Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 55. С. 60–78

УДК 517.9

© *М. В. Донцова*

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрена задача Коши для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами. Исследование разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами в исходных координатах основано на методе дополнительного аргумента. Сформулированы и доказаны теоремы о локальном и нелокальном существовании и единственности решений задачи Коши. Доказаны существование и единственность локального решения задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши. Определены достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: система квазилинейных уравнений, метод дополнительного аргумента, задача Коши, глобальные оценки.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-05

Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + S_1(u,v)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = f_1(t,x), \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + S_2(u,v)\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} = f_2(t,x), \end{cases} \tag{0.1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, S_1, S_2 — известные функции.

Для системы уравнений (0.1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ v(0,x) = \varphi_2(x). \tag{0.2}$$

Задача (0.1), (0.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in (-\infty,+\infty), \quad T > 0\}.$$

В работе [1] изучена краевая задача с операторами М. Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной. Уравнения и системы дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядка, в частности системы квазилинейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывают различные задачи из физики и механики. Для систем квазилинейных и нелинейных уравнений первого порядка нет достаточно полной теории, нет общих теорем существования и единственности решения задачи Коши, а также универсальных методов решения любых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Разработано несколько разных методов для исследования разрешимости систем квазилинейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Например, всем известный классический метод характеристик, метод Галёркина, метод потоков. Как и любой метод, каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. Нельзя выделить какой-либо метод, позволяющий решать любые дифференциальные уравнения и системы в частных производных первого порядка. Каждый из известных методов хорошо применим только к определенному классу уравнений и систем. Например, метод характеристик сложно применять для систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. В методе характеристик условием разрешимости в исходных координатах является существование обратной функции для решения характеристического уравнения. Нахождение обратной функции в общем случае представляет собой непростую задачу [2–8].

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [9–11]. Он не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их. Применение этого метода позволяет во многих случаях более эффективно и конкретно определить условия разрешимости систем, интервал разрешимости и избежать необходимости находить обратную функцию.

Впервые метод дополнительного аргумента был предложен академиком М. И. Иманалиевым. Одной из первых работ, содержащей предпосылки метода дополнительного аргумента, была статья [9]. В работе [10] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений первого порядка, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, и указаны границы интервала разрешимости. В работе [11] описан метод дополнительного аргумента. В работе [12] метод дополнительного аргумента применяется для изучения разрешимости обратной задачи для квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. В работе [13] с помощью метода дополнительного аргумента изучена однозначная разрешимость начальной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром.

В работах [14–22] рассмотрено применение метода дополнительного аргумента к исследованию локальной и нелокальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для некоторых систем нелинейных и квазилинейных уравнений первого порядка.

В работе [23] с помощью метода дополнительного аргумента определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши (0.1), (0.2), при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши, и достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2). В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента определен еще один вариант достаточных условий существования и единственности локального решения задачи Коши (0.1), (0.2), при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши, и вариант достаточных условий нелокальной разрешимости задачи Коши (0.1), (0.2). В данной работе добавлены подробности в доказательства. Рассмотрим отличие условий.

В работе [23] мы можем доказать существование и единственность локального решения задачи Коши в исходных координатах, у которого гладкость по x не ниже, чем у начальных функций задачи Коши (0.1), (0.2), если

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} > 0 \text{ на } Z_K,$$
$$\varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \geqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \geqslant 0 \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u, v) \mid u, v \in [-K, K]\}$, $K = 2\max\left\{\sup\limits_{\mathbb{R}}\left|\varphi_i^{(l)}\right| \mid i = 1, 2,\ l = \overline{0,2}\right\}$.

В работе [23] мы можем доказать существование и единственность нелокального решения задачи Коши (0.1), (0.2) в исходных координатах, если

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} > 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} > 0 \text{ на } Z_K,$$
$$\varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \geqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \geqslant 0 \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$,

$$K = \max\left\{\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi_i^{(l)}\right| \mid i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right\} + T\max\left\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|\right\}.$$

В данной работе мы можем доказать существование и единственность локального решения задачи Коши в исходных координатах, у которого гладкость по x не ниже, чем у начальных функций задачи Коши (0.1), (0.2), если

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0,\ \frac{\partial S_1}{\partial v} < 0,\ \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0,\ \frac{\partial S_2}{\partial v} < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } \mathbb{R},\ \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \leqslant 0 \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$, $K = 2\max\left\{\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi_i^{(l)}\right| |i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right\}$.

В данной работе мы можем доказать существование и единственность нелокального решения задачи Коши (0.1), (0.2) в исходных координатах, если

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} < 0 \text{ на } Z_K,$$
$$\varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \leqslant 0 \text{ на } \Omega_T,$$

где $Z_K = \{(u,v) \mid u,v \in [-K,K]\}$,

$$K = \max\left\{\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi_i^{(l)}\right| \mid i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right\} + T\max\left\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|\right\}.$$

В данной работе и в работе [23] приведены достаточные условия разрешимости, которые используются при доказательстве теорем, выводе оценок, глобальных оценок, на многих этапах доказательств. Нелокальная разрешимость возможна лишь при определенных ограничениях на функции f_1, f_2, S_1, S_2, φ_1, φ_2. Для того чтобы вывести оценки, глобальные оценки, доказать существование и единственность локального решения задачи Коши в исходных координатах, у которого гладкость по x не ниже, чем у начальных функций задачи Коши (0.1), (0.2), вводятся ограничения на функции f_1, f_2, S_1, S_2, φ_1, φ_2. В работе [23] и в данной работе ограничения на функции f_1, f_2, S_1, S_2, φ_1, φ_2 отличаются.

§ 1. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (0.1), (0.2) расширенную характеристическую систему [10, 11, 14–23]:

$$\frac{\partial \eta_1(s,t,x)}{\partial s} = S_1(u(s,\eta_1(s,t,x)), v(s,\eta_1(s,t,x))),$$

$$\frac{\partial \eta_2(s,t,x)}{\partial s} = S_2(u(s,\eta_2(s,t,x)), v(s,\eta_2(s,t,x))),$$

$$\frac{\partial u(s,\eta_1(s,t,x))}{\partial s} = f_1(s,\eta_1(s,t,x)),$$
$$\frac{\partial v(s,\eta_2(s,t,x))}{\partial s} = f_2(s,\eta_2(s,t,x)),$$
$$u(0,\eta_1(0,t,x)) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ v(0,\eta_2(0,t,x)) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)),\ \eta_i(t,t,x) = x,\ i = 1,2.$$

Вводим новые неизвестные функции:

$$w_1(s,t,x) = u(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_2(s,t,x) = v(s,\eta_2(s,t,x)),$$

$$w_3(s,t,x) = v(s,\eta_1(s,t,x)),\ w_4(s,t,x) = u(s,\eta_2(s,t,x)).$$

Тогда расширенная характеристическая система примет вид

$$\frac{\partial \eta_1(s,t,x)}{\partial s} = S_1(w_1(s,t,x),w_3(s,t,x)), \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial \eta_2(s,t,x)}{\partial s} = S_2(w_4(s,t,x),w_2(s,t,x)), \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial w_1(s,t,x)}{\partial s} = f_1(s,\eta_1(s,t,x)), \tag{1.3}$$
$$\frac{\partial w_2(s,t,x)}{\partial s} = f_2(s,\eta_2(s,t,x)), \tag{1.4}$$
$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1(s,t,x)),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2(s,t,x)), \tag{1.5}$$
$$w_1(0,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)),\ \eta_i(t,t,x) = x,\ i = 1,2. \tag{1.6}$$

Неизвестные функции η_i, w_j, $i = 1,2$, $j = \overline{1,4}$, зависят не только от t и x, но и от дополнительного аргумента s. Интегрируя уравнения (1.1)–(1.4) по аргументу s и учитывая условия (1.5), (1.6), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \int_s^t S_1(w_1(\nu,t,x),w_3(\nu,t,x))\,d\nu, \tag{1.7}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \int_s^t S_2(w_4(\nu,t,x),w_2(\nu,t,x))\,d\nu, \tag{1.8}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s f_1(\nu,\eta_1(\nu,t,x))\,d\nu, \tag{1.9}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) + \int_0^s f_2(\nu,\eta_2(\nu,t,x))\,d\nu, \tag{1.10}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1(s,t,x)),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2(s,t,x)). \tag{1.11}$$

Подставим (1.7), (1.8) в (1.9)–(1.11), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int_0^t S_1(w_1(\nu,t,x),w_3(\nu,t,x))\,d\nu) +\\ + \int_0^s f_1(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1(\tau,t,x),w_3(\tau,t,x))\,d\tau)\,d\nu, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int_0^t S_2(w_4(\nu,t,x),w_2(\nu,t,x))\,d\nu) +\\ + \int_0^s f_2(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4(\tau,t,x),w_2(\tau,t,x))\,d\tau)\,d\nu, \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int_s^t S_1(w_1(\nu,t,x), w_3(\nu,t,x))\, d\nu), \tag{1.14}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int_s^t S_2(w_4(\nu,t,x), w_2(\nu,t,x))\, d\nu), \tag{1.15}$$

где w_1, w_2, w_3, w_4 — неизвестные функции.

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x) \mid 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \quad x \in (-\infty,+\infty), \quad T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\left\{\sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi_i^{(l)}\right| \mid i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\right\},$$

$$C_f = \max\left\{\sup_{\Omega_T} |f_1|, \sup_{\Omega_T} |f_2|, \sup_{\Omega_T} \left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|, \sup_{\Omega_T} \left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|\right\},$$

$Z_K = \{(u,v) \mid u,v \in [-K,K]\}$, где K — произвольно зафиксированное положительное число,

$$l = \max\left\{\sup_{Z_K} \left|\frac{\partial S_1}{\partial u}\right|, \sup_{Z_K} \left|\frac{\partial S_1}{\partial v}\right|, \sup_{Z_K} \left|\frac{\partial S_2}{\partial u}\right|, \sup_{Z_K} \left|\frac{\partial S_2}{\partial v}\right|\right\},$$

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|, \quad \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t,x)|,$$

$\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}(\Omega_*)$ — пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m-му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1,2\dots.$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулирован вариант достаточных условий существования и единственности локального решения задачи Коши (0.1), (0.2), при которых решение $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $\varphi_1,\varphi_2 \in \bar{C}^2(\mathbb{R})$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, *где*

$$T \leqslant \min\Big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\Big),\ K = 2C_\varphi,$$

и выполняются условия

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} < 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \leqslant 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого $T \leqslant \min\Big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\Big)$ *задача Коши* (0.1), (0.2) *имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (1.12)–(1.15).

Теорема 1.1 следует из выполнения условий трех лемм.

Л е м м а 1.1. *Если функции* w_j, $j = \overline{1,4}$, *удовлетворяют системе интегральных уравнений* (1.12)–(1.15) *и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции*

$$u(t,x) = w_1(t,t,x),\ v(t,x) = w_2(t,t,x)$$

будут решением задачи Коши (0.1), (0.2) *на* Ω_{T_0}, $T_0 \leqslant T$, *где* T_0 — *константа, определяемая через исходные данные.*

Лемма 1.1 составляет основу метода дополнительного аргумента. Лемма 1.1 доказывается аналогично утверждению из работ [10, 11, 15, 17, 18, 20, 21].

Л е м м а 1.2. *При выполнении условий*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(\mathbb{R}),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = 2C_\varphi$$

и

$$T \leqslant \min\Big(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l}\Big) \tag{1.16}$$

система интегральных уравнений (1.12)–(1.15) *имеет единственное решение:*

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T),\ j = \overline{1,4}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [10], и так же, как в статьях [10,17,18,20]. Поэтому приведем только его ключевые пункты. Основная трудность состоит в том, что в системе (1.12)–(1.15) присутствует суперпозиция неизвестных функций. Для преодоления этой трудности используется «двухуровневый» алгоритм последовательных приближений.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (1.12)–(1.15) зададим равенствами $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$, $w_{30}(s,t,x) = \varphi_2(x)$, $w_{40}(s,t,x) = \varphi_1(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (1.12)–(1.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$\begin{aligned} w_{1n}(s,t,x) &= \varphi_1\Big(x - \int_0^t S_1(w_{1n}(\nu,t,x), w_{3n}(\nu,t,x))\, d\nu\Big) + \\ &+ \int_0^s f_1\Big(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}(\tau,t,x), w_{3n}(\tau,t,x))\, d\tau\Big)\, d\nu, \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned} w_{2n}(s,t,x) &= \varphi_2\Big(x - \int_0^t S_2(w_{4n}(\nu,t,x), w_{2n}(\nu,t,x))\, d\nu\Big) + \\ &+ \int_0^s f_2\Big(\nu, x - \int_\nu^t S_2(w_{4n}(\tau,t,x), w_{2n}(\tau,t,x))\, d\tau\Big)\, d\nu, \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$w_{3n}(s,t,x) = w_{2(n-1)}\Big(s,s,x - \int_s^t S_1(w_{1n}(\nu,t,x), w_{3n}(\nu,t,x))\, d\nu\Big), \tag{1.19}$$

$$w_{4n}(s,t,x) = w_{1(n-1)}\Big(s,s,x - \int_s^t S_2(w_{4n}(\nu,t,x), w_{2n}(\nu,t,x))\, d\nu\Big). \tag{1.20}$$

Для системы уравнений (1.17)–(1.20) нулевое приближение определим равенствами

$$w_{jn}^0 = w_{j(n-1)},\ j = \overline{1,4}.$$

Для системы уравнений (1.17)–(1.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$\begin{aligned} w_{1n}^{k+1}(s,t,x) &= \varphi_1\Big(x - \int_0^t S_1(w_{1n}^k(\nu,t,x), w_{3n}^k(\nu,t,x))\, d\nu\Big) + \\ &+ \int_0^s f_1\Big(\nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}^k(\tau,t,x), w_{3n}^k(\tau,t,x))\, d\tau\Big)\, d\nu, \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$
\begin{aligned}
w_{2n}^{k+1}(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}^k(\nu,t,x), w_{2n}^k(\nu,t,x))\,d\nu) + \\
+ \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_{4n}^k(\tau,t,x), w_{2n}^k(\tau,t,x))\,d\tau)\,d\nu,
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

$$
w_{3n}^{k+1}(s,t,x) = w_{2(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}^k(\nu,t,x), w_{3n}^k(\nu,t,x))\,d\nu),
\tag{1.23}
$$

$$
w_{4n}^{k+1}(s,t,x) = w_{1(n-1)}(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}^k(\nu,t,x), w_{2n}^k(\nu,t,x))\,d\nu).
\tag{1.24}
$$

При выполнении условия

$$
T \leqslant \min\left(\frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l}\right)
\tag{1.25}
$$

справедливы оценки $\left\|w_{jn}^k\right\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$.

При выполнении условия (1.25) последовательные приближения (1.21)–(1.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (1.17)–(1.20). Справедливы оценки

$$
\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}.
$$

Продифференцируем последовательные приближения (1.21)–(1.24) по x, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_{1n}^{k+1}}{\partial x} = \varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k)\,d\nu)\left(1 - \int\limits_0^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}^k}{\partial x}\right)d\nu\right) + \\
+ \int\limits_0^s \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(1 - \int\limits_\nu^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_3^k}{\partial x}\right)d\tau\right)d\nu,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_{2n}^{k+1}}{\partial x} = \varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k)\,d\nu)\left(1 - \int\limits_0^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}^k}{\partial x}\right)d\nu\right) + \\
+ \int\limits_0^s \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(1 - \int\limits_\nu^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}^k}{\partial x}\right)d\tau\right)d\nu,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial w_{3n}^{k+1}}{\partial x} = \frac{\partial w_{2(n-1)}}{\partial x}\cdot\left(1 - \int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}^k}{\partial x}\right)\,d\nu\right),
$$

$$
\frac{\partial w_{4n}^{k+1}}{\partial x} = \frac{\partial w_{1(n-1)}}{\partial x}\cdot\left(1 - \int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}^k}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}^k}{\partial x}\right)\,d\nu\right).
$$

При выполнении условия (1.25) справедливы оценки

$$
\left\|\frac{\partial w_{1n}^k}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{2n}^k}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{3n}^k}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi, \left\|\frac{\partial w_{4n}^k}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi.
$$

Продифференцируем последовательные приближения (1.17)–(1.20) по x, получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} = \varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})\,d\nu)\left(1 - \int\limits_0^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right)d\nu\right) + \\
+ \int\limits_0^s \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(1 - \int\limits_\nu^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right)d\tau\right)d\nu,
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_{2n}}{\partial x} = \varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n})\,d\nu)\left(1 - \int\limits_0^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right)d\nu\right) + \\
+ \int\limits_0^s \frac{\partial f_2}{\partial x}\left(1 - \int\limits_\nu^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right)d\tau\right)d\nu,
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

$$\frac{\partial w_{3n}}{\partial x} = \frac{\partial w_{2(n-1)}}{\partial x} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right) d\nu\right), \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial w_{4n}}{\partial x} = \frac{\partial w_{1(n-1)}}{\partial x} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right) d\nu\right). \tag{1.29}$$

При выполнении условия (1.25) последовательные приближения $\dfrac{\partial w_{1n}^k}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{2n}^k}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{3n}^k}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{4n}^k}{\partial x}$ сходятся к $\dfrac{\partial w_{1n}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{2n}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{3n}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w_{4n}}{\partial x}$ при $k \to \infty$, справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi, \quad \left\|\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi, \quad \left\|\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi, \quad \left\|\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (1.16) последовательные приближения (1.17)–(1.20) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (1.12)–(1.15), у которого существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial w_j}{\partial x}$, $j = \overline{1,4}$. Справедливы оценки

$$\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi, \quad j = \overline{1,4}, \qquad \left\|\frac{\partial w_1}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi,$$

$$\left\|\frac{\partial w_2}{\partial x}\right\| \leqslant 4C_\varphi, \quad \left\|\frac{\partial w_3}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi, \quad \left\|\frac{\partial w_4}{\partial x}\right\| \leqslant 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что w_j, $j = \overline{1,4}$, имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как в статье [10]. □

Введем условия

$$\begin{gathered} \frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} < 0 \text{ на } Z_K, \\ \varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \leqslant 0 \text{ на } \Omega_T. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Л е м м а 1.3. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(\mathbb{R})$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, $K = 2C_\varphi$, *тогда при выполнении условий* (1.16), (1.30) *функции* w_j, $j = \overline{1,4}$, *представляющие собой решение системы уравнений* (1.12)–(1.15), *имеют непрерывные и ограниченные производные* $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = \overline{1,4}$, *на* Γ_T, *где* $T \leqslant \min\left(\dfrac{C_\varphi}{4C_f}, \dfrac{3}{40C_\varphi l}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дважды продифференцируем последовательные приближения (1.17)–(1.20) по x. Обозначим $\omega_j^n = \dfrac{\partial^2 w_{jn}}{\partial x^2}$, $j = \overline{1,4}$, получим систему уравнений

$$\omega_1^n(s,t,x) = -\varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n})\, d\nu) \int\limits_0^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\omega_1^n(\nu,t,x) + \frac{\partial S_1}{\partial v}\omega_3^n(\nu,t,x)\right) d\nu -$$
$$- \int\limits_0^s \frac{\partial f_1}{\partial x} \int\limits_\nu^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\omega_1^n(\tau,t,x) + \frac{\partial S_1}{\partial v}\omega_3^n(\tau,t,x)\right) d\tau d\nu + G_1\left(s,t,x,w_{1n},w_{3n},\frac{\partial w_{1n}}{\partial x},\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right),$$

$$\omega_2^n(s,t,x) = -\varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n})\, d\nu) \int\limits_0^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\omega_4^n(\nu,t,x) + \frac{\partial S_2}{\partial v}\omega_2^n(\nu,t,x)\right) d\nu -$$
$$- \int\limits_0^s \frac{\partial f_2}{\partial x} \int\limits_\nu^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\omega_4^n(\tau,t,x) + \frac{\partial S_2}{\partial v}\omega_2^n(\tau,t,x)\right) d\tau d\nu + G_2\left(s,t,x,w_{2n},w_{4n},\frac{\partial w_{2n}}{\partial x},\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}\right),$$

$$\omega_3^n\,(s,t,x) = \omega_2^{n-1}\cdot\left(1-\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}+\frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right)d\nu\right)^2 -$$
$$-\frac{\partial w_{2(n-1)}}{\partial x}\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\omega_1^n(\nu,t,x)+\frac{\partial S_1}{\partial v}\omega_3^n(\nu,t,x)\right)d\nu + G_3\left(s,t,x,w_{1n},w_{3n},\frac{\partial w_{1n}}{\partial x},\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right),$$
$$\omega_4^n\,(s,t,x) = \omega_1^{n-1}\cdot\left(1-\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right)d\nu\right)^2 -$$
$$-\frac{\partial w_{1(n-1)}}{\partial x}\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\omega_4^n(\nu,t,x)+\frac{\partial S_2}{\partial v}\omega_2^n(\nu,t,x)\right)d\nu + G_4\left(s,t,x,w_{2n},w_{4n},\frac{\partial w_{2n}}{\partial x},\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}\right),$$
где G_j, $j=1,2,3,4,$ — известные функции.

При выполнении условия (1.16) с учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\|\leqslant 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$, получаем

$$|\int\limits_s^t S_1(w_{1n},w_{3n})\,d\nu| \leqslant S_K T, \qquad |\int\limits_s^t S_2(w_{4n},w_{2n})\,d\nu| \leqslant S_K T,$$
$$S_K = \max\left\{\sup_{Z_K}|S_1|,\ \sup_{Z_K}|S_2|\right\}, \quad K = 2C_\varphi.$$

Зафиксируем точку $x_0\in\mathbb{R}$. Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x\,|x_0 - S_K T\leqslant x\leqslant x_0 + S_K T\},\ K = 2C_\varphi.$$

Возьмем $x_1, x_2\in\Omega_{x_0}$.

Докажем, что при выполнении условий (1.16), (1.30) справедливы неравенства

$$|\eta_{1n}\,(s,t,x_1) - \eta_{1n}\,(s,t,x_2)\,|\leqslant|x_1-x_2|, \tag{1.31}$$

$$|\eta_{2n}\,(s,t,x_1) - \eta_{2n}\,(s,t,x_2)\,|\leqslant|x_1-x_2|, \tag{1.32}$$

где

$$\eta_{1n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_1(w_{1n}(\nu,t,x),w_{3n}(\nu,t,x))\,d\nu,$$
$$\eta_{2n}(s,t,x) = x - \int\limits_s^t S_2(w_{4n}(\nu,t,x),w_{2n}(\nu,t,x))\,d\nu.$$

Предположим, что
$$\frac{\partial w_{1(n-1)}}{\partial x}\leqslant 0,\quad \frac{\partial w_{2(n-1)}}{\partial x}\leqslant 0. \tag{1.33}$$

При выполнении условия (1.16) с учетом установленных оценок

$$\left\|\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}\right\|\leqslant 4C_\varphi,\quad \left\|\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right\|\leqslant 4C_\varphi,\quad \left\|\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right\|\leqslant 8C_\varphi,\quad \left\|\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}\right\|\leqslant 8C_\varphi$$

установлено, что для всех $n\in N$ на Γ_T справедливы неравенства

$$1-\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x}+\frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x}\right)d\nu>0,\ 1-\int\limits_s^t\left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x}\right)d\nu>0. \tag{1.34}$$

Из (1.28), (1.29), (1.33), (1.34) следует, что $\dfrac{\partial w_{3n}}{\partial x}\leqslant 0$, $\dfrac{\partial w_{4n}}{\partial x}\leqslant 0$.

Из (1.26), (1.27) при выполнении условий (1.30) с учетом неравенств (1.34), получаем

$$\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} \leqslant 0,\ \frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \leqslant 0.$$

Так как $\dfrac{\partial w_{1n}}{\partial x} \leqslant 0$, $\dfrac{\partial w_{2n}}{\partial x} \leqslant 0$, $\frac{\partial w_{3n}}{\partial x} \leqslant 0$, $\dfrac{\partial w_{4n}}{\partial x} \leqslant 0$, то

$$1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_{1n}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_{3n}}{\partial x} \right) d\nu \leqslant 1,\ 1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_{4n}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_{2n}}{\partial x} \right) d\nu \leqslant 1. \qquad (1.35)$$

В силу неравенств (1.34) и (1.35), по теореме о конечных приращениях получаем, что справедливы неравенства (1.31), (1.32).

Так же, как в [17,18,20,23], установлена равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций $\omega_1^n,\ \omega_2^n$ по x в выбранной, произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde{\omega}_1^n = -\varphi_1'(x - \int\limits_0^t S_1(w_1, w_3)\, d\nu) \int\limits_0^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\tilde{\omega}_1^n + \frac{\partial S_1}{\partial v}\tilde{\omega}_3^n \right) d\nu -$$

$$- \int\limits_0^s \frac{\partial f_1}{\partial x} \int\limits_\nu^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\tilde{\omega}_1^n + \frac{\partial S_1}{\partial v}\tilde{\omega}_3^n \right) d\tau\, d\nu + G_1 \left(s, t, x, w_1, w_3, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_3}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{\omega}_2^n = -\varphi_2'(x - \int\limits_0^t S_2(w_4, w_2)\, d\nu) \int\limits_0^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\tilde{\omega}_4^n + \frac{\partial S_2}{\partial v}\tilde{\omega}_2^n \right) d\nu -$$

$$- \int\limits_0^s \frac{\partial f_2}{\partial x} \int\limits_\nu^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\tilde{\omega}_4^n + \frac{\partial S_2}{\partial v}\tilde{\omega}_2^n \right) d\tau\, d\nu + G_2 \left(s, t, x, w_2, w_4, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_4}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial v}\frac{\partial w_3}{\partial x} \right) d\nu \right)^2 - \frac{\partial w_2}{\partial x} \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_1}{\partial u}\tilde{\omega}_1^n + \frac{\partial S_1}{\partial v}\tilde{\omega}_3^n \right) d\nu +$$

$$+ G_3 \left(s, t, x, w_1, w_3, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \frac{\partial w_3}{\partial x} \right),$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\frac{\partial w_4}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial v}\frac{\partial w_2}{\partial x} \right) d\nu \right)^2 -$$

$$- \frac{\partial w_1}{\partial x} \int\limits_s^t \left(\frac{\partial S_2}{\partial u}\tilde{\omega}_4^n + \frac{\partial S_2}{\partial v}\tilde{\omega}_2^n \right) d\nu + G_4 \left(s, t, x, w_2, w_4, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \frac{\partial w_4}{\partial x} \right),$$

где $G_j,\ j = 1, 2, 3, 4,$ — известные функции.

При выполнении условий (1.16), (1.30) доказано, что $\tilde{\omega}_j^n \to \tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1, 4}$. При выполнении условий (1.16), (1.30) доказано, что справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leqslant 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_2\| \leqslant 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_3\| \leqslant 4C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_4\| \leqslant 4C_\varphi.$$

Покажем, что при выполнении условий (1.16), (1.30) последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j,\ j = \overline{1, 4}$, при $n \to \infty$ на Γ_T.

При выполнении условий (1.16), (1.30) в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1| \leqslant |R_1^n| + (C_f l t^2 + C_\varphi l t)(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$
$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant |R_2^n| + \left|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right| + 4C_\varphi l t(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$

где R_1^n, R_2^n — известные величины. Установлено, что при выполнении условия (1.16) справедливы неравенства

$$|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1| \leqslant |R_1^n| + 0.1(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$
$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant |R_2^n| + \left|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right| + 0.3(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$

где R_1^n, R_2^n — известные величины.

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех функций, входящих в R_1^n, R_2^n, в частности равностепенной непрерывностью функций ω_1^n, ω_2^n по x при $x \in \Omega_{x_0}$, для любого сколько угодно малого числа ε можно подобрать такой номер N, что при $n \geqslant N$
$$|R_1^n| < \varepsilon, \ |R_2^n| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n \geqslant N$

$$|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1| \leqslant \varepsilon + 0.1(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|),$$
$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant \varepsilon + \left|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right| + 0.3(\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|).$$

Значит, при $n \geqslant N$

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{10}{9}\varepsilon + \frac{1}{9}\,\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\|,$$
$$\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant \frac{10}{7}\varepsilon + \frac{10}{7}\,\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \frac{3}{7}\,\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\|.$$

Получаем при $n \geqslant N$

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{10}{9}\varepsilon + \frac{1}{9}\,\|\omega_3^n - \tilde{\omega}_3\| \leqslant \frac{10}{9}\varepsilon + \frac{1}{9}\left(\frac{10}{7}\varepsilon + \frac{10}{7}\,\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \frac{3}{7}\,\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\|\right),$$
$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{80}{63}\varepsilon + \frac{10}{63}\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \frac{1}{21}\,\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\|, \tag{1.36}$$
$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| \leqslant \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\,\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\|.$$

Аналогично: при $n \geqslant N$
$$\|\omega_2^n - \tilde{\omega}_2\| \leqslant \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\,\left\|\omega_1^{n-1} - \tilde{\omega}_1\right\|. \tag{1.37}$$

Сложим неравенства (1.36), (1.37), получим при $n \geqslant N$

$$\|\omega_1^n - \tilde{\omega}_1\| + \|\omega_2^n - \tilde{\omega}_2\| \leqslant \frac{8}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}(\left\|\omega_2^{n-1} - \tilde{\omega}_2\right\| + \left\|\omega_1^{n-1} - \tilde{\omega}_1\right\|).$$

С помощью метода математической индукции установлено, что справедливо неравенство

$$\left\|\omega_1^{N+k} - \tilde{\omega}_1\right\| + \left\|\omega_2^{N+k} - \tilde{\omega}_2\right\| \leqslant \left(\frac{1}{6}\right)^k (\left\|\omega_1^N - \tilde{\omega}_1\right\| + \left\|\omega_2^N - \tilde{\omega}_2\right\|) + \frac{16}{5}\varepsilon.$$

Следовательно, $\omega_1^{N+k} \to \tilde{\omega}_1$, $\omega_2^{N+k} \to \tilde{\omega}_2$ при $N \to \infty$, $k \to \infty$. Отсюда следует, что $\omega_3^n \to \tilde{\omega}_3$, $\omega_4^n \to \tilde{\omega}_4$ при $n \to \infty$.

Так как $\omega_j^n = \dfrac{\partial^2 w_{jn}}{\partial x^2}$, $j = \overline{1,4}$, то при выполнении условий (1.16), (1.30) $\dfrac{\partial^2 w_{jn}}{\partial x^2} \to \dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = \overline{1,4}$, непрерывные и ограниченные на Γ_T.

Далее установлено, что при выполнении условий (1.16), (1.30) существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$, $j = \overline{1,4}$, на Γ_T. □

§ 2. Существование нелокального решения

Т е о р е м а 2.1. *Пусть*

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(\mathbb{R}),\ f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T),\ S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K),\ K = C_\varphi + TC_f$$

и выполняются условия (1.30). *Тогда для любого* $T > 0$ *задача Коши* (0.1), (0.2) *имеет единственное решение* $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (1.12)–(1.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства существования нелокального решения задачи Коши (0.1), (0.2) и вывода для него глобальных оценок надо дополнить систему (1.7)–(1.11) двумя уравнениями. Продифференцируем систему уравнений (0.1) по x.

Обозначим $p(t,x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad q(t,x) = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + S_1(u,v)\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{\partial S_1}{\partial u}p^2 - \dfrac{\partial S_1}{\partial v}pq + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} + S_2(u,v)\dfrac{\partial q}{\partial x} = -\dfrac{\partial S_2}{\partial v}q^2 - \dfrac{\partial S_2}{\partial u}pq + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases}$$

Добавим к системе уравнений (1.7)–(1.11) два уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1(s,t,x)}{\partial s} = -\dfrac{\partial S_1}{\partial u}\gamma_1^2(s,t,x) - \dfrac{\partial S_1}{\partial v}\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \gamma_2(s,t,x)}{\partial s} = -\dfrac{\partial S_2}{\partial v}\gamma_2^2(s,t,x) - \dfrac{\partial S_2}{\partial u}\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \qquad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2).$$

Перепишем систему уравнений (2.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-\dfrac{\partial S_1}{\partial u}\gamma_1^2(\nu,t,x) - \dfrac{\partial S_1}{\partial v}\gamma_1(\nu,t,x)\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1) + \dfrac{\partial f_1}{\partial x}]\, d\nu, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [-\dfrac{\partial S_2}{\partial v}\gamma_2^2(\nu,t,x) - \dfrac{\partial S_2}{\partial u}\gamma_2(\nu,t,x)\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}]\, d\nu. \end{cases} \tag{2.2}$$

Так же как в [15, 17, 18, 20, 21, 23], доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (2.2). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Из (1.7)–(1.11) следуют оценки

$$\|w_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad i = 1,2.$$

Так как $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$, то при всех t и x на Ω_T справедливы оценки

$$\|u\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \quad \|v\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{2.3}$$

Далее, из (2.1) имеем

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)\exp(-\int\limits_0^s \left(\dfrac{\partial S_1}{\partial u}\gamma_1(\nu,t,x) + \dfrac{\partial S_1}{\partial v}\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)\right) d\nu) + \\ \qquad + \int\limits_0^s \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\exp(-\int\limits_\tau^s \left(\dfrac{\partial S_1}{\partial u}\gamma_1(\nu,t,x) + \dfrac{\partial S_1}{\partial v}\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1)\right) d\nu)\, d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)\exp(-\int\limits_0^s \left(\dfrac{\partial S_2}{\partial u}\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \dfrac{\partial S_2}{\partial v}\gamma_2(\nu,t,x)\right) d\nu) + \\ \qquad + \int\limits_0^s \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\exp(-\int\limits_\tau^s \left(\dfrac{\partial S_2}{\partial u}\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2) + \dfrac{\partial S_2}{\partial v}\gamma_2(\nu,t,x)\right) d\nu)\, d\tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

Из (2.4) при выполнении условий

$$\frac{\partial S_1}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial u} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} < 0 \text{ на } Z_K,$$
$$\varphi_1'(x) \leqslant 0, \quad \varphi_2'(x) \leqslant 0 \text{ на } \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} \leqslant 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} \leqslant 0 \text{ на } \Omega_T,$$

получаем, что $\gamma_1 \leqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$ на Γ_T, значит, $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + TC_f,\ i = 1,2$. Так как

$$\gamma_1(t,t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t,t,x) = \frac{\partial v}{\partial x},$$

то при всех t и x на Ω_T справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| \leqslant C_\varphi + TC_f, \qquad \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\| \leqslant C_\varphi + TC_f. \tag{2.5}$$

Так же как в [15, 17], установлено, что при всех t и x на Ω_T справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leqslant E_{11}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\operatorname{sh}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{2.6}$$

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| \leqslant E_{21}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}}\operatorname{sh}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{2.7}$$

где E_{11}, E_{21}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{23} — постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для u, v, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ((2.3), (2.5)–(2.7)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0, x)$, $v(T_0, x)$, используя теорему 1.1, продлим решение на некоторый промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем возьмем в качестве начальных значений $u(T_1, x)$, $v(T_1, x)$, используя теорему 1.1, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. В частности, начальные значения

$$u(T_k,x),\ v(T_k,x) \in \bar{C}^2(R), \qquad |u(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f, \qquad |v(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + TC_f;$$
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(T_k,x)\right| \leqslant C_\varphi + TC_f, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x}(T_k,x)\right| \leqslant C_\varphi + TC_f.$$

Для вторых производных справедливы оценки (2.6), (2.7), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений. □

Пример. Рассмотрим задачу Коши для системы вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \dfrac{1}{e^{u+v}+1}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} = 2t + \dfrac{1}{2^x+2}, \\ \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \operatorname{arctg}(-3u-v)\dfrac{\partial v(t,x)}{\partial x} = t^2 + \dfrac{1}{3^x+3}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x) = 2 - 7\operatorname{arctg} x, \qquad v(0,x) = \varphi_2(x) = \frac{1}{e^x+4}. \tag{2.9}$$

Задача (2.8), (2.9) определена на

$$\Omega_T = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x \in (-\infty,+\infty), \quad T > 0\}.$$

Здесь

$$f_1(t,x) = 2t + \frac{1}{2^x+2}, \quad f_2(t,x) = t^2 + \frac{1}{3^x+3},$$
$$S_1(u,v) = \frac{1}{e^{u+v}+1}, \quad S_2(u,v) = \operatorname{arctg}(-3u-v),$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{2^x ln2}{(2^x+2)^2}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{3^x ln3}{(3^x+3)^2},$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{7}{1+x^2}, \quad \varphi_2'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+4)^2},$$
$$\varphi_1''(x) = \frac{14x}{(1+x^2)^2}, \quad \varphi_2''(x) = \frac{e^{2x}-4e^x}{(e^x+4)^3},$$
$$C_\varphi = \max\left\{\sup_{\mathbb{R}}\left|\varphi_i^{(l)}\right| \mid i=1,2,\ l=\overline{0,2}\right\} = 2 + \frac{7\pi}{2},$$
$$C_f = \max\left\{\sup_{\Omega_T}|f_1|, \sup_{\Omega_T}|f_2|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|, \sup_{\Omega_T}\left|\frac{\partial f_2}{\partial x}\right|\right\} = \max\left\{2T+\frac{1}{2},\ T^2+\frac{1}{3}\right\}.$$

Так как

$$\varphi_1,\ \varphi_2 \in \bar{C}^2(\mathbb{R}), \quad f_1,\ f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T), \quad S_1,\ S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K), \quad K = C_\varphi + TC_f,$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial u} = -\frac{e^{u+v}}{(e^{u+v}+1)^2} < 0, \quad \frac{\partial S_1}{\partial v} = -\frac{e^{u+v}}{(e^{u+v}+1)^2} < 0,$$
$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = -\frac{3}{1+(3u+v)^2} < 0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} = -\frac{1}{1+(3u+v)^2} < 0 \text{ на } Z_K,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{2^x ln2}{(2^x+2)^2} < 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{3^x ln3}{(3^x+3)^2} < 0 \text{ на } \Omega_T,$$
$$\varphi_1'(x) = -\frac{7}{1+x^2} < 0, \quad \varphi_2'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+4)^2} < 0 \text{ на } \mathbb{R},$$

то по теореме 2.1 задача Коши (2.8), (2.9) имеет единственное решение:

$$u(t,x),\ v(t,x) \in \bar{C}^{1,2}(\Omega_T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Репин О. А. Краевая задача с операторами М. Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной // Известия высших учебных заведений. Математика. 2018. № 1. С. 81–86. http://mi.mathnet.ru/ivm9322
2. Глушко А. В., Логинова Е. А., Петрова В. Е., Рябенко А. С. Изучение стационарного распределения тепла в плоскости с трещиной при переменном коэффициенте внутренней теплопроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 4. С. 695–703. http://doi.org/10.7868/S0044466915040055
3. Glushko A. V., Ryabenko A. S., Petrova V. E., Loginova E. A. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity // Asymptotic Analysis. 2016. Vol. 98. No. 4. P. 285–307. https://doi.org/10.3233/ASY-161369
4. Рождественский Б. Л., Яненко Н. И. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
5. Lannes D. The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics. Providence: AMS, 2013. https://doi.org/10.1090/surv/188
6. Bressan A. Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem. Oxford: Oxford University Press, 2000.
7. Горицкий А. Ю., Кружков С. Н., Чечкин Г. А. Уравнения с частными производными первого порядка. М.: Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 1999.
8. Chen G. Q., Wang D. H. The Cauchy problem for the Euler equations for compressible fluids // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. 2002. Vol. 1. P. 421–543. https://doi.org/10.1016/S1874-5792(02)80012-X
9. Иманалиев М. И., Ведь Ю. А. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 465–477. http://mi.mathnet.ru/de6793
10. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 1. С. 16–21. http://mi.mathnet.ru/dan2413
11. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н. Метод дополнительного аргумента // Вестник КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. Спец. выпуск. 2006. № 1. С. 60–64.
12. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 2 (18). С. 56–62. http://mi.mathnet.ru/vtgu253
13. Юлдашев Т. К. Начальная задача для квазилинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных высшего порядка с вырожденным ядром // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 116–130. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-09
14. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2012. Вып. 14. С. 34–41.
15. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2013. № 3 (177). С. 190–201.
16. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 2. С. 115–124. http://mi.mathnet.ru/svmo600
17. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика. 2014. № 4. С. 116–130.

18. Донцова М. В. Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2014. № 3. С. 21–36.
19. Алексеенко С. Н., Донцова М. В. Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2013. Вып. 15. С. 52–59.
20. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 4. С. 71–82. http://mi.mathnet.ru/ufa261
21. Донцова М. В. Разрешимость задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$ // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. № 1. С. 26–38. http://mi.mathnet.ru/ufa458
22. Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky D. E. Global solutions to the shallow water system with a method of an additional argument // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. No. 9. P. 1444–1465. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1208817
23. Донцова М. В. Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21. № 3. С. 317–328. https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.317-328

Поступила в редакцию 04.11.2019

Донцова Марина Владимировна, к. ф.-м. н., старший преподаватель, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Цитирование: М. В. Донцова. Достаточные условия нелокальной разрешимости системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 60–78.

M. V. Dontsova

Sufficient conditions of a nonlocal solvability for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms

Keywords: a system of quasilinear equations, the method of an additional argument, Cauchy problem, global estimates.

MSC2010: 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-05

We consider a Cauchy problem for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms. The study of the solvability of the Cauchy problem for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms in the original coordinates is based on the method of an additional argument. Theorems on the local and nonlocal existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problem are formulated and proved. We prove the existence and uniqueness of the local solution of the Cauchy problem for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms, which has the same smoothness with respect to x as the initial functions of the Cauchy problem. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a nonlocal solution of the Cauchy problem for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms are found; this solution is continued by a finite number of steps from the local solution. The proof of the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms relies on global estimates.

REFERENCES

1. Repin O. A. Boundary-value problem with Saigo operators for mixed type equation with fractional derivative, *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 70–75. https://doi.org/10.3103/S1066369X18010103
2. Glushko A. V., Loginova E. A., Petrova V. E., Ryabenko A. S. Study of steady-state heat distribution in a plane with a crack in the case of variable internal thermal conductivity, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, no. 4, pp. 690–698. https://doi.org/10.1134/S0965542515040053
3. Glushko A. V., Ryabenko A. S., Petrova V. E., Loginova E. A. Heat distribution in a plane with a crack with a variable coefficient of thermal conductivity, *Asymptotic Analysis*, 2016, vol. 98, no. 4, pp. 285–307. https://doi.org/10.3233/ASY-161369
4. Rozhdestvenskii B. L., Yanenko N. N. *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike* (Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics), Moscow: Nauka, 1968.
5. Lannes D. *The water waves problem: mathematical analysis and asymptotics*, Providence: AMS, 2013. https://doi.org/10.1090/surv/188
6. Bressan A. *Hyperbolic systems of conservation laws: the one-dimensional Cauchy problem*, Oxford: Oxford University Press, 2000.
7. Goritskii A. Yu., Kruzhkov S. N., Chechkin G. A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* (Partial differential equations of the first order), Moscow: Lomonosov Moscow State University, 1999.
8. Chen G. Q., Wang D. H. The Cauchy problem for the Euler equations for compressible fluids, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, 2002, vol. 1, pp. 421–543. https://doi.org/10.1016/S1874-5792(02)80012-X
9. Imanaliev M. I., Ved' Yu. A. First-order partial differential equation with an integral as a coefficient, *Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 3, pp. 325–335. https://zbmath.org/?q=an:0689.45019

10. Imanaliev M. I., Alekseenko S. N. On the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations, *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 10–15. https://zbmath.org/?q=an:1054.35025
11. Imanaliev M. I., Pankov P. S., Alekseenko S. N. Method of an additional argument, *Vestnik Kazakhskogo Natsional'nogo Universiteta. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika. Spetsial'nyi vypusk*, 2006, no. 1, pp. 60–64 (in Russian).
12. Yuldashev T. K. On the inverse problem for a quasilinear partial differential equation of the first order, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika. Mekhanika*, 2012, no. 2 (18), pp. 56–62 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/vtgu253
13. Yuldashev T. K. The initial value problem for the quasi-linear partial integro-differential equation of higher order with a degenerate kernel, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 116–130 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-09
14. Alekseenko S. N., Dontsova M. V. The investigation of a solvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite, *Matematicheskii Vestnik Pedvuzov i Universitetov Volgo-Vyatskogo Regiona*, 2012, issue 14, pp. 34–41 (in Russian).
15. Alekseenko S. N., Shemyakina T. A., Dontsova M. V. Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, 2013, no. 3 (177), pp. 190–201 (in Russian).
16. Alekseenko S. N., Dontsova M. V. The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 115–124 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/svmo600
17. Dontsova M. V. Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides, *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Fizika. Matematika*, 2014, no. 4, pp. 116–130 (in Russian).
18. Dontsova M. V. The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides, *Vestnik Tverskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Ser. Prikladnaya Matematika*, 2014, no. 3, pp. 21–36 (in Russian).
19. Alekseenko S. N., Dontsova M. V. The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite, *Matematicheskii Vestnik Pedvuzov i Universitetov Volgo-Vyatskogo Regiona*, 2013, issue 15, pp. 52–59 (in Russian).
20. Dontsova M. V. Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides, *Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 68–80. https://doi.org/10.13108/2014-6-4-68
21. Dontsova M. V. Solvability of Cauchy problem for a system of first order quasilinear equations with right-hand sides $f_1 = a_2u(t,x) + b_2(t)v(t,x)$, $f_2 = g_2v(t,x)$, *Ufa Mathematical Journal*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 27–41. https://doi.org/10.13108/2019-11-1-27
22. Alekseenko S. N., Dontsova M. V., Pelinovsky D. E. Global solutions to the shallow water system with a method of an additional argument, *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, no. 9, pp. 1444–1465. https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1208817
23. Dontsova M. V. The nonlocal solvability conditions for a system of two quasilinear equations of the first order with absolute terms, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 317–328 (in Russian). https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.317-328

Received 04.11.2019

Dontsova Marina Vladimirovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, pr. Gagarina, 23, Nizhny Novgorod, 603950, Russia.
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Citation: M. V. Dontsova. Sufficient conditions of a nonlocal solvability for a system of two quasilinear equations of the first order with constant terms, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 60–78.