

УДК 517.977

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

ПОСТРОЕНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ КРИВЫХ В ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПРИ СКАЧКАХ КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ ЦЕЛЕВОГО МНОЖЕСТВА

Рассматривается плоская задача управления по быстродействию с круговой вектограммой скоростей и невыпуклым целевым множеством с границей, имеющей конечное число точек разрыва кривизны. Исследуется проблема выявления и построения рассеивающих кривых, образующих сингулярное множество функции оптимального результата, в случае когда точки разрыва кривизны имеют односторонние кривизны разного знака. Показано, что указанные точки относятся к псевдовершинам — характеристическим точкам границы целевого множества, отвечающим за зарождение ветвей сингулярного множества. Исследована структура рассеивающих кривых и стартующих с них оптимальных траекторий, которые попадают в окрестность псевдовершины. Выявлена характерная особенность изучаемого случая, заключающаяся в том, что одна псевдовершина может порождать две различные ветви сингулярного множества. Выведено уравнение касательной к точкам гладкости рассеивающей кривой. Предложена схема конструирования сингулярного множества, основанная на построении интегральных кривых для дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме, правые части которых определяются особенностями геометрии границы цели в окрестностях псевдовершин. Полученные результаты проиллюстрированы на примере решения задачи управления, когда целевое множество является одномерным многообразием.

Ключевые слова: задача быстродействия, рассеивающая кривая, кривизна, касательная, уравнение Гамильтона–Якоби, сингулярное множество, псевдовершина.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-07

Введение

Негладкие особенности решения задачи управления по быстродействию с невыпуклым целевым множеством M выделяются с помощью рассеивающих линий (так называемых биссектрис). При этом особая роль в их построении отводится задаче выявления характеристических точек границы целевого множества — псевдовершин. Среди различных по своим дифференциальным свойствам типов псевдовершин представляют интерес точки с разрывной кривизной, в которых односторонние производные кривизны конечны и имеют разные знаки. Речь идет о случае смены направления выпуклости кривой $\Gamma = \partial M$. В работе для указанного случая развит аналитический и численный аппарат построения рассеивающих кривых.

§ 1. Постановка задачи быстродействия

Пусть на плоскости задано замкнутое множество M , не обязательно компактное. Полагаем, что его граница $\Gamma = \partial M$ есть гладкая кривая без самопересечений, которая может быть задана параметрическим уравнением

$$\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2: y = y(t), t \in \Xi\}. \quad (1.1)$$

Здесь $\Xi \subseteq \mathbb{R}$ — замкнутое односвязное множество; в частности, не исключён случай, когда $\Xi = (-\infty, +\infty)$. Вектор-функция $y(t)$ является непрерывной на Ξ , дифференцируемой во

всех внутренних точках Ξ и дважды дифференцируемой во всех внутренних точках Ξ , кроме, может быть, конечного числа точек.

Рассматривается задача о приведении системы, состоящей из одной точки с текущими координатами $\mathbf{x} = (x, y)$, за кратчайшее время на M . Динамика системы описывается уравнением

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1, \\ \dot{y} = v_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

где на управление $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ наложено ограничение $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq 1$.

Задача управления считается решенной, если удалось на заданном множестве построить функцию оптимального результата $u(x, y)$, выделив ее негладкие особенности. Содержательно решение сводится к построению функции $\rho((x, y), M) = \rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \inf_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$ евклидова расстояния от точки $\mathbf{x} = (x, y)$ до замкнутого (но не обязательно ограниченного) множества M . Оптимальное управление \mathbf{v}^* есть максимальный по норме вектор из круга $O(\mathbf{0}, 1)$, определяющего ресурс управления системы, сонаправленный вектору с началом в \mathbf{x} и концом на ближайшей к \mathbf{x} точке из M (здесь и далее $O(\mathbf{c}, r) \triangleq \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{y} - \mathbf{c}\| \leq r\}$ — круг радиуса $r > 0$ с центром в точке $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$). В случае невыпуклого множества M выбор оптимального управления в общем случае не единственный.

В соответствии с классификацией Р. Айзекса задаче быстродействия с динамикой (1.2) сопоставлено уравнение Гамильтона–Якоби

$$\min_{v_1^2 + v_2^2 \leq 1} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0. \quad (1.3)$$

Минимаксное решение [1] задачи Дирихле для уравнения (1.3) с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

совпадает с функцией оптимального результата $u(x, y)$ на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$ (см. [2, теорема 1]).

С изучаемой задачей еще связано рассматриваемое в геометрической оптике уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \quad (1.5)$$

которое описывает распространение света в изотропной среде. Задача Дирихле для уравнения (1.5) с краевым условием (1.4) имеет обобщенное (фундаментальное) решение, введенное С. Н. Кружковым [3], равное $u_k(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M)$. Оно задает величину оптического пути между точкой \mathbf{x} и множеством M , имеющим границу Γ , и отражает принцип Гюйгенса о том, что каждая точка, до которой дошел свет, сама становится источником световой волны. Линии уровня решения $u_k(\mathbf{x})$ задачи для уравнения эйконала (1.5) имеют физический смысл, представляя собой волновые фронты при круговой вектограмме скоростей распространения света.

§ 2. Рассеивающие линии в задаче быстродействия

Введем ряд определений, связанных с сингулярностями в задаче быстродействия.

О п р е д е л е н и е 2.1. Множеством $\Omega_M(\mathbf{x})$ проекций точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ на множество M назовем объединение всех точек $\mathbf{y} \in M$, ближайших в евклидовой метрике к \mathbf{x} .

О п р е д е л е н и е 2.2. Биссектрисой $L(M)$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ назовем множество всех точек, для которых множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ состоит более чем из одного элемента:

$$L(M) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: \text{card } \Omega_M(\mathbf{x}) \geq 2\}.$$

Здесь $\text{card}(\Omega_M(\mathbf{x}))$ означает мощность множества $\Omega_M(\mathbf{x})$. Она равна числу элементов, если множество конечно, но может быть и бесконечной. Например, если \mathbf{x} — центр окружности, дуга которой содержится в ∂M , то все элементы дуги могут входить в $\Omega_M(\mathbf{x})$.

Согласно классификации Р. Айзекса биссектриса есть рассеивающая кривая в задаче быстрогодействия для динамической системы (1.2): из каждой ее точки исходят не менее двух оптимальных траекторий [4, пример 6.10.1]. Подобные конструкции часто возникают в задачах управления и дифференциальных играх с невыпуклым целевым множеством [5]. Функция оптимального результата на рассеивающей кривой является недифференцируемой функцией.

С другой стороны, согласно определению 2.2 $L(M)$ есть множество симметрии, порожденное фигурой M (см. [6]). Такие множества обуславливают появление изломов волновых фронтов и каустик [7], распространяющихся от M . Другим представителем множества симметрии является, например, скелет фигуры M (см. [8, гл. 2, пп. 2.4–2.5]). Скелет можно трактовать как замыкание той части биссектрисы множества ∂M , которая лежит в M . Топологические особенности биссектрисы множества изучались, например, в работах [9, 10].

О п р е д е л е н и е 2.3. Будем называть точку $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ псевдовершиной множества M , а $\hat{\mathbf{x}}_0$ порожденной ей крайней точкой биссектрисы, если существуют последовательность $\{(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ пар точек множества M и последовательность $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(M)$ точек биссектрисы, для которых выполняются условия

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) &= (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n &= \mathbf{x}_0, \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) &\subset \Omega_M(\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

В силу полунепрерывности сверху отображения $\mathbf{x} \mapsto \Omega_M(\mathbf{x})$ выполняется включение

$$\mathbf{y}_0 \in \Omega_M(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.1)$$

(подробнее см. в [11]).

Одной из основных характеристик плоской кривой является ее кривизна. Для плоской кривой (1.1) значение кривизны $k = k(t)$ в точке $\mathbf{y}(t)$ вычисляется следующим образом:

$$k(t) = \frac{\mathbf{y}''(t) \wedge \mathbf{y}'(t)}{\|\mathbf{y}'(t)\|^{3/2}}. \quad (2.2)$$

Здесь $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$. С кривизной тесно связаны понятия радиуса кривизны $R(t) = 1/k(t)$ и центра кривизны $\mathbf{c}(t)$ — точки, расположенной на нормали к Γ в точке $\mathbf{y}(t)$ на расстоянии $R(t)$ от нее в направлении, противоположном направлению локальной выпуклости (см. [12, гл. III, § 25]). Свойства биссектрисы $L(M)$ в окрестности крайних точек существенным образом зависят от кривизны $k(t_0)$ в порождающей ее псевдовершине, либо, если кривизна не определена, от ее односторонних пределов слева $k(t_0 - 0)$ и справа $k(t_0 + 0)$. Здесь и далее используем для односторонних пределов функции $y = f(t)$ обозначения

$$f(t_0 + 0) \triangleq \lim_{t \rightarrow t_0, t > 0} f(t), \quad f(t_0 - 0) \triangleq \lim_{t \rightarrow t_0, t < 0} f(t).$$

§ 3. Структура оптимальных траекторий в окрестности псевдовершины

Важной задачей является изучение структуры биссектрисы в окрестности ее крайней точки на основе установления свойств проекций точек $L(M)$ в окрестности псевдовершины. В работе [13] найдено предельное соотношение для параметров, задающих точки,

в окрестность которых приходят от $L(M)$ оптимальные траектории, когда в псевдовершине определены кривизна и ее производная. В работе [11] выведено аналогичное соотношение для псевдовершины, в котором определены односторонние пределы кривизны, и они не совпадают, но имеют одинаковый знак. В работе [14] получено наиболее сложное соотношение для псевдовершины, в которой определены односторонние пределы производной кривизны, и они не совпадают. Рассмотрим еще один случай псевдовершины $y_0 = y(t_0)$, в которой не определена кривизна $k(t)$ кривой Γ , но известны её односторонние пределы слева $k(t_0 - 0)$ и справа $k(t_0 + 0)$. Здесь

$$\text{sign } k(t_0 - 0) \neq \text{sign } k(t_0 + 0),$$

где

$$\text{sign } t = \begin{cases} -1, & \text{если } t < 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \\ 1, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Данное неравенство означает, что в точке t_0 имеет место разрыв производной второго порядка $y''(t)$ вектор-функции $y(t)$, и знаки односторонних пределов $y''(t - 0)$ и $y''(t + 0)$ различаются.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $y_0 = y(t_0)$ — псевдовершина множества M . При этом в точке t_0 определены односторонние пределы $k(t_0 - 0)$ и $k(t_0 + 0)$ кривизны, причем $\text{sign } k(t_0 - 0) \neq \text{sign } k(t_0 + 0)$. Тогда если крайняя точка \hat{x}_0 биссектрисы находится на луче $\Lambda_+ = \{l: l = y_0 + \lambda(c(t_0 + 0) - y_0), \lambda \in [0, +\infty)\}$, то справедливы равенства

$$\forall \varepsilon^* > 0: |k(t_0 + 0)| = \sup\{|k(t_0 + \varepsilon)|: \varepsilon \in (0, \varepsilon^*]\}, \quad (3.1)$$

$$\hat{x}_0 = c(t_0 + 0), \quad (3.2)$$

и для параметров $t_1 < t_0 < t_2$, где $t_1 = t_1(t_2)$, задающих координаты проекций $y(t_1), y(t_2)$ точек $x \in L(M)$ биссектрисы, лежащих в окрестности \hat{x}_0 , выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{t_1(t_2) - t_0}{t_2 - t_0} = 0. \quad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности полагаем, что точка y_0 совпадает с началом координат, касательная к кривой Γ в ней совпадает с осью абсцисс, а луч Λ_+ , как лежащий на нормали к Γ , совпадает с положительным направлением оси ординат. Условия на границу (1.1) множества M позволяют представить ее в некоторой окрестности псевдовершины в виде графика $\text{gr } y(x)$ функции $y = f(x)$ с областью определения $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим абсциссы x_1 и x_2 проекций точек биссектрисы, лежащих в окрестности псевдовершины, и точку (x^*, y^*) пересечения нормалей к $\text{gr } f(x)$ в них. По построению

$$f(0) = 0, \quad (3.4)$$

$$f'(0) = 0,$$

$$f''(-0) = k(t_0 - 0) \leq 0, \quad f''(+0) = k(t_0 + 0) \geq 0. \quad (3.5)$$

Обозначим ординаты проекций как $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2$, а значения производных функции $y = f(x)$ — как $y'_i = f'(x_i)$, $y''_i = f''(x_i)$, $i = 1, 2$. Получаем выражения для координат точек биссектрисы:

$$x^* = \frac{(x_1 + y_1 y'_1) y'_2 - (x_2 + y_2 y'_2) y'_1}{y'_2 - y'_1}, \quad (3.6)$$

$$y^* = \frac{-(x_1 + y_1 y_1') + (x_2 + y_2 y_2')}{y_2' - y_1'}. \quad (3.7)$$

В некоторой окрестности точки 0 можно считать x_1 функцией от x_2 , поскольку между абсциссами проекций точек биссектрисы в ней существует взаимно однозначное соответствие. Покажем, что выполняется соотношение

$$\lim_{x_2 \rightarrow +0} \frac{x_1}{x_2} = 0. \quad (3.8)$$

Допустим, что (3.8) не выполняется. Тогда найдутся такие последовательности $\{\bar{x}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\tilde{x}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \bar{x}^{(i)} < 0, \tilde{x}^{(i)} > 0; \quad (3.9)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{x}^{(i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(i)} = 0,$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}^{(i)}}{\tilde{x}^{(i)}} = c^* < 0. \quad (3.10)$$

Условия (3.9)–(3.10) означают, что элементы последовательностей могут быть представлены в виде

$$\bar{x}^{(i)} = \varkappa_1 t^{(i)} + o(t^{(i)}), \tilde{x}^{(i)} = \varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)}), \quad (3.11)$$

где

$$\forall i \in \mathbb{N} t^{(i)} > 0, \lim_{i \rightarrow \infty} t^{(i)} = 0, \varkappa_1 \leq 0, \varkappa_2 > 0,$$

$o(t)$ — бесконечно малая функция более высокого порядка, чем t (т. е. $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} o(t) = 0$).

Представим разложение значений функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$ с учетом равенств (3.4)–(3.5):

$$f(\bar{x}^{(i)}) = f(0) + f'(0)\bar{x}^{(i)} + o(\bar{x}^{(i)}) = o(\bar{x}^{(i)}) = o(t^{(i)}),$$

$$f(\tilde{x}^{(i)}) = f(0) + f'(0)\tilde{x}^{(i)} + o(\tilde{x}^{(i)}) = o(\tilde{x}^{(i)}) = o(t^{(i)}),$$

$$f'(\bar{x}^{(i)}) = f'(0) + f''(-0)\bar{x}^{(i)} + o(\bar{x}^{(i)}) = f''(-0)(\varkappa_1 t^{(i)} + o(t^{(i)})) + o(t^{(i)}) = f''(-0)\varkappa_1 t^{(i)} + o(t^{(i)}),$$

$$f'(\tilde{x}^{(i)}) = f'(0) + f''(+0)\tilde{x}^{(i)} + o(\tilde{x}^{(i)}) = f''(+0)(\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)})) + o(t^{(i)}) = f''(+0)\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)}).$$

Тогда, подставив значения (3.11) в формулы (3.6), (3.7), можно получить выражения, задающие координаты (\hat{x}, \hat{y}) крайней точки биссектрисы:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{(\bar{x}^{(i)} + f(\bar{x}^{(i)}))f'(\bar{x}^{(i)})}{f'(\tilde{x}^{(i)}) - f'(\bar{x}^{(i)})} - \frac{(\tilde{x}^{(i)} + f(\tilde{x}^{(i)}))f'(\tilde{x}^{(i)})}{f'(\tilde{x}^{(i)}) - f'(\bar{x}^{(i)})} \right) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{(\varkappa_1 t^{(i)} + o(t^{(i)})) (f''(+0)\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)}))}{f''(+0)\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)}) - f''(-0)\varkappa_1 t^{(i)} - o(t^{(i)})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)})) (f''(-0)\varkappa_1 t^{(i)} + o(t^{(i)}))}{f''(+0)\varkappa_2 t^{(i)} + o(t^{(i)}) - f''(-0)\varkappa_1 t^{(i)} - o(t^{(i)})} \right) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{o(t^{(i)})}{(f''(+0)\varkappa_2 - f''(-0)\varkappa_1) t^{(i)} + o(t^{(i)})} = 0, \quad (3.12) \\ \hat{y} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-(\bar{x}^{(i)} + f(\bar{x}^{(i)}))f'(\bar{x}^{(i)}) + (\tilde{x}^{(i)} + f(\tilde{x}^{(i)}))f'(\tilde{x}^{(i)})}{f'(\tilde{x}^{(i)}) - f'(\bar{x}^{(i)})} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(\varkappa_2 - \varkappa_1)t^{(i)} + o(t^{(i)})}{(f''(+0)\varkappa_2 - f''(-0)\varkappa_1)t^{(i)} + o(t^{(i)})} = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{f''(+0)\varkappa_2 - f''(-0)\varkappa_1}. \quad (3.13)$$

Если $\varkappa_1 < f''(+0)/f''(-0)$, то значение знаменателя в правой части формулы (3.13) отрицательное, а значение числителя положительное. Это значит, что точка (x^*, y^*) находится на отрицательной части оси ординат, а следовательно, не на луче Λ^+ , что противоречит условию теоремы. Если $\varkappa_1 = f''(+0)/f''(-0)$, то значение правой части формулы (3.13) не определено, а значит, у точек пересечения нормалей к $\text{gr } f(x)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2 предел вообще отсутствует. Остается только допустимое значение $\varkappa_1 \in (f''(+0)/f''(-0), 0]$. Тогда величину (3.13) можно оценить:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \frac{1}{f''(+0)} + \frac{-\varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \frac{1}{f''(-0)} \right)^{-1} > \left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \frac{1}{f''(+0)} + \frac{-\varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \frac{1}{f''(-0)} \right)^{-1} = \\ &= \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 - \varkappa_1} \frac{1}{f''(+0)} = |k(t_0 + 0)|^{-1}, \end{aligned}$$

т. е. ордината крайней точки биссектрисы больше, чем предельное значение радиуса кривизны справа в псевдовершине. С учетом (3.12) это означает, что крайняя точка (\hat{x}, \hat{y}) лежит на нормали к биссектрисе в псевдовершине на расстоянии, превышающем предельное значение радиуса кривизны $r(t_0 + 0)$ справа, с той же стороны от y_0 , что и предельное положение центра кривизны. Однако если рассмотреть предельную соприкасающуюся окружность [12] справа в точке $x = 0$, то она будет иметь радиус $1/f''(+0)$, следовательно, она будет заходить внутрь круга $O(\hat{x}, \|y_0 - \hat{x}\|)$. Поскольку кривая имеет с соприкасающейся окружностью касание второго порядка, то в некоторой малой окрестности псевдовершины найдутся точки кривой Γ , которые лежат ближе к крайней точке \hat{x} , чем y_0 . Получилось противоречие с включением (2.1). Таким образом, (3.8) выполняется.

Для длин $s_1(t)$, $s_2(t)$ дуги кривой Γ , отсчитываемой от псевдовершины y_0 до точек $y(t_1)$ (с отрицательным знаком) и $y(t_2)$ (с положительным знаком), можно записать соотношение

$$\frac{ds_1}{ds_2} \Big|_{t=t_0} = \frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t=t_0} \frac{\|y'(t_0 + 0)\|}{\|y'(t_0 - 0)\|} = \frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t=t_0} \frac{\|y'(t_0)\|}{\|y'(t_0)\|} = \frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t=t_0}.$$

С другой стороны, с учетом выражения для дифференциала длины дуги графика функции

$$\frac{ds_1}{ds_2} \Big|_{t=t_0} = \frac{dx_2 \sqrt{1 + y'(0)^2}}{dx_1 \sqrt{1 + y'(0)^2}} \Big|_{t=t_0} = \frac{dx_1}{dx_2} \Big|_{t=t_0}.$$

Стало быть, имеет место и равенство $\frac{dt_1}{dt_2} \Big|_{t=t_0} = \frac{dx_1}{dx_2} \Big|_{t=t_0}$, из которого с учетом (3.8) вытекает предельное соотношение (3.3). Из него следует, что $x_1 = o(x_2)$. Тогда координаты крайней точки биссектрисы определяются как

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{(x_1 + y_1 y_1') y_2' - (x_2 + y_2 y_2') y_1'}{y_2' - y_1'} = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{o(x_2)}{o(x_2) - y''(+0)x_2 + o(x_1)} = 0, \\ \hat{y} &= \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{-(x_1 + y_1 y_1') + (x_2 + y_2 y_2')}{y_2' - y_1'} = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{x_2 + o(x_1) + o(x_1)}{o(x_2) + y''(+0)x_2 + o(x_1)} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{x_2}{y''(+0)x_2} = \frac{1}{y''(+0)}. \end{aligned}$$

Следовательно, точка (\hat{x}, \hat{y}) совпадает с предельным положением $(0, y''(+0)^{-1})$ центра кривизны графика функции $f(x)$ справа в точке $x = 0$. Это означает выполнение равенства (3.2).

В свою очередь, раз точка $y(0)$ является ближайшей к $c(+0)$ на кривой Γ , то это значит, что кривизна $k(t)$ не может возрастать в некоторой правой полуокрестности точки $t_0 = 0$. В противном случае Γ заходила бы внутрь круга $O(c(+0), r(+0))$, ограниченного предельным положением справа соприкасающейся окружности к $\text{gr } f(x)$ при $t \rightarrow +0$. По условию на (1.1) функция $k(t)$ непрерывна в некоторой полуокрестности $(0, t_2)$, $t_2 > 0$. Поэтому найдется такое число $\varepsilon^* > 0$, что $k(t)$ непрерывна и убывает (возможно, нестрого) на интервале $(0, \varepsilon^*)$, что доказывает (3.1). \square

С л е д с т в и е 3.1. Пусть $y_0 = y(t_0)$ — псевдовершина множества M . При этом $\|y'(t_0)\| \neq 0$ и определены односторонние пределы $k(t_0 - 0)$ и $k(t_0 + 0)$ кривизны, причем $\text{sign } k(t_0 - 0) \neq \text{sign } k(t_0 + 0)$. Тогда если крайняя точка \hat{x}_0 биссектрисы находится на луче $\Lambda_- = \{l: l = y_0 + \lambda(c(t_0 - 0) - y_0), \lambda \in [0, +\infty)\}$, то справедливы равенства

$$\forall \varepsilon^* > 0: |k(t_0 - 0)| = \sup\{|k(t_0 - \varepsilon)|: \varepsilon \in (0, \varepsilon^*)\}, \quad (3.14)$$

$$\hat{x}_0 = c(t_0 - 0), \quad (3.15)$$

и для параметров $t_1 < t_0 < t_2$, где $t_1 = t_1(t_2)$, задающих координаты проекций $y(t_1), y(t_2)$ точек $x \in L(M)$ биссектрисы, лежащих в окрестности \hat{x}_0 , выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = 0. \quad (3.16)$$

Доказательство следствия 3.1 вытекает из доказательства теоремы 3.1, если в нем выбрать систему координат так, чтобы положительное направление оси ординат совпадало с лучом Λ_- .

Подчеркнем, что нахождение связи между проекциями на M точек сингулярного множества $L(M)$, которая в приведенных выше утверждениях формализуется в виде дифференциальных зависимостей $t_2 = t_2(t_1)$ или $t_1 = t_1(t_2)$, представляет собой самостоятельную задачу. Эта задача лишь в частных ситуациях решается в явном аналитическом виде, в общем же случае ее решение строится с помощью численных процедур. При этом один из классов функций, в котором удается найти решение такой задачи, представляет собой класс локальных диффеоморфизмов, наделенных специальными свойствами (см. подробнее в [15]).

О п р е д е л е н и е 3.1. Скалярный локальный диффеоморфизм непрерывен слева в точке $t_1 = t_0 \in \mathbb{R}$ и отображает левую полуокрестность этой точки в ее правую полуокрестность, если выполняются следующие условия:

$$(A1) \ t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2) \ \delta_1 > 0, \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \ \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, удовлетворяющий набору условий (A1), (A2), определяет псевдовершину $y_0 = y(t_0)$, $t_0 \in \Xi$, кривой Γ , если $t_2 = t_2(t_1)$ является решением уравнения типа уравнения гармонической пропорции с двухпараметрическими коэффициентами [16]. В случае когда кривая (1.1) является графиком скалярной функции, т. е. $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2: y = y(t) = (t, f(t))\}$ (для простоты ограничимся рассмотрением этого частного случая), указанное уравнение редуцируется к более простому уравнению (см. формулу (4.7) из [16]):

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2) + f'(t_1)} = 0. \quad (3.17)$$

Здесь, как и выше, $s(t) = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$ — длина касательного вектора. В рассматриваемом классе функций односторонняя производная $t'_2(t_0 - 0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1)$ называется маркером псевдовершины $y_0 \in \Gamma$ [17].

Теорема 3.2. Пусть $y_0 = y(t_0)$ — псевдовершина кривой $\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^2: y = y(t) = (t, f(t)), t \in \Xi\}$, определяемая локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, который удовлетворяет набору условий (A1), (A2). При этом маркер псевдовершины

$$t_2'(t_0 - 0) = 0, \quad (3.18)$$

а односторонние производные $f''(t_0 - 0)$, $f''(t_0 + 0)$ конечны.

Тогда

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} \right)' = \frac{f''(t_0 - 0)}{2}, \text{ если } f'(t_0) \neq 0, \quad (3.19)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} (t_1 - t_0)^{-1} = \frac{f''(t_0 - 0)}{2}, \text{ если } f'(t_0) = 0, f''(t_0 - 0) \neq 0. \quad (3.20)$$

Доказательство. Диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$ является решением уравнения (3.17) в левой окрестности точки $t_1 = t_0$, т.е. для всех $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, выполняется равенство

$$\frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} = \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1)))}{f'(t_2(t_1)) + f'(t_1)}. \quad (3.21)$$

Изучим проблему существования пределов при $t_1 \rightarrow t_0 - 0$ для дробей, стоящих в (3.21), разграничив при рассмотрении стационарный и нестационарный случай.

Начнем с рассмотрения более простого нестационарного случая, когда $f'(t_0) \neq 0$. Продифференцируем правую часть тождества (3.21):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1)))}{f'(t_2(t_1)) + f'(t_1)} \right)' = \\ &= \frac{(f''(t_1)f'(t_2(t_1)) + f'(t_1)f''(t_2(t_1))t_2' + s'(t_1)s(t_2(t_1)) + s(t_1)s'(t_2(t_1))t_2')}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} - \\ & - \frac{(-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))))(f''(t_2(t_1))t_2' + f''(t_1))}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} = \\ &= \left[\frac{f'(t_1)f''(t_2(t_1)) + s(t_1)s'(t_2(t_1))}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} - \frac{(-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))))f''(t_2(t_1))}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} \right] t_2' + \\ & + \frac{f''(t_1)f'(t_2(t_1)) + s'(t_1)s(t_2(t_1))}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} - \frac{(-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))))f''(t_1)}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2}. \end{aligned}$$

В силу (3.18) и ограниченности односторонних производных второго порядка предел первого слагаемого при $t_1 \rightarrow t_0 - 0$ равен нулю. Тогда вычисление предела производной сводится к вычислению предела «свободного члена»:

$$\begin{aligned} & \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1)))}{f'(t_2(t_1)) + f'(t_1)} \right)' = \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{f''(t_1)f'(t_2(t_1)) + s'(t_1)s(t_2(t_1))}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} - \right. \\ & \left. - \frac{(-1 + f'(t_1)f'(t_2(t_1)) + s(t_1)s(t_2(t_1))))f''(t_1)}{(f'(t_2(t_1)) + f'(t_1))^2} \right) = \\ &= \frac{f''(t_0 - 0)f'(t_0) + s'(t_0)s(t_0)}{2f'(t_0)} - \frac{-1 + (f'(t_0))^2 + (s(t_0))^2}{(2f'(t_0))^2} f''(t_0 - 0) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2f''(t_0 - 0)}{2f'(t_0)} - \frac{2(f'(t_0))^2}{(2f'(t_0))^2} f''(t_0 - 0) = f''(t_0 - 0) - \frac{f''(t_0 - 0)}{2} = \frac{f''(t_0 - 0)}{2}.$$

Стало быть, равенство (3.19) выполняется.

Обратимся к стационарному случаю, когда $f'(t_0) = 0$. Этот случай исследуем, построив аппроксимацию тождества (3.21) вдоль функции $t_2(t_1)$, используя технику струй (см., например, [15]). Для краткости дальнейшего изложения примем следующие обозначения:

$$\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0, \quad \Delta_2 = \Delta_2(t_1) = t_2(t_1) - t_0 > 0, \quad \text{здесь } t_1 < t_0 < t_2,$$

$$f''_- = f''(t_0 - 0), \quad f''_+ = f''(t_0 + 0), \quad s'_- = \frac{f'(t_0)f''(t_0 - 0)}{s(t_0)}, \quad s'_+ = \frac{f'(t_0)f''(t_0 + 0)}{s(t_0)}.$$

В принятых обозначениях маркер $t'_2(t_0 - 0) = \lim_{\Delta_1 \downarrow 0} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. Из условия (3.18) следует, что $\Delta_2 = o(\Delta_1)$, $\Delta_1 \downarrow 0$. Поэтому в разложениях k -го порядка по Δ_1 членами Δ_2^k и выше по порядку можно пренебречь.

Применив формулу Тейлора в окрестностях точек $t_1 = t_0$ и $t_2 = t_0$, при этом опустив обозначения аргументов в точках разложения и допустимо пренебрегая членами более высокого порядка малости по отношению к Δ_1 , построим аппроксимацию левой дроби в (3.21) до членов второго порядка включительно в числителе:

$$\begin{aligned} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} &= \frac{f + \Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f'' - f + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f'' + o(\Delta_1^2)}{\Delta_2 + \Delta_1} = \\ &= \frac{\Delta_2 f' + \frac{\Delta_2^2}{2} f'' + \Delta_1 f' - \frac{\Delta_1^2}{2} f'' + o(\Delta_1^2)}{\Delta_2 + \Delta_1} = \\ &= f' + \frac{\frac{\Delta_2^2}{2} f'' - \frac{\Delta_1^2}{2} f'' + o(\Delta_1^2)}{\Delta_2 + \Delta_1} = f' + \frac{-\frac{\Delta_1^2}{2} f'' + o(\Delta_1^2)}{o(\Delta_1) + \Delta_1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее разложим правую дробь в (3.21) по формуле Тейлора до членов первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{-1 + f'(t_1)f'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{f'(t_2(t_1)) + f'(t_1)} &= \frac{-1 + (f' - f''_- \Delta_1)(f' + f''_+ \Delta_2) + (s - s'_- \Delta_1)(s + s'_+ \Delta_2) + o(\Delta_1)}{f' + f''_+ \Delta_2 + f' - f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)} = \\ &= \frac{1 + (f')^2 + f' f''_+ \Delta_2 - f' f''_- \Delta_1 + s^2 + s s'_+ \Delta_2 - s s'_- \Delta_1 + o(\Delta_1)}{2f' + f''_+ \Delta_2 - f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)} = \\ &= \frac{2(f')^2 + f' f''_+ \Delta_2 - f' f''_- \Delta_1 + f' f''_+ \Delta_2 - f' f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)}{2f' + f''_+ \Delta_2 - f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)} = \\ &= \frac{2(f')^2 + 2f' f''_+ \Delta_2 - 2f' f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)}{2f' + f''_+ \Delta_2 - f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)} = \frac{2(f')^2 - 2f' f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)}{2f' - f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

При выводе (3.23) использованы равенства $ss'_- = f' f''_-$, $ss'_+ = f' f''_+$, $s^2 = 1 + (f')^2$.

Поскольку $f'(t_0) = 0$, то с учетом разложений (3.22) и (3.23) тождество (3.20) принимает вид

$$\frac{-\frac{\Delta_1^2}{2} f''_- + o(\Delta_1^2)}{\Delta_2 + \Delta_1} = \frac{o(\Delta_1)}{-f''_- \Delta_1 + o(\Delta_1)},$$

а после алгебраических преобразований

$$\frac{-\frac{\Delta_1}{2} f''_- + o(\Delta_1)}{\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + 1} = \frac{\frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}{-f''_- + \frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}},$$

$$-\Delta_1 \frac{\frac{f''}{2} + \frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}{\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + 1} = \frac{\frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}{-f'' + \frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}},$$

т. е.

$$(t_1 - t_0) \frac{\frac{f''}{2} + \frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}{\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + 1} = \frac{\frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}{-f'' + \frac{o(\Delta_1)}{\Delta_1}}, \quad t_1 \rightarrow t_0 - 0.$$

Полученное аппроксимационное разложение указывает на эквивалентность левой дроби из (3.20) и линейной функции $q(t_1) = (t_1 - t_0) \frac{f''}{2}$ в левой полуокрестности точки $t_1 = t_0$, когда $f''(t_0) \neq 0$:

$$\frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} \sim (t_1 - t_0) \frac{f''}{2}.$$

Поэтому $\frac{1}{2}f''(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} (t_1 - t_0)^{-1}$. Равенство (3.20) обосновано. Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е 1. Формулы (3.19) и (3.20) получены в виде предельных соотношений, что создает хорошую основу для итерационных процедур численного построения односторонней производной второго порядка и, как следствие, для вычисления аппроксимации односторонней кривизны кривой.

На базе приведенных выше теорем можно предложить алгоритм вычисления координат пар точек, являющихся проекциями одной точки биссектрисы. В работе [16] выведены дифференциальные соотношения для параметров t_1 и t_2 таких, что $y(t_1), y(t_2) \in \Omega_M(x)$, $x \in L(M)$.

Если для некоторой псевдовершины $y_0 = y(t_0)$ и крайней точки биссектрисы \hat{x}_0 выполняются условия теоремы 3.1, то координаты проекций точек, лежащих на гладком участке, начинающемся в \hat{x}_0 , находятся как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dt_1}{dt_2} = g(t_1, t_2), \\ t_2(t_0) = t_0, \end{cases} \quad (3.24)$$

где

$$g(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{k(t_2)r(t_1, t_2) - \text{sign } k(t_0 + 0)}{k(t_1)r(t_1, t_2) - \text{sign } k(t_0 + 0)} \cdot \frac{\|y'(t_2)\|}{\|y'(t_1)\|}, & t_1 < t_0 < t_2, \\ 0, & t_1 = t_2 = t_0. \end{cases}$$

$r(t_1, t_2)$ — расстояние от точки x пересечения нормалей к кривой (1.1) до точки $y(t_1)$ или $y(t_2)$ (в случае если $y(t_1), y(t_2) \in \Omega_M(x)$, по определению 2.1 выполняется $\|x - y(t_1)\| = \|x - y(t_2)\|$). Если же для некоторой псевдовершины $y_0 = y(t_0)$ и крайней точки биссектрисы \hat{x}_0 выполняются условия следствия 3.1, то координаты проекций точек, лежащих на гладком участке, начинающемся в \hat{x}_0 , находятся как решение аналогичной задачи Коши, но уже для производной t_2 по t_1 :

$$\begin{cases} \frac{dt_2}{dt_1} = \bar{g}(t_1, t_2), \\ t_2(t_0) = t_0, \end{cases} \quad (3.25)$$

где

$$\bar{g}(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{k(t_1)r(t_1, t_2) - \text{sign } k(t_0 - 0)}{k(t_2)r(t_1, t_2) - \text{sign } k(t_0 - 0)} \cdot \frac{\|y'(t_1)\|}{\|y'(t_2)\|}, & t_1 < t_0 < t_2, \\ 0, & t_1 = t_2 = t_0. \end{cases}$$

Заметим, что могут существовать две крайние точки биссектрисы, порожденные одной псевдовершиной, но находящиеся по разные стороны от нее на нормали к Γ . При этом

знание предельных значений кривизны в псевдовершине позволяет записывать дифференциальные уравнения, инвариантные относительно выбора ориентации кривой Γ (в каком направлении считать кривизну отрицательной, а в каком положительной).

Еще одним важным вопросом служит нахождение условий гладкости биссектрисы. В общем случае она может содержать особые точки, например точки ветвления [6].

Т е о р е м а 3.3. Пусть для некоторой точки $\mathbf{x}^* \in L(M)$ биссектрисы $L(M)$ выполняется $\text{card } \Omega_M(\mathbf{x}^*) = 2$. Тогда к кривой $L(M)$ в точке \mathbf{x} определена касательная

$$\Theta = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2: \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}_2\|\}, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}^*)$, совпадающая со срединным перпендикуляром к отрезку $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что точка $\mathbf{x}^* \in L(M)$, у которой множество $\Omega_M(\mathbf{x}^*)$ состоит из конечного числа элементов, не может быть точкой прекращения изолированной точкой биссектрисы (подробнее см. в [6]). Значит, в некоторой окрестности $O(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ есть еще точки $L(M)$.

На языке пределов существование касательной, описываемой формулой (3.26), означает следующее утверждение. Пусть задана последовательность $\{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset L(M) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$. Если выполняется

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^*, \quad (3.27)$$

то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|}, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \right\rangle = 0. \quad (3.28)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов.

В силу полунепрерывности сверху отображения $\mathbf{x} \mapsto \Omega_M(\mathbf{x})$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что все точки $L(M) \cap O(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ имеют ровно две проекции на множество M , одна из которых лежит в $O(\mathbf{y}_1, \varepsilon)$, а другая — в $O(\mathbf{y}_2, \varepsilon)$. Полагаем, что $\varepsilon < \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\|/2$, а значит, $O(\mathbf{y}_1, \varepsilon) \cap O(\mathbf{y}_2, \varepsilon) = \emptyset$. Тогда для точек $\mathbf{x} \in L(M) \cap O(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ выполняется

$$\rho(\mathbf{x}, M_1) = \rho(\mathbf{x}, M_2), \quad (3.29)$$

где мы обозначили $M_1 = M \cap O(\mathbf{y}_1, \varepsilon)$, $M_2 = M \cap O(\mathbf{y}_2, \varepsilon)$.

Из дифференциальных свойств функции $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ евклидова расстояния до множества известно, что если у точки $\mathbf{x} \notin M$ есть ровно одна проекция \mathbf{m} на множество M , то определен градиент

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{m} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{m} - \mathbf{x}\|}$$

(подробнее см. в [18, гл. II, § 8]). Поэтому если мы обозначим $u_i(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M_i)$, $i = 1, 2$, то можно записать:

$$\nabla u_i(\mathbf{x}^*) = \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{x}^*}{\|\mathbf{y}_i - \mathbf{x}^*\|}, \quad i = 1, 2. \quad (3.30)$$

Допустим, для некоторой последовательности $\{\mathbf{x}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} \subset L(M) \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ справедлив предел (3.27) и не выполняется (3.28). Рассмотрим последовательность $\left\{ \frac{\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*}{\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|} \right\}_{i=1}^{\infty}$. Все ее члены равны по норме 1. Значит, среди нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к вектору $\mathbf{v}^* \in \partial O(\mathbf{0}, 1)$, такому, что

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \rangle \neq 0. \quad (3.31)$$

Полагаем, без ограничения общности, что вся данная последовательность сходится к \mathbf{x}^* , а значит, можно записать представление

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^* + \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| \mathbf{v}^* + o(\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|), \quad (3.32)$$

где $o(t)$ — вектор-функция такая, что $\lim_{t \rightarrow 0} \|o(t)\| t^{-1} = 0$. При этом правая часть неравенства (3.31) больше, чем левая часть. Тогда справедливо

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_2 \rangle > \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_1 \rangle,$$

следовательно,

$$\langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_2 - \mathbf{x}^* \rangle > \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_1 - \mathbf{x}^* \rangle.$$

Значит, для производных функций $u_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, по направлению \mathbf{v}^* выполняется по формуле (3.30):

$$\left. \frac{du_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \langle \nabla u_2(\mathbf{x}^*), \mathbf{v}^* \rangle > \left. \frac{du_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \langle \nabla u_1(\mathbf{x}^*), \mathbf{v}^* \rangle.$$

Вообще, производная функции $f(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}^* по направлению $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ равна

$$\left. \frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{f(\mathbf{x}^* + \varepsilon \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}^*)}{\varepsilon}.$$

По формуле Тейлора запишем, отталкиваясь от представления (3.32):

$$u_1(\mathbf{x}^{(i)}) = \rho(\mathbf{x}^*, M) + \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| \left. \frac{du_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} + o(\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|), \quad (3.33)$$

$$u_2(\mathbf{x}^{(i)}) = \rho(\mathbf{x}^*, M) + \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| \left. \frac{du_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} + o(\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|). \quad (3.34)$$

Вычитая (3.33) из (3.34), имеем

$$u_2(\mathbf{x}^{(i)}) - u_1(\mathbf{x}^{(i)}) = \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| v^* + o(\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\|),$$

где

$$v^* = \left. \frac{du_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} - \left. \frac{du_1(\mathbf{x})}{d\mathbf{v}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \langle \mathbf{v}^*, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1 \rangle > 0.$$

Исходя из свойств бесконечно малой функции, можно указать такое $t^* > 0$, что $o(t) < v^* t / 2$ $\forall t \in (0, t^*)$. Предел (3.27) гарантирует, что есть такое число $i^* \in \mathbb{N}$, что $\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| < t^*$ $\forall i > i^*$. Значит,

$$\forall i > i^* \quad u_2(\mathbf{x}^{(i)}) - u_1(\mathbf{x}^{(i)}) > \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| v^* - \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| v^* / 2 = \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^*\| v^* / 2.$$

Данное неравенство противоречит условию (3.29) на точки биссектрисы, лежащие в $O(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$. Получилось противоречие. Значит, из (3.27) вытекает (3.28).

З а м е ч а н и е 2. Теорема 3.3 усиливает результат работы [19], в которой доказано существование касательной к $L(M)$ в точках \mathbf{x}^* в предположении, что выполняется условие $\mathbf{x}^* \neq (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}^*)$.

§4. Численное моделирование

В рамках статьи изучен случай целевого множества M , у которого есть псевдовершина y_0 , порождающая сразу две крайние точки биссектрисы. Естественно, это возможно только в том случае, когда M совпадает с кривой Γ , и в y_0 определены два вектора внешней нормали, направленные в противоположные стороны. Данная особенность целевого множества потребовала существенной модернизации разработанного ранее программного комплекса [20]. Его основу составили процедуры построения параллелей кривой (1.1), расположенных по разные стороны от нее [21].

Пример 4.1. Рассматривается задача быстродействия с динамикой (1.2), в которой целевое множество M есть график функции

$$y(x) = \begin{cases} -2x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Требуется установить характер псевдовершины множества, построить функцию оптимального результата в виде карты линий уровня на плоскости и графика. Для этого надо выделить рассеивающую кривую.

Если в качестве параметра, задающего координаты точки на кривой, взять ее абсциссу x , то кривизна (2.2) принимает вид

$$k(x) = \begin{cases} -\frac{4}{(1+16x^2)^{3/2}}, & x < 0 \\ \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}, & x > 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Анализ графика функции (4.1) показывает, что на нем содержится одна псевдовершина $y_0 = (0, 0)$ — точка, в которой определены односторонние пределы кривизны:

$$k(+0) = 2,$$

$$k(-0) = -4.$$

Разрывный график зависимости (4.2) кривизны $k(x)$ кривой Γ от абсцисс x текущей точки приведен на рис. 1. Кривизна $k(x)$ в левой полуокрестности точки $x_0 = 0$ отрицательная и убывает, как следует из (3.14), а в правой полуокрестности $k(x)$ — положительная и тоже убывает, как следует из (3.1).

Рассеивающая кривая $L(M)$ состоит из двух ветвей L_1 и L_2 , крайними точками которых являются соответственно $\hat{x}_1 = (0, 0.5)$ и $\hat{x}_2 = (0, 0.25)$. При этом для псевдовершины y_0 и крайней точки \hat{x}_1 выполняются условия теоремы 3.1. Значит, согласно (3.2) выполняется $\hat{x}_1 = c(+0)$, а согласно (3.15) — $\hat{x}_2 = c(-0)$.

Начинающаяся с \hat{x}_1 ветвь L_1 рассеивающей кривой построена в виде решения задачи Коши (3.24) с начальным условием $x_1(0) = 0$. А для той же псевдовершины и другой крайней точки \hat{x}_2 выполняются условия следствия 3.1. Вторая ветвь L_2 , начинающаяся с \hat{x}_2 , построена в виде решения задачи Коши (3.25) с начальным условием $x_2(0) = 0$. Графики зависимостей $x_1 = x_1(x_2)$ для абсцисс $\{x_1, x_2\}$ пар точек, в которые приходят оптимальные траектории от одной точки из ветви L_1 , и зависимостей $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\bar{x}_1)$ для абсцисс $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ пар точек, в которые приходят оптимальные траектории от одной точки из ветви L_2 , найдены с помощью численных процедур и показаны на рис. 2. При этом согласно (3.3) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{x_2 \rightarrow +0} \frac{x_1}{x_2} = 0,$$

а согласно (3.16) —

$$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow -0} \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = 0.$$

Данные пределы определяют углы, под которыми графики зависимостей $x_1 = x_1(x_2)$ и $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\bar{x}_1)$ стягиваются в точку $(x_0, x_0) = (0, 0)$.

Кривая Γ , линии Φ уровня функции оптимального результата $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ с шагом $h_\rho = 0.4$ и рассеивающая кривая $L(M)$ представлены на рис. 3. Две ветви L_1 и L_2 находятся по разные стороны от Γ , но их крайние точки лежат на нормали к Γ в псевдовершине $(0, 0)$. Обе ветви являются гладкими кривыми. Касательная к каждой из них во всех точках $x \in L(M)$ совпадает с биссектрисой угла, образованного касательными к Φ с обеих сторон от x . Касательная к линии уровня функции $\rho(x, M)$ в точках $x \notin L(M)$ перпендикулярна к отрезку $[x, y]$, $\{y\} = \Omega_M(x)$, что соответствует теореме 3.3. Аппроксимация графика $g\Gamma u(x, y)$ функции $u(x, y)$ на прямоугольной с величиной ячеек 0.1×0.1 приведена на рис. 4. Здесь график теряет гладкость, когда точки (x, y) принадлежат биссектрисе $L(M)$ или кривой Γ . Это обусловлено тем, что поверхность $g\Gamma u(x, y)$ состоит из отрезков лучей, которые идут под углом $\pi/4$ к плоскости xOy . Они идут от точек кривой (в трехмерном пространстве) $\widehat{\Gamma} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma\}$, перпендикулярно касательным к ней, до множества $\widehat{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in L(M), z = \rho((x, y), M)\}$. В общем случае могут существовать в $g\Gamma u(x, y)$ и неограниченные лучи, начинающиеся на $\widehat{\Gamma}$. С точки зрения обобщенного (минимаксного) решения задачи (1.3), (1.4) эти отрезки являются так называемыми характеристиками уравнения Гамильтона–Якоби, а множество \widehat{L} — сингулярностью, обусловленной прохождением через ее точки более одной характеристики (см. [1]).

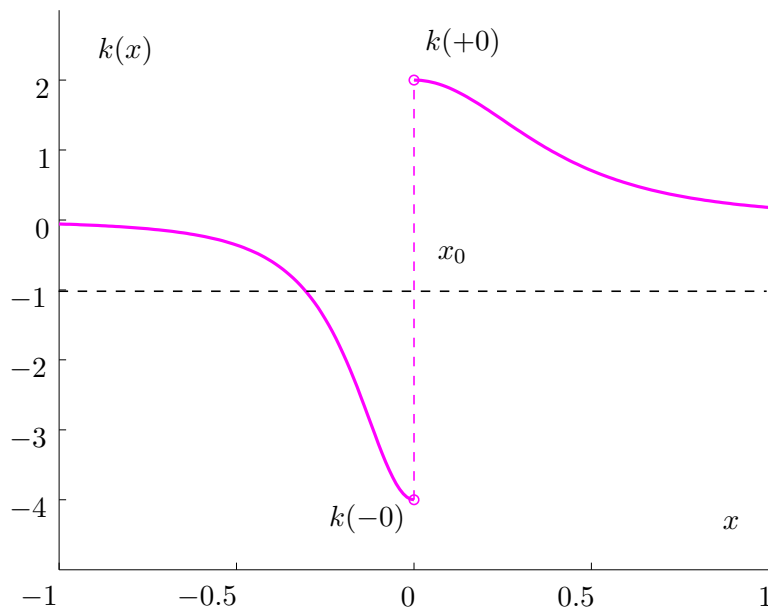


Рис. 1. График кривизны $k(x)$ кривой (4.1) в окрестности псевдовершины в примере 4.1

В заключение покажем выполнение формул теоремы 3.2. Для функции $y(x) = -2x^2$ находимся в стационарной ситуации, здесь $y'(x_0) = 0$ в точке $x_0 = 0$. Выберем в качестве локального диффеоморфизма $x_2(x_1) = x_1^2$, где $x_1 \in (x_0 - \delta_1, x_0) = (-\delta_1, 0)$, $\delta_1 > 0$. Не трудно убедиться, что $x_2'(x_1) = 2x_1 < 0$ для $x_1 \in (-\delta_1, 0)$, причем $\lim_{x_1 \rightarrow -0} x_2'(x_1) = 0$. Таким

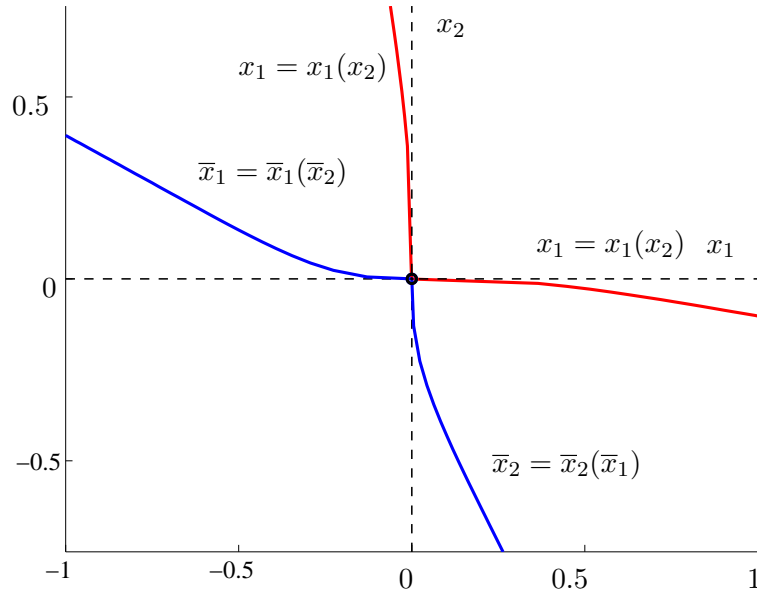


Рис. 2. Непрерывная склейка графиков абсцисс $x_1 = x_1(x_2)$, $x_2 = x_2(x_1)$ и $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(\bar{x}_2)$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(\bar{x}_1)$ проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины $(x_0, y(x_0)) = (0, 0)$ в примере 4.1.

образом, выполняются условия теоремы 3.2. Вычислим предел:

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{y(x_2(x_1)) - y(x_1)}{x_2(x_1) - x_1} (x_1 - x_0)^{-1} &= \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{-2x_1^4 + 2x_1^2}{(x_1^2 - x_1)x_1^2} = \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{2(1 - x_1^2)}{x_1 - 1} = \lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{2(1 - x_1)(1 + x_1)}{x_1 - 1} = \lim_{x_1 \rightarrow -0} (-2(1 + x_1)) = -2. \end{aligned}$$

Поскольку $y''(-0) = -4$ и, стало быть, $\frac{1}{2}y''(-0) = -2$, то убеждаемся в справедливости предельного равенства (3.21):

$$\lim_{x_1 \rightarrow -0} \frac{y(x_2(x_1)) - y(x_1)}{x_2(x_1) - x_1} (x_1 - x_0)^{-1} = \frac{y''(x_0 - 0)}{2}.$$

Заключение

Развиты методы исследования одного класса плоских задач управления по быстродействию с целевым невыпуклым множеством, граница которого имеет нарушение гладкости. Разобран случай, когда граница цели имеет точки разрыва кривизны, что обуславливает смену направления выпуклости в окрестностях этих точек. Указанная особенность геометрии целевого множества приводит к возникновению сингулярности решения задачи управления. Функция оптимального результата терпит разрыв на рассеивающих кривых. В работе доказаны теоремы, раскрывающие особенности сингулярного множества и исходящих с него оптимальных траекторий. Предложены конструктивные алгоритмы построения сингулярного множества в виде объединения интегральных кривых. Алгоритмы реализованы в виде вычислительных программ, результат их работы продемонстрирован на примере.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ (теоремы 3.1 и 3.3 доказаны П. Д. Лебедевым при поддержке проекта № 18-01-00221, теорема 3.2 доказана А. А. Успенским при поддержке проекта № 18-01-00264).

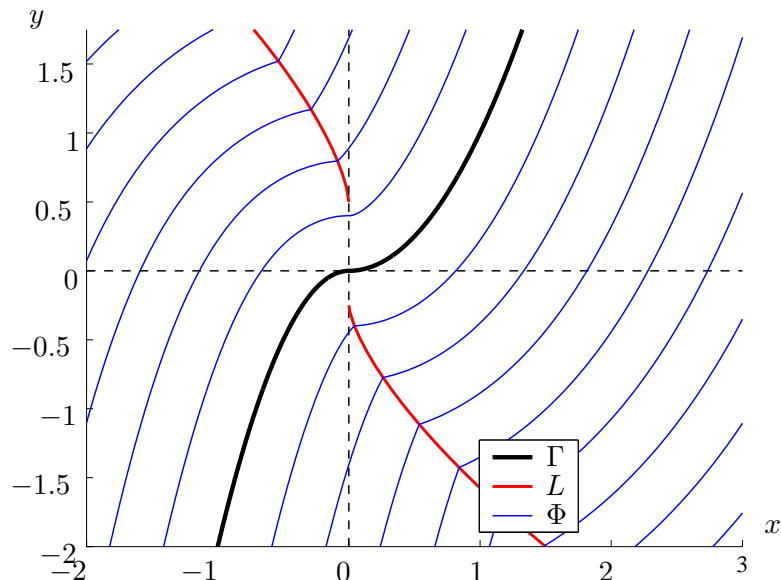


Рис. 3. Кривая Γ , сечения Φ множества управляемости и сингулярное множество L в примере 4.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Лебедев П. Д., Успенский А. А., Ушаков В. Н. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 182–191. <http://mi.mathnet.ru/timm34>
3. Кружков С. Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона–Якоби типа эйконала. I. Постановка задач, теоремы существования, единственности и устойчивости, некоторые свойства решений // Математический сборник. 1975. Т. 98 (140). № 3 (11). С. 450–493.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
5. Камнева Л. В., Пацко В. С. Построение множества разрешимости в дифференциальных играх с простыми движениями и невыпуклым терминальным множеством // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 143–157. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-143-157>
6. Седых В. Д. О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 171–214. <https://doi.org/10.4213/im4572>
7. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.
8. Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009.
9. Siersma D. Properties of conflict sets in the plane // Banach Center Publications. 1999. Vol. 50. P. 267–276. <https://doi.org/10.4064/-50-1-267-276>
10. Giblin P.G. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions // The Mathematics of Surfaces IX. London: Springer, 2000. P. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
11. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 108–119. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>
12. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал УРСС, 2003.

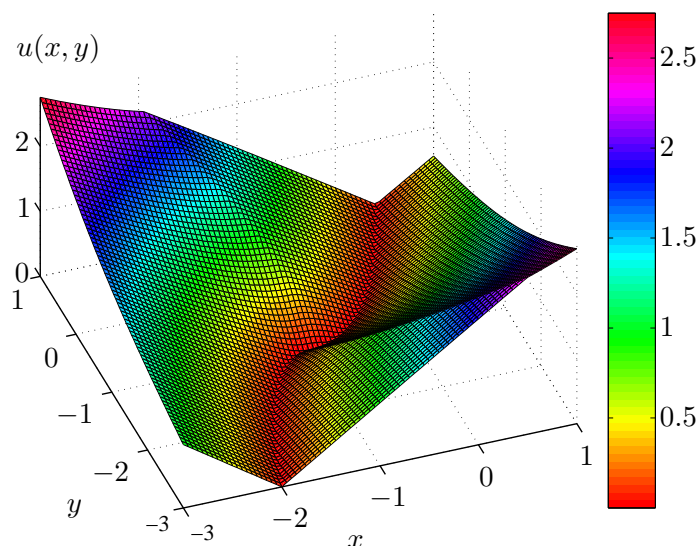


Рис. 4. График функции оптимального результата $u(x, y)$ в примере 4.1

13. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Построение функции оптимального результата в задаче быстродействия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
14. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение решения задачи управления по быстродействию при нарушении гладкости кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 53. С. 98–114. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-09>
15. Успенский А. А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 250–263.
16. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстродействия с невыпуклым целевым множеством // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 188–198. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198>
17. Успенский А. А., Лебедев П. Д. Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vm180106>
18. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
19. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Лебедев П. Д. Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстродействия // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. № 3. С. 157–167.
20. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Программа построения волновых фронтов и функции евклидова расстояния до компактного невыпуклого множества. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017662074 от 27.10.2017.
21. Giblin P. J., Reeve G. Centre symmetry sets of families of plane curves // Demonstratio Mathematica. Vol. 48. Issue 2. P. 167–192. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0016>

Поступила в редакцию 27.02.2020

Лебедев Павел Дмитриевич, к. ф.-м. н., старший научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
старший научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург,

ул. Мира, 19.

E-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;

ведущий научный сотрудник, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19;

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Цитирование: П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Построение рассеивающих кривых в одном классе задач быстрогодействия при скачках кривизны границы целевого множества // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 55. С. 93–112.

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii

Construction of scattering curves in one class of time-optimal control problems with leaps of a target set boundary curvature

Keywords: time-optimal problem, dispersing line, curvature, tangent, Hamilton–Jacobi equation, singular set, pseudo vertex.

MSC2010: 35A18, 35F16, 35D40, 58K70

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-55-07

We consider a time-optimal control problem on the plane with a circular vectogram of velocities and a non-convex target set with a boundary having a finite number of points of discontinuity of curvature. We study the problem of identifying and constructing scattering curves that form a singular set of the optimal result function in the case when the points of discontinuity of curvature have one-sided curvatures of different signs. It is shown that these points belong to pseudo-vertices that are characteristic points of the boundary of the target set, which are responsible for the generation of branches of a singular set. The structure of scattering curves and the optimal trajectories starting from them, which fall in the neighborhood of the pseudo-vertex, is investigated. A characteristic feature of the case under study is revealed, consisting in the fact that one pseudo-vertex can generate two different branches of a singular set. The equation of the tangent to the smoothness points of the scattering curve is derived. A scheme is proposed for constructing a singular set, based on the construction of integral curves for first-order differential equations in normal form, the right-hand sides of which are determined by the geometry of the boundary of the target in neighborhoods of the pseudo-vertices. The results obtained are illustrated by the example of solving the control problem when the target set is a one-dimensional manifold.

Funding. This work was funded by the Russian Foundation for Basic Research (Theorems 3.1 and 3.3 were proved by P. D. Lebedev with the support of the project no. 18–01–00221; Theorem 3.2 was proved by A. A. Uspenskii with the support of the project no. 18–01–00264).

REFERENCES

1. Subbotin A. I. *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Boston: Birkhäuser, 1995. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1>
2. Lebedev P. D., Uspenskii A. A., Ushakov V. N. Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. 191–201. <https://doi.org/10.1134/S0081543808060175>
3. Kruzhkov S. N. Generalized solutions of the Hamilton–Jacobi equations of eikonal type. I. Formulation of the problems; existence, uniqueness and stability theorems; some properties of the solutions, *Mathematics of the USSR–Sbornik*, 1975, vol. 27, no. 3, pp. 406–446. <https://doi.org/10.1070/SM1975v027n03ABEH002522>
4. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
5. Kamneva L. V., Patsko V. S. Construction of the solvability set in differential games with simple motion and nonconvex terminal set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 57–71. <https://doi.org/10.1134/S008154381805005X>
6. Sedykh V. D. On the topology of wave fronts in spaces of low dimension, *Izvestiya: Mathematics*, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 375–418. <https://doi.org/10.1070/IM2012v076n02ABEH002588>
7. Arnold V. I. *Singularities of caustics and wave fronts*, Dordrecht: Springer, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3330-2>
8. Mestetskii L. M. *Nepreryvnaya morfologiya binarnykh izobrazhenii: figury, skelety, tsirkulyary* (Continuous morphology of binary images: Figures, skeletons, circulars), Moscow: Fizmatlit, 2009.
9. Siersma D. Properties of conflict sets in the plane, *Banach Center Publications*, 1999, vol. 50, pp. 267–276. <https://doi.org/10.4064/-50-1-267-276>

10. Giblin P.G. Symmetry sets and medial axes in two and three dimensions, *The Mathematics of Surfaces IX*, London: Springer, 2000, pp. 306–321. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0495-7_18
11. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Construction of a nonsmooth solution in a time-optimal problem with a low order of smoothness of the boundary of the target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 108–119 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-108-119>
12. Rashevskii P. K. *Kurs differentsial'noi geometrii* (A course in differential geometry), Moscow: URSS, 2003.
13. Uspenskii A. A., Lebedev P.D. Construction of the optimal outcome function for a time-optimal problem on the basis of a symmetry set, *Automation and Remote Control*, 2009, vol. 70, issue 7, pp. 1132–1139. <https://doi.org/10.1134/S0005117909070054>
14. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Construction of a solution of a velocity problem in case of violation of the smoothness of the curvature of the target set boarder, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 53, pp. 98–114. <https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-53-09>
15. Uspenskii A. A. Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 250–263 (in Russian).
16. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimal problems with a nonconvex target set, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 188–198 (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198>
17. Uspenskii A. A., Lebedev P.D. Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 59–73. <https://doi.org/10.20537/vm180106>
18. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L. V. *Nondifferentiable optimization*, New York: Springer, 1985.
19. Ushakov V.N., Uspenskii A. A., Lebedev P.D. Geometry of singular curves for one class of velocity, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya*, 2013, issue 3, pp. 157–167 (in Russian).
20. Lebedev P.D., Uspenskii A. A. *Program for constructing wave fronts and functions of the Euclidean distance to a compact nonconvex set*, Certificate of state registration of the computer program no. 2017662074, October 27, 2017.
21. Giblin P.J., Reeve G. Centre symmetry sets of families of plane curves, *Demonstratio Mathematica*, vol. 48, issue 2, pp. 167–192. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0016>

Received 27.02.2020

Lebedev Pavel Dmitrievich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;

Senior Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: pleb@yandex.ru

Uspenskii Aleksandr Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;

Leading Researcher, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.

E-mail: uspen@imm.uran.ru

Citation: P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Construction of scattering curves in one class of time-optimal control problems with leaps of a target set boundary curvature, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 55, pp. 93–112.