) = W(1, 5, 1) = W(1, 1, 5), \quad E \doteq W(4, 3) = W(3, 4), \\ F \doteq W(4, 2, 1) = W(4, 1, 2) = W(2, 4, 1) = W(2, 1, 4) = W(1, 4, 2) = W(1, 2, 4), \\ G \doteq W(4, 1, 1, 1) = W(1, 4, 1, 1) = W(1, 1, 4, 1) = W(1, 1, 1, 4),$$

$$\begin{aligned}
H &\doteq W(3, 3, 1) = W(3, 1, 3) = W(1, 3, 3), \\
K &\doteq W(3, 2, 2) = W(2, 3, 2) = W(2, 2, 3), \\
L &\doteq W(3, 2, 1, 1) = W(3, 1, 1, 2) = W(2, 3, 1, 1) = W(2, 1, 1, 3) \\
&\quad = W(1, 3, 2, 1) = W(1, 2, 3, 1) = W(1, 1, 3, 2) = W(1, 1, 2, 3), \\
M &\doteq W(3, 1, 2, 1) = W(2, 1, 3, 1) = W(1, 3, 1, 2) = W(1, 2, 1, 3), \\
N &\doteq W(3, 1, 1, 1, 1) = W(1, 3, 1, 1, 1) \\
&\quad = W(1, 1, 3, 1, 1) = W(1, 1, 1, 3, 1) = W(1, 1, 1, 1, 3), \\
P &\doteq W(2, 2, 2, 1) = W(2, 2, 1, 2) = W(2, 1, 2, 2) = W(1, 2, 2, 2), \\
Q &\doteq W(2, 2, 1, 1, 1) = W(2, 1, 1, 1, 2) \\
&\quad = W(1, 2, 2, 1, 1) = W(1, 1, 2, 2, 1) = W(1, 1, 1, 2, 2), \\
R &\doteq W(2, 1, 2, 1, 1) = W(2, 1, 1, 2, 1) \\
&\quad = W(1, 2, 1, 2, 1) = W(1, 2, 1, 1, 2) = W(1, 1, 2, 1, 2), \\
S &\doteq W(2, 1, 1, 1, 1, 1) = W(1, 2, 1, 1, 1, 1) = W(1, 1, 2, 1, 1, 1) \\
&\quad = W(1, 1, 1, 2, 1, 1) = W(1, 1, 1, 1, 2, 1) = W(1, 1, 1, 1, 1, 2), \\
T &\doteq W(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Далее мы полагаем, что целые неотрицательные числа p , q и m таковы, что $p + q + m = 6$. Таких наборов — 28. Мы перебираем все эти наборы и получаем 28 уравнений относительно 17 неизвестных. При $m = 0$ применяем формулу (22), а в остальных случаях — формулу (27). Последовательно придавая элементам тройки (p, q, m) значения $(0, 6, 0)$, $(1, 5, 0)$, $(2, 4, 0)$, $(3, 3, 0)$, получаем:

$$B = 64, \quad D = 1267, \quad F = 7313, \quad H = 13009.$$

Например, для тройки $(2, 4, 0)$ в (22) имеет место равенство

$$W(2, 4, 1) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} 16^{2-k} \sum_{l=0}^4 \binom{4}{l} W(k, l) \implies F = 7313.$$

Тройки $(4, 2, 0)$, $(5, 1, 0)$, $(6, 0, 0)$ дублируют эти результаты. В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(0, 5, 1)$, $(1, 4, 1)$, $(0, 4, 2)$ в (27):

$$D - C = 243, \quad G - F = 2177, \quad 2G - 3F + E = 1137.$$

Например, для тройки $(1, 4, 1)$ в (27) имеет место равенство

$$W(1, 4, 1, 1) - W(1, 4, 2) = \sum_{k=0}^1 16^{1-k} \sum_{l=0}^4 \binom{4}{l} W(k, l, 1) \implies G - F = 2177.$$

Тройки $(4, 1, 1)$, $(5, 0, 1)$, $(4, 0, 2)$ дублируют эти результаты. Полученные выше значения для чисел D и F порождают равенства

$$C = 1024, \quad G = 9490, \quad E = 4096.$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2, 3, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(0, 3, 3)$ в формуле (27):

$$\begin{aligned}
L - K &= 6383, & 2N - M - 2L + H &= 5023, & 2N - 2M - L + H &= 4975, \\
6N - 3M - 9L + 4H + 3K - E &= 4833.
\end{aligned}$$

Например, для тройки $(1, 3, 2)$ в (27) имеет место равенство

$$2W(1, 3, 1, 1, 1) - W(1, 3, 1, 2) - 2W(1, 3, 2, 1) + W(1, 3, 3)$$

$$= \sum_{k=0}^1 8^{1-k} \sum_{l=0}^3 \binom{3}{l} [2W(k, l, 1, 1) - W(k, l, 2)]$$

$$\implies 2N - M - 2L + H = 5023.$$

Тройка $(3, 2, 1)$ порождает дубль первого уравнения, а тройка $(3, 0, 3)$ дублирует четвертое уравнение. Так как числа E и H уже известны, то получаем параметрическое представление решений:

$$(28) \quad K = \varphi, \quad L = \varphi + 6383, \quad M = \varphi + 6431, \quad 2N = 3\varphi + 11211.$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2, 2, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(0, 2, 4)$ в формуле (27):

$$2Q - 3P + K = 8129,$$

$$6S - 9R - 3Q + 3P + 3M + L - F = 11615,$$

$$6S - 6R - 6Q + 3P + M + 3L - F = 11681,$$

$$24S - 24R - 36Q + 30P + 4M + 16L - 10K - 5F + C = 17193.$$

Например, для тройки $(2, 1, 3)$ в (27) имеет место равенство

$$6W(2, 1, 1, 1, 1) - 3W(2, 1, 1, 1, 2) - 3W(2, 1, 1, 2, 1) + W(2, 1, 1, 3)$$

$$- 6W(2, 1, 2, 1, 1) + 3W(2, 1, 2, 2) + 3W(2, 1, 3, 1) - W(2, 1, 4)$$

$$= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} 2^{2-k} \sum_{l=0}^1 [6W(k, l, 1, 1, 1) - 3W(k, l, 1, 2) - 3W(k, l, 2, 1) + W(k, l, 3)]$$

$$\implies 6S - 9R - 3Q + 3P + 3M + L - F = 11615.$$

Тройка $(2, 0, 4)$ порождает дубль четвертого уравнения. Числа C и F уже известны, а для чисел K, L, M справедливы формулы (28), следовательно, имеет место параметрическое представление решений:

$$(29)$$

$$3P = \psi, \quad 2Q = \psi - \varphi + 8129, \quad 2R = \psi - \varphi + 8237, \quad 6S = 5\psi - 10\varphi + 42512.$$

Тройка $(1, 1, 4)$ в формуле (27) порождает уравнение

$$24T - 60S + 12R + 18Q + 20N - 10L - 5G + D = 25447.$$

Учитывая значения чисел D, G и формулы (28), (29), получаем, что

$$(30) \quad 24T = 35\psi + 105\varphi + 325887.$$

Тройка $(0, 1, 5)$ в формуле (27) порождает уравнение

$$120T - 360S + 150R + 120Q - 30P$$

$$+ 120N - 50M - 70L + 10H - 30G + 15F + 6D - B = 51153.$$

Учитывая полученные ранее значения, получаем, что

$$120T = 175\psi + 525\varphi + 1629435.$$

Тройка $(1, 0, 5)$ порождает такое же уравнение, причем, оба случая оказываются бесполезными, так как последнее уравнение — это уравнение (30). Наконец, заключительное разбиение $(0, 0, 6)$ порождает уравнение

$$720T - 2520S + 1260R + 1260Q - 630P + 840N - 420M - 840L + 210K$$

$$+ 140H - 210G + 210F - 35E + 42D - 21C - 7B + A = 130023.$$

(Его получение требует определенных усилий.) Учитывая найденные ранее значения, получаем равенство

$$A = 1.$$

(К сожалению, «богатое» уравнение, охватывающее все 17 неизвестных, породило изначально очевидное следствие $A = 1$, см. формулу (5).) Тем не менее, констатируем главное: система из 28 линейных уравнений относительно 17-ти неизвестных допускает двухпараметрическое представление решений через параметры φ и ψ (другими словами, ранг матрицы системы равен 15).

Для того чтобы найти эти параметры, воспользуемся формулой (3), последовательно придавая элементам пары (p, m) значения $(2, 4)$ и $(1, 5)$:

$$24N - 12M - 24L + 6K + 8H - E = 117286,$$

$$120S - 120R - 120Q + 90P + 20M + 40L - 20K - 10F + C = 559654.$$

Например, для пары $(2, 4)$ в (3) имеет место равенство

$$\begin{aligned} & 24W(3, 1, 1, 1, 1) - 12W(3, 1, 1, 2) - 12W(3, 1, 2, 1) + 4W(3, 1, 3) \\ & \quad - 12W(3, 2, 1, 1) + 6W(3, 2, 2) + 4W(3, 3, 1) - W(3, 4) \\ & = 120W(2, 1, 1, 1, 1) - 48W(2, 1, 1, 2) - 48W(2, 1, 2, 1) + 12W(2, 1, 3) \\ & \quad - 48W(2, 2, 1, 1) + 18W(2, 2, 2) + 12W(2, 3, 1) - 2W(2, 4) \\ & \implies 24N - 12M - 24L + 6K + 8H - E = 117286. \end{aligned}$$

Учитывая значения чисел C, E, F, H и формулы (28), (29), из первого уравнения находим значение φ , а затем из второго уравнения — значение ψ :

$$\varphi = 18857, \quad \psi = 113382.$$

В соответствии с (28)–(30) получаем числа

$$K = 18857, \quad L = 25240, \quad M = 25288, \quad N = 33891,$$

$$P = 37794, \quad Q = 51327, \quad R = 51381, \quad S = 70142, \quad T = 96428.$$

Таким образом, определены все 64 числа $W(p_1, \dots, p_k)$ при $p_1 + \dots + p_k = 7$. Из формулы (8) следует, что

$$T_0(8) = 431723379.$$

5. ЗНАЧЕНИЯ $W(p_1, \dots, p_k)$ ПРИ $p_1 + \dots + p_k = 8$

В силу уравнений (2) при $p_1 + \dots + p_k = 8$ имеется 29 классов неизвестных:

$$A \doteq W(8), \quad B \doteq W(7, 1) = W(1, 7), \quad C \doteq W(6, 2) = W(2, 6),$$

$$D \doteq W(6, 1, 1) = W(1, 6, 1) = W(1, 1, 6), \quad E \doteq W(5, 3) = W(3, 5),$$

$$F \doteq W(5, 2, 1) = W(5, 1, 2) = W(2, 5, 1) = W(2, 1, 5) = W(1, 5, 2) = W(1, 2, 5),$$

$$G \doteq W(5, 1, 1, 1) = W(1, 5, 1, 1) = W(1, 1, 5, 1) = W(1, 1, 1, 5),$$

$$\Gamma \doteq W(4, 4),$$

$$H \doteq W(4, 3, 1) = W(4, 1, 3) = W(3, 4, 1) = W(3, 1, 4) = W(1, 4, 3) = W(1, 3, 4),$$

$$K \doteq W(4, 2, 2) = W(2, 4, 2) = W(2, 2, 4),$$

$$L \doteq W(4, 2, 1, 1) = W(4, 1, 1, 2) = W(2, 4, 1, 1) = W(2, 1, 1, 4)$$

$$= W(1, 4, 2, 1) = W(1, 2, 4, 1) = W(1, 1, 4, 2) = W(1, 1, 2, 4),$$

$$M \doteq W(4, 1, 2, 1) = W(2, 1, 4, 1) = W(1, 4, 1, 2) = W(1, 2, 1, 4),$$

$$\begin{aligned}
N &\doteq W(4, 1, 1, 1, 1) = W(1, 4, 1, 1, 1) \\
&= W(1, 1, 4, 1, 1) = W(1, 1, 1, 4, 1) = W(1, 1, 1, 1, 4), \\
\Delta &\doteq W(3, 3, 2) = W(3, 2, 3) = W(2, 3, 3), \\
\Phi &\doteq W(3, 3, 1, 1) = W(3, 1, 1, 3) = W(1, 3, 3, 1) = W(1, 1, 3, 3), \\
\Psi &\doteq W(3, 1, 3, 1) = W(1, 3, 1, 3), \\
P &\doteq W(3, 2, 2, 1) = W(3, 1, 2, 2) = W(2, 3, 1, 2) = W(2, 2, 3, 1) \\
&= W(2, 2, 1, 3) = W(2, 1, 3, 2) = W(1, 3, 2, 2) = W(1, 2, 2, 3), \\
\Pi &\doteq W(3, 2, 1, 2) = W(2, 3, 2, 1) = W(2, 1, 2, 3) = W(1, 2, 3, 2), \\
Q &\doteq W(3, 2, 1, 1, 1) = W(3, 1, 1, 1, 2) = W(2, 3, 1, 1, 1) \\
&= W(2, 1, 1, 1, 3) = W(1, 3, 2, 1, 1) = W(1, 2, 3, 1, 1) = W(1, 1, 3, 2, 1) \\
&= W(1, 1, 2, 3, 1) = W(1, 1, 1, 3, 2) = W(1, 1, 1, 2, 3), \\
R &\doteq W(3, 1, 2, 1, 1) = W(3, 1, 1, 2, 1) = W(2, 1, 3, 1, 1) \\
&= W(2, 1, 1, 3, 1) = W(1, 3, 1, 2, 1) = W(1, 2, 1, 3, 1) = W(1, 3, 1, 1, 2) \\
&= W(1, 2, 1, 1, 3) = W(1, 1, 3, 1, 2) = W(1, 1, 2, 1, 3), \\
S &\doteq W(3, 1, 1, 1, 1, 1) = W(1, 3, 1, 1, 1, 1) = W(1, 1, 3, 1, 1, 1) \\
&= W(1, 1, 1, 3, 1, 1) = W(1, 1, 1, 1, 3, 1) = W(1, 1, 1, 1, 1, 3), \\
\Omega &\doteq W(2, 2, 2, 2), \\
U &\doteq W(2, 2, 2, 1, 1) = W(2, 2, 1, 1, 2) \\
&= W(2, 1, 1, 2, 2) = W(1, 2, 2, 2, 1) = W(1, 1, 2, 2, 2), \\
V &\doteq W(2, 2, 1, 2, 1) = W(2, 1, 2, 2, 1) \\
&= W(2, 1, 2, 1, 2) = W(1, 2, 2, 1, 2) = W(1, 2, 1, 2, 2), \\
X &\doteq W(2, 2, 1, 1, 1, 1) = W(2, 1, 1, 1, 1, 2) = W(1, 2, 2, 1, 1, 1) \\
&= W(1, 1, 2, 2, 1, 1) = W(1, 1, 1, 2, 2, 1) = W(1, 1, 1, 1, 2, 2), \\
Y &\doteq W(2, 1, 2, 1, 1, 1) = W(2, 1, 1, 1, 2, 1) = W(1, 2, 1, 2, 1, 1) \\
&= W(1, 2, 1, 1, 1, 2) = W(1, 1, 2, 1, 2, 1) = W(1, 1, 1, 2, 1, 2), \\
Z &\doteq W(2, 1, 1, 2, 1, 1) = W(1, 2, 1, 1, 2, 1) = W(1, 1, 2, 1, 1, 2), \\
T &\doteq W(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) = W(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1) \\
&= W(1, 1, 2, 1, 1, 1, 1) = W(1, 1, 1, 2, 1, 1, 1) \\
&= W(1, 1, 1, 1, 1, 2, 1) = W(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2), \\
\Sigma &\doteq W(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Далее мы полагаем, что целые неотрицательные числа p , q и m таковы, что $p + q + m = 7$. Таких наборов — 36. Мы перебираем все эти наборы и получаем 36 уравнений относительно 29 неизвестных. При $m = 0$ применяем формулу (22), а в остальных случаях — формулу (27). Последовательно придавая элементам тройки (p, q, m) значения $(0, 7, 0)$, $(1, 6, 0)$, $(2, 5, 0)$, $(3, 4, 0)$, получаем:

$$(31) \quad B = 128, \quad D = 4825, \quad F = 51445, \quad H = 164305.$$

Например, для тройки $(2, 5, 0)$ в (22) имеет место равенство

$$W(2, 5, 1) = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} 32^{2-k} \sum_{l=0}^5 \binom{5}{l} W(k, l) \implies F = 51445.$$

Тройки $(4, 3, 0)$, $(5, 2, 0)$, $(6, 1, 0)$, $(7, 0, 0)$ дублируют эти результаты. В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(0, 6, 1)$, $(1, 5, 1)$, $(0, 5, 2)$ в (27):

$$D - C = 729, \quad G - F = 11925, \quad 2G - 3F + E = 5173.$$

Например, для тройки $(1, 5, 1)$ в (27) имеет место равенство

$$W(1, 5, 1, 1) - W(1, 5, 2) = \sum_{k=0}^1 32^{1-k} \sum_{l=0}^5 \binom{5}{l} W(k, l, 1) \implies G - F = 11925.$$

Тройки $(5, 1, 1)$, $(6, 0, 1)$, $(5, 0, 2)$ дублируют эти результаты. В силу (31) справедливы равенства

$$(32) \quad C = 4096, \quad G = 63370, \quad E = 32768.$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2, 4, 1)$, $(1, 4, 2)$, $(4, 1, 2)$, $(0, 4, 3)$ в формуле (27):

$$L - K = 61587, \quad 2N - M - 2L + H = 39495, \quad 2N - 2M - L + H = 38725,$$

$$(33) \quad 6N - 3M - 9L + 3K + 4H - \Gamma = 32493.$$

Например, для тройки $(1, 4, 2)$ в (27) имеет место равенство

$$\begin{aligned} & 2W(1, 4, 1, 1, 1) - W(1, 4, 1, 2) - 2W(1, 4, 2, 1) + W(1, 4, 3) \\ &= \sum_{k=0}^1 16^{1-k} \sum_{l=0}^4 \binom{4}{l} [2W(k, l, 1, 1) - W(k, l, 2)] \\ &\implies 2N - M - 2L + H = 39495. \end{aligned}$$

Тройка $(4, 2, 1)$ порождает дубль первого уравнения, а тройка $(4, 0, 3)$ дублирует четвертое уравнение. Добавим в группу еще одно уравнение, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p, m) = (3, 4)$:

$$\begin{aligned} & 24W(4, 1, 1, 1, 1) - 12W(4, 1, 1, 2) - 12W(4, 1, 2, 1) + 4W(4, 1, 3) \\ & \quad - 12W(4, 2, 1, 1) + 6W(4, 2, 2) + 4W(4, 3, 1) - W(4, 4) \\ &= 120W(3, 1, 1, 1, 1) - 48W(3, 1, 1, 2) - 48W(3, 1, 2, 1) + 12W(3, 1, 3) \\ & \quad - 48W(3, 2, 1, 1) + 18W(3, 2, 2) + 12W(3, 3, 1) - 2W(3, 4) \\ (34) \quad & \implies 24N - 12M - 24L + 6K + 8H - \Gamma = 1073506. \end{aligned}$$

В силу (33), (34) справедливы равенства

$$(35) \quad \Gamma = 65536, \quad K = 220387, \quad L = 281974, \quad M = 282744, \quad N = 360941.$$

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(3, 3, 1)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(0, 3, 4)$ в формуле (27):

$$\begin{aligned} \Phi - \Delta = 105753, \quad 2Q - 2\Pi - P + \Delta = 105997, \quad 2Q - \Pi - 2P + \Delta = 104871, \\ 6S - 6R - 6Q + 3P + \Psi + 3\Phi - H = 126975, \\ 6S - 9R - 3Q + 3P + 3\Psi + \Phi - H = 124695, \end{aligned}$$

$$24S - 24R - 36Q + 12\Pi + 18P + 4\Psi + 16\Phi - 10\Delta - 5H + E = 163393.$$

Тройка $(3, 0, 4)$ дублирует последнее уравнение. Так как числа E и H уже известны, то получаем параметрическое представление решений:

$$\Delta = \alpha, \quad \Phi = \alpha + 105753, \quad \Pi = \beta, \quad P = \beta + 1126, \quad 2Q = -\alpha + 3\beta + 107123,$$

$$\Psi = \gamma, \quad 6R = -7\alpha + 9\beta + 4\gamma - 97083, \quad 6S = -13\alpha + 15\beta + 3\gamma + 194929.$$

Добавим в группу еще одно уравнение, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p, m) = (2, 5)$:

$$120S - 120R - 120Q + 30\Pi + 60P + 20\Psi + 40\Phi - 20\Delta - 10H + E = 8806240.$$

Вывод данного уравнения осуществляется аналогично выводу уравнения (34) (и требует определенных усилий). Оно порождает уравнение связи

$$-4\alpha + 3\beta = 509570,$$

следовательно, параметрическое представление решений принимает вид:

$$(36) \quad \begin{aligned} \Delta &= \alpha, & \Phi &= \alpha + 105753, \\ 3P &= 4\alpha + 512948, & 3\Pi &= 4\alpha + 509570, & 2Q &= 3\alpha + 616693, \\ \Psi &= \gamma, & 6R &= 5\alpha + 4\gamma + 1431627, & 6S &= 7\alpha + 3\gamma + 2742779. \end{aligned}$$

Заметим, что формулы (6) и (4) позволяют найти параметры $\alpha = \Delta = W(3, 2, 3)$ и $\gamma = \Psi = W(3, 1, 3, 1)$, что, в свою очередь, позволяет вычислить все вышеперечисленные числа (в настоящий момент мы этого делать не будем).

В следующую группу включаем уравнения, порожденные тройками $(2, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 4)$, $(0, 2, 5)$, $(1, 1, 5)$, $(0, 1, 6)$ в формуле (27):

$$\begin{aligned} 6X - 3V - 9U + 3\Omega + 4P - K &= 196191, \\ 24T - 12Z - 24Y - 24X + 18V + 12U & \\ &+ 8R + 12Q - 6\Pi - 4P - M - 4L + F = 366303, \\ 24T - 12Z - 36Y - 12X + 24V + 6U & \\ &+ 16R + 4Q - 4\Pi - 6P - 4M - L + F = 363721, \\ 120T - 60Z - 120Y - 180X + 120V + 150U - 30\Omega & \\ &+ 40R + 80Q - 40\Pi - 80P + 10\Delta - 5M - 25L + 15K + 6F - C = 657729, \\ 120\Sigma - 360T + 60Z + 90Y + 120X - 30U & \\ &+ 120S - 50R - 70Q + 10\Phi - 30N + 15L + 6G - D = 942585, \\ 720\Sigma - 2520T + 540Z + 1080Y + 900X - 360V - 270U & \\ &+ 840S - 720R - 540Q + 60\Pi + 150P + 60\Psi + 80\Phi & \\ &- 210N + 90M + 120L - 35H + 42G - 21F - 7D + B = 2179573. \end{aligned}$$

Тройки $(2, 0, 5)$ и $(1, 0, 6)$ порождают, к сожалению, те же уравнения, что и тройки $(0, 2, 5)$ и $(0, 1, 6)$. Добавим в группу еще два уравнения, — воспользуемся формулой (3), полагая в ней $(p, m) = (1, 6)$ и $(p, m) = (0, 7)$ соответственно:

$$\begin{aligned} 720T - 360Z - 720Y - 720X + 540V + 540U - 90\Omega + 240R & \\ &+ 240Q - 120\Pi - 240P + 20\Delta - 30M - 60L + 30K + 12F - C = 35206834, \\ 5040\Sigma - 15120T + 2520Z + 5040Y + 5040X - 1260V - 1260U & \\ &+ 4200S - 2520R - 2520Q + 210\Pi + 420P + 140\Psi + 280\Phi & \\ &- 840N + 210M + 420L - 70H + 126G - 42F - 14D + B = 135499898. \end{aligned}$$

Подставив в уравнения группы выражения из (31), (32), (35), (36), получаем:

$$\begin{aligned} 18X - 9V - 27U + 9\Omega &= -16\alpha - 802058, \\ 36T - 18Z - 36Y - 36X + 27V + 18U &= -17\alpha - 8\gamma - 3270638, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
36T - 18Z - 54Y - 18X + 36V + 9U &= -9\alpha - 16\gamma - 2430764, \\
36T - 18Z - 36Y - 54X + 36V + 45U - 9\Omega &= -\alpha - 8\gamma - 2468580, \\
36\Sigma - 108T + 18Z + 27Y + 36X - 9U &= -\alpha - 8\gamma - 4569846, \\
72\Sigma - 252T + 54Z + 108Y + 90X - 36V - 27U &= 7\alpha - 6708928, \\
72T - 36Z - 72Y - 72X + 54V + 54U - 9\Omega &= -10\alpha - 16\gamma - 1646686, \\
36\Sigma - 108T + 18Z + 36Y + 36X - 9V - 9U &= -\alpha - 4\gamma - 2943517.
\end{aligned}$$

Параметрическое представление решений имеет вид:

$$\begin{aligned}
(37) \quad X &= \lambda, \quad Y = \mu, \quad Z = \nu, \\
9\Omega &= -40\alpha + 8\gamma + 36\lambda - 18\mu - 9826996, \\
9U &= -8\alpha + 4\gamma + 18\lambda - 9\mu - 2466203, \\
9V &= -4\gamma + 9\mu - 1626329, \\
36T &= -\alpha - 4\gamma + 27\mu + 18\nu + 6540755, \\
36\Sigma &= -12\alpha - 16\gamma - 18\lambda + 45\mu + 36\nu + 12586216.
\end{aligned}$$

Тройка $(0, 0, 7)$ (завершающая перебор всех троек в формуле (27)) порождает равенство $A = 1$ (вывод данного равенства требует определенных усилий). К сожалению, в силу (5) это равенство нам уже известно, хотя, с формальных позиций, оно относится к системе уравнений (2), (3), (27).

К этой же системе утнсятся еще четыре уравнения, порожденные парами $(7, 0)$, $(6, 1)$, $(5, 2)$, $(4, 3)$ в формуле (3) (что завершает перебор всех пар в (3)), однако все они линейно зависимы с предыдущими уравнениями. Таким образом, мы перебрали все варианты реализации формул (3) и (27).

В комментариях к формуле (36) говорится, что для вычисления параметров α и γ можно применить формулы (6) и (4) соответственно, однако, для вычисления параметров λ , μ и ν ресурсов настоящей работы (вместе с ресурсами предыдущих работ) не хватает. Тем не менее, констатируем главное: система из 36 линейных уравнений относительно 29-ти неизвестных допускает пятипараметрическое представление решений через параметры α , γ , λ , μ , ν .

Более того, система линейных уравнений (2), (3), (27) относительно 128-ми неизвестных $W(p_1, \dots, p_k)$, фигурирующих в формуле (8) при $n = 9$, имеет ранг 123; не хватает всего пяти уравнений, порождающих требуемый ранг.

Если же включить параметры α и γ в список известных величин:

$$\alpha = \Delta = W(3, 3, 2) = 353347, \quad \gamma = \Psi = W(3, 1, 3, 1) = 461236,$$

то ранг системы возрастает до 125. В силу естественного интереса к получению числа $T_0(9)$ для нахождения параметров λ , μ и ν мы применили компьютерные вычисления (основанные на формулах (10) из [1]) и получили числа

$$\lambda = X = W(2, 2, 1, 1, 1, 1) = 1582502,$$

$$\mu = Y = W(2, 1, 2, 1, 1, 1) = 1584088,$$

$$\nu = Z = W(2, 1, 1, 2, 1, 1) = 1584772.$$

Итак, наряду с формулами (31), (32), (35) имеем следствия формул (36), (37):

$$\begin{aligned}
\Phi &= 459100, \quad P = 642112, \quad \Pi = 640986, \quad Q = 838367, \\
R &= 840551, \quad S = 1099986, \quad \Omega = 909500, \quad U = 1197801, \\
V &= 1198391, \quad T = 2101076, \quad \Sigma = 2800472.
\end{aligned}$$

Таким образом, определены все 128 чисел $W(p_1, \dots, p_k)$ при $p_1 + \dots + p_k = 8$. Из формулы (8) следует, что

$$T_0(9) = 44511042511.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Через $\mathcal{A}(X)$ обозначим совокупность всех ациклических орграфов, определенных на множестве $X = \{1, \dots, n\}$. Пусть, далее, $A_n \doteq \text{card } \mathcal{A}(X)$. Согласно [8] имеет место равенство

$$(38) \quad A_n = \sum_{p_1 + \dots + p_k = n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}.$$

Включение $\mathcal{V}_0^0(X) \subset \mathcal{A}(X)$ хорошо известно, причем формулы (1) и (38) для вычисления чисел $\text{card } \mathcal{V}_0^0(X)$ и $\text{card } \mathcal{A}(X)$ имеют одинаковую структуру.

Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p = 1, \dots, n$ через $T_0^{(p)}(n)$ (через $A_n^{(p)}$) обозначим количество всех помеченных транзитивных орграфов $\sigma \in \mathcal{V}_0^0(X)$ (соответственно помеченных ациклических орграфов $\sigma \in \mathcal{A}(X)$), определенных на X и таких, что множество вершин графа σ , имеющих нулевую полустепень захода, совпадает с множеством $\{1, \dots, p\}$. В работах [7] и [6] доказаны формулы:

$$(39) \quad T_0^{(p)}(n) = \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ p_1 \geq p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)! p_2! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k),$$

$$(40) \quad A_n^{(p)} = \sum_{\substack{p_1 + \dots + p_k = n \\ p_1 \geq p}} (-1)^{n-p+1-k} \frac{(n-p)!}{(p_1-p)! p_2! \dots p_k!} 2^{(n^2 - p_1^2 - \dots - p_k^2)/2}.$$

Суммирование в формулах (39), (40) ведется по всем упорядоченным наборам (p_1, \dots, p_k) натуральных чисел таких, что $p_1 + \dots + p_k = n$ и $p_1 \geq p$.

Формулы (39) и (40) имеют одинаковую структуру (так же как и формулы (1) и (38)). Однако, если формулы (38), (40) имеют заверченный вид (и могут, в определенной степени, служить ориентиром в задаче перечисления конечных частичных порядков), то для формул (1), (39) сохраняется проблема вычисления чисел $W(p_1, \dots, p_k)$, чему, собственно, и посвящена настоящая работа.

Известные автору алгоритмы перечисления конечных частичных порядков имеют вычислительную сложность экспоненциального типа, что затрудняет вычисление значений $T_0(n)$ даже при малых n . Здесь необходимо отметить прямые вычисления чисел $T_0(n)$, представленные в работах [9]–[12], и компьютерные вычисления, представленные в [3], [13]–[17].

Принципиальная разница вычислений в указанных источниках от вычислений настоящей работы заключается в следующем. В перечисленных работах процедура вычисления осуществляется «в лоб», то есть вычисляется количество частичных порядков того или иного вида в соответствии с некоей структурной иерархией. В наших исследованиях реализован иной, своеобразный характер рекурсивных вычислений: при переходе $T_0(n-1) \rightarrow T_0(n)$ мы используем уравнения, связывающие между собой те или иные величины $W(p_1, \dots, p_k)$ при $p_1 + \dots + p_k \leq n$. Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности, генерирующей новые уравнения связи между величинами $W(p_1, \dots, p_k)$.

Отметим также современные публикации [18]–[24] в рамках тематики.

REFERENCES

- [1] V.I. Rodionov, *On enumeration of posets defined on finite set*, Siberian electr. Math. Reports, **13** (2016), 318–330. MR3506895, Zbl 1341.05127
- [2] V.I. Rodionov, *On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets*, Siberian electr. Math. Reports, **14** (2017), 98–111. MR3610858, Zbl 1357.05061
- [3] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order, **19:2** (2002), 147–179. MR 2134160, Zbl 1006.06003
- [4] Kh.Sh. Al’Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of partial orders*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki, **4** (2013), 3–12. Zbl 1299.05169
- [5] Kh.Sh. Al’Dzhabri, *The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki, **25:1** (2015), 3–11. Zbl 1332.05072
- [6] Kh.Sh. Al’Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of acyclic digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki, **25:4** (2015), 441–452. Zbl 1364.05038
- [7] Kh.Sh. Al’Dzhabri, V.I. Rodionov, *On support sets of acyclic and transitive digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp’yut. Nauki, **27:2** (2017), 153–161. MR3678096, Zbl 1390.05080
- [8] V.I. Rodionov, *On the number of labeled acyclic digraphs*, Discrete Mathematics, **105:1–3** (1992), 319–321. MR1180216, Zbl 0761.05050
- [9] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d’un ensemble fini*, C. R. Acad. Sci., **262** (1966), A1091–A1094. MR201325, Zbl 0152.39701
- [10] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly, **73:2** (1966), 154–157. MR201324, Zbl 0135.40704
- [11] M. Erne, *Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen*, Manuscripta Math., **11** (1974), 221–259. MR360300, Zbl 0269.54001
- [12] Z.I. Borevich, *Enumeration of finite topologies*, J. Sov. Math., **20:6** (1982), 2532–2545. MR541003, Zbl 0498.05007
- [13] J.W. Evans, F. Harary, M.S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM, **10:5** (1967), 295–297. Zbl 0166.01003
- [14] S.K. Das, *A machine representation of finite T_0 topologies*, J. Assoc. Comput. Mach., **24:4** (1977), 676–692. MR472543, Zbl 0413.54022
- [15] Z.I. Borevich, W. Wieslaw, E. Dobrowolski, V.I. Rodionov, *The number of labeled topologies on nine points*, J. Sov. Math., **37:2** (1987), 937–942. MR503838, Zbl 0612.05004
- [16] Z.I. Borevich, V.V. Bumagin, V.I. Rodionov, *Number of labeled topologies on ten points*, J. Sov. Math., **17:4** (1981), 1941–1945. MR535474, Zbl 0459.05011
- [17] M. Erne, K. Stege, *Counting finite posets and topologies*, Order, **8:3** (1991), 247–265. MR 1154928, Zbl 0752.05002
- [18] M. Benoumhani, M. Kolli, *Finite topologies and partitions*, J. Integer Seq., **13:3** (2010), Article 10.3.5, 19 p. Zbl 1228.05025
- [19] D. Kim, Y.S. Kwon, J. Lee, *Enumerations of finite topologies associated with a finite graph*, Kyungpook Math J., **54:4** (2014), 655–665. Zbl 1408.05071
- [20] M. Kolli, *Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set*, J. Integer Seq., **10:3** (2007), Article 07.3.1, 11 p. MR2291945, Zbl 1113.05007
- [21] C. Marijuan, *Finite topologies and digraphs*, Proyecciones Journal of Mathematics, **29:3** (2010), 291–307. Zbl 1217.54002
- [22] K. Ragnarsson, B.E. Tenner, *Obtainable sizes of topologies on finite sets*, J. Comb. Theory, Ser. A, **117:2** (2010), 138–151. Zbl 1189.05038
- [23] N.P. Adamenko, I.G. Velichko, *Classification of Topologies on Finite Sets Using Graphs*, Ukrainian Mathematical Journal, **60:7** (2008), 1164–1167. MR2489848, Zbl 1164.05336
- [24] I.G. Velichko, P.G. Stegantseva, N.P. Bashova, *The listing of topologies close to the discrete one on finite sets*, Russian Math., **59:11** (2015), 19–25. Zbl 1329.05018

VITALII IVANOVICH RODIONOV
UDMURT STATE UNIVERSITY,
1, UNIVERSITETSKAYA STR.,
IZHEVSK, 426034, RUSSIA
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru