Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Л. П. Сметанина, О. В. Максимова, Т. С. Тинюкова

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2020

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171.я73
С502

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент к.ф.-м.н., доцент ФГБОУ ВО «ИжГТУ им. М. Т. Калашникова» Т. С. Быкова

Авторы-составители: Л. П. Сметанина, О. В. Максимова, Т. С. Тинюкова

С502 Основные понятия теории вероятностей: учеб.-метод. пособие / авторы-составители Л. П. Сметанина, О. В. Максимова, Т. С. Тинюкова. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2020. — 68 с.

ISBN 978-5-4312-0772-3

В учебно-методическом пособии приведены основные понятия теории вероятностей, разобранные примеры сопровождаются методическими указаниями. Пособие включает 30 различных вариантов индивидуальных заданий, которые могут быть использованы для проведения контрольных работ, на практических занятиях, а также, как домашние задания.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов уровня бакалавриата всех направленеий и всех форм обучения института нефти и газа им. М.С.Гуцериева.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171.я73

ISBN 978-5-4312-0772-3

Содержание

Введение

Данное учебно–методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт при проведении занятий по теории вероятностей и организации самостоятельной работы студентов Института нефти и газа им. М.С.Гуцириева в Удмуртском государственном университете.

Материал, содержащийся в работе относится к разделу «Теория вероятностей и математическая статистика» и включает следующие понятия: случайное событие, вероятность случайного события, связь между случайными событиями, случайная величина, числовые характеристики случайной величины. Большой интерес всегда вызывали те разделы математики и ее приложений, которые анализируют явления, носящие «случайный» характер. Эта область математики изначально развивалась как прикладная наука и поэтому методы теории вероятностей широко применяются во многих областях естествознания и техники: в теории надёжности, теории игр, теории информации, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления и других теоретических и прикладных науках.

Изучается данный предмет преимущественно на втором курсе инженерных направлений обучения и завершает блок математических дисциплин. Соответственно, при изучении «Теории вероятностей», используются знания и умения, полученные обучающимися за все предыдущие семестры.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения раздела:

— универсальные компетенции

УК-1 способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

— общепрофессиональные компетенции

ОПК-1 способность решать задачи, относящиеся к профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания.

В учебно–методическом пособии теоретические сведения собраны в десять параграфов и включают термины, формулы и теоремы. Приведены примеры задач и способы их решения. Для контроля знаний и проведения самостоятельной работы студентов в отдельном разделе представлены контрольные задания, которые разбиты на 30 вариантов. В приложение включены две основные таблицы числовых значений.

§1. Комбинаторика

Комбинаторика — подраздел математики, в котором изучаются вопросы перечисления и пересчета элементов некоторого конечного множества, а также производится подсчет количества способов сформировать множество по заданному условию.

Основные правила комбинаторики — правило суммы и правило произведения.

Правило суммы.

Если результаты двух действий взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое k способами, то выполнить одно любое из этих действий можно $m + k$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное количество действий.

Правило произведения.

Пусть требуется выполнить одно за другим два действия. Если первое действие можно выполнить m способами, а второе — k способами, причем количество способов второго действия не зависит от выбора первого действия, то оба действия можно выполнить $m \cdot k$ способами.

Это правило также легко распространяется на любое конечное количество действий.

Задача 1.

Если подбросить одновременно три игральные кости, то сколько имеется различных сумм выброшенных очков?

Решение.

Наименьшее значение, которое может появится на одной кости — 1. Наибольшее значение, которое может появиться на одной кости — 6. Следовательно, наименьшее значение на трех костях — 3. Наибольшее значение на трех костях — 18. Возможны все промежуточные варианты от 3 до 18. Всего 16 различных вариантов сумм выброшенных очков.

Задача 2.

В группе 30 человек. Необходимо выбрать старосту и профорга. Сколькими способами можно это сделать, если один человек не может занимать две должности?

Решение.

Первым действием выбирают старосту. Старостой может быть выбран любой из 30 человек, то есть существует 30 способов выбора старосты.

После того, как староста выбран, вторым действием выбирают профорга. Профоргом можно выбрать любого из оставшихся 29 учащихся.

Таким образом, одному способу выбора старосты соответствуют 29 способов выбора профорга. Следовательно, общее число способов выбора старосты и профорга вычисляем по правилу произведения $30 \cdot 29 = 870$.

Задача 3.

Необходимо составить варианты контрольной работы. Каждый вариант должен содержать три задачи. Первая задача выбирается из любого параграфа I главы сборника задач, вторая задача — из любого параграфа II главы, третья задача — из любого параграфа III главы соответственно. I и III главы содержат по два параграфа, а II глава — три параграфа. Сколько видов контрольных работ можно составить при этих условиях, если вид каждой задачи в контрольной работе определяется только номерами параграфов, из которых выбирают задачи?

Решение.

Для составления контрольной работы одно за другим выполняются три действия.

1) Выбрать первую задачу (первое действие) можно 2 способами, т.к. два параграфа.

2) Выбрать вторую задачу (второе действие, независимо от результатов первого действия) можно 3 способами, т.к. три параграфа во второй главе.

3) Выбрать третью задачу (третье действие) можно 2 способами, т.к. два параграфа в третьей главе.

По правилу произведения выбрать три задачи (выполнить все три действия) можно $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ способами.

Задача 4.

На студенческую конференцию заявлены 4 доклада студентов бакалавриата и 4 доклада студентов магистратуры. Планируется чередовать доклады по уровню обучения, причем первый доклад - доклад студента бакалавриата. Сколькими способами организаторы могут составить расписание докладов?

Решение.

Первым докладчиком может быть выбран один из четырех студентов бакалавриата, вторым — любой из трех оставшихся, а третим — любой из оставшихся двух. Последнего докладчика можно выбрать одним способом.

Согласно правилу умножения, студентов бакалавриата можно распределить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют студенты магистратуры.

Таким образом, согласно правилу умножения, все доклады могут быть распределены $24 \cdot 24 = 576$ способами.

Задача 5.

Имеется 20 изделий первого сорта и 30 изделий второго сорта. Необходимо выбрать два изделия одного сорта. Сколько способов выбора двух изделий возможно в данной ситуации, если учитывать порядок выбора изделий?

Решение.

Условимся первым действием считать выбор изделий 1-го сорта, вторым — выбор изделий 2-го сорта. По правилу умножения два изделия 1-го сорта можно выбрать $20 \cdot 19 = 380$ способами. Аналогично, два изделия 2-го сорта можно выбрать $30 \cdot 29 = 870$ способами. Согласно условию задачи следует выбрать два изделия одного сорта, неважно какого. Это могут быть либо изделия 1-го сорта, либо изделия 2-го сорта. Таким образом, должно быть выполнено либо первое действие, либо второе. Эти действия не могут быть выполнены одновременно, поскольку они взаимно исключают друг друга. Поэтому общее число способов выбора изделий одного сорта равно $380 + 870 = 1250$.

Формулы комбинаторики в задачах

Пусть имеется некоторое множество, содержащее конечное число членов. Обозначим количество элементов этого множества n.

Примеры множеств:

1) множество учебных групп в вузе;

2) множество книг на полке (в магазине, в списке и т.п.);

3) множество населенных пунктов в данной области;

4) множество целых положительных чисел, меньших 10, и т.д.

Все элементы рассматриваемого множества можно пронумеровать, то есть каждому элементу множества поставить в соответствие одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. В результате получается некоторая последовательность элементов данного множества. Такие «занумерованные» множества будем называть *упорядоченными*. Таким образом, упорядоченное множество можно представить в виде некоторой последовательности, что будет использовано в дальнейшем.

Если в упорядоченном множестве поменять местами хотя бы два его элемента, то получим новое упорядоченное множество, которому будет соответствовать новая последовательность элементов данного множества.

Перестановкой из n элементов называется заданный порядок в рассматриваемом множестве.

Примеры перестановок:

1) распределение n порядковых номеров сдачи экзамена среди n студентов;

2) расположение различных объектов некоторого множества в ряд.

Число перестановок обозначается P_n (читается «P из n»).

Все перестановки образовывают, располагая элементы заданного множества в некотором порядке на выделенных местах. На первое место можно поставить любой из n элементов. Заполнив первое место, для каждого его варианта можно найти $n-1$ вариант заполнения второго места. Продолжая заполнять каждое следующее место, получим $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$.

Число $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n, называется *n-факториал* и сокращенно записывается $n!$. Отсюда $P_n = n!$.

Кроме того, считается: $1! = 1$, $0! = 1$.

Пример.

Сколько существует способов расположить пять автомобилей на пяти свободных местах стоянки?

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Размещениями из n элементов по k элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов заданного множества (множества, состоящего из n элементов).

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается «А из n по k»).

Размещения из n элементов по k элементов для одного множества могут отличаться одно от другого или набором элементов, или порядком их расположения.

Примеры размещений:

1) выбор из 10 сотрудников предприятия для выполнения трех различных работ 3 кандидатов;

2) выбор и расположение в ряд на полке 10 книг из 20 имеющихся.

В задачах о размещениях полагают $k \leqslant n$. Причем, для случая $k = n$ справедливо $A_n^k = P_n = n!$.

Для подсчета числа размещений A_n^k используем тот же алгоритм, что и для подсчета числа перестановок P_n, выбирая лишь k элементов из n для заполнения k мест. Первое свободное место можно заполнить n способами, второе, при занятом первом, можно заполнить $n-1$ способом. Таким образом, существует $n \cdot (n-1)$ вариантов заполнения первых двух мест.

Продолжим до заполнения последнего k-го места. При заполненных первых k–1 местах, последнее можно заполнить n–(k–1)=n–k+1 способом. Таким образом, все k мест заполняются числом способов, равным

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример.

Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти студентов для поездки на 4 различные конференции?

$A_9^4 = \dfrac{9!}{(9-4)!} = \dfrac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024.$

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются подмножества, состоящие из k элементов заданного множества (множества, состоящего из n элементов).

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается «C из n по k»).

Примеры сочетаний:

1) выбор 6-ти человек из 10 кандидатов для выполнения одного проекта (или для работы в одинаковых условиях);

2) выбор 6 книг для покупки из 10 имеющихся в магазине.

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний.

1) Выделим какие-либо k элементов из n элементов множества. Это, согласно сказанному выше, можно сделать C_n^k способами;

2) упорядочим выделенные k элементов, что можно сделать $P_k = k!$ способами;

3) всего можно получить $C_n^k \cdot P_k$ вариантов (упорядоченных подмножеств), откуда следует:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k, \quad \text{т. е.} \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Пример.

Необходимо выбрать 6 предметов из 15. Это можно сделать числом способов, равным

$C_{15}^6 = \dfrac{15!}{9! \cdot 6!} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5005.$

Замечание. Выбрать подмножества из k элементов множества, насчитывающего n элементов, можно, выбрав $n-k$ элементов, которые не войдут в интересующее нас подмножество. Отсюда следует свойство числа сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

Задача 1.

а) В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

б) Фотограф предоставил в редакцию 12 фотографий. Сколькими способами можно выбрать четыре для участия в конкурсе фотографий?

Решение.

а) Первую фотографию можно поместить на любую из 12 страниц, то есть 12 способами; вторую — на любую из оставшихся 11 страниц, то есть 11 способами. Для размещения третьей фотографии имеется 10 способов, а для последней — 9 способов.

По правилу умножения четыре фотографии можно разместить на 12 страницах $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11880$ способами.

Найденное число размещений четырех фотографий на 12 страницах газеты — это число A_{12}^4. Действительно, для размещения фотографий следует отобрать 4 различные страницы газеты из имеющихся. Затем необходимо отобранные страницы упорядочить, не обращая внимания на их номера, то есть определить, на какую страницу поместить первую фотографию, на какую вторую, и так далее.

Полученная упорядоченная совокупность страниц является, согласно определению, размещением из 12 элементов по 4.

б) Фотографии выбирают группой в количестве четырех штук. Порядок фотографий при выборе не учитывается. Поэтому необходимо определить число сочетаний C_{12}^4.

По формуле $C_{12}^4 = \dfrac{12!}{4! \cdot 8!} = \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$

И, действительно, $C_{12}^4 = \dfrac{A_{12}^4}{P_4} = \dfrac{11880}{24} = 495.$

Задача 2.

а) Из семи учебных дисциплин студент для формирования индивидуального плана должен выбрать три, по одной для изучения в каждом из трех семестров специализации. Сколькими способами он может это сделать?

б) Из текста задачи убрать условие различия трех дисциплин по семестрам: «Из семи учебных дисциплин студент для формирования индивидуального плана должен выбрать три для изучения в одном семестре». Сколькими способами он может это сделать?

Решение.

а) Так как из условия ясно, что каждую дисциплину можно либо изучать один семестр, либо не изучать ни одного, и что выбрав три дисциплины, можно по-разному разместить их среди семестров, здесь нужно считать число размещений $A_7^3 = \dfrac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

б) Если из текста задачи убрать условие различия трех дисциплин по семестрам, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь ответ определяется только выбором тройки дисциплин, так как все эти дисциплины будут изучаться в одном семестре, и число вариантов определяется как число сочетаний $C_7^3 = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$.

Задача 3.

Имеются 7 общеобразовательных дисциплин. Сколькими способами их можно разместить по трем семестрам? (Дисциплина изучается только один семестр).

Решение.

В отличие от условия второй задачи, здесь можно определить все дисциплины в один семестр или, например, определить две дисциплины во второй семестр, а одну — в третий.

Поэтому первая дисциплина может быть размещен тремя различными способами (в первый семестр, во второй и т.д.). Разместив первую дисциплину, имеем три варианта размещения второй (иначе, каждый способ размещения первой дисциплины может сопровождаться семью способами размещения второй). Таким образом, существует $3 \cdot 3 = 9$ способов размещения первых двух дисциплин. Продолжим алгоритм для следующей дисциплины. Следовательно, существуют $9 \cdot 3 = 3^3 = 27$ способов размещения трех учебных дисциплин. Для семи дисциплин количество способов соответственно равно 3^7. (Если бы общеобразовательных дисциплин было n, то получилось бы 3^n способов размещения).

Задача 4.

Автосалон предлагает на продажу 5 автомобилей типа седан и 4 пикапа. Организация для перевозки сотрудников и грузов намеревается купить 4 машины, причём не более двух пикапов. Сколько вариантов выбора автомобилей имеет организация?

Решение.

Организация может купить 4 автомобиля типа седан. Тогда имеется возможность выбрать 4 из 5-ти предлагаемых машин, и число вариантов здесь $C_5^4 = 5$.

Если будет решено купить три автомобиля типа седан и один пикап, то число вариантов выбора $4 \cdot C_5^3 = 40$.

Если будет принято решение купить два пикапа и два автомобиля типа седан, то число вариантов будет $C_4^2 \cdot C_5^2 = 60$.

Таким образом, у организации 105 вариантов выбора.

§2. Случайные события. Сумма и произведение событий

Испытание (эксперимент) — набор условий.

Событием называется результат некоторого испытания.

События принято обозначать A, B, C и т.д.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет, проявится как результат испытания. Достоверное событие принято обозначать Ω.

Событие называется *невозможным*, если в заданных условиях, в данном испытании оно никогда не наступает.

Если из того, что произошло событие A, следует, что произошло событие B, то говорят, что A влечет B. Эту ситуацию записывают $A \subset B$.

Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то события называются равносильными, при этом пишут $A = B$.

Суммой двух событий A и B называется событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно из событий A и B, т.е. появится только результат A, только результат B или A и B вместе. В этом случае сумму событий обозначают $A + B$ или $A \cup B$.

Произведением двух событий A и B называется событие, состоящее в одновременном наступлении двух событий A и B. Произведение событий обозначают $A \cdot B$ или $A \cap B$.

События называются *несовместными*, если их произведение — невозможное событие (т.е. появление одного события исключает появление другого). Если появление одного события не исключает появление другого, то такие события называются совместными.

Событием, противоположным событию A, называется событие, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A. Противоположное событие принято обозначать $\overline{A}$.

Задача 1.

Опыт состоит в том, что стрелок произвел 3 выстрела по мишени. Событие A_i — {попадание в мишень при i выстреле} $(i = 1, 2, 3)$. Выразить через события A_1, A_2, A_3 следующие события

A — {ровно один промах},

B — {три промаха},

C — {три попадания},

D — {хотя бы одно попадание},

E — {не меньше двух попаданий},

F — {не больше одного попадания}.

Решение.

Событие $A = \{$ровно один промах$\}$ наступает, если появится промах при одном выстреле и попадания при двух выстрелах

$$A = \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \overline{A}_3.$$

Событие $B = \{$три промаха$\}$ наступает, если стрелок промахнулся при всех трех выстрелах, т.е $B = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$.

Событие $C = \{$три попадания$\}$ наступает, если стрелок попал при каждом из трех выстрелов, т.е. $C = A_1 A_2 A_3$.

Событие $D = \{$хотя бы одно попадание$\}$ наступает, если стрелок попал ровно один раз, или ровно два раза, или ровно три раза при трех выстрелах.

$$D = \underbrace{A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3}_{\text{одно попадание}} +$$
$$+ \underbrace{A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3}_{\text{два попадания}} + \underbrace{A_1 A_2 A_3}_{\text{три попадания}}$$

Событие $E = \{$не меньше двух попаданий$\}$ наступает, если стрелок попал ровно два раза, или ровно три раза при трех выстрелах.

Таким образом,

$$E = \underbrace{A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3}_{\text{два попадания}} + \underbrace{A_1 A_2 A_3}_{\text{три попадания}}$$

Событие $F = \{$не больше одного попадания$\}$ наступает, если стрелок попал ровно один раз или ни разу при трех выстрелах. Это значит также ровно два промаха или ровно три помаха при трех выстрелах, т. е.

$$F = \underbrace{A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3}_{\text{два промаха}} + \underbrace{\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3}_{\text{три промаха}}$$

Задача 2.

Опыт состоит в бросании трех монет. Пусть монеты занумерованы и события B_1, B_2, B_3 означают выпадение герба соответственно на 1, 2, 3 монетах. Выразите через B_1, B_2, B_3 следующие события:

A —$\{$выпадение одного герба и двух цифр$\}$,

B — $\{$выпадение не более одного герба$\}$,

C — $\{$число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр$\}$,

D — $\{$выпадение хотя бы двух гербов$\}$,

E — {на первой монете выпал герб, а на остальных цифры},

F — {на первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб}.

Решение.

Если выпадение герба на каждой из трех монет обозначить соответственно B_1, B_2, B_3, то выпадение htirb на каждой из этих монет означает невыпадение герба на этой монете, т.е. события $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ соответственно. Получим

$$A = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1 B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_1\overline{B}_2 B_3, \qquad B = A + \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3,$$

$$C = B, \qquad D = B_1 B_2\overline{B}_3 + B_1\overline{B}_2 B_3 + \overline{B}_1 B_2 B_3 + B_1 B_2 B_3,$$

$$E = B_1\overline{B}_2\overline{B}_3, \qquad F = \overline{B}_1 \cdot (B_2\overline{B}_3 + \overline{B}_2 B_3 + B_2 B_3).$$

§3. Классическое определение вероятности

Равновозможными событиями называются события (результаты испытания), которые имеют одинаковые шансы на появление. Понятие равновозможных событий не подлежит строгому определению и предполагается интуитивно ясным.

Например, если игральная кость — однородный куб, то выпадение любой из граней (любого числа очков от 1 до 6) — равновозможные события.

Элементарными исходами называются результаты испытания, которые не раскладываются через другие события в данном эксперименте.

Пусть достоверное событие Ω распадается на n равновозможных случаев A_1, A_2, ..., A_n $(A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega)$. Сумма некоторых из этих событий дает событие A. Те случаи из A_1, A_2, ..., A_n, на которые распадается событие A, называются благоприятствующими появлению события A. Количество благоприятствующих событию A случаев обозначим через $n(A)$.

Тогда вероятностью события A будем называть число, определяемое по формуле $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, где $n(\Omega)$ — общее число равновозможных случаев.

Задача 1.

В партии из 10 изделий 4 изделия бракованные. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки 5 изделий 3 изделия окажутся бракованными.

Решение.

$A = \{$3 изделия из 5 выбранных бракованные$\}$.

Число возможных способов взять 5 изделий из 10: $n(\Omega) = C_{10}^5$.

Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа бракованных изделий (4 изделия) взято 3 штуки (это можно сделать C_4^3 способами), а остальные 2 изделия небракованные, то есть они взяты из общего числа небракованных изделий $(10 - 4 = 6$ штук) (количество способов равно C_6^2). Поэтому $n(A) = C_4^3 \cdot C_6^2$.

Искомая вероятность события $P(A) = \dfrac{C_4^3 \cdot C_6^2}{C_{10}^5}$.

Задача 2.

Из букв слова «ротор» наудачу извлекаются три буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Решение.

$A = \{$получилось слово «тор»$\}$.

Чтобы отличать одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: $р_1$, $р_2$, $о_1$, $о_2$.

Тогда общее число элементарных исходов $n(\Omega) = A_5^3 = 60$. Слово «тор» получается в $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ случаях (здесь мы воспользовались правилом произведения: букву «т» можно выбрать одним способом, букву «о» двумя способами и букву «р» двумя способами).

Искомая вероятность события $P(A) = \dfrac{4}{60} = \dfrac{1}{15}$.

Задача 3.

Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Как велика вероятность того, что в нем а) все цифры различные? б) все цифры нечетные?

Решение.

а) $A = \{$все цифры различные$\}$.

Так как на каждом из 5 мест в пятизначном номере может стоять любая из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, то всех различных пятизначных номеров будет 10^5. Номера, у которых все цифры различные — это размещения из 10 элементов по 5. Следовательно, $n(A) = A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$,

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0,3024.$$

б) $B = \{$все цифры нечетные$\}$.

Из 5 нечетных цифр (1, 3, 5, 7, 9) можно образовать 5^5 различных пятизначных номеров. Следовательно $n(B) = 5^5$ и

$$P(B) = \frac{5^5}{10^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}.$$

§4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условная вероятность.

Вероятность наступления события B, когда известно, что произошло событие A, называется условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло и обозначается $P(B|A)$ или $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Если $P(B|A) = P(B)$, то события A и B называются независимыми (то есть вероятность появления одного события не зависит от появления или не появления другого события).

Если A и B независимые, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Теоремы сложения вероятностей.

1) Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

2) Если события A и B совместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие теоремы сложения вероятностей.

Если $\overline{A}$ событие противоположное A, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Задача 1.

В урне 6 белых и 3 черных шара. Из нее вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение.

Определим события

$A_1 = \{$появление белого шара при первом извлечении$\}$,

$A_2 = \{$появление белого шара при втором извлечении$\}$,

$A = \{$появление двух белых шаров$\}$.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2$ и

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{(6-1)}{(9-1)} = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72}.$$

Задача 2.

Рассмотрим второй способ решения задачи 2 из предыдущего пункта. Решение через теорему умножения вероятностей.

Из букв слова «ротор» наудачу извлекаются три буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «тор»?

Решение.

Повторим обозначения

$A = \{$получилось слово «тор»$\}$,

$A_1 = \{$первая выбранная буква «т»$\}$,

$A_2 = \{$вторая выбранная буква «о»$\}$,

$A_3 = \{$третья выбранная буква «р»$\}$.

По теореме умножения вероятностей получим

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1A_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5-1} \cdot \frac{2}{5-2} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}.$$

Задача 3.

Монета брошена 3 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет а) ровно 2 раза; б) ни разу; в) хотя бы один раз.

Решение.

Введем обозначение $A_i = \{$выпадение герба при i-ом бросании монеты$\}$, $i = 1, 2, 3$.

а) $A = \{$выпадение двух гербов при трех бросаниях монеты$\}$.

Тогда $A = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.

Так как слагаемые в правой части попарно несовместны, то по теореме сложения 1) имеем

$$P(A) = P(A_1A_2\overline{A}_3) + P(A_1\overline{A}_2A_3) + P(\overline{A}_1A_2A_3).$$

Если учесть независимость событий A_1, A_2, A_3, получим с использованием теоремы умножения вероятностей следующее:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(A_3)+$$
$$+P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

б) $B = \{$нет выпадений герба при 3-х бросаниях монеты$\}$.

Тогда $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ и вероятность

$$P(B) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

в) $C = \{$выпадение хотя бы одного герба при 3-х бросаниях монеты$\}$.

Тогда первый способ решения:

$$C = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2A_3.$$

И вероятность

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Второй способ решения включает переход к противоположному событию:

$\overline{C}$ = {не выпало ни одного герба при 3-х бросаниях монеты}.

Распишем это событие $\overline{C} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

Тогда вероятность

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Задача 4.

Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка — $0,6$; для второго — $0,7$. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадет в мишень.

Решение.

A = {хотя бы один из стрелков попадет в мишень},

$\overline{A}$ = {оба стрелка промахнутся}.

Тогда $P(\overline{A}) = (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$,

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,12 = 0,88$.

§5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная группа попарно несовместных событий (называемых гипотезами), и пусть событие A может произойти только с одним из этих событий (гипотез). Тогда имеет место формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A|H_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

Справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Если стало известно, что событие A произошло, то вероятности $P(H_i)$ можно переоценить, т. е. найти условные вероятности $P(H_i|A)$. Они находятся по формуле Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Задача 1.

В первой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй — 3 белых и 4 черных шара. Из каждой урны берется по одному шару и перекладывается в третью урну. После этого из третьей урны извлекают шар.

а) Какова вероятность того, что он белый?

б) Из третьей урны извлекли белый шар. Какова вероятность, что в третьей урне оба шара белые?

Решение.

Введем обозначение события

$A = \{$из третьей урны извлекается белый шар$\}$.

Событие A может произойти только с одним из событий H_1, H_2, H_3.

$H_1 = \{$в третью урну переложены два белых шара$\}$,

$H_2 = \{$в третью урну переложены один белый, один черный шар$\}$,

$H_3 = \{$в третью урну переложены два черных шара$\}$.

Найдем вероятности гипотез.

Пусть $Б_i = \{$шар, извлеченный из i-ой урны, белый$\}$,

$Ч_i = \{$шар, извлеченный из i-ой урны, черный$\}$, $i = 1, 2$.

$$P(H_1) = P\{Б_1Б_2\} = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7} = \frac{6}{35} \approx 0,171,$$
$$P(H_1) = P\{Б_1Ч_2 + Б_2Ч_1\} = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7} = \frac{17}{35} \approx 0,486,$$
$$P(H_1) = P\{Ч_1Ч_2\} = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7} = \frac{12}{35} \approx 0,343,$$
$$\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 1.$$

Найдем условные вероятности $P(A|H_i)$:

$$P(A|H_1) = 1; \qquad P(A|H_2) = \frac{1}{2}; \qquad P(A|H_3) = 0.$$

а) По формуле полной верояности имеем

$$P(A) = \frac{6}{35}\cdot 1 + \frac{17}{35}\cdot\frac{1}{2} + \frac{12}{35}\cdot 0 = \frac{29}{70}.$$

б) Нас интересует переоценка вероятности $P(H_1|A)$. По формуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{35}\cdot 1}{\frac{29}{70}} = \frac{12}{29} \approx 0,414.$$

Задача 2.

Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй — 40%, третий — 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго — 80%, третьего — 81%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Какова вероятность того, что купленная в магазине лампа стандартная.

Решение.

$A = \{$купленная в магазине лампа стандартная$\}$,
$H_1 = \{$лампа с первого завода$\}$,
$H_2 = \{$лампа со второго завода$\}$,
$H_3 = \{$лампа с третьего завода$\}$.

Запишем значения вероятностей
$P(H_1) = 0,45,\ P(H_2) = 0,4,\ P(H_3) = 0,15.$
$P(A|H_1) = 0,7,\ P(A|H_2) = 0,8,\ P(A|H_3) = 0,81.$
$P(A) = 0,45\cdot 0,7 + 0,4\cdot 0,8 + 0,15\cdot 0,81 = 0,7565.$

Задача 3.

Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по трем классам: 1 класс — мало рискуют, 2 класс — рискуют средне, 3 класс — сильно рискуют. Из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат к классу 1, 50% — к классу 2 и 20% — к классу 3. Вероятность того, что в течение года водитель класса 1 попадет хотя бы в одну аварию, равна $0,01$; для водителя класса 2 вероятность равна $0,02$; для водителя третьего класса — $0,08$. Водитель страхует свою машину и в течение года попадает в аварию. Какова вероятность того, что он относится к классу 1? К классу 2? К классу 3?

Решение.

Введем обозначения для события и гипотез

$A = \{$водитель попадает в аварию$\}$,

$H_1 = \{$водитель относится к 1 классу$\}$,

$H_2 = \{$водитель относится ко 2 классу$\}$,

$H_3 = \{$водитель относится к 3 классу$\}$.

По условию известно, что

$P(H_1) = 0,3,\ P(H_2) = 0,5,\ P(H_1) = 0,2;$

$P(A|H_1) = 0,01,\ P(A|H_2) = 0,02,\ P(A|H_1) = 0,08;$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,08 = 0,029.$$

По формуле Байеса пересчитаем вероятности гипотез, после того, как событие A произошло:

$P(H_1|A) = \dfrac{0,3 \cdot 0,01}{0,029} \approx 0,1035;$

$P(H_2|A) = \dfrac{0,5 \cdot 0,02}{0,029} \approx 0,3448;$

$P(H_3|A) = \dfrac{0,2 \cdot 0,08}{0,029} \approx 0,5517.$

§6. Формула Бернулли

Рассматривается последовательность одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A одинакова и равна p (условно это событие рассматривается как успех, а его ненаступление ($\overline{A}$) как неудача, причем $P(\overline{A}) = 1 - p = q$).

Вероятность того, что в n испытаниях успех наступит ровно k раз, обозначим через $P_n(k)$.

Имеет место формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Задача 1.

Что вероятнее выиграть у равносильного противника а) три партии из четырех или пять партий из восьми? б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

Решение.

Так как противники равносильные, то вероятности выигрыша и проигрыша каждой партии одинаковы и равны $p = q = \dfrac{1}{2}$.

а) Найдем вероятность выигрыша трех парий из четырех, т.е. $n = 4$, $k = 3$:

$$P_4(3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $P_8(5) = C_8^5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{7}{32}$.

Так как $\dfrac{1}{4} > \dfrac{7}{32}$, то вероятнее выиграть три партии из четырех.

б) Вероятность выиграть не менее трех партий их четырех (обозначим ее $R_4(3)$).

$$R_4(3) = P_4(3) + P_4(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16};$$

Вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми ($R_8(5)$):

$$R_8(5) = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{93}{256}.$$

Так как $\dfrac{93}{256} > \dfrac{5}{16}$, то вероятнее выиграть не менее пяти партий из восьми.

Задача 2.

В тесте 6 вопросов. На каждый вопрос предложены три варианта ответа, из которых один правильный. Какова вероятность сдать зачет методом простого угадывания, если для этого нужно ответить не менее, чем на 5 вопросов.

Решение.

Сдать зачет, значит ответить правильно на 5 или 6 вопросов теста. В случае простого угадывания вероятность правильно ответить на один вопрос составляет $p = \frac{1}{3}$.

Определим по формуле Бернулли значения вероятностей

$$P_6(5) = C_6^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{12}{729},$$
$$P_6(6) = C_6^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{729},$$
$$P(\{\text{сдать зачет}\}) = P_6(5) + P_6(6) = \frac{12}{729} + \frac{1}{729} = \frac{13}{729} \approx 0,18.$$

Задача 3.

Всхожесть семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из семи посеянных семян взойдут пять?

Решение.

Вероятность всхожести отдельно взятого семени $p = 0,9$. Тогда $q = 1 - 0,9 = 0,1$. По формуле Бернулли:

$$P_7(5) = C_7^5 p^5 q^2 = C_7^5 \cdot (0,9)^5 \cdot (0,1)^2 = 0,124.$$

Таким образом, из 1000 проведенных экспериментов, в каждом из которых высаживают 7 семян, в среднем в 124 опытах взойдут 5 семян.

§7. Случайные величины

Величина, которая в зависимости от случая принимает различные числовые значения, называется *случайной*. Обозначают случайные величины буквами X, Y и т.п.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, называется *функцией распределения* случайной величины X:

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Основные свойства функции распределения:

1. Если $a < b$, то $P\{a \leqslant x < b\} = F(b) - F(a)$.
2. Функция распределения — неубывающая функция.
3. Функция распределения непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$.
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

7.1. Дискретная случайная величина

Случайная величина называется *дискретной*, если ее значения можно перенумеровать.

Функция распределения дискретной случайной величины определяется посредством равенства: $F(x) = \sum\limits_i p_i$, где суммирование распространяется на все индексы, для которых $x_i < x$.

Дискретная случайная величина может быть задана: 1) рядом распределения, 2) многоугольником распределения, 3) функцией распределения.

Рядом распределения называется совокупность всех частных значений x_i, которые принимает случайная величина, и соответствующих им вероятностей $p_i = P\{X = x_i\}$.

Ряд распределения обычно задается в виде таблицы:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Отметим также, что $\sum\limits_i p_i = 1$.

Многоугольником распределения называется графическое изображение ряда. Откладываются точки $A_i(x_i, p_i)$ и соединяются ломаной.

Рассмотрим схему решения задач на построение законов распределения.

1) Необходимо обозначить и описать случайную величину, о которой идет речь в задаче.

2) Описать множество ее возможных значений x_i.

3) Рассмотреть каждое из событий $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4) Вычислить вероятность каждого из событий $\{X = x_i\}$ с помощью основных теорем и формул.

5) Проверить правильность составленного распределения с помощью равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Задача 1.

В урне 7 шаров, из которых 4 белых, а остальные черные. Из урны наудачу извлекаются 3 шара. X — число извлеченных белых шаров. а) Найти закон распределения; б) построить многоугольник распределения; в) найти $F(x)$; г) найти вероятность события $\{X \geqslant 2\}$.

Решение.

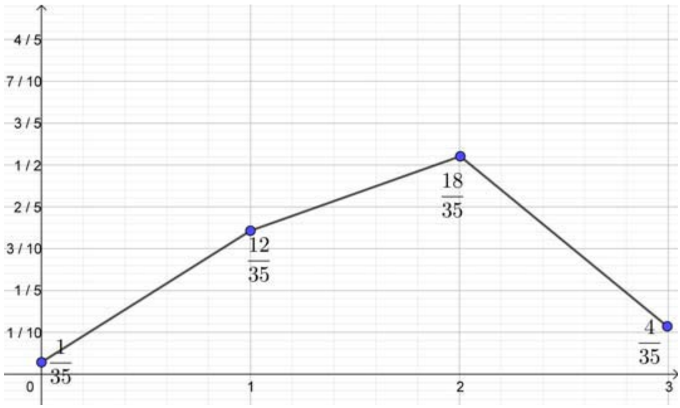
а) Возможные значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3. Заполняем таблицу:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Рассмотрим, как получены соответствующие значения вероятностей для каждого значения случайной величины.

$$P\{X = 0\} = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35},$$
$$P\{X = 1\} = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35},$$
$$P\{X = 2\} = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35},$$
$$P\{X = 0\} = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

б) Представим многоугольник распределения.



в) Найдем функцию распределения $F(x)$.

Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\}$.

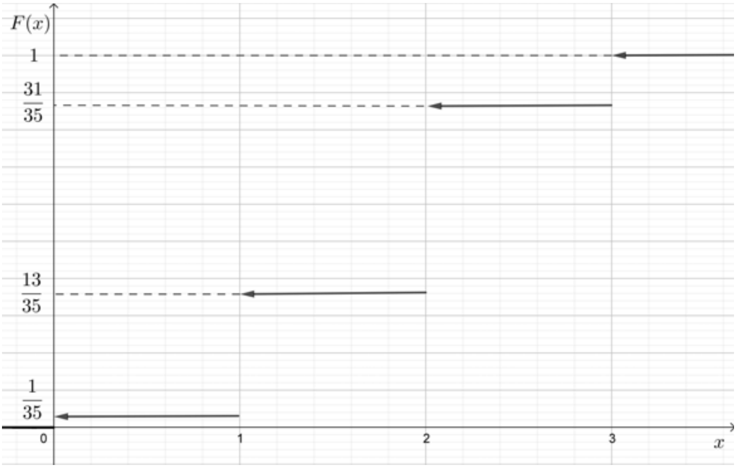
Если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\}$.

Если $x > 3$, то $F(x) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{35}, & 0 < x \leqslant 1, \\ \dfrac{13}{35}, & 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{31}{35}, & 2 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Построим график полученной функции.



г) Для определения вероятности учтем значения случайной величины, удовлетворяющие неравенству $\{X \geqslant 2\}$, получим

$$P\{X \geqslant 2\} = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}.$$

Задача 2.

Пусть ведется стрельба по цели до первого попадания или до окончания патронов, количество которых 5. Пусть X — число израсходованных патронов до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины X.

Решение.

Введем следующие обозначения:

$A_i = \{$попадание по мишени при i-ом выстреле$\}$, $\overline{A}_i = \{$промах по мишени при i-ом выстреле$\}$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 независимые.

Вероятность попадания при одном выстреле обозначим p, а вероятность промаха при одном выстреле — вероятность противоположного события — обозначим $q = 1 - p$.

$$P\{X = 1\} = P\{A_1\} = p,$$
$$P\{X = 2\} = P\{\overline{A}_1 A_2\} = P\{\overline{A}_1\} \cdot P\{A_2\} = q \cdot p,$$
$$P\{X = 3\} = P\{\overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3\} = q^2 \cdot p,$$

$$P\{X=4\}=P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\}=q^3\cdot p,$$
$$P\{X=5\}=P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4\overline{A}_5\}=q^4\cdot p+q^5.$$

Событие $P\{X=5\}$ в данном примере означает, что израсходован весь запас патронов.

Следовательно, закон распределения случайной величины может быть представлен в виде таблицы.

X	1	2	3	4	5
P	p	$q\cdot p$	$q^2\cdot p$	$q^3\cdot p$	$q^4\cdot p+q^5$

Задача 3. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найти закон распределения случайной величины X — числа проб при открывании замка, если испробованный ключ в следующих опробываниях не участвует.

Решение.

Введем следующие обозначения:

$A_i=\{$замок может быть открыт i-ым ключом$\}$, $\overline{A}_i=\{i$-ый ключ не подходит к данному замку$\}$, где $i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$.

События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 зависимые.

Получим вероятности

$$P\{X=1\}=P\{A_1\}=\frac{1}{5},$$
$$P\{X=2\}=P\{\overline{A}_1A_2\}=P\{\overline{A}_1\}\cdot P\{A_2|\overline{A}_1\}=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5},$$
$$P\{X=3\}=P\{\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5},$$
$$P\{X=4\}=P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5},$$
$$P\{X=5\}=P\{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5\}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{5}.$$

Составим закон распределения случайной величины.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

7.2. Непрерывная случайная величина

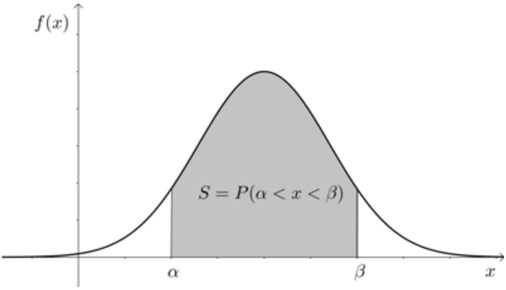
Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые числовые значения из некоторого интервала (конечного или бесконечного). Задать ее можно с помощью функции распределения $F(x)$ или плотности распределения $f(x)$ (дифференциальной функции распределения).

Дифференциальной функцией распределения $f(x)$ называется функция $f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$.

График функции $f(x)$ называется *кривой распределения.*

Свойства дифференциальной функции распределения.

1. $f(x) \geqslant 0$ для любого x.
2. $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ (см. рисунок).



3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

4. Связь между дифференциальной и интегральной функциями распределения:

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$,

$F'(x) = f(x)$, (если в точке x функция $f(x)$ непрерывна).

Пример непрерывного распределения.

Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a; b]$, если на этом отрезке плотность вероятности случайной величины постоянна, то есть

$$
f(x)=\begin{cases} 0, & x<a,\\ c, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}
$$

Найдем параметр c. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$, то имеем

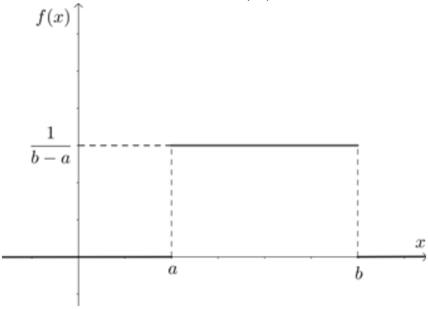
$$
\int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int\limits_{a}^{b} c\cdot dx+\int\limits_{b}^{+\infty} 0\cdot dx=1.
$$

Следовательно, $c=\dfrac{1}{b-a}$.

Таким образом,

$$
f(x)=\begin{cases} 0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & x>b.\end{cases}
$$

Построим график $f(x)$.



Найдем функцию распределения $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

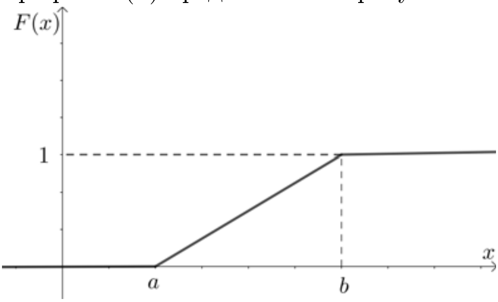
Если $x<a$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0$.

Если $a\leqslant x\leqslant b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int\limits_{a}^{x}\dfrac{1}{b-a}\cdot dt=\dfrac{1}{b-a}t\Big|_{a}^{x}=\dfrac{x-a}{b-a}$.

Если $x>b$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0\cdot dx+\int\limits_{a}^{b}\dfrac{1}{b-a}\cdot dx+\int\limits_{b}^{x} 0\cdot dx=1$.

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$

График $F(x)$ представлен на рисунке.



Задача 1.

Дана функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Cxe^{-x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$

а) При каком C она является плотностью вероятности?

б) Составить $F(x)$.

Решение.

а) Во-первых, $f(x) \geqslant 0$, если $f(x)$ — плотность вероятности, т.е. $C \geqslant 0$.

Во-вторых, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Так как функция плотности задана кусочно, представим интеграл в виде суммы интегралов по двум промежуткам

$$\int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{+\infty} Cxe^{-x}dx = C\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = C \lim_{A \to +\infty}\left(-\frac{A}{e^A} - e^{-A} + 1\right) = C = 1.$$

б) Если $x < 0$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0$.

Если $x \geqslant 0$, то

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{x} te^{-t} \cdot dt = -te^{-t} - e^{-t}\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -xe^{-x} - e^{-x} + 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

§8. Числовые характеристики случайных величин

Пусть X — случайная дискретная величина, закон распределения которой имеем вид:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n

Математическим ожиданием MX случайной величины X называется сумма произведений значений случайной величины на вероятности, с которыми она принимает эти значения:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины с плотностью $f(x)$ называется

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx,$$

при условии, что интеграл сходится.

Свойства математического ожидания.

1. $M[C] = C$, где C — постоянная.
2. $M[CX] = CM[X]$, где C — постоянная.
3. $M[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + \ldots + M[X_n]$.
4. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимы, то

$$M[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = M[X_1] \cdot M[X_2] \cdot \ldots \cdot M[X_n].$$

Дисперсией случайной величины X называется число DX такое, что

$$DX = M[(X - MX)^2].$$

Число $\sigma(X) = \sqrt{DX}$ называется *средним квадратическим отклонением* случайной величины X.

Справелива формула

$$DX = M[X^2] - (M[X])^2. \qquad (*)$$

Этой формулой удобно пользоваться на практике.

Формула нахождения дисперсии для дискретной случайной величины

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 \cdot p_i,$$

или с учетом формулы (*)

$$DX = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2.$$

Формула нахождения дисперсии непрерывной случайной величины:

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)dx$$

или

$$DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (MX)^2.$$

Свойства дисперсии.

1. $D[C] = 0$, где C — постоянная.
2. $D[CX] = C^2 D[X]$, где C — постоянная.
3. $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$, где X, Y — независимые случайные величины.

Задача 1.

Случайная величина X задана плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти $MX, DX, \sigma X$.

Решение.
Определим требуемые числовые характеристики

$$MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int\limits_{0}^{1} x \cdot 2x \cdot dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3},$$
$$DX = M[X^2] - (M[X])^2,$$
$$M[X^2] = \int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot 2x \cdot dx = \left.\frac{x^4}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$DX = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18},$$
$$\sigma X = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Задача 2.
Пусть задан закон распределения некоторой случайной величины X.

X	2	4
P	0,6	0,4

Найти MX и DX.
Решение.

$$MX = \sum_i x_i p_i = 2 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,4 = 2,8.$$

Для вычисления дисперсии по формуле $DX = M[X]^2 - (M[X])^2$ напишем закон распределения случайной величины X^2,

X^2	4	16
P	0,6	0,4

Применим указанный закон распределения.
$M[X^2] = 4 \cdot 0,6 + 16 \cdot 0,4 = 8,8,$
$DX = 8,8 - (2,8)^2 = 0,96.$

Задача 3.

Согласно таблицам смертности, вероятность того, что 25-летний человек проживет еще один год равна 0,992. Страховая компания предлагает застраховать жизнь на 10000 рублей. Какова должна быть величина годового взноса, чтобы подобная страховка не была для страховых органов убыточной?

Решение.

Пусть X — случайная величина, равная выплате застрахованному лицу страховой суммы (за вычетом страхового взноса a). Тогда закон распределения случайной величины X будет таким:

X	$a - 10000$	a
P	0,008	0,992

Здесь $x_1 = a - 10000$, если застрахованный умрет и $x_2 = a$, если застрахованный проживет еще год.

$MX = (a - 10000) \cdot 0,008 + a \cdot 0,992 = a - 80.$

Чтобы страховые органы в среднем не терпели убытка, необходимо, чтобы $MX \geqslant 0$, следовательно, $a \geqslant 80$ рублей.

Задача 4.

Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известна вероятность $p_1 = P\{X = x_1\} = 0,1$, $MX = 3,9$, $DX = 0,09$. Написать закон распределения дискретной случайной величины.

Решение.

Составим таблицу: в первом ряду возможные значения случайной величины, во втором — вероятности, с которыми она эти значения принимает:

X	x_1	x_2
P	$p_1 = 0,1$	p_2

Т.к. $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 1 - 0,1 = 0,9$.

Вычислим математическое ожидание случайной ыеличины X:
$MX = x_1 \cdot 0,1 + x_2 \cdot 0,9 = 3,9$.

Найдем DX:

$DX = M(X^2) - (MX)^2 = x_1^2 \cdot 0,1 + x_2^2 \cdot 0,9 - (3,9)^2$

по условию задачи $DX = 0,09$.

Для определения неизвестных значений x_1 и x_2 имеем систему двух уравнений

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,9x_2 = 3,9, \\ 0,1x_1^2 + 0,9x_2^2 - (3,9)^2 = 0,09, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,1x_1 + 0,9x_2 = 3,9, \\ 0,1x_1^2 + 0,9x_2^2 = 15,3, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 39 - 9x_2, \\ 0,1(39 - 9x_2)^2 + 0,9x_2^2 = 15,3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 39 - 9x_2, \\ (39 - 9x_2)^2 + 9x_2^2 = 153. \end{cases}$$

Решаем второе уравнение системы:
$90x_2 - 702x_2 + 1368 = 0,$
$$x_2 = \left[\begin{array}{l} 4 \\ 3,8. \end{array}\right.$$

Решениями системы являются две пары чисел $(3;4)$ и $(4{,}8;38)$. Но т.к. по условию задачи $x_1 < x_2$, поэтому подходящей парой будет $(3;4)$ и закон распределения дискретной величины примет вид:

X	3	4
P	0,1	0,9

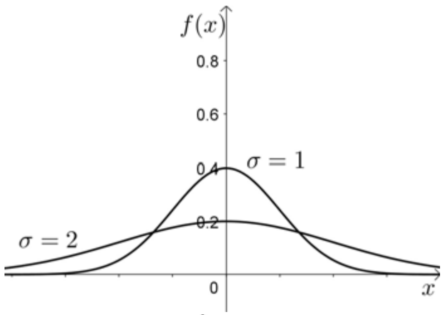
§9. Нормальный закон распределения

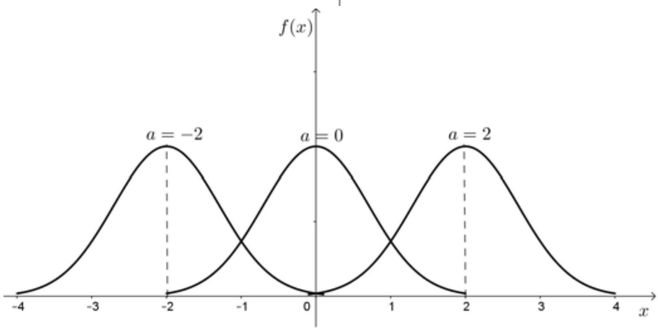
Случайная величина X называется *нормальной*, если ее плотность распределения вероятностей определяется по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Величины a, σ — параметры распределения; $\sigma > 0$, a — любое.

На рисунке показаны графики $f(x)$ при различных a и σ.

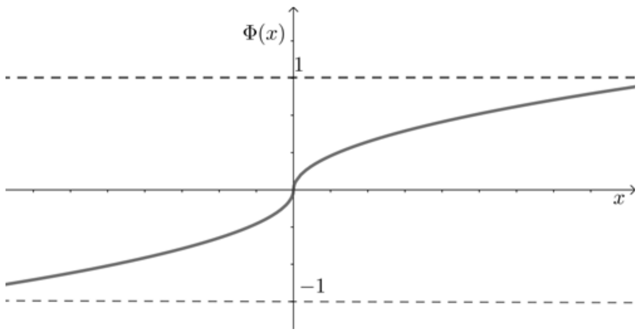




С нормальным законом распределения тесно связана функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

$\Phi(x)$ — строго возрастающая ($\Phi'(x) > 0$), нечетная функция; $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$. График функции приведен на рисунке:



Значения $\Phi(x)$ приведены в таблицах.

Если X — нормальная случайная величина, то $MX = a$, $DX = \sigma^2$.

Связь между функцией распределения нормальной случайной величины $F(x)$ и функцией Лапласа $\Phi(x)$ устанавливается по формуле:

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\right).$$

Из этой формулы вытекает, что

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)), \text{ где } \alpha = \frac{x_1 - a}{\sigma},\ \beta = \frac{x_2 - a}{\sigma}.$$

Итак, $P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$, $\varepsilon > 0$.

Если в последнем равенстве положить $\varepsilon = 3\sigma$, то получим, что $P(|X - a| < 3\sigma) = \Phi(3) = 0,9973 \approx 1$.

В этом заключается правило 3-х сигм:

Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения, то практически достоверно, что ее значения заключены в промежутке $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$.

Задача 1.

Рост мужчины определенной возрастной группы распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 165$ см и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ см. Какую долю костюмов 3 роста следует предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы (3 рост — 170-176 см).

Решение.

Пусть случайная величина X — рост в см представителя данной возрастной группы.

Тогда

$$P(170 \leqslant X < 176) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{176-165}{5}\right) - \Phi\left(\frac{170-165}{5}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\Phi(2,2) - \Phi(1)) = 0,1448.$$

Следовательно, доля костюмов 3 роста должна составлять примерно 14,5% от общего числа.

Задача 2.

Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ м. Найти 1) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м; 2) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

Решение.

Пусть X — суммарная ошибка измерения дальности, $a = 50$,
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 100} e^{-\frac{(x+50)^2}{200}}$.

1) $P(|X| < 150) = P(-150 < X < 150) =$

$= \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{150+50}{100}\right) - \Phi\left(\frac{-150+50}{100}\right)\right) =$

$= \frac{1}{2}(\Phi(2) - \Phi(-1)) = \frac{1}{2}(\Phi(2) + \Phi(1)) = \frac{1}{2}(0,9545 + 0,6827) = 0,8186.$

2) Вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинную, вычисляется по формуле

$$P(-\infty < X < 0) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\tfrac{0+50}{100}\right) - \Phi\left(-\infty\right)\right) = \frac{1}{2}(0,3829 + 1) = 0,6914.$$

§10. Неравенство Чебышева

Для каждого $\varepsilon > 0$ и любой случайной величины X, дисперсия которой конечна, имеет место неравенство Чебышева:

$$P(|X - MX| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Задача 1.

Электростанция обслуживает сеть из 18000 ламп, вероятность включения каждой из которых равна 0,9. Какова вероятность того, что число ламп, включенных в сеть, отличается от своего математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 200?

Решение.

Число включенных ламп X — случайная величина, распределенная по биномиальному закону, $MX = np = 18000 \cdot 0,9 = 16200$.

Вычислим дисперсию случайной величины X:
$DX = npq = 18000 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 1620$.

$$P(|X - MX| \leqslant 200) \geqslant 1 - \frac{1620}{40000} = 0,955.$$

Задача 2.

Оценить вероятность того, что число лиц с высшим образованием в группе из 800 человек отличается от своего математического ожидания меньше, чем на 30.

Решение.

Если X — число лиц с высшим образованием в группе из 800 человек, то это биномиальная случайная величина с математическим ожиданием $800p$ и дисперсией $800pq$, где p — вероятность отдельному лицу оказаться с высшим образованием, а $q = 1 - p$.

Тогда $P(|X - MX| < 30) \geqslant 1 - \dfrac{800pq}{30^2} = 1 - \dfrac{8}{9}p(1-p)$.

Значение p нам неизвестно, поэтому находим максимум выражения $y = \dfrac{8}{9}p(1-p)$. Вычислим производную $y' = \dfrac{8}{9}(1-2p)$.

Приравнивая $y' = 0$, находим $p = \dfrac{1}{2}$, $y'' = -\dfrac{16}{9} < 0$, следовательно, $p = \dfrac{1}{2}$ — точка максимума и $y_{max} = \dfrac{2}{9}$.

Тогда $P(|X - MX| < 30) \geqslant 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

§11. Контрольная работа

Вариант 1

1. На шести карточках написаны буквы «с», «о», «л», «н», «ц», «е». После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «солнце»?

2. На тепловой станции 15 сменных инженеров, из них 3 - женщины. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее двух.

3. В первой бригаде 2 рабочих имеют первый разряд, 2 рабочих — второй разряд, 5 рабочих — четвертый разряд. Во второй бригаде 1 рабочий имеет 1 разряд, 4 рабочих — третий разряд, 2 рабочих — четвертый разряд. Из первой бригады во вторую переведен один рабочий. Найти вероятность того, что рабочий, выбранный наудачу из состава второй бригады, имеет а) второй разряд? б) номер разряда не ниже второго?

4. Имеется 5 колец. Вероятность наброса кольца при одном броске равна $0,9$. Производится набрасывание колец на колышек до первого попадания либо полного израсходования всех колец. Построить закон распределения случайной величины X — $\{$числа бросков$\}$. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 20)$ равна $0,3$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(0, 10)$?

Вариант 2

1. Девять различных книг распределены на полке наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставлены вместе.

2. Литье поступает из двух заготовительных цехов: 70% — из первого и 30% — из второго цеха. При этом продукция первого цеха имеет 10% брака, а продукция второго цеха имеет 20% брака. Найти вероятность того, что наугад взятая заготовка без дефектов.

3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение дня первый станок не потребует внимания рабочего, равна $0,7$; для второго станка — $0,8$; для третьего — $0,9$, и наконец для четвертого — $0,85$. Найти вероятность того, что в течение дня по крайней мере один станок потребует к себе внимания рабочего.

4. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $0,5$. Случайная величина X — число появлений герба. Построить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал $(10, 15)$ равна $0,2$. Чему равна вероятность попадания X в интервал $(35, 40)$?

Вариант 3

1. На скамейку садятся 10 человек. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?

2. Игральная кость брошена два раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не менее 9?

3. В первой урне 3 белых и 2 черных шара; во второй урне — 3 белых и 4 черных шара. Из каждой урны наудачу извлекают один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берут один. а) Какова вероятность того, что он белый? б) Наудачу вынутый шар оказался белым. Какова вероятность, что он был извлечен из первой урны?

4. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известно, что $P\{X = x_1\} = 0,1$, $M(X) = 3,9$, $D(X) = 0,09$. Найти закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью $0,9973$ попадет величина X в результате испытания.

Вариант 4

1. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нём все цифры кратны 3?

2. Путевки в четыре санатория получили 12 рабочих: трое — в первый, трое — во второй, двое — в третий и остальные — в четвертый. Чему равна вероятность того, что трое рабочих поедут в один санаторий?

3. Для контроля продукции из трех партий для исследования взято по одной детали. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии $\frac{2}{3}$ деталей бракованные, а в двух других партиях все доброкачественные?

4. Охотник, имеющий в запасе 5 патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует патроны). Вероятность попадания при одном выстреле $0,8$. Найти закон распределения случайной величины X — число израсходованных патронов. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм. Найти длину интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью $0,9973$ попадает X в результате испытания.

Вариант 5

1. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Какова вероятность, что среди них окажутся два туза?

2. Абонент забыл последнюю цифру номера и набирал ее наудачу. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места?

3. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новые. Для первой игры наудачу берут 2 мяча, которые после игры возвращают обратно. Для второй игры тоже наугад берут два мяча. Найти вероятность того, что мячи, взятые для второй игры, новые.

4. Построить закон распределения случайной величины X — числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания при одном броске равна $0,8$. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{2}x - 1, & 2 < x \leqslant 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Станок-автомат изготавливает валики, причем контролирует их диаметр X. Считая, что X — нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием $a = 10$ мм и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,1$ мм. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью $0,9973$ будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Вариант 6

1. Брошены четыре игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков окажется не меньше 23.

2. Чему равна вероятность того, что при 10 бросаниях игральной кости выпадет хотя бы один раз 2 очка.

3. С первого станка-автомата на сборку поступает 20% деталей, со второго автомата — 30% деталей, с третьего станка — 50%. Первый автомат дает 0,2% брака, второй — 0,3% брака, третий — 0,1% брака. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь бракованная.

4. Из партии, насчитывающей 100 изделий, из которых 10 бракованных, выбраны случайным образом 5 для проверки качества. Построить закон распределения случайной величины X — числа бракованных изделий среди выбранных. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, & 0 < x \leqslant 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Станок-автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали большее 55 мм.

Вариант 7

1. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры четные?

2. В денежно-вещевой лотерее на 1000 билетов приходится 24 денежных и 10 вещевых выигрышей. Некто приобрел два билета. Какова вероятность выигрыша а) хотя бы на один билет? б) по первому билету денег, по второму — вещей?

3. Стрельба производится по пяти мишеням типа A, трем мишеням типа B и двум мишеням типа C. Вероятность попадания в мишень типа A равна $0,4$; вероятность попадания в мишень типа B равна $0,1$; вероятность попадания в мишень типа C равна $0,15$. Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно в мишень какого типа будет произведен этот выстрел.

4. В урне 7 шаров, из них 2 белых и 5 черных. Из урны наугад выбирают 3 шара. Случайная величина X — число черных шаров среди выбранных. Построить закон рапсределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Станок-автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали меньше 40 мм.

Вариант 8

1. Из партии, в которой 31 деталь без дефектов и 6 деталей с дефектами, наудачу берут три детали. Какова вероятность того, что а) все три детали без дефектов; б) по крайней мере одна деталь без дефектов?

2. В урне 10 белых, 2 красных и 1 синий шар. Наудачу извлекли 3 шара. Какова вероятность того, что среди них не более 2 белых шаров?

3. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% всех часов, второй — 45%, третий — 15%. В продукции первого завода спешат 10% часов, в продукции второго завода спешат 20% часов, в продукции третьего завода спешат 5% часов. а) Какова вероятность того, что купленные в магазине часы спешат? б) Купленные часы спешат, какова вероятность, что они произведены третьим заводом?

4. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известно, что $P\{X = x_1\} = 0,1$, $M(X) = 3,7$, $D(X) = 0,4$. Найти закон распределения случайной величины X. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

Вариант 9

1. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что абсолютная величина разности выпавших очков равна 2?

2. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона, помнит только, что она нечетная. Он набирает ее наудачу. Какова вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места?

3. Имеются три урны, содержащие белые и черные шары. Вероятность вынуть белый шар из первой урны равна $0,2$; из второй и третьей урн вероятность вынуть белый шар $0,6$. Из урны, взятой наудачу, вынут шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

4. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего для первого станка равна $0,9$, для второго станка — $0,8$; для третьего станка — $0,7$. Составить закон распределения случайной величины X — числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Вариант 10

1. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры различны?

2. В мастерской два мотора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимания мастера, равна $0,9$; для второго мотора аналогичная вероятность равна $0,85$. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.

3. В правом кармане имеются три монеты по 50 копеек и четыре монеты по 10 копеек; в левом кармане — шесть монет по 50 копеек и три монеты по 10 копеек. Из правого кармана в левый наудачу перекладывают три монеты. После этого из левого кармана извлекают наудачу одну монету. Определить вероятность извлечения монеты в 50 копеек.

4. Имеются шесть ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения случайной величины X — числа опробованных при открытии замка ключей, если испробованный ключ в дальнейшем опыте не участвует. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}, & -2 < x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

Вариант 11

1. Какова вероятность того, что в написанном наудачу четырехзначном числе две цифры одинаковы?

2. В классе 20 учеников, из которых 6 отличников. Класс наудачу разделили на две равных части. Какова вероятность, что в каждой части класса ровно по 3 отличника?

3. Нефтедобывающая комания проводит буровые работы в трех различных местах A, B и C. Вероятности успешного бурения в местах A, B и C соответсвенно равны $0,5$, $0,4$ и $0,1$. Предположив, что события успешного бурения в местах A, B и C независимы, вычислить вероятность того, что менее двух бурений окажутся успешными.

4. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить закон распределения случайной величины X — числа испытанных приборов, если для каждого прибора вероятность выдержать испытание равна $0,9$. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{16}, & 0 \leqslant x < 2, \\ x - \dfrac{7}{4}, & 2 \leqslant x < \dfrac{11}{4}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{11}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Суточный дебит скважин на промысле можно считать случайной величиной X, имеющей нормальный закон распределения с математическим ожиданием $a = 10^6$ м^3/сут и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0,2 \cdot 10^6$ м^3/сут. Найти вероятность событий: A — суточный дебит будет больше $1,5 \cdot 10^6$ м^3/сут; B — не больше $0,9 \cdot 10^6$ м^3/сут.

Вариант 12

1. Билеты в партер стоят 500 рублей, в бельэтаж — 4000 рублей, на ярусы — 300 рублей. Определить вероятность того, что покупаемые наудачу два билета вместе стоят не дороже 800 рублей.

2. Максимальное число очков при одном выстреле по мишени равно 10. Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех выстрелах по мишени, если вероятность получения 30 очков — $0,008$. Известно, что при одном выстреле вероятность получения 8 очков — $0,15$, а менее 8 — $0,4$.

3. В водоеме обитают судаки, щуки и окуни в соотношении $1:2:4$. Для поимки рыбы выставляется живцовая снасть. Оказавшийся в поле зрения хищника живец бывает им схвачен с вероятностью $0,4$ для судака; с вероятностью $0,3$ для щуки; с вероятностью $0,2$ для окуня. а) Какова вероятность захвата живца хищником во время ловли? б) К какому виду вероятнее всего принадлежит рыба, схватившая живца?

4. Из колоды карт в 52 листа наудачу берут три карты. Пусть случайная величина X — число карт пиковой масти, среди выбранных. Составить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -25, \\ \dfrac{x+25}{50}, & -25 \leqslant x < 0, \\ 0,5x + 0,5, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Производится измерение без систематических ошибок диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчиняются нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой по абсолютной величине не превосходящей 35мм.

Вариант 13

1. На десяти карточках написаны натуральные числа от 1 до 10. Из этих карточек случайно выбираются две. Найти вероятность того, что на каждой из карточек окажутся числа, меньшие 7.

2. От каждой из двух групп людей путем жеребьевки выбирают по одному представителю. В первой группе 4 мужчины и 5 женщин, во второй группе 3 женщины и 5 мужчин. Найти вероятность того, что представители будут разного пола.

3. По линии связи передаются два сигнала A и B с вероятностями $0,76$ и $0,24$ соответственно. Из-за помех $\frac{1}{6}$ сигналов A искажается и принимается как сигналы B, а $\frac{1}{7}$ часть переданных сигналов B принимается как сигналы A. а) Найти вероятность того, что при приеме появится сигнал A. б) Известно, что появился сигнал A. Какова вероятность, что он же и был передан?

4. Стоимость одного билета мгновенной лотереи 100 руб, вероятность выигрыша $0,2$. Игрок покупает по одному билету до выигрыша, но не более пяти билетов. Случайная величина X — сумма потраченных денег. Составить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$. Найти вероятность того, что сумма потраченных денег меньше 300 рублей.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \dfrac{1}{4}(x-1)^2, & 1 \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Ошибка измерения подчинена нормальному закону с параметрами $a = 50$дм и $\sigma = 10$дм. Найти вероятность того, что измеряемое значение будет оклоняться от истинного не более, чем на 20дм.

Вариант 14

1. На втором курсе у студентов-нефтяников 1 октября запланированы 3 лекции по разным предметам. На втором курсе изучается 10 дисциплин. Студент, не зная расписание, взял 3 конспекта наугад. Какова вероятность того, что все три конспекта соответствуют расписанию?

2. Изготовлено 30 подшипников. Известно, что из них 6 соответствуют размерам III группы ГОСТа, 10 — II группы и 14 — III группы. Какова вероятность того, что из трех отправленных на сборку подшипников, первый принадлежит к III группе, второй — ко II группе, третий к I группе.

3. Страховая компания разделяет клиентов по классам риска: 1 класс — малый риск, 2 класс — средний риск, 3 класс — большой риск. Клиенты первого класса составляют 30%, клиенты второго класса — 50% и клиенты третьего класса — 20% общего числа клиентов данной страховой компании. Вероятность страхового случая для клиентов первого класса $0,03$, второго — $0,1$, третьего — $0,05$. а) Какова вероятность того, что клиент получит вознаграждение? б) Клиент получил вознаграждение. Какова вероятность, что он клиент третьего класса?

4. На пути движения автомобиля 3 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает автомашине дальнейшее движение, либо нет. Случайная величина X — число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Составить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$. Найти вероятность того, что автомобиль пройдет не менее двух светофоров до остановки.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4, \\ (0,5x-2)^2, & 4 \leqslant x < 6, \\ 1, & x \geqslant 6. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Отклонение размера детали от стандарта представляет собой случайную величину, распределенную нормально с параметрами $a = 4$ и $\sigma = 0,2$. Найти процент (%) деталей, отклоняющихся от MX по модулю не более чем на $0,05$.

Вариант 15

1. Для сдачи зачета студенту достаточно ответить хотя бы на два из трех предлагаемых вопросов. Студент выучил 25 вопросов из 30. Найти вероятность сдачи зачета.

2. Банк имеет шесть отделений. С вероятностью $0,2$ каждое отделение независимо от других может заказать на завтра крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заказами. Какова вероятность того, что будет а) ровно две заявки; б) хотя бы одна заявка? в) Какова вероятность, что есть заявка из первого отделения, если поступило две заявки?

3. Студент во время экзамена для решения сложной задачи решил воспользоваться мобильным телефоном, в котором есть номера восьми друзей. Воспользоваться телефоном открыто на экзамене студент не может, поэтом выбирает телефон одного из друзей наугад. Пятеро из них могут решить задачу с вероятностью $0,3$; еще двое — с вероятностью $0,5$ и один студент-математик может решить задачу наверняка. а) Какова вероятность, что студент сможет решить задачу с помощью друзей? б) Первый же звонок другу позволил правильно решить задачу. Какова вероятность того, что студент дозвонился до друга-математика?

4. Блок радиотехнического устройства имеет 3 элемента. Вероятность того, что любой из этих элементов не перегорит в момент включения, равна 0,7. Блок работает, если работает ровно один из этих элементов. Если выйдет из строя в момент включения первый элемент, то автоматически включается второй элемент. Если выйдут из строя в момент включения первый и второй элементы, то включается третий. Число задействованных элементов есть случайная величина X. Составить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{9}(x^3 + 1), & -1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет — нормально распределенная случайная величина с параметрами $a = 161\,\text{см}$ и $\sigma = 4\,\text{см}$. Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 см до 158 см нужно предусмотреть в объеме производства для данной группы 15 лет?

Вариант 16

1. Имеется 50 рабочих, из которых 30 умеют только укладывать асфальт, а остальные — только носить его ведрами. Случайно выбирается бригада из 20 человек. Найти вероятность того, что среди них 15 человек умеют укладывать асфальт, а 5 носить его ведрами.

2. В нефтеносном районе бурят одновременно шесть скважит. Каждая из скважин вскрывает месторождение независимо от других с вероятностью $0,1$. Какова вероятность вскрытия месторождения?

3. Для решения вопроса идти в кино или на лекцию студент подбрасывает монету. Если студент пойдет на лекцию, он разберется в теме с вероятностью $0,9$; если студент пойдет в кино, он разберется в теме с вероятностью $0,3$. а) Найти вероятность того, что студент разберется в теме. б) Студент разобрался в теме. Найти вероятность того, что он ходил в кино, а не на лекцию.

4. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность срабатывания первого сигнализатора — 0,9, а второго — 0,8. Случайная величина X — число сигнализаторов, сработавших при аварии. Составить закон распределения X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0,25(x^3 + x + 2), & -1 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Станок настроен на выпуск деталей со средним диаметром $2,00$см и средним квадратическим отклонением $0,005$ см. Действует нормальный закон распределения. Компания технического сервиса рекомендует остановить станок для технического обслуживания и корректировки в случае, если образцы деталей, которые он производит, имеют средний диаметр $2,01$ см или $1,99$ см.

а) Найти вероятность остановки станка, если он настроен по инструкции на $2,00$ см.

б) Какова вероятность того, что станок будет продолжать работать, если начнет производить детали диаметром $2,20$ см?

Вариант 17

1. Имеются две группы студентов, состоящие из 20 и 25 человек. Свободно владеют английским языком 12 студентов из первой группы и 15 студентов из второй группы. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный из двух групп студент свободно владеет английским языком?

2. Талантливый студент участвует в четырех независимых проектах, вероятности успеха которых составляют 0,9; 0,4; 0,8 и 0,2 соответственно. Найти вероятность того, что не менее трех проектов завершатся успехом.

3. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Нормальный режим полета составляет 80% времени полета, режим перегрузки составляет 20% времени полета. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме составляет $0,01$, в условиях перегрузки $0,1$. а) Вычислить надежность прибора за время полета. б) За время полета прибор вышел из строя. Найти вероятность того, что это произошло в режиме перегрузки.

4. В партии из 9 деталей имеется 4 стандартные. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения случайной величины X — числа стандартных деталей. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \dfrac{1}{9}(x+2)^2, & -2 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически. Их сердняя масса $1,06$ кг. Известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Каков процент (%) коробок, масса которых превышает 940 г?

Вариант 18

1. Банковский сейф имеет кодовый замок, состящий из шести дисков с восемью буквами на каждом. Сейф открывается при наборе единственной комбинации букв. Злоумышленник пытается открыть сейф, причем на провеку одной кодовой комбинации у него уходит 10 секунд. Какова вероятность того, что он успеет открыть сейф, если в его распоряжении один час?

2. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна р = 0,2. Проводят 3 измерения. Найти вероятность того, что хотя бы один результат измерений окажется неверным.

3. На шоссе расположены две автозаправки: сначала компании «Лукойл», затем «Славнефть». 2% всех проезжающих автовладельцев принимают решение заправить на заправке «Лукойл». При этом вероятность, что им удастся это сделать равна 80%. Остальные проезжают на «Славнефть», где вероятность заправиться 85%. а) Найти вероятность, что наудачу остановленный инспектором ГИБДД автомобиль окажется заправленным. б) Наудачу остановленный инспектором ГИБДД автомобиль оказался заправленным. Какова вероятность того, что он заправился на «Лукойл»?

4. Испытываются на надежность три прибора, причем вероятность отказа первого равна 0,1, а второго — 0,2, третьего — 0,3. Случайная величина X — число надежных приборов. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\sin x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Значения теста IQ (коэффициент интеллекта) Стэнфорда-Бине распределены по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 16$.

а) Найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта меньше 60.

б) Найти долю людей, у которых коэффициент интеллекта отклонится от 100 менее чем на 48.

Вариант 19

1. Какова вероятность угадать в спортлото «5» из «36» не менее трех номеров?

2. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0,05$, $p_2 = 0,1$ и $p_3 = 0,3$. Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.

3. В танковом биатлоне стрельба производится по 3 мишеням типа A, одной — типа B и двум — типа C. Вероятность попадания в мишень типа A — 0,2; типа B — 0,3; типа C — 0,6. а) Найти вероятность поражения мишени при одном выстреле, если неизвестно в мишень какого типа он будет сделан. б) При одном выстреле мишень оказалась поражена. Найти вероятность, что это мишень типа A.

4. Обрыв связи произошел на одном из пяти звеньев телефонного кабеля. Монтёр последовательно проверяет звенья для обнаружения места обрыва. Составить закон распределения случайной величины X — числа обследованных звеньев, если вероятность обрыва связи одинакова для всех звеньев. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x, & \dfrac{5}{2} \leqslant x < 3, \\ 1, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Текущая цена акции может быть приближена нормальным распределением с математическим ожиданием 15,28 руб и средним квадратическим отклонением 0,12 руб. Рассчитать вероятность того, что цена акции будет между 15,05 руб и 15,10 руб.

Вариант 20

1. В лабораторию для анализа поступило 7 бочек с бензином. Из сопроводительных документов известно, что три из них содержат бензин марки A, две — марки B, две — марки C. Наугад вскрыли три бочки. Какова вероятность обнаружить в них бензин всех трех марок?

2. Студент имеет четыре задолженности по учебе: учебная практика, математика, иностранный язык и физкультура. Вероятности закрыть долг за неделю равны соответственно 0,2; 0,5; 0,8 и 0,1. Студенту продлят сессию, если он за неделю закроет хотя бы один долг. Найти вероятность того, что студенту продлят сессию.

3. В первой урне 8 белых и 3 черных шаров, во второй —- 7 белых и 8 черных. Из второй урны случайным образом перекладывают в первую два шара, после чего из первой урны берут один шар, который оказывается белым. Какова вероятность того, что два шара, переложенные из второй урны в первую, были разных цветов?

4. Рабочий в течение смены обслуживает 2 станка. Вероятность того, что первый станок не потребует внимания рабочего в течение смены равна 0,85; для второго станка эта вероятность равна 0,9. Составить закон распределения случайной величины X — числа станков, которые потребуют внимания в течение смены. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2 - \dfrac{2}{x}, & 1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. При расследовании причин аварии было установлено, что она могла произойти из-за установки на автомобиль детали, размеры которой выходят за пределы допустимого интервала $(15\,\text{мм}; 25\,\text{мм})$. Известно, что размер деталей, поступающих на конвейер автозавода, представляет собой нормально распределенную случайную величину с математическим ожиданием $20\,\text{мм}$ и $\sigma = 5\,\text{мм}$. Оценить вероятность того, что причиной аварии послужила установка на автомобиль детали нестандартного размера.

Вариант 21

1. В группе учатся 16 юношей и 9 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найти вероятность того, что среди дежурных не менее двух юношей.

2. В цехе исследуется работа трех станков. Вероятность отказа в течение смены для станков соответственно равна 0,1, 0,2 и 0,15. Найти вероятность того, что в течение смены безотказно проработают ровно два станка.

3. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трёх касс (А, В, С). Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно $0,35$, $0,5$ и $0,4$. Вероятности того, что к моменту прихода пассажира, имеющиеся в кассе билеты распроданы равны соответственно $0,25$, $0,35$ и $0,05$. а) Найдите вероятность того, что билет будет куплен. б) В какой из касс это могло произойти с наибольшей вероятностью?

4. Экзаменатор задаёт студенту дополнительные вопросы, но не более трёх. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0,9. Экзаменатор прекращает опрос, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа дополнительных вопросов, которые задаёт преподаватель. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{3}(x^2 + 2x), & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Предполагается, что предел текучести некоторого сорта стали равных плавок есть случайная величина, $a = 32\,\text{кг}/\text{мм}^2$, $\sigma = 1,5\,\text{кг}/\text{мм}^2$. Найти процент (%) плавок, для которых предел текучести от номинала не более 5%.

Вариант 22

1. Наудачу взятая зачетная книжка обозначена номером из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры нечетные.

2. В электрическую цепь параллельно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны $p_1 = 0,15$, $p_2 = 0,2$ и $p_3 = 0,3$. Найдите вероятность того, что ток в цепи будет.

3. Детали, изготовленные в цехе, попадают к одному из двух контролёров. Вероятность того, что деталь попадёт к первому контролёру, равна 0,4; ко второму — 0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром равна 0,99; вторым контролёром — 0,93. Годная деталь при проверке оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что эту деталь проверял первый контролёр.

4. На полке 10 учебников, причем 3 из них по математике. Библиотекарь взял наугад 2 учебника. Пусть X — число учебников по математике среди двух взятых. Составить закон распределения дискретной случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sin 2x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Величина X сопротивления резистора подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 8 килоом и средним квадратичным отклонением 150 ом. Определить вероятность, что у случайно взятого резистора партии сопротивление будет отличаться от номинала менее, чем на 5% по модулю.

Вариант 23

1. В урне 9 пронумерованных шаров. Какова вероятность того, что при случайном последовательном извлечении трех шаров появятся только нечетные номера?

2. В течение семестра студент пропустил три темы по математике. Вероятности освоить темы самостоятельно для студента соответсвенно равны 0,7; 0,5 и 0,6. Найти вероятность того, что к сессии студент освоит не менее двух тем из пропущенных.

3. В секретариат предприятия поступили заявки на оборудование с трех месторождений; 54% заявок с первого месторождеия были признаны, как требующие удовлетворения, из них 20% срочные. Со второго и третьего месторождений были признаны, как требующие удовлетворения соответственно 80% и 75%, при этом срочных 15% и 10% соответственно. а) Какова вероятность того, что взятая наугад заявка оказалась срочной? б) Какова вероятность, что оказавшаяся срочной заявка поступила с первого месторождения?

4. Испытываются на надежность 3 прибора, вероятность каждого из них выйти из строя во время испытания равна $\frac{1}{20}$. Случайная величина X — число отказавших приборов в ходе испытания. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0,5x + 1, & -2 \leqslant x < -1, \\ 0,5(x+2), & -1 \leqslant x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Ошибка X измерительного прибора распределена нормально. Систематическая ошибка отсутствует ($MX = 0$). Средняя квадратическая ошибка $\sigma = 8\,$мкм (микрометров). Найти вероятность того, что при очередном измерении ошибка превысит по модулю 8 мкм.

Вариант 24

1. Брошены четыре игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не меньше 23.

2. Для трех месторождений определен плановый уровень добычи полезных ископаемых. Вероятность того, что по первому месторождению выполнят план по добыче, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень добычи будет достигнут для всех месторождений.

3. Студент ищет информацию для написания курсовой у специалиста, или в интернете, или библиотеке с вероятностями 0,05; 0,78 и 0,17 соответственно. Проверяющий преподаватель определяет источник в интернете или библиотеке с вероятностями соответственно равными 0,9 и 0,4. Если источник обнаружен — курсовая не засчитывается. Какова вероятность того, что учащийся сдаст работу?

4. В продукции завода брак составляет 4%. Наудачу берутся 3 детали. X — число бракованных деталей среди трех взятых. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x^2, & 0 \leqslant x < 0,5, \\ x, & 0,5 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $MX = 10$ см и среднее квадратическое отклонение $\sigma X = 50$ см. Ошибка измерения X распределена по нормальному закону. Найти $P(|X| < 100)$.

Вариант 25

1. Среди 25 задач на экзамене 20 легкие и 5 потруднее. Студент выбирает наугад две задачи. Найти вероятность, что ему повезло, и обе задачи легкие.

2. При сборке изделия проверяют три микросхемы. Вероятности неисправности каждой из них соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. Какова вероятность того, что среди этих микросхем исправными окажутся не менее двух?

3. В среднем из 100 клиентов некоторой АЗС 39 заправляют бензин марки АИ-95, 30 — бензин марки АИ-92 и 20 — бензин марки АИ-98. Вероятность того, что клиент также приобретет дополнительный товар составляет соответственно 0,1; 0,02 и 0,2. Какова вероятность, что клиент, который приобрел дополнительно товар, заправил бензин марки АИ-95?

4. В ящике находится 10 шаров с номерами: номер 1 имеют четыре шара, номер 2 — три шара, номер 3 — два шара и номер 4 — один шар. Случайная величина X — номер наугад вынутого шара. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \dfrac{1}{5}(x-2), & 2 \leqslant x < 4, \\ 0,6x - 2, & 4 \leqslant x < 5, \\ 1, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение X её контролируемого размера от номинала не превышает по модулю 5 мм. Случайная величина X распределена нормально с параметрами $MX = 0$ мм и $\sigma X = 3$ мм. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

Вариант 26

1. В группе 10 студентов с разным рейтингом успеваемости допущены к экзамену. Преподаватель вызывает экзаменуемых в случайном порядке. Найти вероятность того, что студенты были вызваны по возрастанию рейтинга.

2. Отдел технического контроля проверяет поступающие измерительные приборы на точность. Вероятность того, что приборы цеха №1 точно показывают результат, равна 0,91, для изделия цеха №2 эта вероятность равна 0,83. Найти вероятность того, что из двух проверенных приборов (по одному от каждого цеха) только один дает точные показания измеряемых величин.

3. В урну, содержащую 6 шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найдите вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновероятны все возможные предположения о первоначальном количестве белых шаров в урне.

4. При увеличении напряжения в цепи могут выйти из строя 3 элемента используемого прибора. Вероятности выхода из строя для них соответственно 0,3; 0,4; 0,5. Случайная величина X — число испортившихся элементов при очередном увеличении напряжения. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \sqrt{x} - 1, & 1 \leqslant x < 4, \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Случайная величина X — ошибка измерительного прибора — распределена нормально с дисперсией 16 мв. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Вычислить вероятность того, что в пяти независимых измерениях ошибка превысит по модулю 6 мв не более трех раз.

Вариант 27

1. На буровой 15 сменных рабочих, из них 5 новичков. В смену занято 6 человек. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену новичков не более двух, но не менее одного.

2. Студент сдает три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,75, третьего – 0,55. Найти вероятность того, что он не сдаст хотя бы один экзамен.

3. В магазине было проведено исследование продаж некоторого товара. Выяснилось, что этот товар покупают 16% женщин, 13% мужчин и 33% детей. В настоящий момент среди покупателей: 155 женщин, 77 мужчин и 29 детей. а) Найдите вероятность того, что случайно выбранный для мониторинга покупатель приобретет этот товар. б) Товар приобретен. Какова вероятность, что его купил мужчина?

4. Исследованию подлежат 3 пробы руды на промышленное содержание металла. Вероятность его содержания равна 0,8. Случайная величина

X — число проб, содержащих металл, среди обследованных трех. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}, & 1 \leqslant x < 4, \\ 1, & x \geqslant 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Деталь, изготовленная автоматом, считается бракованной, если отклонение X ее контролируемого параметра от номинала превышает по модулю две единицы измерения. Предполагается, что случайная величина X распределена нормально с параметрами $MX = 0$, $\sigma X = 0,7$. Сколько процентов бракованных изделий выдает автомат?

Вариант 28

1. Посадка в междугородний атобус на трассе происходит при наличии свободных мест. К остановке с 10 ожидающими, среди которых 3 студента, подходит автобус с 5 свободными местами. Найти вероятность, что все студенты попадут в этот автобус.

2. Для трех заводов определен плановый уровень производства. Вероятность того, что первый завод выполнит план по производству, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень производства будет достигнут только двумя предприятиями.

3. Была проведена одна и та же контрольная работа в трех группах. В первой группе из 30 студентов 8 выполнили работу на «отлично», во второй, где 28 студентов, 6 «отличных» работ, в третьей, где 27 студентов, 9 работ выполнены на «отлично». а) Найти вероятность того, что первая выбранная наудачу работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется «отличной». б) Наудачу выбранная работа оказалась выполнена на «отлично». Какова вероятность того, что работа студента из первой группы?

4. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом справочнике — 0,6;

во втором — 0,7; в третьем — 0,8. Случайная величина X — число справочников, которыми пришлось воспользоваться студенту. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{3}, & 0 \leqslant x < 9, \\ 1, & x \geqslant 9. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Для случайной величины X, подчиняющейся нормальному закону распределения с параметрами $MX = 0,7$ и дисперсией $DX = 49$, найдите вероятность $P(|X|) > 4,9$.

Вариант 29

1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и думает набирать ее наугад. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

2. Для каждого из трех производственных участков вероятности не выполнения плана соответственно равны: 0,02; 0,05 и 0,01. Найти вероятность того, что к моменту подведения итогов работы плановое задание будет выполнено только двумя участками.

3. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если идти по первой дороге, то вероятность выхода из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй — 0,3; если по третьей — 0,2; если по четвертой — 0,1; если по пятой — 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

4. В отделе работают 6 мужчин и 5 женщин. На конференцию выбирают 2 человека. Случайная величина X — число женщин среди выбранных. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 1 - \dfrac{1}{4}x^2, & -2 \leqslant x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $MX = 29$ и дисперсией $DX = 64$ найдите вероятность $P(26,6 < X < 34,6)$.

Вариант 30

1. На экзамене студенту предлагается выбрать случайным образом два вопроса из 50 имеющихся. Экзамен сдан, если студент ответит хотя бы на один вопрос. Студент знает все вопросы, номера которых кратны пяти. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан.

2. Для каждого из трех производственных участков вероятности не выполнения плана соответственно равны: 0,01; 0,03 и 0,1. Найти вероятность того, что к моменту подведения итогов работы плановое задание будет не выполнено хотя бы одним участком.

3. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых как 3:2. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,1, а того, что будет заправляться легковая — 0,2. У бензоколонки заправляется машина. Какова вероятность того, что это грузовая машина?

4. На сборку поступило 35 конусных и 30 эллиптических валиков. Сборщик наудачу берет 2 валика (сразу). Случайная величина X — число конусных валиков среди двух взятых. Составить закон распределения случайной величины X. Найти $M(X)$, $D(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

5. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0,5 - \cos x, & 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{3}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. Построить графики интегральной и дифференциальной функций распределения.

6. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $MX = 24$ и дисперсией $DX = 49$ найдите вероятность $P(X < 20,5)$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,38	0,1480	0,76	0,2764	1,14	0,3729	1,52	0,4357
0,01	0,0040	0,39	0,1517	0,77	0,2794	1,15	0,3749	1,53	0,4370
0,02	0,0080	0,40	0,1554	0,78	0,2823	1,16	0,3770	1,54	0,4382
0,03	0,0120	0,41	0,1591	0,79	0,2852	1,17	0,3790	1,55	0,4394
0,04	0,0160	0,42	0,1628	0,80	0,2881	1,18	0,3810	1,56	0,4406
0,05	0,0199	0,43	0,1664	0,81	0,2910	1,19	0,3830	1,57	0,4418
0,06	0,0239	0,44	0,1700	0,82	0,2939	1,20	0,3849	1,58	0,4429
0,07	0,0279	0,45	0,1736	0,83	0,2967	1,21	0,3869	1,59	0,4441
0,08	0,0319	0,46	0,1772	0,84	0,2995	1,22	0,3883	1,60	0,4452
0,09	0,0359	0,47	0,1808	0,85	0,3023	1,23	0,3907	1,61	0,4463
0,10	0,0398	0,48	0,1844	0,86	0,3051	1,24	0,3925	1,62	0,4474
0,11	0,0438	0,49	0,1879	0,87	0,3078	1,25	0,3944	1,63	0,4484
0,12	0,0478	0,50	0,1915	0,88	0,3106	1,26	0,3962	1,64	0,4495
0,13	0,0517	0,51	0,1950	0,89	0,3133	1,27	0,3980	1,65	0,4505
0,14	0,0557	0,52	0,1985	0,90	0,3159	1,28	0,3997	1,66	0,4515
0,15	0,0596	0,53	0,2019	0,91	0,3186	1,29	0,4015	1,67	0,4525
0,16	0,0636	0,54	0,2054	0,92	0,3212	1,30	0,4032	1,68	0,4535
0,17	0,0675	0,55	0,2088	0,93	0,3238	1,31	0,4049	1,69	0,4545
0,18	0,0714	0,56	0,2123	0,94	0,3264	1,32	0,4066	1,70	0,4554
0,19	0,0753	0,57	0,2157	0,95	0,3289	1,33	0,4082	1,71	0,4564
0,20	0,0793	0,58	0,2190	0,96	0,3315	1,34	0,4099	1,72	0,4573
0,21	0,0832	0,59	0,2224	0,97	0,3340	1,35	0,4115	1,73	0,4582
0,22	0,0871	0,60	0,2257	0,98	0,3365	1,36	0,4131	1,74	0,4591
0,23	0,0910	0,61	0,2291	0,99	0,3389	1,37	0,4147	1,75	0,4599
0,24	0,0948	0,62	0,2324	1,00	0,3413	1,38	0,4162	1,76	0,4608
0,25	0,0987	0,63	0,2357	1,01	0,3438	1,39	0,4177	1,77	0,4616
0,26	0,1026	0,64	0,2389	1,02	0,3461	1,40	0,4192	1,78	0,4625
0,27	0,1064	0,65	0,2422	1,03	0,3485	1,41	0,4207	1,79	0,4633
0,28	0,1103	0,66	0,2454	1,04	0,3508	1,42	0,4222	1,80	0,4641
0,29	0,1141	0,67	0,2486	1,05	0,3531	1,43	0,4236	1,81	0,4649
0,30	0,1179	0,68	0,2517	1,06	0,3554	1,44	0,4251	1,82	0,4656
0,31	0,1217	0,69	0,2549	1,07	0,3577	1,45	0,4265	1,83	0,4664
0,32	0,1255	0,70	0,2580	1,08	0,3599	1,46	0,4279	1,84	0,4671
0,33	0,1293	0,71	0,2611	1,09	0,3621	1,47	0,4292	1,85	0,4678
0,34	0,1331	0,72	0,2642	1,10	0,3643	1,48	0,4306	1,86	0,4686
0,35	0,1368	0,73	0,2673	1,11	0,3665	1,49	0,4319	1,87	0,4693
0,36	0,1406	0,74	0,2703	1,12	0,3686	1,50	0,4332	1,88	0,4699
0,37	0,1443	0,75	0,2734	1,13	0,3708	1,51	0,4345	1,89	0,4706

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,90	0,4713	2,14	0,4838	2,48	0,4934	2,82	0,4976
1,91	0,4719	2,16	0,4846	2,50	0,4938	2,84	0,4977
1,92	0,4726	2,18	0,4854	2,52	0,4941	2,86	0,4979
1,93	0,4732	2,20	0,4861	2,54	0,4945	2,88	0,4980
1,94	0,4738	2,22	0,4868	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,95	0,4744	2,24	0,4875	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,96	0,4750	2,26	0,4881	2,60	0,4953	2,94	0,4984
1,97	0,4756	2,28	0,4887	2,62	0,4956	2,96	0,4985
1,98	0,4761	2,30	0,4893	2,64	0,4959	2,98	0,4986
1,99	0,4767	2,32	0,4898	2,66	0,4961	3,00	0,49865
2,00	0,4772	2,34	0,4904	2,68	0,4963	3,20	0,49931
2,02	0,4783	2,36	0,4909	2,70	0,4965	3,40	0,49966
2,04	0,4793	2,38	0,4913	2,72	0,4967	3,60	0,499841
2,06	0,4803	2,40	0,4918	2,74	0,4969	3,80	0,499928
2,08	0,4812	2,42	0,4922	2,76	0,4971	4,00	0,499968
2,10	0,4821	2,44	0,4927	2,78	0,4973	4,50	0,499997
2,12	0,4830	2,46	0,4931	2,80	0,4974	5,00	0,499997

Для значений $x > 5$ значение функции $\Phi(x) = 0,5$.

Примечание:

Обратите внимание, что в таблице приведено значение функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$, которая отличается от функции используемой в вычислениях пункта «Нормальный закон распределения» в два раза. Следовательно, формула для вероятности из этого пункта будет выглядет так $P(x_1 \leqslant X < x_2) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$ без коэффициента $\frac{1}{2}$.

Приложение 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	Сотые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29431	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20357	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	05292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626
2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01797
2,5	01753	01709	01667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00370	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090

	Сотые доли x									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
	0		2		4		6		8	
4,	0,0001338		0000589		0000249		0000101		0000040	
5,	0000015									

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник / Е.С. Вентцель. — 12-е изд., стер. — Москва : ЮСТИЦИЯ, 2018 — 658 с. — ISBN 978-5-4365-1927-2

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для бакалавриата и специалитета — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 406 с. — ISBN 978-5-534-08389-7

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. Изд. 8-е, испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 448 с. (Классический университетский учебник.) — ISBN 5-354-01091-8

4. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — Минск : Высшая шк., 1984. — 223 с.: ил.; 22 см.; ISBN В пер.

5. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. Математическая статистика: Учеб. для студ. сред. спец. учеб. заведений — М.: Дрофа, 2002. — 336 с.: ил. — ISBN 5-7107-6039-0

6. Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. — Москва : Высшая школа, 1993. — 269 с.: ил., табл. — ISBN 5-339-00836-3

Учебное издание

Авторы-составители:

Сметанина Людмила Петровна
Максимова Ольга Васильевна
Тинюкова Татьяна Сергеевна

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 25.03.2020.Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 4,4.
Тираж 30 экз. Заказ № 553.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: +7 (3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография
Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18