Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра дифференциальных уравнений

О.В. Баранова

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебно-методическое пособие

Ижевск, 2020

УДК 517.1
ББК 22.161.1
Б 24

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: Т.С. Быкова, к.ф.-м.н., доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова»

Баранова О.В.

Б 24 Высшая математика. Теория пределов: учебно-методическое пособие. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. – 52 с.

Учебно-методическое пособие включает теоретический материал курса лекций по высшей математике, изучаемый студентами 1-го курса направления «Химия». Пособие охватывает разделы теории пределов, читаемые студентам в первом семестре, содержит множество примеров. Практическая часть включает варианты для самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов уровней бакалавриата и специалитета, обучающимся по направлениям «Химия» и «Прикладная химия». Пособие будет полезно также студентам бакалавриата и магистратуры других естественно-научных направлений.

УДК 517.1
ББК 22.161.1

Содержание

Предисловие

Математика играет важную роль в естественно-научных исследованиях. Она стала одним из самых эффективных средств точного описания различных процессов и позволяет четко формулировать понятия и проблемы.

Предлагаемое учебное пособие представляет собой обобщение многолетнего опыта преподавания автором высшей математики в Удмуртском государственном университете.

При написании настоящего пособия автор руководствовался принципом повышения уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной направленности. Пособие адресовано, прежде всего, студентам первого курса, обучающимся по направлениям «Химия» и «Прикладная химия». Для студентов этих направлений требуется серьезная математическая подготовка.

Понятие предела функции является одним из ключевых в курсе математического анализа и довольно сложным в изучении. Поэтому при изучении этого раздела предъявляются довольно высокие требования к логике студента и его умению понимать математические рассуждения.

Теория пределов читается студентам в первом семестре. Для успешного овладения темой, студенту необходимо воспринимать большой объем информации, уметь логически верно, аргументированно и четко строить рассуждения. Как правило, именно этих навыков не хватает студентам для успешного обучения дисциплине.

Цель пособия — показать в кратком изложении четкость, конкретность, доступность основных понятий и теорем теории пределов, научить студентов *самостоятельно* решать задачи.

В учебном пособии содержится краткое изложение теоретического материала, приведены примеры, поясняющие теоретический материал и способствующие более глубокому его пониманию, приведены алгоритмы решения основных типов задач, предложены упражнения для активного усвоения изучаемой теории. В пособии содержится большое количество упражнений для самостоятельно работы по каждому разделу.

Пособие доступно широкому кругу студентов и может быть использовано ими для самостоятельного изучения предмета.

Автор выражает большую признательность специалисту по УМР кафедры дифференциальных уравнений М. В. Федоровой за помощь в подготовке этого пособия.

§ 1. Множества. Основные понятия

Основным первичным понятием математики является понятие *множество.*

Примерами множеств служат множество натуральных чисел, множество студентов курса, множество книг в библиотеке и т.д.

Множества принято обозначать большими латинскими буквами. Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами* или *точками* и обозначают малыми латинскими буквами.

Множество может содержать конечное или бесконечное число элементов. Если a — элемент множества A, то используется обозначение $a \in A$. Если a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$. Запись

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots$.

Определение 1.1. Два множества A и B называются *равными*, если каждый элемент $a \in A$ принадлежит множеству B и каждый элемент $b \in B$ принадлежит множеству A.

Определение 1.2. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент $a \in A$ принадлежит множеству B. Обозначается подмножество символом $A \subseteq B$.

Пример 1.1. Рассмотрим множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, вещественных числел $\mathbb{R}$. Справедлива цепочка включений:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать различные множества вещественных чисел.

Опишем множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 1.3. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством *вещественных (действительных)* чисел, если для любой пары $a, b \in \mathbb{R}$ определены числа $c = a + b$ (сумма) и $d = a \cdot b$ (произведение), обладающие свойствами:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность).
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность).
3. $ab = ba$ (коммутативность).
4. $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность).
5. $(a + b)c = ac + bc$ (дистрибутивность).
6. Существует единственное число 0 такое, что $a + 0 = a$ для произвольного числа a.
7. Для любого числа a существует такое противоположное число $-a$, что $a + (-a) = 0$.
8. Существует единственное число $1 \neq 0$ такое, что для любого числа a имеет место равенство $a \cdot 1 = a$.
9. Для любого числа $a \neq 0$ существует такое обратное число a^{-1}, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Множество вещественных чисел состоит из двух подмножеств — рациональных чисел и иррациональных чисел.

Всякое число вида $\dfrac{m}{n}$, где n — натуральное число, m — целое, называется *рациональным*.

Вещественное число, которое не является рациональным, называется *иррациональным*.

Любое число либо целое, либо его можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Иррациональное число представляется в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Пример 1.2. Рациональное число $\dfrac{5}{8} = 0,625$ — конечная десятичная дробь; рациональное число $\dfrac{1}{6} = 0,1(6)$ — бесконечная десятичная дробь; иррациональное число $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ — бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Заметим, что любое вещественное число можно представить в виде десятичной дроби

$$\{a, a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots\},$$

где a — любое целое число, a_n — целые неотрицательные числа, принимающие значения от 0 до 9.

Геометрически множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ изображается точками *числовой прямой*, т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

Между множеством вещественных чисел и точками числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому вещественному числу соответствует единственная точка числовой прямой, и наоборот, каждой точке числовой прямой — единственное вещественное число.

В дальнейшем будем использовать термин «точка a», что соответствует «числу a».

Определение 1.4. Множество A называется *упорядоченным*, если в нем установлен порядок элементов. Упорядоченное множество записывают в круглых скобках.

Пример 1.3. Из множества $A = \{1, 2\}$ можно сформировать два упорядоченных множества $(1, 2)$ и $(2, 1)$.

Упражнение 1.1. Найдите все упорядоченные множества из элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$.

Множество вещественных чисел *упорядоченное*: для любых двух различных вещественных чисел a и b установлено одно из соотношений:

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a.$$

§ 2. Числовые множества

Числовым множеством называется любое множество, элементами которого являются вещественные числа. Например:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \colon a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок,

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ — интервал,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant a\}$ — полуинтервал,

$\{1, 2\}$ — двухэлементное множество, состоящее из чисел 1 и 2.

Определение 2.1. Множество $A \subseteq \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует такое число $b \in \mathbb{R}$, что для любого числа $a \in A$ выполняется неравенство: $a \leqslant b$ ($a \geqslant b$).

Число b называется *верхней* (*нижней*) гранью множества A.

Определение 2.2. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Пример 2.1. Отрезок $A = [2, 6]$ — ограниченное множество. Его верхняя грань — число 6, а нижняя — число 2. Заметим, что всякое число, большее 6 — верхняя грань множества A. Всякое число, меньшее 2 — нижняя грань множества A.

Очевидно, что любое ограниченное сверху (снизу) множество A имеет бесконечно много верхних (нижних) граней.

Определение 2.3. Наименьшая верхняя грань множества A (наибольшая нижняя грань) называется *точной верхней гранью* (*точной нижней гранью*).

Точная верхняя грань обозначается символом $\sup A$, точная нижняя грань — символом $\inf A$.

Замечание 2.1. Точная верхняя грань ($\sup A$) множества A обладает следующим важным свойством: для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) найдется такое число $a \in A$, что $a > \sup A - \varepsilon$.

Аналогичным свойством обладает точная нижняя грань ($\inf A$) множества A: для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) найдется такое число $a \in A$, что $a > \inf A + \varepsilon$.

В примере 2.1 число 6 — точная верхняя грань множества $A = [2, 6]$: $\sup A = 6$, аналогично: $\inf A = 2$.

Теорема 2.1. *Любое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю грань, ограниченное снизу — точную нижнюю грань.*

Если множество A неограничено сверху, то $\sup A = +\infty$. Если множество A неограничено снизу, то $\inf A = -\infty$.

Определение 2.4. *Окрестностью* $O(a)$ точки a называется всякий интервал (α, β), содержащий точку a.

Определение 2.5. *ε-окрестностью* $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Число ε называется *радиусом* окрестности. Заметим, что ε-окрестность точки a — это множество точек x числовой прямой таких, что $|x - a| < \varepsilon$.

Определение 2.6. *Проколотой ε-окрестностью* $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется множество таких точек x числовой прямой, что выполняется нера-

венство
$$0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Заметим, что $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$.

Определение 2.7. Точка a называется *внутренней точкой* множества A, если существует окрестность $O(a)$ точки a, принадлежащая множеству A, т.е. $O(a) \subseteq A$.

Определение 2.8. Точка a называется *граничной точкой* множества A, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие множеству A, так и точки, не принадлежащие множеству A.

Пример 2.2. Рассмотрим в качестве множества A полуинтервал $[0, 1)$.

Всякая точка $a \in (0, 1)$ — внутренняя точка множества $[0, 1)$. Действительно, окрестность $O(a) = \left(\frac{a}{2}, 1\right)$ содержится в полуинтервале $[0, 1)$. Точка 0 — граничная, так как для любого $\alpha < 0$ и любого $\beta > 0$ окрестность $O(0) = (\alpha, \beta)$ содержит точку $\frac{\alpha}{2} \notin [0, 1)$ и содержит точку $\frac{\beta}{2} \in [0, 1)$.

Упражнение 2.1. Покажите, что точка 1 является граничной для множества $[0, 1)$.

Заметим, что граничные точки могут как принадлежать множеству (см. пример 2.1), так и не принадлежать множеству (см. упражнение 2.1).

Определение 2.9. Множество A называется *открытым*, если все его точки — внутренние.

Определение 2.10. Множество A называется *замкнутым*, если все его граничные точки ему принадлежат.

Пример 2.3. Интервал $(0, 1)$ — открытое множество, отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество. Полуинтервал $[0, 1)$ не является ни открытым, ни замкнутым множеством.

Упражнение 2.2. Изобразите на числовой прямой множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$(x+2)^2(x^2-3x-4) \leqslant 0.$$

Найдите все граничные и все внутренние точки этого множества.

§ 3. Понятие функции

Рассмотрим произвольное множество D вещественных чисел ($D \subseteq \mathbb{R}$).

Определение 3.1. На множестве D задана *функция* $y = f(x)$, если каждому элементу x множества D ($x \in D$) ставится в соответствие единственный элемент y множества E ($y \in E$).

Множество D называется *областью определения*, а множество E — множеством значений функции f.

Наиболее распространенным является *аналитический* способ задания функции. В этом случае функция задается равенством вида $y = f(x)$.

Пример 3.1. Равенство $y = \sqrt{4-x^2}$ задает функцию, областью определения D которой служит отрезок $[-2, 2]$, а множеством значений E — отрезок $[0, 2]$.

Существует, кроме того, *табличный* способ. Функция задается таблицей, содержащей значения аргумента и соответствующие им значения функции. Такой способ часто применяется, если область определения D функции — конечное множество.

Пример 3.2. Рассмотрим таблицу:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	$\frac{1}{2}$	-3	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{8}$	-3	$\frac{1}{16}$

Поставим в соответствие каждому x из верхней строки таблицы число y, стоящее во второй строке в том же столбце.

Областью определения данной функции является множество первых восьми натуральных чисел (первая строка таблицы), а множество ее значений — числа, стоящие во второй строке таблицы.

Иногда функцию задают *графически*: на координатной плоскости изображают совокупность точек.

Графический способ задания функции обычно используют в практике различных измерений, когда соответствие между переменными x и y задается с помощью графика. Во многих случаях графики чертят самопишущие приборы.

Рассмотрим основные свойства функций.

1. Чётность и нечётность. Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любых значений x из области определения D выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ и *нечётной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае, функция $y = f(x)$ называется функцией *общего вида*.

П р и м е р 3.3. Функция $y = f(x) = x^2 + 4$ — чётная, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x).$$

Функция $y = x^3 - x$ — нечётная, так как

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Функция $y = x^2 + x$ — функция общего вида, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$$

и $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$.

У п р а ж н е н и е 3.1. Исследуйте на чётность и нечётность следующие функции:

а) $x \cdot |x|$;

б) $|x + 1| - |x - 1|$;

в) $|x + 1| + |x - 1|$;

г) $2x^3 - x$.

Упражнение 3.2. Докажите, что график нечётной функции симметричен относительно начала координат, а график чётной функции симметричен относительно оси Oy.

2. Монотонность. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке D, если бóльшему значению аргумента из этого промежутка соответствует бóльшее (меньшее) значение функции.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*.

Пример 3.4. Функция $y = x^2 + 4$ при $x \in (-\infty, 0]$ убывает и при $x \in [0, +\infty)$ — возрастает.

3. Ограниченность. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на множестве D, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leqslant M$ для любого $x \in D$. В противном случае функция называется *неограниченной*.

Пример 3.5. Функция $y = \sqrt{4 - x^2}$ — ограничена на отрезке $[-2, 2]$, так как $|\sqrt{4 - x^2}| \leqslant 2$ для любого $x \in [-2, 2]$.

Замечание 3.1. Функция $y = ax + b$ при $a \neq 0$ не является ограниченной на всей числовой прямой, так как не существует такого $M > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|ax + b| \leqslant M$.

4. Периодичность. Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$.

Пример 3.6. Функция $y = \sin x$ имеет период $T = 2\pi$, так как

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Заметим, что $T = 2\pi$ — наименьший положительный период (любое число вида $2\pi n$, где n — целое, является периодом функции $y = \sin x$).

Упражнение 3.3. Исследуйте функции на периодичность:

а) $y = \sin^2 x$;

б) $y = \sin 2x$;

в) $y = \cos 3x$;

г) $y = \cos x + \sin 2x$.

Рассмотрим пару функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве X, а функция $\varphi(t)$ — на множестве M. Пусть, кроме того, при каждом значении $t \in M$ выполняется условие $\varphi(t) \in X$.

Определение 3.2. Функция $y = f(\varphi(t))$ называется *сложной* функцией переменной t (*суперпозицией* функций $\varphi(t)$ и $f(x)$), определенной на множестве M.

Пример 3.7. Функция $y = \sin^2 t$ — сложная функция, определенная на всей числовой прямой (здесь $y = f(x) = x^2, x = \varphi(t) = \sin t$).

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X со значениями на множестве Y. Пусть между переменными x и y существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 3.3. Отображение $\varphi\colon Y \to X$ называется *обратной* функцией к функции $y = f(x)$ на множестве Y, если каждому элементу y множества Y ($y \in Y$) ставится в соответствие единственный элемент x множества X ($x \in X$) так, что $f(x) = y$.

Обратную функцию $x = \varphi(y)$ обозначают в виде $y = f^{-1}(x)$.

Пример 3.8. Для функция $y = e^x$ обратной является функция $x = \ln y$ (или в традиционных обозначениях $y = \ln x$).

Упражнение 3.4. Докажите, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§ 4. Метод математической индукции

Метод математической индукции относится к важным методам математических доказательств. С его помощью можно доказывать различные утверждения, заданные на множестве натуральных чисел или его бесконечном подмножестве.

Принцип математической индукции состоит в следующем.

Рассмотрим последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

1) Пусть утверждение A_1 верно.

2) Пусть, кроме того, из верности утверждения A_k следует верность утверждения A_{k+1}.

Тогда все утверждения последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ верны.

Доказательство. Предположим противное, пусть утверждения A_n справедливы не для всякого натурального n. Тогда существует такое натуральное m, что утверждение A_m не имеет места, а все предыдущие утверждения $A_1, \ldots, A_{m-1}$ справедливы, то есть m — первое натуральное число, для которого утверждение не справедливо. Очевидно, что $m > 1$, так как утверждение A_1 верное. Следовательно, $m - 1$ — натуральное число. Но тогда при $n = m - 1$ утверждение справедливо, а для следующего натурального числа m оно не справедливо. Это противоречит условию 2).

Пример 4.1. Докажем неравенство Бернулли:

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \text{ при } x \geqslant -1 \text{ для любого натурального } n. \tag{4.1}$$

При $n = 1$ мы имеем верное равенство: $(1 + x)^1 = 1 + x$.

Гипотеза.

Предположим, что неравенство (4.1) верно для $n = k$:

$$(1 + x)^k \geqslant 1 + kx \text{ при } x \geqslant -1.$$

Индуктивный шаг.

Докажем, что что неравенство (4.1) верно и для $n = k+1$ при $x \geqslant -1$. Заметим, что при этом условии $x+1 \geqslant 0$.

Справедлива цепочка неравенств:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)\cdot x + k\cdot x^2 \geqslant 1+(k+1)\cdot x,$$

т. е. неравенство Бернулли верно для $n = k+1$.

Из принципа математической индукции следует, что неравенство (4.1) выполняется для всех натуральных n.

Упражнение 4.1. Докажите, что

а) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Упражнение 4.2. Докажите, что

$$1+q+q^2+\ldots q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ при } q \neq 1.$$

Упражнение 4.3. Докажите, что

а) $2^n > n$ при всех натуральных n;

б) $n! > 2^n$ при $n > 3$.

Упражнение 4.4. Найдите сумму:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1).$$

Упражнение 4.5. Докажите, что если число $p+\frac{1}{p}$ целое, то и $p^n+\frac{1}{p^n}$ тоже целое.

Упражнение 4.6. Докажите, что любую целую сумму, бо́льшую рубля, можно разменять двух- и пятирублевыми монетами.

Упражнение 4.7. Докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \text{ при всех натуральных } n.$$

§ 5. Числовые последовательности

Поставим в соответствие каждому натуральному числу n некоторое действительное число a_n.

О п р е д е л е н и е 5.1. Множество действительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

называется *числовой последовательностью*, a_n *—элемент* (*член*) последовательности, n *—номер элемента.*

Обозначается последовательность либо a_n, $n \in \mathbb{N}$; либо $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что последовательность — это функция, заданная на множестве натуральных чисел.

П р и м е р 5.1. Последовательность $a_n = 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$, задает множество всех нечетных натуральных чисел.

П р и м е р 5.2. Последовательность $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, где q — действительное число, задает геометрическую прогрессию со знаменателем q.

У п р а ж н е н и е 5.1. Напишите пять первых членов заданных последовательностей:

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $a_n = 1 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $a_n = \sin \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$;
4. $a_n = \dfrac{2n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

У п р а ж н е н и е 5.2. Зная первые элементы последовательности, напишите формулу общего члена этой последовательности:

1. $2, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \ldots$;

2. $1,\ -1,\ 1,\ -1, \dots;$

3. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots;$

4. $1, \dfrac{9}{4}, \dfrac{25}{9}, \dfrac{49}{16}, \dots;$

5. $1, \dfrac{3}{1\cdot 2}, \dfrac{5}{1\cdot 2\cdot 3}, \dfrac{7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \dots;$

6. $a_n = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3.$

При строгом выводе формулы общего члена последовательности необходимо применить метод математической индукции.

Определение 5.2. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует действительное число M такое, что каждый элемент a_n этой последовательности удовлетворяет неравенству

$$a_n \leqslant M \ (a_n \geqslant M).$$

Число M называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение 5.3. Наименьшая (наибольшая) из всех верних (нижних) граней последовательности называется *точной верхней* (*точной нижней*) гранью последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначение: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ — точная верхняя грань, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ — точная нижняя грань.

Пример 5.3. Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Легко видеть, что каждый член этой последовательности удовлетворяет неравенству

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

Любое неположительное число есть нижняя грань заданной последовательности, а всякое натуральное число — её верхняя грань.

А какие еще верхние грани есть у этой последовательности?

Среди всех нижних граней 0 — наибольшая. Следовательно, 0 — точная верхняя грань последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Из множества всех верхних граней 1 — наименьшая. Таким образом, 1 — точная верхняя грань последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Итак, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 1$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0$.

Определение 5.4. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу.

Пример 5.4. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная.

Определение 5.5. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного действительного числа M найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что выполняется неравенство $|a_{n_0}| > M$.

Пример 5.5. Последовательность

$$1,\ 2,\ 1,\ 4,\ 1,\ 8,\ 1, \ldots, 1,\ 2^n, \ldots$$

— неограниченная, но эта последовательность ограничена снизу.

Определение 5.6. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно большой*, если для любого действительного числа M найдется такой номер $N = N(M)$, что при всех $n \geqslant N$ член последовательности a_n удовлетворяет неравенству

$$|a_n| > M.$$

Пример 5.6. Последовательность $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ — бесконечно большая.

Упражнение 5.3. Докажите, что последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно большие:

1. $a_n = -(2n+1)$;
2. $a_n = \sqrt{n}$;
3. $a_n = (-1)^n n$;
4. $a_n = \dfrac{n^3+1}{n+1}$;

5. $a_n = n!$.

Определение 5.7. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$ элемент a_n этой последовательности удовлетворяет неравенству

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Пример 5.7. Докажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (пример 5.3) является бесконечно малой.

Возьмем положительное число ε. Из неравенства $|a_n| < \varepsilon$ следует, что $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Возьмем $N = [1/\varepsilon]$. Тогда для всех $n \geqslant N$ выполнено неравенство $n \geqslant [1/\varepsilon]$. Тогда $\frac{1}{n} \leqslant [\varepsilon]$, то есть $|a_n| < \varepsilon$.

Упражнение 5.4. Докажите, что последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малые:

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$;
2. $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$;
3. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$;
4. $a_n = \dfrac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n}$.

Упражнение 5.5. Докажите, что последовательность $\{q^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является бесконечно большой при $|q| > 1$ и бесконечно малой при $|q| < 1$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Теорема 5.1. *Сумма $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε. Так как $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малая последовательность, то для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется такой номер N_1, что при $n \geqslant N_1$ выполняется неравенство $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, для последовательности $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ найдется такой номер N_2, что при $n \geqslant N_2$ выполняется неравенство $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем большее из чисел N_1 и N_2. Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n \geqslant N$ выполняются оба неравенства и

$$|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $|a_n + b_n| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. А это означает, что последовательность $\{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малая. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Для произвольных действительных чисел α и β линейная комбинация $\{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ двух бесконечно малых последовательностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ представляет собой бесконечно малую последовательность.*

Упражнение 5.6. Докажите теорему 5.2.

Следствие 5.1. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.3. *Бесконечно малая последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является ограниченной последовательностью.*

Теорема 5.4. *Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой последовательности является бесконечно малой последовательностью.*

Следствие 5.2. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.5. *Если последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является бесконечно большой и $a_n \neq 0$ для всех n, то $b_n = \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.6. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *является бесконечно большой и* $a_n \neq 0$ *для всех* n, *то* $b_n = \frac{1}{a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — *бесконечно малая последовательность.*

Теорема 5.7. *Если все члены бесконечно малой последовательности* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *равны постоянному числу* a $(a_n = a)$, *то* $a = 0$.

Упражнение 5.7. Докажите теоремы 5.3–5.7.

§ 6. Сходящиеся последовательности

Определение 6.1. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *сходящейся*, если существует такое действительное число a, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$ элементы a_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

.

Число a называют *пределом* последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Пример 6.1. Последовательность $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ — сходящаяся.

Действительно, $a_n = 1 - \frac{1}{n}$. Заметим, что при неограниченном возрастании n величина $\frac{1}{n}$ убывает. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Действительно, $|a_n - 1| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N = [1/\varepsilon]$ (см. пример 5.7) такое, что для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$, то есть последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к числу 1.

Пример 6.2. Последовательность $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, не является сходящейся.

Действительно, последовательность a_n состоит из элементов 1, 0, -1. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Каково бы ни было число a, неравенству $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ не удовлетворяет бесконечное число членов данной последовательности, значит, оно не является её пределом.

Т е о р е м а 6.1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *является сходящейся тогда и только тогда, когда существует такое действительное число* a*, что последовательность* $\{a_n - a\}_{n\in\mathbb{N}}$ *является бесконечно малой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся последовательность, то есть существует такое действительное число a, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство (6.1).

Рассмотрим последовательность $b_n = a_n - a$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого положительного ε существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|b_n| < \varepsilon$. А это и означает, что $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малая последовательность.

2) Обратное утверждение доказывается аналогично.

С л е д с т в и е 6.1. *Для любой сходящейся последовательности* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *существует бесконечно малая последовательность* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *такая, что имеет место равенство* $a_n = a + b_n$.

Свойства сходящихся последовательностей

Т е о р е м а 6.2. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет два предела a и b. Тогда $a_n = a+\alpha_n = b+\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малые последовательности. Но тогда $b-a = \alpha_n - \beta_n$. Последовательность $\{\alpha_n - \beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечно малая, а все её члены равны постоянному числу $(b - a)$. Следовательно, $b - a = 0$ (теорема 5.7), то есть $a = b$.

Т е о р е м а 6.3. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Эта теорема следует из теоремы 5.3 об ограниченности бесконечно малых последовательностей.

З а м е ч а н и е 6.1. Обратное утверждение неверно: не любая ограниченная последовательность сходится. Например, последовательность $a_n = \sin \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N}$ — ограничена, но не является сходящейся.

Теорема 6.4. *Сумма* $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *сходящихся последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *является сходящейся последовательностью, предел которой равен сумме пределов последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *то есть* $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Тогда $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — бесконечно малые последовательности.

Разность $(a_n + b_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ — бесконечно малая последовательность. Из 6.1 следует, что последовательность $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится и число $(a + b)$ является её пределом.

Теорема 6.5. *Разность* $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *сходящихся последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *является сходящейся последовательностью, при этом* $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = a - b$.

Упражнение 6.1. Докажите теорему 6.5.

Теорема 6.6. *Произведение* $\{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *сходящихся последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *есть сходящаяся последовательность, при этом* $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Теорема 6.7. *Частное сходящихся последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *при условии, что предел последовательности* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *отличен от нуля, представляет собой сходящуюся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *и* $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *то есть*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Упражнение 6.2. Докажите теоремы 6.6 и 6.7.

Рассмотрим примеры вычисления пределов последовательностей.

П р и м е р 6.3. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-2}{2-3n+2n^2}.$$

Заметим, что числитель и знаменатель — бесконечно большие последовательности, и теорему 6.7 о пределе частного применять нельзя. Преобразуем данную последовательность:

$$\frac{6n^2-2}{2-3n+2n^2}=\frac{6-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n}+2}.$$

Заметим, что $\left\{\dfrac{2}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\left\{\dfrac{3}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно малые последовательности. Применим теорему 6.4 о пределе суммы сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{2}{n^2}\right)=6,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n}+2\right)=2.$$

Теперь можно применить теорему о пределе частного:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-2}{2-3n+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n}+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(6-\frac{2}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n}+2)}=\frac{6}{2}=3.$$

П р и м е р 6.4. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$. Числитель данной последовательности не имеет предела, а знаменатель — бесконечно большая последовательность. Теорему о пределе частного применять нельзя. Рассмотрим данную последовательность как произведение:

$$\frac{\sin n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sin n.$$

Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ — бесконечно малая, а $\{\sin n\}$ — ограниченная последовательность. А их произведение —бесконечно малая последовательность (теорема 5.4). Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0.$$

Теорема 6.8. *Если элементы сходящейся последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют неравенству $a_n \geqslant b$ при всех $n \geqslant n_0$, то и предел a этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \geqslant b$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $a < b$. Рассмотрим число $\varepsilon = b - a$. Тогда по определению сходящейся последовательности для этого ε найдется такой номер N (можно считать $N > n_0$), что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon = b - a.$$

Тогда $-(b-a) < a_n - a < b - a$, а это означает, что $a_n < b$ для всех $n > N$, что противоречит заданному в формулировке теоремы неравенству $a_n \geqslant b$ при всех $n \geqslant n_0$. Значит, $a \geqslant b$.

Следствие 6.2. *Если элементы сходящихся последовательностей $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ при всех $n \geqslant n_0$ удовлетворяют неравенству $a_n \geqslant b_n$, то пределы a и b этих последовательностей удовлетворяют неравенству $a \geqslant b$.*

Теорема 6.9. *Пусть $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — две сходящиеся последовательности, имеющие общий предел a. Путь элементы последовательности $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют неравенству $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для всех $n \geqslant n_0$. Тогда последовательность $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к тому же пределу a.*

Доказательство. По определению сходящейся последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$, начиная с которых выполнены неравенства

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \quad n \geqslant N_1,$$

$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon, \quad n \geqslant N_2.$$

Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n \geqslant N$ выполняется неравенства $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon$, или $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, что и означает $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

О п р е д е л е н и е 6.2. Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$).

О п р е д е л е н и е 6.3. Последовательность называется *монотонной*, если она является неубывающей, либо невозрастающей.

Т е о р е м а 6.10. *Любая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Докажем теорему для неубывающей последовательности. Из ограниченности последовательности следует, что $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ограниченная сверху последовательность. Рассмотрим $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$ — точную верхнюю грань. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдется хотя бы один член последовательности a_N такой, что $a_N > a - \varepsilon$. Так как последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ неубывающая, то для любого $n > N$ выполняется неравенство $a_N \leqslant a_n$. Но тогда $a_n > a - \varepsilon$ для всех $n > N$. Таким образом, $a - \varepsilon < a_n \leqslant a$, или $-\varepsilon < a_n - a \leqslant 0 < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Для невозрастающей последовательности доказательство аналогично.

§ 7. Число e

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Докажем её сходимость. Для этого рассмотрим последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

У т в е р ж д е н и е 7.1. *Последовательность* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *убывающая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отношение соседних членов последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} =$$
$$= \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1}(n+2)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{\big(n(n+2)\big)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} =$$
$$= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

Из неравенства Бернулли (3.1) следует, что

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)}.$$

Так как $n(n+2) < (n+1)^2$, то

$$1+\frac{n+1}{n(n+2)} > 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Следовательно,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2} = 1,$$

то есть $a_n > a_{n+1}$ для любого натурального n. Значит, последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ убывающая.

Утверждение 7.2. *Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограниченная.*

Доказательство. Имеет место неравенство

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1^{n+1} = 1.$$

Так как $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность, то $a_n < a_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Итак, $1 < a_n < a_1$.

Утверждение 7.3. *Последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится.*

Доказательство. Из утверждений 7.1 и 7.2 следует, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотонна и ограничена. Согласно теореме 6.10 она имеет конечный предел.

Этот предел называют *числом e*.

Теорема 7.1. *Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.*

Доказательство. Последовательности $\{1+\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходятся, и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$. Кроме того,

$$x_n = \frac{a_n}{1+\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Применим теорему 6.7 о пределе частного:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = e.$$

Число e имеет большое значение во многих вопросах теории и практики. Это иррациональное число, удовлетворяющее неравенствам $2 < e < 3$. Число e служит основанием натурального логарифма.

Пример 7.1. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$. Рассмотрим данную последовательность как произведение двух сходящихся последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e^2.$$

§ 8. Предел функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$ точки a.

Напомним, что $\overset{\circ}{O}_\delta(a) = (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ для любой точки $a \in \mathbb{R}$. Если $a = \infty$ (в таком случае будем называть a *бесконечно удаленной точкой числовой прямой*), то положим $\overset{\circ}{O}_\delta(\infty) = (-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$.

Определение 8.1. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a), если для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) найдется такое положительное число δ ($\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

О п р е д е л е н и е 8.2. Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) найдется такое положительное число δ ($\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполнено неравенство (8.1). Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to \infty$.

З а м е ч а н и е 8.1. В определении 8.2 условие $|x| > \delta$ равносильно условию $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(\infty)$. Таким образом, в определении 8.1 точка a может быть как конечной точкой, так и бесконечно удаленной точкой числовой прямой, а определение 8.2 есть частный случай определения 8.1.

Смысл определения предела функции $f(x)$ при $x \to a$ состоит в том, что для всех значений, достаточно близких к a, значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа b.

П р и м е р 8.1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ следовало бы неравенство $|x - a| < \varepsilon$. Очевидно, что достаточно взять любое $\delta \leqslant \varepsilon$. При этом, если $0 < |x - a| < \delta$, то $|x - a| < \delta \leqslant \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

У п р а ж н е н и е 8.1. Докажите, что предел постоянной величины равен самой постоянной, т.е. если $f(x) \equiv c$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

П р и м е р 8.2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из неравенства $0 < |x - 3| < \delta$ следовало бы неравенство

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x + 3}\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем дробь:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3$$

при $x \neq -3$. Получаем неравенство $|x-3| < \varepsilon$. Отсюда видно, что если взять $\delta \leqslant \varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-3| < \delta$, т.е. при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(3)$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3}\right| < \delta \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = 0$.

Пример 8.3. Докажем, что $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Задача состоит в том, чтобы по этому ε найти такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из неравенства $0 < |x+3| < \delta$ следовало бы неравенство

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3} + 6\right| < \varepsilon.$$

Проведем преобразования:

$$\frac{x^2-9}{x+3} + 6 = \frac{x^2+6x+9}{x+3} = \frac{(x+3)^2}{x+3} = x+3.$$

Заметим, что нам пришлось числитель и знаменатель дроби поделить на $(x+3)$. Это возможно только в том случае, когда $x+3 \neq 0$. Так как при вычислении пределов мы рассматриваем проколотую окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(-3)$, это условие выполнено. Таким образом, если взять любое $\delta \leqslant \varepsilon$, то для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x+3| < \delta$, выполнено неравенство

$$\left|\frac{x^2-9}{x+3} + 6\right| < \delta \leqslant \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$.

Утверждение 8.1. *Справедливо неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x| \tag{8.2}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При x, удовлетворяющих условию $|x| > 1$, неравенство (8.2) выполняется. Это следует из того, что $|\sin x| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, (8.2) надо доказать для $|x| \leqslant 1$.

Так как функции $f_1(x) = \sin x$ и $f_2(x) = x$ — нечетные, неравенство достаточно доказать на интервале $0 < x < 1$. Для этого рассмотрим тригонометрическическую окружность в плоскости Oty. Пусть точка A на плоскости Oty имеет координаты $(1, 0)$, то есть OA — это радиус окружности, лежащий на оси Ot правее начала координат. Пусть точка B лежит на окружности в первой координатной четверти, причем радиусы OA и OB образуют угол x радиан. Построим точку C, симметричную точке A относительно оси Ot. Тогда центральный угол AOC равен $2x$ и измеряется дугой $\smile AC$, на которую он опирается.

Точка D пересечения отрезка AC с осью Ot является серединой отрезка AC и основанием перпендикуляра AD к оси абсцисс. В прямоугольном треугольнике AOD с гипотенузой $OA = 1$ катет $AD = \sin x$. Соответственно, $AC = 2\sin x$. Заметим, что $AC < \smile AC$. Таким образом, $2\sin x < 2x$, что доказывает неравенство (8.2).

П р и м е р 8.4. Используя определение предела 8.1, докажем, что

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем такое положительное δ, при котором из условия $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ будет следовать неравенство

$$|\sin x - \sin a| < \delta.$$

Преобразуем левую часть неравенства:

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2} \cdot \cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.$$

Из утверждения 8.1 следует неравенство

$$\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant \frac{|x-a|}{2}.$$

Таким образом, $|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a|$. Отсюда следует, что если взять $\delta \leqslant \varepsilon$, то для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ будет выполняться неравенство $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.

Введем понятие одностороннего предела функции.

Определение 8.3. Число b называется *правым* (*левым*) пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого положительного числа ε ($\varepsilon > 0$) найдется такое положительное число δ ($\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a+\delta$ ($a-\delta < x < a$), выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Правый предел функции обозначается $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, левый предел: $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Пример 8.5. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1$.

Связь между односторонними пределами и пределом функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 8.1. *Функция $f(x)$ имеет в точке a предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют и правый, и левый пределы функции $f(x)$, и эти пределы совпадают.*

Упражнение 8.2. Докажите теорему 8.1.

Пример 8.6. Докажем, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

имеет предел в точке $x = 0$.

Заметим, что функция $f(x)$ определена всюду, кроме точки $x = 0$. Вычислим односторонние пределы этой функции в нуле:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x = 0 \quad (\text{ пример } 8.1),$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad (\text{ пример } 8.4).$$

Таким образом, мы показали, что данная функция имеет правый и левый пределы и они совпадают. Из теоремы 8.1 следует, что $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет предел, равный 0.

Упражнение 8.3. Используя определения 8.1 и 8.2, докажите, что

1. $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3) = 1.$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{3}.$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1.$
4. $\lim\limits_{x\to -2} x^2 = 4.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x^2+3x^4}{3x^2+x^4} = 2.$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^2+3x^4}{3x^2+x^4} = 3.$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1.$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x+3}{2x-1} = \dfrac{7}{2}.$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0.$
10. $\lim\limits_{x\to \infty} e^{1/x} = 1.$
11. $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x(x-1)}{|x-1|} = 1.$
12. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x(x-1)}{|x-1|} = -1.$

Исследуем свойства пределов, которые в дальнейшем будут использоваться при вычислении пределов.

Все функции, которые рассматриваются ниже, определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$ точки a. Под «точкой» понимается либо число a, либо один из символов $a+0$, $a-0$, ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Теорема 8.2. *Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a, то в некоторой проколотой окрестности точки a эта функция ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где $b < \infty$. Из определения 8.1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$, например, для $\varepsilon = 1$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$, что для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < 1$, т.е. $b - 1 < f(x) < b + 1$. Обозначим $M = \max\{|b-1|, |b+1|\}$. Тогда $|f(x)| < M$ для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$. Это и означает ограниченность функции $f(x)$ на множестве $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$. Теорема доказана.

Теорема 8.3. *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный.*

Упражнение 8.4. Докажите теорему 8.3.

Теорема 8.4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве и имеют в точке a конечные пределы:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \lim_{x\to a} g(x) = c.$$

Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеют в точке a пределы, равные

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = b \pm c,$$
$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = bc,$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, \quad \textit{если } c \neq 0.$$

Доказательство. Докажем теорему для суммы двух функций, используя определение 8.1. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдем такое положительное δ, что из неравенства $0 < |x-a| < \delta$ будет следовать неравенство $\big|(f(x) + g(x)) - (b + c)\big| < \varepsilon$. Преобразуем левую часть:

$$\big|(f(x) + g(x)) - (b + c)\big| = \big|(f(x) - b) + (g(x) - c)\big| \leqslant |f(x) - b| + |g(x) - c|.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для выбранного ε найдется такое $\delta_1 > 0$, что если $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_1}(a)$, то выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.3}$$

Аналогично, найдется такое $\delta_2 > 0$, что если $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_2}(a)$, то выполняется неравенство

$$|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.4}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\overset{\circ}{O}_{\delta}(a) = \overset{\circ}{O}_{\delta_1}(a) \cap \overset{\circ}{O}_{\delta_2}(a)$, и для всех $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta}(a)$ выполняются неравенства (8.3) и (8.4), поэтому

$$\big|(f(x) + g(x)) - (b + c)\big| \leqslant |f(x) - b| + |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = b + c$.

Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы.

З а м е ч а н и е 8.2. Свойства, касающиеся пределов суммы, разности, произведения, частного, справедливы для любого конечного числа функций, имеющих предел.

З а м е ч а н и е 8.3. Заметим, что из существования предела суммы, разности, произведения или частного функций еще не следует, что существуют пределы самих слагаемых, сомножителей, делимого и делителя.

П р и м е р 8.7. Имеет место равенство

$$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \to \pi/2} 1 = 1.$$

Но отсюда не следует, что пределы сомножителей существуют. Действительно, функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ не имеет предела при $x \to \pi/2$.

С л е д с т в и е 8.1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.* $\lim\limits_{x \to a}\big(\alpha f(x)\big) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Т е о р е м а 8.5. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ заданы на одном и том же множестве, и функции $f(x)$ и $h(x)$ имеют в точке a один и тот же предел:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b.$$

Пусть, кроме того, выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Тогда предел промежуточной функции $g(x)$ существует и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из определения 8.1 следует, что существуют такие положительные δ_1 и δ_2, что при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, а при всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-a| < \delta_2$, выполняется неравенство $|h(x) - b| < \varepsilon$.

Раскроем модули и перепишем неравенства в виде:

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon, \tag{8.5}$$

$$b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon. \tag{8.6}$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняются неравенства (8.5) и (8.6). Из условий теоремы и этих неравенств следует, что при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ справедлива цепочка неравенств

$$b - \varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < b + \varepsilon,$$

т.е. $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Таким образом, при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|g(x) - b| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Теорема 8.6. *Пусть функция $y = f(x)$ имеет предел в точке a : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а функция $z = \varphi(y)$ имеет предел в точке b : $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = c$. Тогда сложная функция $z = \varphi\big(f(x)\big)$ имеет предел в точке a :*

$$\lim_{x\to a} \varphi\big(f(x)\big) = c.$$

Эта теорема часто используется при вычислении пределов.

Пример 8.8. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Рассмотрим функцию $y = x^2 + \dfrac{\pi}{4}$. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x \cdot x = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} x = 0$$

(пример 8.1). Кроме того, из теоремы 8.4 следует, что

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Вычислим предел сложной функции $z = \sin y$, где $y = x^2 + \frac{\pi}{4}$. Из примера 8.4 следует, что

$$\lim_{y \to \pi/4} \sin y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to 0} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y \to \pi/4} \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§ 9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 9.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Замечание 9.1. Из определения 9.1 следует, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Пример 9.1. Функция $f(x) = \sin x$ является бесконечно малой при $x \to 0$ (см. пример 8.4). Нетрудно проверить, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \infty$.

Свойства бесконечно малых функций

Свойство 9.1. *Функция $y = f(x)$, определенная в проколотой окрестности точки a, имеет конечный предел в этой точке $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда существует такая бесконечная малая функция $\alpha(x)$ при $x \to a$, что имеет место равенство*

$$f(x) = b + \alpha(x) \quad \text{при } x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a). \tag{9.1}$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$\alpha(x) = f(x) - b.$$

Покажем, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция. В самом деле,

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x) - b\big).$$

Из теоремы 8.4 следует, что

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = b - b = 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть имеет место равенство (9.1) в проколотой окрестности $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\big(b + \alpha(x)\big) = \lim_{x\to a} b + \lim_{x\to a} \alpha(x) = b + 0 = b.$$

С в о й с т в о 9.2. *Произведение бесконечно малой функции при $x \to a$ на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = \alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, а $y = \varphi(x)$ — ограниченная функция, то есть существуют такие положительные числа M и δ_1, что $|\varphi(x)| \leqslant M$ при $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_1}(a)$. Из определения 9.1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, что при всех $x \in \overset{\circ}{O}_{\delta_2}(a)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Рассмотрим проколотую окрестность $\overset{\circ}{O}_\delta(a)$ точки a, где $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда

$$|\alpha(x) \cdot \varphi(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$, то есть функция $y = \alpha(x) \cdot \varphi(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

П р и м е р 9.2. Найдем предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$. Для этого функцию $\frac{\sin x}{x}$ рассмотрим как произведение: $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sin x$. Множитель $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \infty$, а функция $y = \sin x$ — ограниченная на всей числовой прямой: $|\sin x| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда произведение $\frac{1}{x} \cdot \sin x$ есть бесконечно малая функция при $x \to \infty$ (свойство 9.2).

С в о й с т в о 9.3. *Алгебраическая сумма и произведение конечного числа бесконечно малых функций при* $x \to a$ *являются бесконечно малыми функциями при* $x \to a$.

С в о й с т в о 9.4. *Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая функция при* $x \to a$.

У п р а ж н е н и е 9.1. Докажите свойства 9.3 и 9.4.

О п р е д е л е н и е 9.2. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство

$$|f(x)| > \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 9.2. О бесконечно большой функции говорят, что она стремится к бесконечности и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

П р и м е р 9.3. Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ есть бесконечно большая функция при $x \to \frac{\pi}{2}$, а функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — бесконечно большая при $x \to 0$.

Свойства бесконечно больших функций

С в о й с т в о 9.5. *Произведение бесконечно большой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно большая функция.*

С в о й с т в о 9.6. *Сумма бесконечно большой и ограниченной функции есть бесконечно большая функция.*

С в о й с т в о 9.7. *Частное от деления бесконечно большой функции на функцию, имеющую предел, есть функция бесконечно большая.*

У п р а ж н е н и е 9.2. Докажите свойства 9.5–9.7.

У п р а ж н е н и е 9.3. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ — бесконечно большая при $x \to 0$.

Т е о р е м а 9.1 (о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями). *Функция* $\alpha(x)$ *есть бесконечно малая при* $x \to a$ *тогда и только тогда, когда функция* $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ *есть бесконечно большая при* $x \to a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Покажем, что если $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, то $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to a$. Из определения 9.1 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Это неравенство равносильно следующему: $\left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$, то есть $|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}$ при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$. А это и означает, что функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to a$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to a$. Из определения 9.2 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$, то есть $\frac{1}{|\alpha(x)|} > \varepsilon$. Это неравенство равносильно неравенству $|\alpha(x)| < \frac{1}{\varepsilon}$ при всех $x \in \overset{\circ}{O}_\delta(a)$, то есть функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.

П р и м е р 9.4. Функция $\alpha(x) = \frac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \infty$. Функция, обратная к ней, $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)} = x$ — бесконечно большая при $x \to \infty$.

§ 10. Замечательные пределы

Т е о р е м а 10.1 (первый замечательный предел). *Имеет место равенство*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ четная. Так как $x \to 0$, то достаточно исследовать её поведение при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Для этого рассмотрим тригонометрическическую окружность в плоскости Oty. Пусть точка A на плоскости Oty имеет координаты $(1, 0)$, то есть OA — это радиус окружности, лежащий на оси Ot правее начала координат. Пусть точка D лежит на окружности в первой координатной четверти, причем радиусы OA и OD образуют угол x радиан. Восстановим перпендикуляр к оси Ot из точки A. Точку пересечения этого перпендикуляра с прямой OD обозначим через B (то есть $B \in OD$ и $AB \perp Ot$). Рассмотрим дугу окружности AD. Радианная мера центрального угла DOA равна x. Тогда $OA = 1$, $\operatorname{tg} x = AB$. Заметим, что площадь треугольника AOD меньше площади сектора AOD, которая меньше площади треугольника AOB:

$$S_{\triangle AOD} < S_{\sphericalangle AOD} < S_{\triangle AOB}, \tag{10.1}$$

где

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} OA \cdot OD \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x,$$
$$S_{\sphericalangle AOD} = \frac{1}{2} OA^2 \cdot (\smile AD) = \frac{1}{2} x,$$
$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Неравенства (10.1) можно записать в виде

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделим эти неравенства на $\sin x$ ($\sin x > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$). Получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, поэтому $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Из четности функций $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и $g(x) = \cos x$ следует, что полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Напомним, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ (упражнение 8.3), $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ (пример 8.1). Из теоремы 8.5 о пределе промежуточной функции следует, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

П р и м е р 10.1. Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$. Воспользуемся теоремой 10.1:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

Т е о р е м а 10.2 (второй замечательный предел). *Имеет место равенство*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (10.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится, и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (см.§ 7). Докажем равенство (10.2).

1) Так как $x\to\infty$, рассмотрим сначала случай, когда $x>1$. Обозначим через $n=[x]$ целую часть числа x. Тогда n — натуральное число, $x=n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$. Справедливы неравенства $n\leqslant x<n+1$, или $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n+1}$. Прибавим ко всем частям этих неравенств единицу и возведем в степень $(n+1)$:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Используя свойства степеней, получим цепочку неравенств:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} = e\cdot 1 = e.$$

Из теоремы 8.5 о пределе промежуточной функции следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = e.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

поэтому

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{e}{1}=e.$$

2) Рассмотрим теперь случай $x<0$. Тогда $x\to-\infty$. Докажем равенство (10.2) с помощью замены переменной. Пусть $t=-x$, $t\to+\infty$. Вычислим предел:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e\cdot1=e.$$

Мы показали, что правосторонний и левосторонний пределы существуют и равны. Теорема 10.2 доказана.

Следствие 10.1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{10.3}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (10.3) сделаем замену переменной, полагая $t=\frac{1}{x}$. Тогда $t\to\infty$ при $x\to0$. Поэтому

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e.$$

Пример 10.2. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$. Для вычисления предела сделаем замену переменной $x=2t$. Если $x\to\infty$, то и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e\cdot e=e^2.$$

§ 11. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций

Напомним (см. § 9), что сумма, разность и произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малые функции. Этого нельзя сказать о частном: деление бесконечно малых величин приводит, вообще говоря, к различным результатам. Например, бесконечно малые функции $\alpha(x) = \sin x$ и $\beta(x) = x$ при $x \to 0$ при делении дают функцию, имеющую конечный ненулевой предел: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (теорема 10.1). Для сравнения бесконечно малых величин $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ введем следующие понятия.

Определение 11.1. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка, чем* $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Определение 11.2. Функция $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$, где k — ненулевое число.

Определение 11.3. Функция $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Эквивалентность обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Пример 11.1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$ (теорема 10.1).

Пример 11.2. Функция $\sin 3x$ и x — бесконечно малые одного порядка при $x \to 0$ (пример 10.1).

Для бесконечно больших функций имеют место аналогичные правила сравнения.

Определение 11.4. Бесконечно большие при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Пример 11.3. Функции $f(x) = x^2+1$ и $g(x) = x^2-1$ являются эквивалентными бесконечно большими функциями при $x \to \infty$. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Упражнение 11.1. Дайте определение бесконечно большой функции $f(x)$ более высокого порядка, чем $g(x)$ при $x \to a$. Дайте определение бесконечно больших функций одного порядка.

Упражнение 11.2. Сравните функции $f(x) = x^2+1$ и $g(x) = 2x^2-1$ при $x \to \infty$.

Упражнение 11.3. Сравните бесконечно большие функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to \infty$:

1. $f(x) = x^4$ и $g(x) = x^2 + 4$;
2. $f(x) = x^2 - 7x$ и $g(x) = x^3 + 2x$;
3. $f(x) = x^2 + 2x$ и $g(x) = (x+4)^2$;
4. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ и $g(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Упражнение 11.4. Докажите эквивалентность функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to 0$:

1. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x$, $\beta(x) = x$;
2. $\alpha(x) = 1 - \cos x$, $\beta(x) = \frac{x^2}{2}$;
3. $\alpha(x) = \arcsin x$, $\beta(x) = x$;
4. $\alpha(x) = \operatorname{arctg} x$, $\beta(x) = x$.

§ 12. Задания для самостоятельной работы

Упражнение 12.1. Найдите предел последовательности:

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{21-2n}$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^2}{2n^2}$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(n+2)^2+(2n-1)^2}$.

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-10n^2+9}{10n^2-7}$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{20n^2-12n}{3n^3-6n^2}$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3-8}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2-2}}{2n+1}$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{\sqrt{3n^2+2}}$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-2n+3}}{n+1}$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+16}}{n-2}$.

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^4+1}}$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$.

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{4n^4-3}}$.

1.17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{3n^2+1}$.

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)-n\right)$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k-1)k}$.

1.21. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+3}$.

1.23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10-3^n}{2+3^{n+1}}$.

1.24. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n$.

1.26. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{3n}$.

Упражнение 12.2. Найдите предел функции:

2.1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4}{x^2-3}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3-4x^2+1}{x-3}+1\right)$.

2.3. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}} \dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

2.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{4-x}}{x^2-1}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

2.8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x}{2x^4-3x^2+1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x}{2x^3+3x^2-1}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4+x}{x^5-3x+2}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-9}{3x^2+1}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1}+\frac{x^2}{2x-1}\right)$.

2.13. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1}+\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{50}(x-k)^5}{x^5+50^5}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3-4x^2-x+4}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{3x^4-x^2-2}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}-x}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt[4]{x^2+4}}{\sqrt[4]{x^4-1}-\sqrt[5]{x^3-1}}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^6-1}}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3+x^6}+4x}$.

2.21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

2.22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$.

2.23. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$.

2.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

2.25. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)$.

2.26. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2-9}\right)$.

Упражнение 12.3. Найдите предел функции, используя соотношения эквивалентности или первый замечательный предел:

3.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 3x}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \bigl(\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}\bigr)$.

3.11. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \dfrac{\sin\bigl(x-\frac{\pi}{6}\bigr)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\bigl(\frac{\pi}{4} - x\bigr)$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 11x \cdot \operatorname{ctg} 7x$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{3x}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 0} \Bigl(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\Bigr)$.

3.19. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

3.20. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$.

3.21. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot\bigl(\cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{4}\bigr)}$.

3.23. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \bigl(2x\cdot\operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x}\bigr)$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{x^2-\pi^2}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

Упражнение 12.4. Найдите предел функции, используя соотношения эквивалентности или второй замечательный предел:

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{x-1}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{-2x^2}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+4}\right)^{2x+1}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+3}{2}}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-4}{5x+2}\right)^{\frac{x+1}{5}}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+3}\right)^{x}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)^{2x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x-1}{x^3-3x^2+1}\right)^{x}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{x+1}{3x^2}}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to0}(1+2\operatorname{tg}^2x)^{\operatorname{ctg}^2x}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to0}(1+2\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to0}(1-3\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to0}(\cos^2x)^{1/x^2}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to0}(1+2\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to0}(1+5\sin x)^{\operatorname{ctg}3x}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to0}(1-3\sin^2x)^{2/x^2}$.

Список литературы

1. **Бугров, Я. С.** Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Физматлит, 2001.

2. **Бугров, Я. С.** Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Физматлит, 2001.

3. **Данко, П. Е.** Высшая математика в примерах и задачах. Часть 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Оникс 21 век. Мир и образование, 2007.

4. **Демидович, Б. П.** Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. — М.: Астрель. АСТ, 2004.

5. **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. В 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М.: АЛЬФА, 1998.

6. **Натансон, И. П.** Краткий курс высшей математики / И. П. Натансон. — СПб.: Лань, 2009.

7. **Шипачев, В. С.** Основы высшей математики / В. С. Шипачев. — М: Высшая школа, 2004.

8. **http:// benran.ru** — библиотека по естественным наукам Российской Академии наук.

9. **http:// lib.mexmat.ru** — электронная библиотека механико-математического факультета МГУ.

10. **http:// mathnet.ru** — общероссийский математический портал.

Учебное издание

Баранова Ольга Викторовна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 25.03.2020. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,48.
Тираж 50 экз. Заказ № 595.

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18