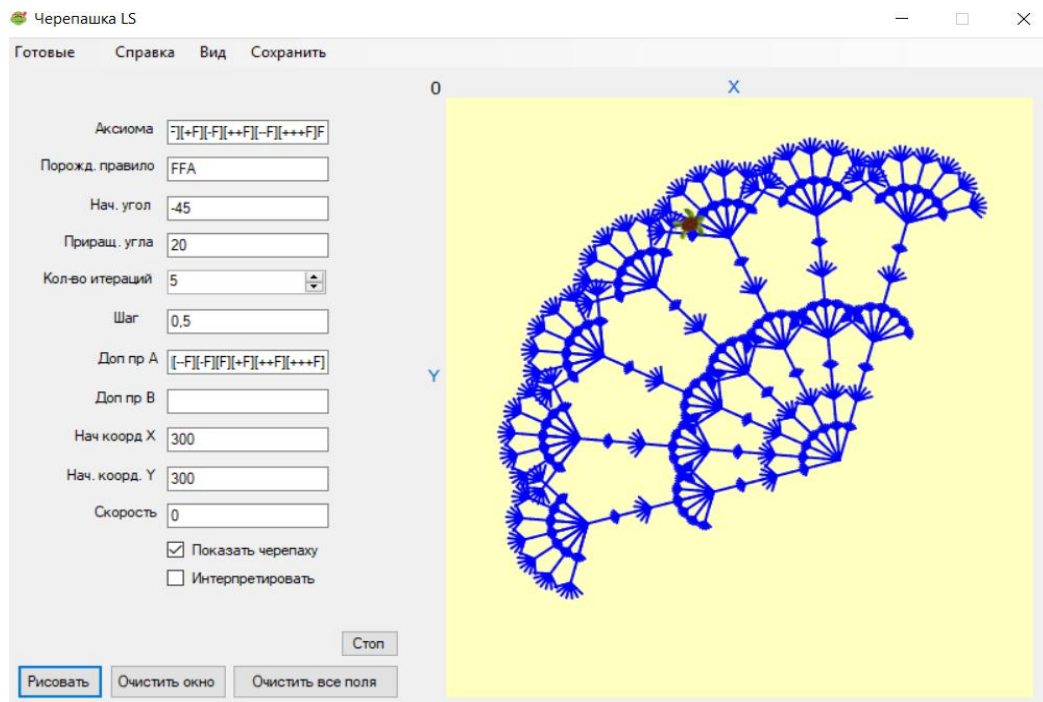


Н. В. Латыпова

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

Н.В. Латыпова

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие



Ижевск

2020

УДК 517.938(075.8)
ББК 22.161.615я73
Л 278

Подготовка и издание учебного пособия выполнены в рамках мероприятий, проводимых в Уральском математическом центре.

Рецензент – А. Я. Нарманов, д.ф.-м.н., профессор кафедры геометрии и топологии Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Н. В. Латыпова, авт.-сост.

Л 278 Фрактальный анализ: учеб. пособие. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. – 120 с.

ISBN 978-5-4312-0810-2

Предлагаемое учебное пособие посвящено обработке и анализу данных с помощью нового современного аппарата – теории фракталов. Пособие включает конспект лекций с основными понятиями курса, алгоритмами и некоторыми приложениями. Для закрепления и лучшего усвоения материала имеются задачи и упражнения, лабораторный практикум, исследовательские и информационные проекты, которые можно использовать как задания для курсовых и выпускных квалификационных работ. Предназначено для студентов института математики, информационных технологий и физики, также будет полезно всем желающим ознакомиться с фрактальным анализом и его применением от старшеклассников до научных сотрудников.

УДК 517.938(075.8)
ББК 22.161.615я73

© Н. В. Латыпова, 2020

© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2020

Содержание

Предисловие	4
Глава 1. Основные понятия теории фракталов	5
1.1. Введение в теорию фракталов.....	5
1.2. Конструктивные фракталы	10
1.3. Системы Линденмайера	19
1.4. Динамические фракталы	24
1.5. Фрактальная размерность	34
1.6. Системы итерируемых функций	45
1.7. Фрактальные кластеры	51
1.8. Понятие о мультифракталах	59
Глава 2. Фрактальные временные ряды	63
2.1. Показатель Хёрста	64
2.2. Индекс фрактальности	71
2.3. Клеточно-автоматная модель для прогнозирования временных рядов	77
Глава 3. Некоторые приложения фрактального анализа	83
3.1. Фрактальные кривые и поверхности	83
3.2. Ранговые распределения	86
3.3. Фрактальная графика и обработка изображений	90
3.4. Фрактальная криптография	93
3.5. Фрактальные сети и лабиринты	96
3.6. Фракталы в технических науках	100
3.7. Фракталы в естествознании и медицине	104
3.8. Фракталы в философских науках	109
Приложения	116

Предисловие

Разобщенность большинства изучаемых в школах и вузах предметов затрудняет формирование у школьников и студентов целостной картины мира и приводит к ограниченному восприятию науки и культуры. Теория фракталов – один из современных разделов математики, формирующий целостную картину мира и имеющий междисциплинарный характер. Сложность окружающей нас природы тесно связана с фрактальной геометрией. Природа – это не ряд повторяющихся закономерностей, она характеризуется локальной случайностью и глобальным порядком. Фрактальная геометрия, с одной стороны, создаёт хорошие условия для приобщения обучающихся к творческой деятельности и способствует расширению их кругозора. А с другой стороны, показывает красоту и практическую значимость математики.

Предлагаемое учебное пособие вводит в мир фрактального анализа. В первой главе описаны основная терминология теории фракталов, их виды и способы построения. Учитывая, что многие изучаемые процессы можно охарактеризовать зависимостью некоторой величины от времени, во второй главе особое внимание уделяется фрактальному анализу временных рядов. Рассматриваются алгоритмы вычисления фрактальной размерности через показатель Хёрста и индекс фрактальности, а также клеточно-автоматная модель для прогноза. В третьей главе представлены некоторые приложения фрактального анализа. Причём стоит отметить, что, как правило, это деление на области применения достаточно условное, так как междисциплинарный характер таких исследований не позволяет их отнести только к одному конкретному разделу науки и техники. Для закрепления и лучшего усвоения материала в каждом параграфе имеются задачи и упражнения, лабораторный практикум, исследовательские и информационные проекты, которые можно использовать как задания для курсовых и выпускных квалификационных работ. Список используемых и рекомендуемых источников приводится так же в конце каждого параграфа.

Основой пособия является авторский курс, читаемый студентам направления «Математика и компьютерные науки» более 10 лет. Кроме того, материал первых трёх параграфов первой главы неоднократно был апробирован на занятиях со школьниками 8-9 классов.

Глава 1. Основные понятия теории фракталов

1.1. Введение в теорию фракталов

Задумайтесь над следующими вопросами и попытайтесь на них ответить: Какие геометрические объекты вы знаете? Можно ли с их помощью описать такие природные объекты, как деревья, облака, горы, молнию? – Поразмышляйте, с чем это связано.

В 1970-х годах французский математик Бенуа Мандельброт открыл новый взгляд на природу и мир в целом. За основу он взял очень простую идею: бесконечное по красоте и разнообразию множество фигур можно получить из простых конструкций при помощи всего двух операций – копирования и масштабирования. Таким странным и повторяющимся формам, маленький кусочек которых выглядит в точности, как объект целиком, Мандельброт в 1975 году дал название – фракталы и стал основоположником нового раздела математики – фрактальной геометрии. Понятия фрактал и фрактальная геометрия с середины 80-х прочно вошли в обиход как математиков и программистов, так и других исследователей. Слово *фрактал* образовано от латинских слов: *fractus* – сломанный, разбитый, дробный и соответствующего глагола *frangere* – ломать, разламывать, то есть создавать фрагменты неправильной формы. Рождение фрактальной геометрии принято связывать с выходом в 1977 году книги Мандельброта Б. «Фрактальная геометрия природы».

Фрактал – структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Это определение содержит существенный отличительный признак – фрактал выглядит одинаково, в каком бы масштабе мы его не наблюдали. Но, располагая только внешним видом, оценка фрактальных свойств затруднена, а в большинстве случаев невозможна.

Основные свойства фрактальных множеств:

1. фрактал имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;
2. фрактал слишком нерегулярное множество, чтобы быть описанным на традиционном геометрическом языке;

3. фрактал имеет форму самоподобия (приближенную или статистическую);
4. фрактальная размерность больше топологической размерности (подробнее см. п. 1.5);
5. в большинстве случаев фрактал определяется очень просто, например, рекурсивно.

Одно из основных свойств, объединяющих все фракталы – это геометрическое повторение самого себя на любом масштабном уровне (самоподобие). Другими словами, самоподобный объект в точности или приближенно совпадает с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей. *Самоподобие* (симметрия) – инвариантность относительно параллельных переносов и скейлинга (изменения масштаба). В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале. Большинство природных объектов демонстрирует самоподобие – главный организующий принцип фракталов. Поэтому фракталы будут напоминать друг друга, независимо от используемой шкалы. Самоподобие может быть:

1. «точным», но только в математических объектах (например, кривая Коха),
2. «качественным», то есть объект или процесс являются подобными в различных масштабах, пространственных или временных, статистически (каждый масштаб напоминает другие масштабы, но не идентичен им).

Строго говоря, во втором случае надо говорить о фракталоподобных структурах.

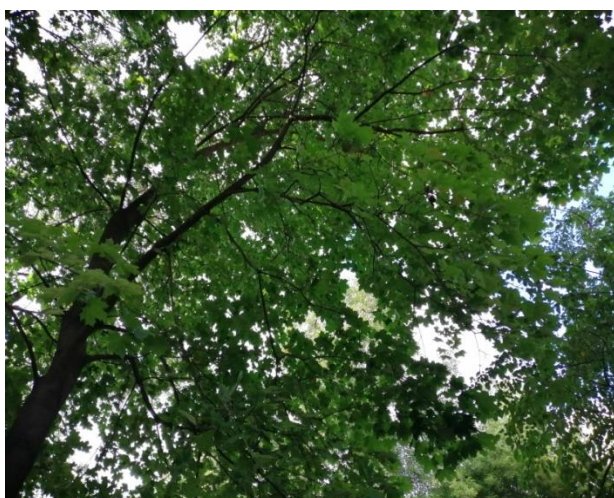


Рис. 1. Самоподобие в природе.

От ветки, как и от ствола дерева, отходят отростки поменьше, от них — еще меньшие, и т.д., то есть ветка подобна всему дереву.

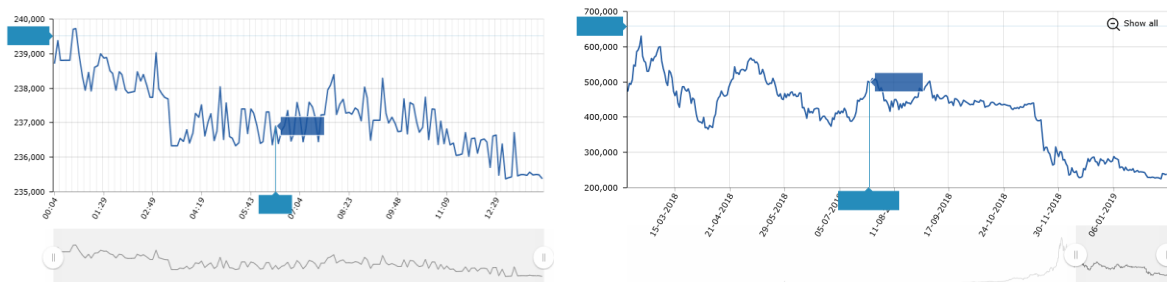


Рис. 2. Пример «качественного» самоподобия – графики курса биткоина по минутам в течение суток и за год соответственно.

Фракталы делятся на два больших класса: *конструктивные* и *динамические*. С другой стороны, фракталы по способу построения (задания) подразделяются на следующие группы.

1. Геометрические (конструктивные).

Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений: берется набор отрезков, на основании которых будет строиться фрактал, затем к этому набору применяется набор правил, который преобразует его в какую-нибудь геометрическую фигуру. Далее к каждой части этой фигуры применяется тот же набор правил, и, произведя бесконечное число таких преобразований (по крайней мере, мысленно), получим геометрический фрактал. Примерами могут служить снежинка Коха, ковер Серпинского, кривая Пеано и т.д.

2. Алгебраические.

Эти фракталы строятся с помощью алгебраических формул, иногда весьма простых. Один из методов построения представляет собой итерационный процесс $z_{n+1} = f(z_n)$, где z – некоторое комплексное число, а $f(z)$ – нелинейная функция. Расчет функции продолжается до выполнения определенного условия. В качестве примеров можно рассмотреть множество Мандельброта, фракталы Ньютона и Жюлиа.

3. Системы итерируемых функций (СИФ).

Данное средство получения фрактальных структур стало широко известно благодаря М. Барнсли (M. Barnsley). Система итерируемых функций представляет собой совокупность сжимающих отображений вместе с итерационной схемой, заданной с помощью преобразования Хатчинсона. Результат применения системы итерируемых функций называется

аттрактором, причем аттрактор часто оказывается фрактальным множеством. Наиболее простая СИФ состоит из аффинных преобразований на плоскости. Теория итерируемых функций служит составной частью теории динамических систем. Системы итерируемых функций применяются в основном для кодирования изображений. Лист папоротника – пример построения фрактала с помощью СИФ (рис. 3а).

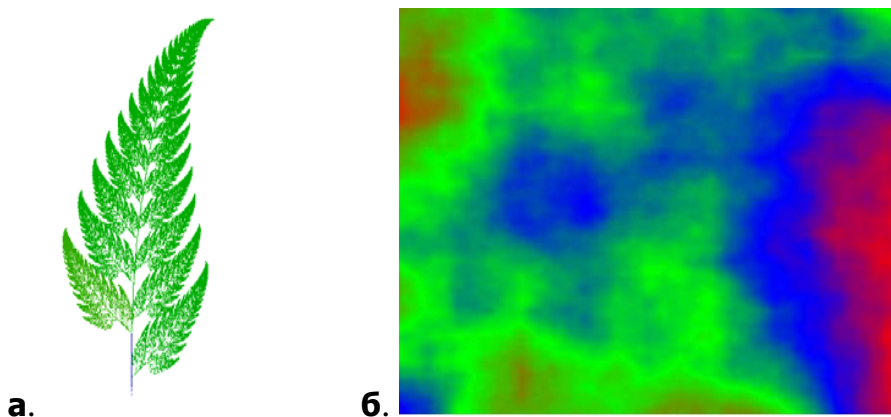


Рис. 3. а) Лист папоротника; **б)** Фрактал «Плазма»

4. Стохастические (случайные) фракталы.

Здесь в исследованиях встречается два подхода. Первый подход – для построения фракталов вносятся случайные возмущения. Берется, например, прямоугольник и для каждого его угла определяется цвет. Далее находится центральная точка прямоугольника и раскрашивается в цвет, равный среднему арифметическому цветов по углам прямоугольника, плюс некоторое случайное число. Чем оно больше, тем более рваным будет рисунок (см. рис. 3б). С помощью таких фракталов моделируются горы в большинстве программ, созданных для этого. Второй подход не сводится к случайным возмущениям в классических фракталах. Наоборот, считается, что случайный характер заложен в них изначально и связан со случайными процессами, основной моделью которых служит фрактальное броуновское движение [1, с. 270].

5. Фрактальные кластеры.

Кластеры – это скопления близко расположенных, тесно связанных друг с другом частиц любой природы. Используются для описания фрактальных структур, встречающихся как на микрообъектах (атомы, молекулы, ионы и т.п.), так и на системах, состоящих из большого числа связанных макроскопических частиц (скопление галактик). Фрактальный кластер – это фрактал, который получается системой с множеством частиц, движущихся

хаотически по броуновскому закону движения, которые слипаются при соприкосновении с центром агрегации, и образуют разветвлённый кластер. Одним из способов для сборки таких фракталов является модель ограниченной диффузией агрегации (ОДА) или Diffusion Limited Aggregation (DLA-модель).

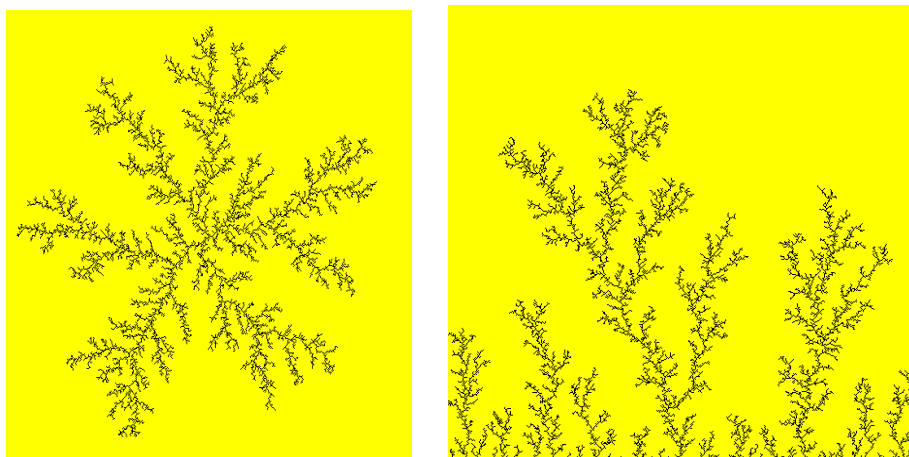


Рис. 4. Примеры построения фрактального кластера с помощью ОДА

Задания 1.

1. Приведите примеры фракталов в окружающем мире: а) в живой природе, б) в неживой природе, в) созданные человеком. Объясните, почему выбранный объект является фракталоподобным.
2. Подберите примеры подобных объектов в окружающем мире. Например, пара кошка – котёнок подобны, а курица – цыплёнок не подобны. Что можно сказать о подобии графиков валют и акций? Приведите примеры.
3. Посмотрите документальный научно-популярный фильм «Фракталы. Поиски новых размерностей / Fractals. Hunting The Hidden Dimension», 2008г. Режиссер: Билл Джерси / Bill Jersey, Майкл Шварц / Michael Schwarz. [2]

Лабораторный практикум №1

1. Реализуйте на компьютере построение фрактала «Плазма».
2. Придумайте и реализуйте построение своего случайного фрактала.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7
2. http://www.decoder.ru/list/all_6/topic_12_2/ (Дата обращения: 20.06.20)

3. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Учеб. пособие. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1999. – 140 с. – ISBN 5-85746-282-7

1.2. Конструктивные фракталы

Конструктивные или геометрические фракталы являются самыми наглядными, в них самоподобие видно сразу. Для построения геометрических фракталов характерно задание "основы" и "фрагмента", повторяющегося при каждом уменьшении масштаба. **Методика:** сначала изображается основа. Затем некоторые части основы заменяются на фрагмент. На каждом следующем этапе части уже построенной фигуры, аналогичные замененным частям основы, вновь заменяются на фрагмент, взятый в подходящем масштабе. Всякий раз масштаб уменьшается. Для получения самого фрактала нужно бесконечное число этапов. Меняя основу и фрагмент, можно получать разные геометрические фракталы. Рассмотрим построение классических фракталов.

Множество Кантора

Берётся отрезок единичной длины. На первом шаге он делится на три равные части, и вынимается средний отрезок. На втором шаге подобной процедуре деления на три равные части и последующего удаления середины подвергается каждый из двух оставшихся отрезков. Продолжая так до бесконечности, получим множество точек, описанное Георгом Кантором в 1883 г. Хотя стоит заметить, что существование этого фрактала отмечалось ещё Генри Смитом в 1875 г. На Западе подобные множества называют иногда пылью Кантора. Множество Кантора хорошо известно из курса функционального анализа как пример множества нулевой меры Лебега, чья мощность равна мощности континуума $[0, 1]$.



Рис. 5. Множество Кантора (6 итераций)

Кривая Коха

Эту кривую построил Хельге фон Кох в 1904г., как пример кривой, которая нигде не имеет касательной, то есть нигде не дифференцируема, хотя всюду непрерывна. Эта кривая самоподобна: каждая ее часть является копией целого. К тому же, каждая часть кривой имеет бесконечную длину. Процесс ее построения выглядит следующим образом: берем единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем серединный интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины $\frac{1}{3}$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев и т.д. Предельная кривая и есть кривая Коха (рис. 6 а).

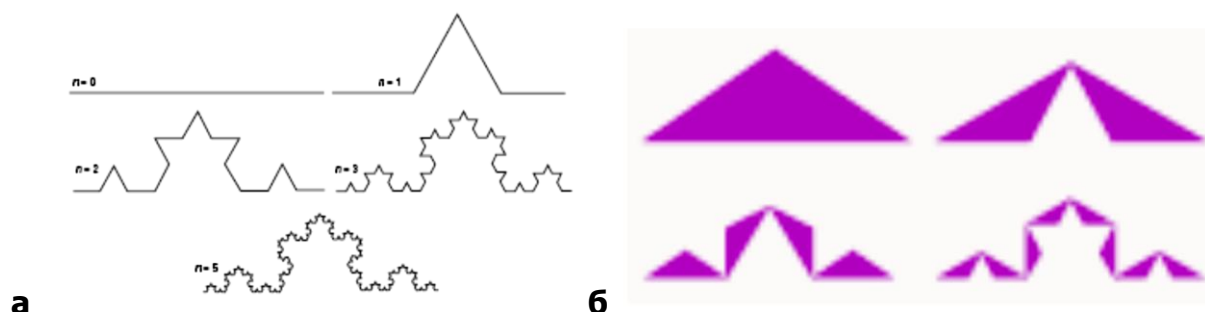


Рис.6. Построение кривой Коха

Другой способ построения кривой Коха начинается с замкнутого равнобедренного треугольника с углами 30° , 120° и 30° . Этот треугольник разбивается на три треугольника: один – правильный, а два других подобны исходному равнобедренному треугольнику. Правильный треугольник удаляется. Третий шаг – повторяем операцию к каждому из оставшихся равнобедренных треугольников. Продолжая процесс, в результате получим убывающую последовательность замкнутых множеств и кривая Коха – это их пересечение (рис. 6 б).

Кривая Коха самоподобна: каждая ее часть является копией целого. Кривая Коха служит основой для получения таких фигур, как острова, кресты и снежинки Коха. Можно получать и трехмерные представления кривой Коха, используя в качестве основы тетраэдр и добавляя меньшие по размерам тетраэдры к каждой его грани.

Ковер Серпинского

Рассмотрим еще один пример простого самоподобного фрактала – ковер, построенный в 1915 г. польским математиком Вацлавом Серпинским. Для

его построения берется квадрат с длиной стороны, равной единице. Затем каждая из сторон квадрата делится на три равные части, а весь квадрат, соответственно, на девять одинаковых квадратов со стороной равной $\frac{1}{3}$. Из полученной фигуры вырезается центральный квадрат. Затем такой же процедуре подвергается каждый из 8 оставшихся квадратов и т.д.; этот процесс продолжается бесконечно. Пересечение полученных на каждом шаге объединений оставшихся квадратов называется ковром Серпинского (рис.7).

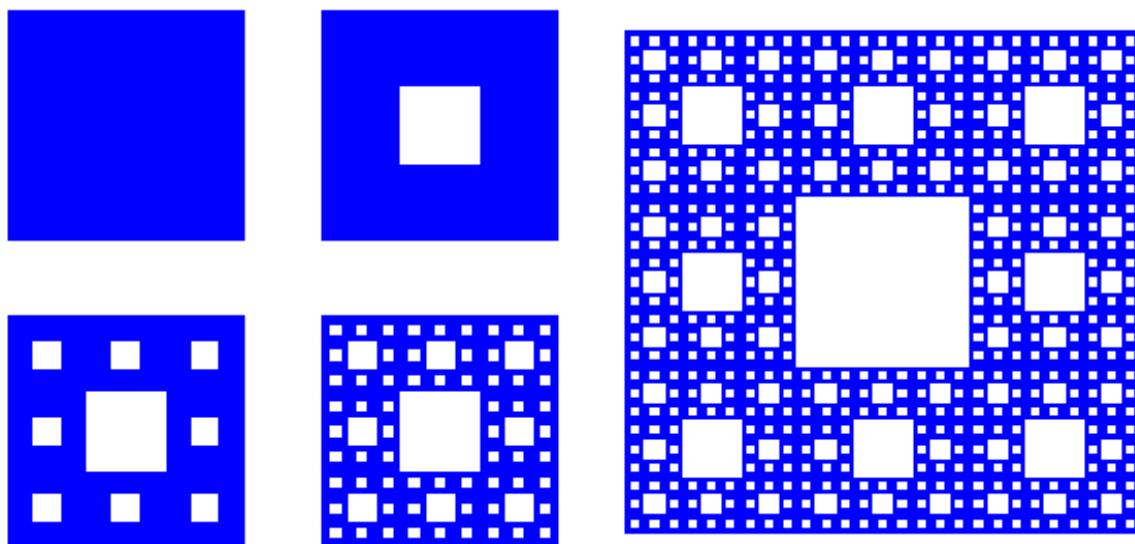


Рис.7. Построение ковра Серпинского (нулевой-четвертый этапы)

Решето (салфетка) Серпинского

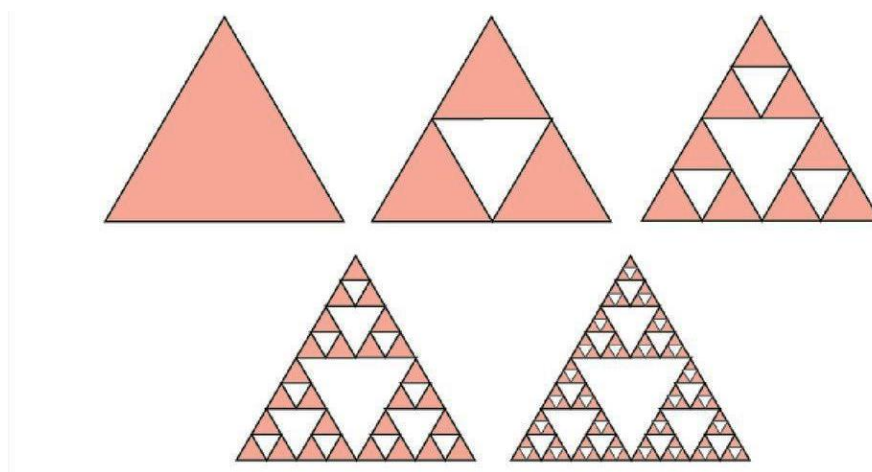


Рис.8. Построение решета Серпинского (0-4 шага)

Аналогичным образом можно построить решето Серпинского, используя вместо квадрата треугольник. Нулевой шаг – за основу берётся равносторонний треугольник. Первый шаг – нужно найти середины каждой

из сторон, соединить их и выкинуть центральный из четырех образовавшихся маленьких треугольников. Второй шаг – действия нужно повторить с каждым из оставшихся трех треугольников при вершинах исходного. Продолжая повторять шаг за шагом данный процесс, в результате остаётся объект, состоящий из одних только дырок (рис.8).

Второй способ получить треугольник Серпинского еще больше похож на обычную схему построения геометрических фракталов с помощью замены частей очередного шага на масштабированный фрагмент. Здесь на каждом шаге отрезки заменяются на ломаную из трех звеньев (полученную на первом шаге). Откладывать эту ломаную нужно попеременно то вправо, то влево. Видно, что уже на восьмом шаге кривая очень близка к фракталу, и чем дальше, тем ближе будет подбираться к нему линия (рис. 9).

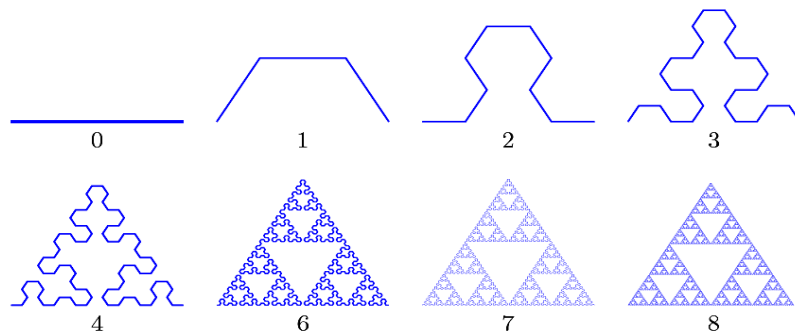


Рис. 9. Решето Серпинского при указанных итерациях

Существуют объемные представления решета Серпинского – **пирамида Серпинского** и ковра Серпинского – **губка Менгера**. При построении трехмерной версии ковра за основу берут куб, из которого вырезают маленькие кубы. Полученный фрактал очень похож на разрез костной ткани. Поэтому проводятся исследования по использованию фракталов в создании материалов для протезирования костей и суставов.

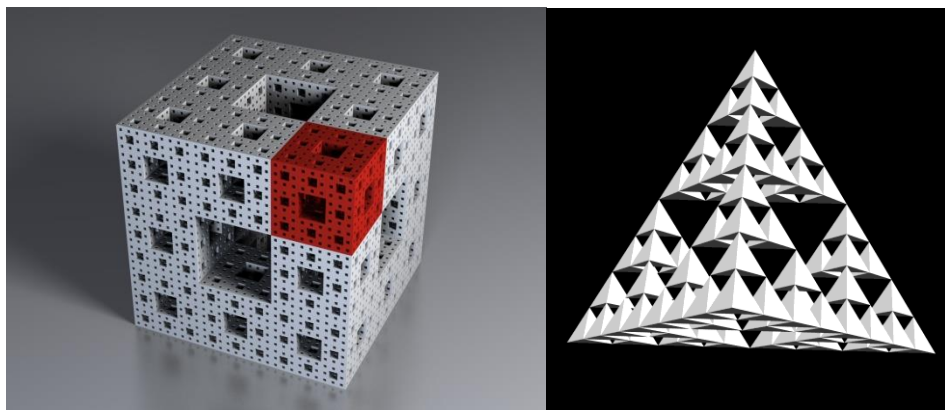


Рис.10. Губка Менгера [1] и пирамида Серпинского [2]

Канторова пыль на квадрате

За основу вновь берём квадрат, но теперь построение происходит путём удаления из исходного квадрата «креста», оставляя 4 квадратика при вершинах, на каждом из которых данная процедура повторяется.

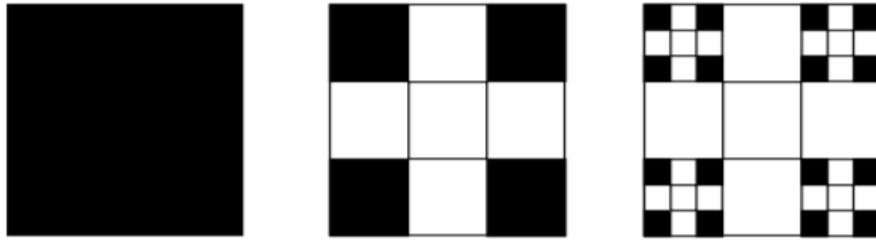


Рис.11. Канторова пыль на квадрате

Дерево Пифагора

Пифагор, доказывая свою знаменитую теорему, построил фигуру, где на сторонах прямоугольного треугольника расположены квадраты. В прошлом веке эта фигура Пифагора выросла в целое дерево. Впервые дерево Пифагора построил А. Е. Босман во время второй мировой войны, используя обычную чертёжную линейку. В классическом дереве Пифагора углы при основании равны 45° . За основу берём квадрат. Следующий шаг – на одной из сторон строим прямоугольный треугольник с углами 45° при основании. Затем на катетах этого треугольника строим квадраты («пифагоровы штаны»). Повторяем процесс для каждого квадрата. Если использовать другие углы, то можно построить и обобщённое дерево Пифагора. Такое дерево часто называют обдуваемое ветром дерево Пифагора.

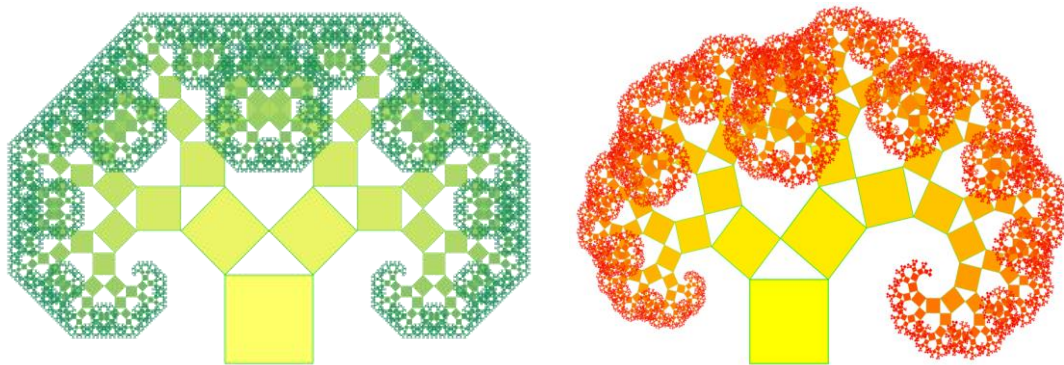


Рис.12. Классическое и обдуваемое ветром дерево Пифагора

Кривая (колбаса) Минковского

Этот классический геометрический фрактал предложен Германом Минковским. За основу берется отрезок, фрагментом является ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга). На следующем

шаге повторяем процедуру к каждому из полученных отрезков ломаной. Эта кривая является нигде не дифференцируемой, не спрямляемой и не имеет самопересечений.

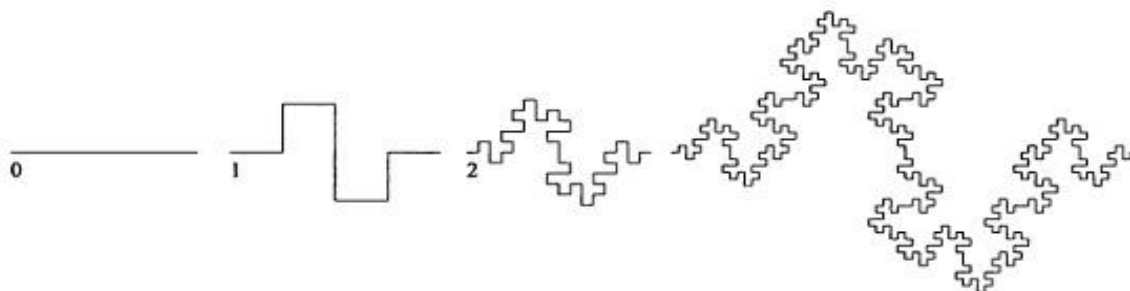


Рис.13. Первые этапы построения колбасы Г. Минковского

Кривая Леви

Французский математик Поль Леви (1886-1971) был одним из первых ученых, который изучал фрактальные кривые. Он построил не спрямляемую кривую, которая нигде не дифференцируема и имеет на каждом интервале точки самопересечения. Для построения кривой Леви за основу возьмем отрезок, на котором построим равнобедренный прямоугольный треугольник без гипотенузы, затем каждую сторону заменим таким же фрагментом и, повторяя эту операцию, в пределе получим фрактальную кривую Леви.

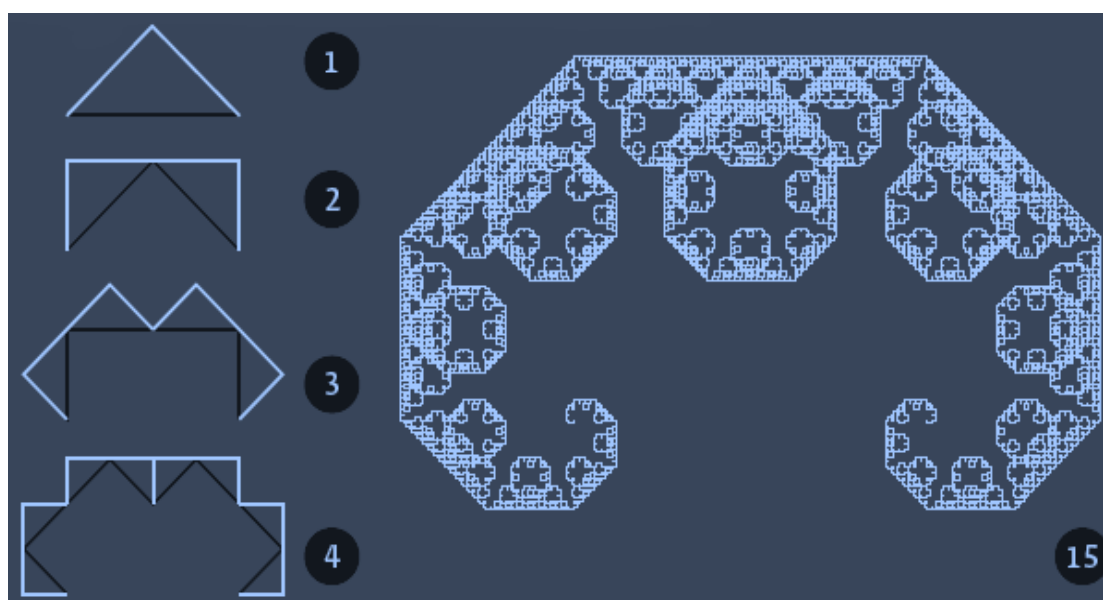


Рис.14. Первые этапы построения кривой П. Леви [3]

Дракон Хартера – Хейтуэя

Интересным примером самоподобной кривой является «кривая дракона», придуманная Джоном Хейтуэем. Названа она так из-за сходства с

традиционными китайскими драконами. За основу возьмем отрезок. Затем повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков. Повторим описанную процедуру, повернув угол на 90° вокруг вершины и добавив полученную ломаную к исходной. Повторяя шаги, будем получать все более сложные ломаные, напоминающие дракона.

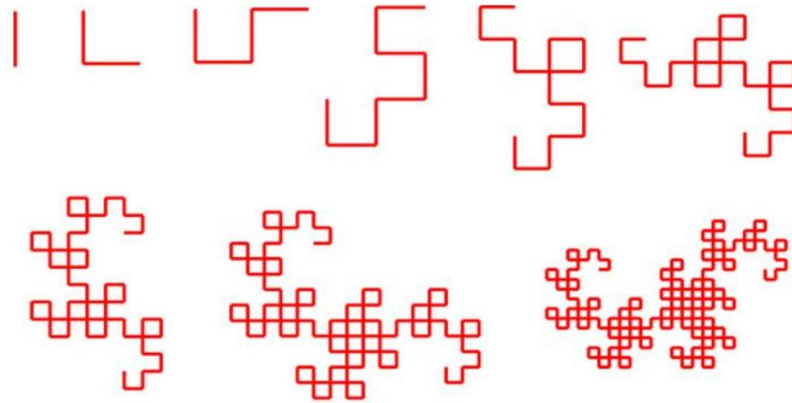


Рис.15. Первые 8 этапов построения дракона

Кривая Пеано

Джузеппе Пеано в 1890г. построил непрерывную функцию, чья область определения – отрезок, а область значений – квадрат на плоскости. В качестве основы здесь можно выбрать отрезок единичной длины, который на следующем шаге заменяется фрагментом, показанным на рис. 16. Он состоит из 9 отрезков длины $1/3$, соединенных под прямым углом друг к другу. Затем каждый из отрезков длиной $1/3$ образовавшейся фигуры аналогично преобразуется до бесконечности. В результате возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область.

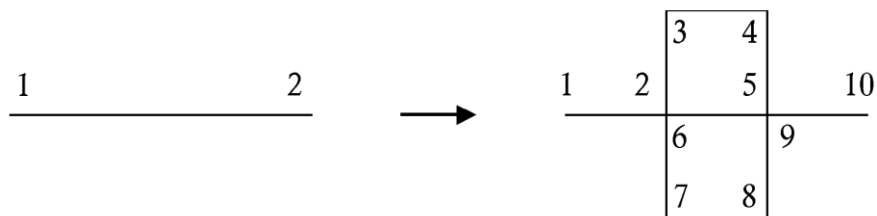


Рис.16. Фрагмент построения кривой Пеано

Задания 2.

1. Найдите сумму длин отрезков, удаленных из множества Кантора при построении.

2. Постройте множество Кантора (6-7 этапов), при делении исходного отрезка на 5 частей и удаления одного центрального отрезка, длиной $1/5$ от исходного. Чему равна сумма длин отрезков, удаленных при построении данного множества?
3. Докажите, что пыль Кантора: а) имеет нулевую меру Лебега; б) не содержит интервалов положительной длины; в) имеет мощность, равную мощности континуума $[0, 1]$.
4. Найдите длину кривой Коха.
5. А) Прodelайте первые 6 итераций для построения *снежинки Коха*, взяв за основу равносторонний треугольник и повторяя для каждой его стороны те же операции, что и для отрезка. На первом этапе получаем шестиконечную звезду (или звезду Давида). Второй шаг – на каждой из сторон звезды повторяем процесс построения кривой Коха. Б) Чему будет равен периметр полученной снежинки Коха? В) «*Снежинка Коха наоборот*» получается, если строить кривые Коха внутри исходного равностороннего треугольника. Прodelайте первые пять итераций.
6. Постройте первые 4 шага *квадратного варианта кривой Коха*, когда на исходном отрезке вместо треугольников достраиваются квадраты. Сколько итераций представлено на рис. 17?

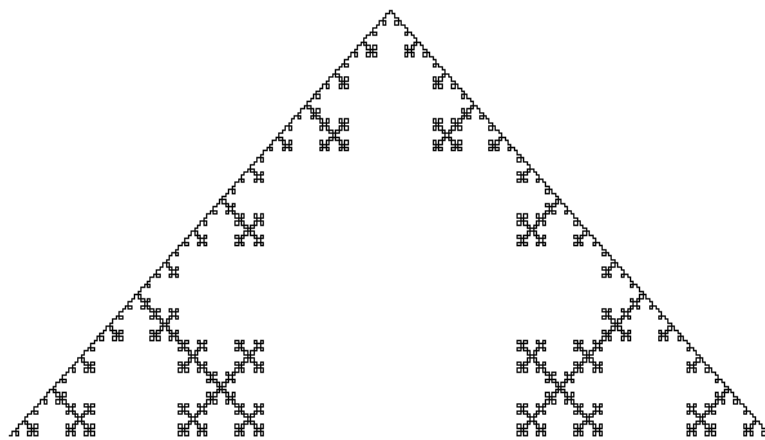


Рис.17. Квадратный вариант кривой Коха

7. А) Постройте *остров Коха* (5 шагов). За основу нужно взять квадрат и на каждой его стороне выполнить построения аналогичные классической кривой Коха. Б) Постройте *крест Коха* (5 шагов). За основу берётся квадрат, а построения в отличие от острова проводятся внутри квадрата. В) Постройте *трехмерное представление кривой Коха*, когда за основу берётся тетраэдр и к каждой грани добавляются меньшие по размеру тетраэдры (см. с.11).
8. Придумайте свою модификацию кривой Коха.
9. Найдите площадь ковра и решета Серпинского.

10. Найдите периметр каркаса (то есть сумму периметров треугольников или квадратов, входящих во фрактальное множество) решета и ковра Серпинского.
11. Придумайте свои варианты фракталов (на треугольнике, квадрате, шестиугольнике и т.п.).
12. Одним из свойств дерева Пифагора является то, что если площадь первого квадрата равна единице, то на каждом уровне сумма площадей квадратов тоже будет равна единице. Докажите.
13. Если изображать только отрезки, соединяющие каким-либо образом выбранные «центры» треугольников, то получается *обнаженное дерево Пифагора*. Постройте первые 5-6 итераций.
14. Постройте дерево Пифагора на равностороннем треугольнике, то есть в случае, когда все углы исходного треугольника равны 60° .
15. Дайте словесное описание (или методичку) построения фрактала, изображенного на рис. 18.

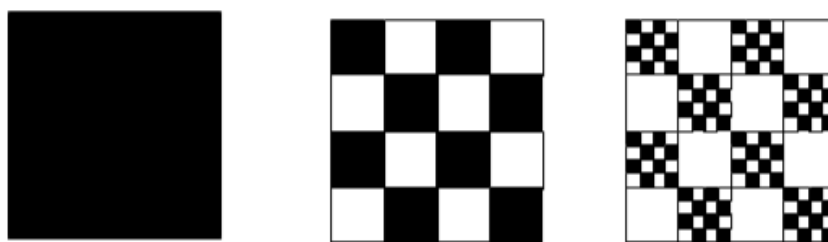


Рис.18. Первые этапы построения к заданию 2.15

16. Постройте несколько этапов *острова Леви*, взяв за основу квадрат, и на каждой стороне повторяя процедуру построения кривой Леви.
17. Дайте словесное описание построения *кривой Давида Гильберта* (рис. 19 а) и её трехмерного аналога – *куба Гильберта* (рис. 19 б).

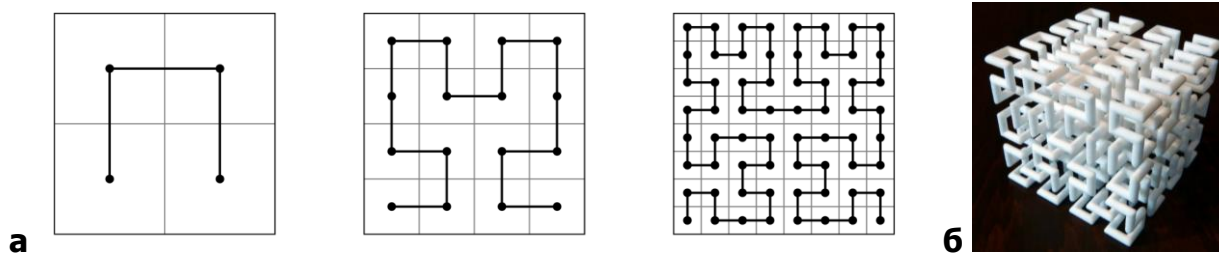


Рис.19. Построение кривой (а, первые 3 шага) и куба (б) Гильберта [4,5]

18. **Эксперимент с полоской бумаги.** Кривую дракона можно буквально построить своими руками, взяв для этого длинную и очень узкую полоску бумаги. Сложите её пополам в одном направлении несколько раз. Разогните бумагу так, чтобы образовался угол 90° в местах сгибов, и разложите полоску на столе. Перед вами появился приближенный фрактал под названием «Кривая дракона».

Лабораторный практикум №2

Реализуйте на компьютере построение любых трех из представленных выше конструктивных фракталов.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. <https://w-dog.ru/wallpapers/0/6/362496634893131/gubka-menger-kub.jpg>
2. <http://www.palmyria.co.uk/illusions/geometry/sierpinski-tetrahedron3.png>
3. https://elementy.ru/posters/fractals/Levy/images/posters/levy_600.gif
4. <https://faculty.bard.edu/~belk/math323/Homework9Pict3.png>
5. <https://mtdata.ru/u1/photo0CF2/20462349536-0/original.jpg>
6. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Учеб. пособие.– Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1999. – 140 с. – ISBN 5-85746-282-7

Для построения геометрических фракталов используются системы Линденмайера и аффинные преобразования. Рассмотрим их подробнее.

1.3. Системы Линденмайера

В 1968 г. венгерский биолог Аристид Линденмайер в ходе изучения процессов роста и развития растений, а именно одноклеточных сине-зеленых водорослей, разработал L-системы. Первоначально они были созданы лишь для описания роста и развития простых одноклеточных организмов и связей между клетками растений. Но в ходе развития появилась возможность для описания и более сложных структур высших растений. Благодаря рекурсивности правил L-системы можно легко строить фракталы – множества, имеющие свойство самоподобия, то есть объекты частично или полностью совпадающие со своей частью.

Система Линденмайера, стала параллельной перезаписывающей системой и типом формальной грамматики. Ее можно определить как кортеж из трех элементов: $G = (V, w, P)$, где V – алфавит, w – аксиома, P – порождающее правило. Дадим пояснения этим понятиям. *Алфавит* – это множество символов, из которых состоят наши правила и аксиома. *Аксиома* – строка символов, с которой начинается строительство и механизм перевода и генерации строк в геометрические структуры. *Порождающее правило* – набор символов, который определяет то, на какие переменные будут

изменяться значения в предыдущей строке, начиная с аксиомы. Правила систем Линденмайера применяются итеративно, начиная с аксиомы.

Таким образом, L-системой называют набор, состоящий из алфавита (символов), аксиомы, и множества правил. Аксиома – это первое состояние (начальная фигура) системы. Правила указывают, как необходимо преобразовать аксиому при переходе от уровня к уровню (переходе между шагами). После того, как система задана, и все шаги выполнены, у нас получается большое предложение с интересными свойствами: используя различные команды, можно создавать разнообразные изображения.

По заданию правил выделяют 4 вида L-систем [2]:

- *Контекстно-свободные*: если каждое правило относится только к отдельному символу, а не к соседним.
- *Контекстно-зависимые*: построение правил зависит не только от конкретного символа, но и от соседних символов.
- *Стохастические*: если имеется несколько правил и каждая выбирается с некоторой вероятностью на каждой итерации.
- *Детерминированные*: в этом случае для каждого символа задано только одно правило.

Оригинальная система Линденмайера, которая использовалась для моделирования процессов роста одноклеточных водорослей, задаётся следующим образом.

Пример 1: водоросли

переменные: A, B

константы: нет

аксиома: A

правила: $A \rightarrow AB, B \rightarrow A$

Система даёт на каждом шаге состояния, отраженные в таблице:

Итерации	Состояние
0	A
1	AB
2	ABA
3	ABAAB
4	ABAABABA
5	ABAABABAABAAB
6	ABAABABAABAABAABAABA

Заметим, что длины строк, полученных в ходе моделирования, образуют последовательность чисел Фибоначчи, то есть такую числовую последовательность, в которой каждое число равняется сумме двух предыдущих.

Наше изложение L-систем ограничивается случаем детерминированных (то есть заданных четким алгоритмом построения) L-систем и графикой на плоскости. Для графической реализации L-систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая тертл-графика (*turtle* – черепаха). Поэтому часто её ещё называют «черепашкой графика». Точка (черепашка) движется по экрану дискретными шагами, как правило, прочерчивая свой след, но при необходимости может перемещаться без рисования. В нашем распоряжении имеются три параметра (x, y, α) , где (x, y) – координаты черепашки, α – направление, в котором она смотрит. Черепашка обучена интерпретировать и выполнять последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Кодовое слово представляет собой результат работы L-системы и может включать следующие буквы:

- F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след,
- f – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след,
- [– открыть ветвь (команда ветвления),
-] – закрыть ветвь (команда ветвления),
- + – увеличить угол α на величину θ ,
- – уменьшить угол α на величину θ .

Размер шага и величина приращения по углу θ задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения α (угол, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс) не указано, то полагают α равным нулю. Команды ветвления используются для построения деревьев и растений, а вспомогательные переменные (часто обозначаются X и Y) заметно облегчают построение некоторых L-систем. Символы +, –,], [не обновляются, а просто остаются на тех местах, где они встретились. Обновление букв в данном слове предполагается одновременным, то есть все буквы слова одного уровня обновляются раньше любой буквы следующего уровня.

Пример 2: снежинка Коха

аксиома: $F + +F + +F$

угол поворота: 60°

правило: $F \rightarrow F - F + +F - F$

Графическое представление аксиомы $F + +F + +F$ – равносторонний треугольник. Черепашка делает один шаг вперед, затем угол α увеличивается на 120° , и черепашка делает еще один шаг вперед, угол α снова увеличивается на 120° и черепашка делает еще шаг. На первом шаге каждая буква F в аксиоме $F + +F + +F$ заменяется на $F - F + +F - F$. Имеем

$$F - F + +F - F + +F - F + +F - F + +F - F + +F - F.$$

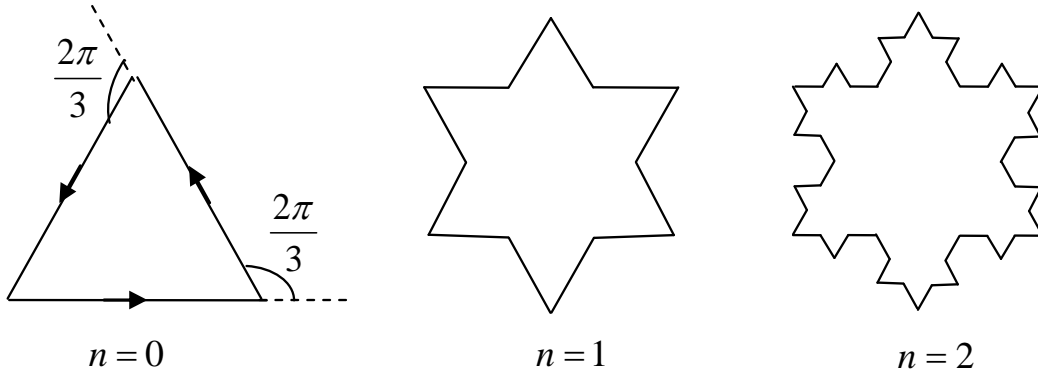


Рис.20. Построение снежинки Коха с помощью L-системы

Пример 3: куст

аксиома: F

угол поворота: 22.5°

правило: $F \rightarrow -F + F + [+F - F -] - [-F + F + F]$

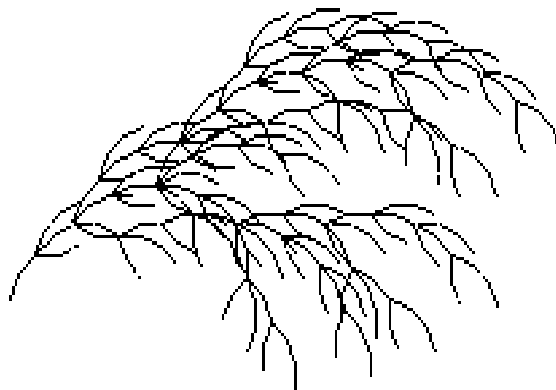


Рис.21. Куст, построенный с помощью L-системы

Задания 3.

1. Пусть A означает «рисуем отрезок», а B означает «двигаемся». А) Что будет на выходе после четырех итераций L-системы, представленной ниже?

переменные: A, B

константы: нет

аксиома: A {стартовая строка}

правила: $A \rightarrow ABA, B \rightarrow BBB$.

Б) Постройте изображение.

2. Что будет на выходе после двух итераций L-системы, представленной ниже? Изобразите результат графически.

аксиома: F

начальное направление: 90°

угол поворота: 45°

правило: $FF - [F] + [F]$.

3. Задайте L-системы а) для квадратного варианта кривой Коха (см. рис. 17); б) для острова Коха; в) для снежинки Коха наоборот (ориентированной вовнутрь треугольника); г) для креста Коха; д) для острова Леви; е) для кривой Пеано; ж) для кривой Гильберта.

4. Пусть символы A, B обозначают шаг вперед. Что будет на выходе после 4-5 итераций? Изобразите результат, если L-система имеет вид

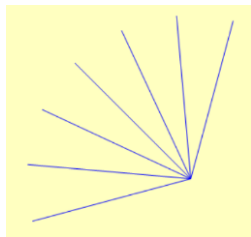
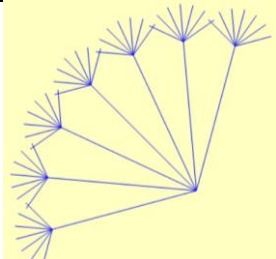
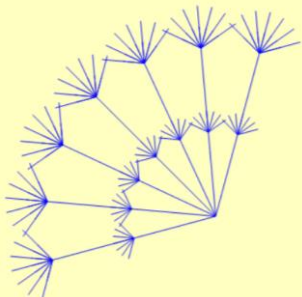
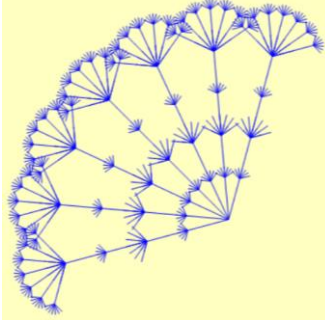
аксиома: A

угол поворота: 60°

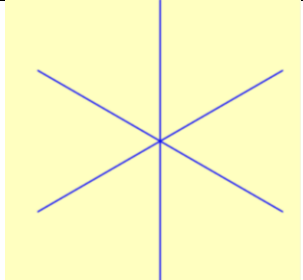
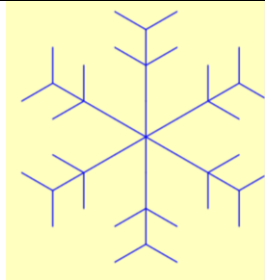
правила: $A \rightarrow B - A - B, B \rightarrow A + B + A$.

5. Запишите, как будет выглядеть L-система, реализующая построение состояний, заданных в таблице ниже [3]:

А)

Итерации	Состояние	
0, 2		
3, 4		

Б)

Итерации	Состояние	
0,1		

6. Постройте с помощью L-систем любые три конструктивных фрактала, записав аксиому и правила.

Лабораторный практикум №3

1. Реализуйте на компьютере с помощью L-систем известные и/или классические фракталы (см. [1, с. 28-38]).
2. Придумайте и реализуйте на компьютере с помощью L-систем:
 - а) остров; б) мозаику; в) цепочку; г) снежинку; д) растение; е) дракона.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7
2. L-система [информ. сайт] – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org/wiki/L-система>
3. Михайлова Л.А. Использование систем Линденмайера для построения конструктивных фракталов // Выпускная квалификационная работа на получение степени бакалавра по направлению «Математика и компьютерные науки». – Ижевск: УдГУ, 2019. – 61 с.
4. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.

1.4. Динамические фракталы

Будем использовать некоторые классы двумерных нелинейных отображений, которые относятся к дискретным динамическим системам. Анализ таких систем достаточно труден. Рассмотрим одномерное

комплексное отображение, сопоставляющее одному комплексному числу $z_n = x_n + iy_n$ другое комплексное число $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$ по итерационному правилу $z_{n+1} = f(z_n)$, где $f(z)$ – некоторая нелинейная функция переменной z , n – номер итерации. Комплексные отображения такого рода порождают динамические фракталы, к которым относятся фракталы Жюлиа, Манделброта и Ньютона. Прежде чем перейти к их построению и определению введём некоторые понятия.

Неподвижной точкой \tilde{z} отображения $z_{n+1} = f(z_n)$ или неподвижной точкой функции $f(z)$ называется корень уравнения $f(z) = z$. Начав итерационный процесс в этой точке, мы никогда ее не покинем. Её ещё называют состоянием равновесия [1]. По аналогии с тремя типами равновесия (устойчивым, неустойчивым и безразличным) неподвижная точка отображения тоже бывает трех типов: притягивающей, отталкивающей и нейтральной. Если, стартовав в непосредственной близости от неподвижной точки, мы будем в процессе итераций к ней неограниченно приближаться, то такая неподвижная точка называется притягивающей. Стартовав в непосредственной близости от отталкивающей неподвижной точки, мы будем от нее удаляться. Нейтральная неподвижная точка характеризуется тем, что, стартовав в достаточно малой ее окрестности, мы будем все время находиться в этой окрестности, не приближаясь и не удаляясь от нее. Для определения характера неподвижной точки \tilde{z} отображения $f(z)$, используется производная $f'(\tilde{z})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (о характере неподвижной точки). *Если $|f'(\tilde{z})| < 1$, то точка \tilde{z} является притягивающей, если $|f'(\tilde{z})| > 1$, то отталкивающей, если $|f'(\tilde{z})| = 1$, то неподвижная точка \tilde{z} является нейтральной.*

При анализе отображений наряду с неподвижными точками важную роль играют так называемые периодические точки и циклы, состоящие из этих периодических точек. Например, цикл периода два состоит из двух точек ξ_1 и ξ_2 таких, что $f(\xi_1) = \xi_2$ и $f(\xi_2) = \xi_1$. Начав итерационный процесс в одной из точек цикла, мы его никогда не покинем и будем по очереди переходить из одной точки цикла в другую. Точки цикла ξ_1 и ξ_2 являются неподвижными точками отображения $z_{n+1} = f(f(z_n)) \stackrel{\text{def}}{=} f^{\{2\}}(z_n)$.

Помимо цикла периода два у рациональных отображений существуют циклы и всех высших порядков с $n = 3, 4, \dots$. Если ξ_0 – периодическая точка периода n , то она является неподвижной точкой функции

$$f(f(\dots(f(z))\dots)) \stackrel{\text{def}}{=} f^{\{n\}}(z).$$

Утверждение. Если точка \tilde{z} является неподвижной для $f(z)$, то она является неподвижной и для $f^{\{n\}}(z)$.

Аттрактором на комплексной плоскости называется точка, к которой сходится итерационный процесс $z_{n+1} = f(z_n)$ при $n \rightarrow \infty$. В качестве такого аттрактора может выступать притягивающая неподвижная точка или притягивающий цикл определенного периода. Иногда таких аттракторов может быть несколько, они также могут состоять из бесчисленного количества точек и представлять собой как непрерывную линию, так и некоторое множество. Если же в процессе итераций изображающая их точка уходит на бесконечность, то аттрактором такого процесса считается бесконечно удаленная точка.

Множество Жюлиа

Множества Жюлиа дают наиболее впечатляющие иллюстрации того, как простой процесс может привести к чрезвычайно запутанным множествам. Итерации отображения вида $z_{n+1} = f(z_n)$, $n = 0, 1, 2 \dots$ с простой функцией на комплексной плоскости вызывают появление различных экзотических фракталов. *Множество Жюлиа* функции f – это граница множества тех точек z , которые при итерировании $f(z)$ стремятся к бесконечности.

Наиболее изученным примером отображений такого вида является квадратичное комплексное отображение $f(z) = z^2 + c$, где $c = a + ib$ – ненулевая комплексная константа:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

После разделения вещественной и мнимой частей отображение запишется в виде:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + b.$$

Такое отображение дает множество фракталов, соответствующих множеству Жюлиа $J(c) = J(a, b)$.

Пусть значение комплексной константы $c = 0$. В этом случае отображение $f(z) = z^2$ имеет две неподвижные точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, которые получаются из уравнения $z^2 = z$. Так как $f'(z_1) = 0$, $f'(z_2) = 2$, то

первая точка является притягивающей, а вторая – отталкивающей по теореме о характере неподвижной точки.

Рассмотрим итерационный процесс для начальной точки z_0 :

$$z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \rightarrow \dots$$

Получаем геометрическую прогрессию, для которой в зависимости от z_0 имеется три возможности:

- 1) Если $|z_0| < 1$, то итерационный процесс сходится к нулю, то есть $z_1 = 0$ является аттрактором для такого процесса и притягивающей неподвижной точкой данного отображения.
- 2) Если $|z_0| > 1$, то итерационный процесс сходится к бесконечности. В этом случае аттрактором является бесконечно удаленная точка.
- 3) Если $|z_0| = 1$, то начальная точка лежит на окружности единичного радиуса. В этом случае и все точки последовательности продолжают оставаться на этой единичной окружности.

Таким образом, на комплексной плоскости имеются две области притяжения. Одна лежит внутри окружности единичного радиуса, и принадлежащие ей точки имеют своим аттрактором $z_1 = 0$ притягивающую неподвижную точку. Другая расположена снаружи от этой окружности и имеет аттрактором бесконечно удаленную точку. Границей между этими двумя областями притяжения является окружность единичного радиуса. Это и есть множество Жюлиа $J(0,0)$. На нём лежит вторая отталкивающая неподвижная точка квадратичного отображения $z_2 = 1$.

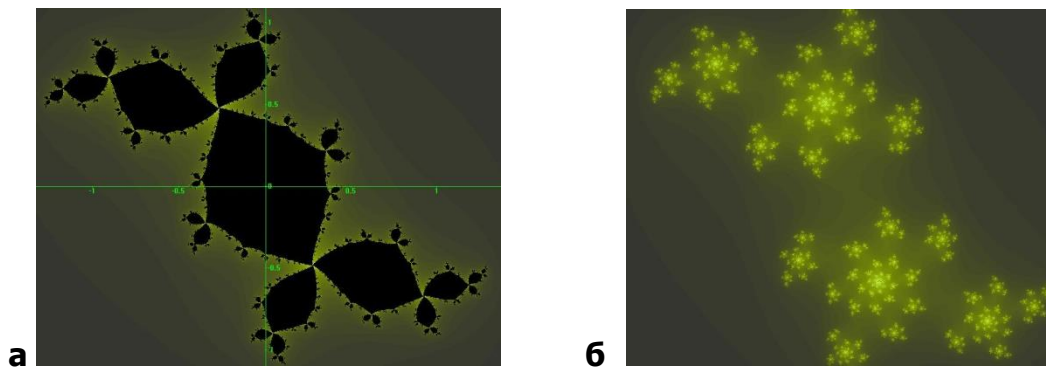


Рис.22. а) Множество Жюлиа ($c = -0.12 + 0.74i$); **б)** пыль Фату ($c = 0.1 + 0.7i$)

В случае, когда $c \neq 0$, вполне ожидаемо, что граница будет оставаться гладкой и будет иметь форму деформированной окружности, а притягивающая неподвижная точка просто переместится из начала координат. Но интуиция нас подводит. Например, пусть $c = -0.12 + 0.74i$. Тогда у итерационного процесса $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow \dots$ также имеются три

выше перечисленные возможности. Но граница уже не будет гладкой, она состоит из бесконечного числа деформированных окружностей, а внутренние точки этого множества притягиваются циклом периода 3, а не одной неподвижной точкой (рис. 22 а). Граница множества самоподобна и имеет фрактальную структуру. Случается так, что области притяжения могут исчезнуть и связная граница превращается в облако изолированных точек, называемых пылью Фату (рис. 22 б).

Изучением свойств в более общем случае рациональных отображений на комплексной плоскости занимались французские математики Гастон Жюлиа и Пьер Фату во время первой мировой войны. В частности, им было известно о самоподобии. Так же они доказали, что всю границу можно восстановить по любой произвольно малой её части путем конечного числа итераций формулы $z \rightarrow z^2 + c$. К сожалению, в то время не было современной компьютерной графики, чтобы передать их тонкие идеи, поэтому их исследования остались неизвестными большинству математиков того периода. И только благодаря Мандельброту и развитию компьютерной техники, возродился интерес к их результатам. Жюлиа подробно исследовал свойства подобных множеств, вот некоторые из них:

- Для каждого значения комплексного параметра c имеется свое множество Жюлиа, ограничивающее те области комплексных чисел z_0 , которые в процессе итераций не уходят на бесконечность.
- С изменением константы c меняется и геометрия границ областей притяжения, то есть множеств Жюлиа. Может случиться так, что области притяжения исчезнут вовсе и связная граница превратится в облако изолированных точек – пыль Фату.
- Фракталы Жюлиа всегда симметричны относительно начала координат. Если же $b = 0$, то относительно обеих осей абсцисс и ординат.
- Множество Жюлиа является связным, за исключением пыли Фату.

Итак, для каждого комплексного параметра $c = a + ib$ имеется своё множество Жюлиа $J(c)$, ограничивающее те области комплексных чисел z_0 , итерационный процесс из которых не уходит в бесконечность. С изменением c , меняется и геометрия границ областей притяжения, а значит, меняются и множества Жюлиа, являющиеся фракталами.

Для построения фракталов Жюлиа полезна следующая теорема [2, с.232], которая в случае $|c| < 2$ позволяет прекратить итерационный процесс, как только величины достигают значения 2 по модулю, потому что

последовательность итераций таких точек гарантировано стремится к бесконечности.

Теорема 2. Пусть $|c| < 2$, $z_n = f^{\{n\}}(z)$ при $n = 1, 2, \dots$, где z – комплексные числа. Если существует такое n_0 , что $|z_{n_0}| \geq 2$, то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

или итерационный процесс $\{f^{\{n\}}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности, а значит, $z \in J(c)$.

Множества Жюлиа даже для отображения $z^2 + c$ обладают большим разнообразием. Для каждого значения c получаем новое изображение, тем не менее существует всего два типа изучаемого множества. Каждое множество Жюлиа либо связно, либо вполне несвязно. Индикатором для двух типов множеств Жюлиа служит множество Мандельброта, речь о котором пойдет ниже.

Множество Мандельброта

Каждая точка в множестве Мандельброта представляет значение c , для которого $J(c)$ связно. Каждая точка из дополнения к множеству Мандельброта представляет значение c , для которого множество $J(c)$ вполне несвязно. Множество Мандельброта M для полинома $f(z) = z^2 + c$ есть множество таких комплексных чисел c , для которых последовательность итераций точки $z = 0$ ограничена, то есть

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \{f^{\{n\}}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена} \right\}.$$

Выбор точки $z = 0$ в качестве начальной связан с тем, что это единственная точка, в которой производная функции $f(z) = z^2 + c$ обращается в нуль.

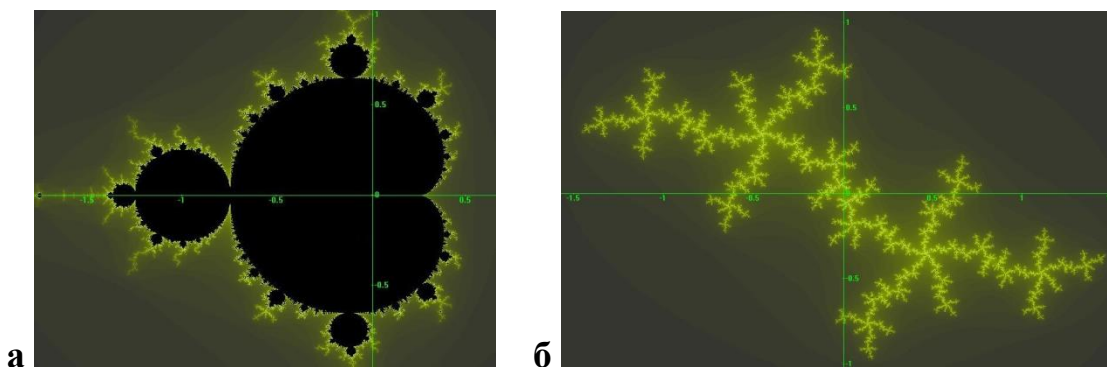


Рис.23. а) Множество Мандельброта, **б)** Дендрит при $c = -0.538 + 0.679i$

Таким образом, множество Мандельброта (см. рис. 23 а) – это точки, расположенные в черной области. Это множество симметрично относительно вещественной оси a . Граница множества Мандельброта представляет собой фрактал Мандельброта.

Приведенное выше определение множества Мандельброта может быть использовано для написания программы, определяющей принадлежность точки множеству M . Задача проверки последовательности итераций на ограниченность упрощается при использовании теоремы 3 [2, с.248].

Теорема 3. *Если $|c| > 2$ и $|z| \geq |c|$, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\{n\}}(z) = \infty \Rightarrow c \notin M.$$

Объединяя полученный результат с теоремой 2, получаем, что проверять нужно точки $|c| \leq 2$. Причем в случае $|c| < 2$, если последовательность итераций достигает состояния, когда ее величина превосходит 2, то это означает, что она стремится к бесконечности, и, следовательно, проверяемая точка не принадлежит M . Выбранные при таком условии c , как и в случае $|c| > 2$ всегда соответствуют фракталу Жюлиа, называемому пылью Фату. Точка $c = -2$ – единственная точка окружности $|c| = 2$, которая принадлежит множеству Мандельброта. Алгоритмы и советы по построению множества Мандельброта можно найти в [1, 2].

Доминирующей фигурой в множестве Мандельброта является большая кардиоида. Внутренность этой кардиоиды соответствует точкам c , для которых множество Жюлиа представляет из себя некоторую деформированную окружность и имеет притягивающую неподвижную точку. Помимо главной кардиоиды множество Мандельброта содержит также бесконечное число её копий, называемых почками [1]. Различным почкам соответствует аттрактор определенного периода. Кроме того, множество Мандельброта окружено разветвленными и изогнутыми антеннами. Если взять c на самом конце такой антенны, то получим множество Жюлиа в виде дендрита, не имеющего внутренней (см. рис. 23 б).

Фрактал Ньютона

Эффективным способом нахождения действительных корней нелинейного уравнения $f(x) = 0$ является метод Ньютона-Рафсона, который часто называют методом касательных. Суть метода состоит в следующем [1,3]. Пусть задана функция $f(x)$, для которой известно приближенное

значение её корня x_1 , значение функции в этой точке $f(x_1)$ и значение её первой производной $f'(x_1)$. Проводя касательную к графику функции $f(x)$ в этой точке и определяя её пересечение с осью x , мы получим уточненное положение корня, равное x_2 . Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_1 имеет вид

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

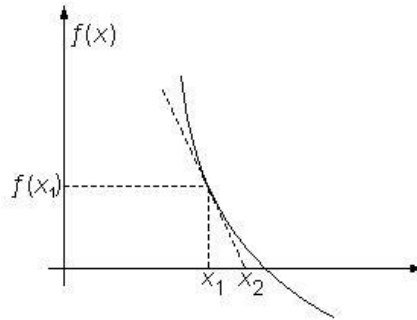


Рис.24. Иллюстрация метода касательных [1]

Приравняв к нулю уравнение касательной, получаем, что уточненное значение корня x_2 связано с предыдущим значением x_1 соотношением:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Взяв теперь значение x_2 в качестве приближенного, и повторяя этот алгоритм, находим следующее значение x_3 и т.д. При этом полученный итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

быстро сходится к точному значению корня (число верных десятичных знаков удваивается на каждом шаге). Заметим, что итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона сходится к единственной неподвижной точке – точному значению корня уравнения независимо от выбора начальной точки x_1 [3,4].

Метод Ньютона-Рафсона остаётся эффективным и для нахождения комплексных корней уравнения $f(z) = 0$. Взяв начальную точку вблизи корня этого уравнения и используя итерационный процесс

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

получим последовательность комплексных чисел, быстро сходящуюся к этому корню. При этом возникает вполне закономерный вопрос, а что будет, если начальная точка z_1 в плоскости комплексных чисел выбрана не вблизи от корня, а произвольным образом?

Примерно такой вопрос в 1977 г. был задан американскому математику Джону Хаббарду (John Hubbard) его студентами, когда он преподавал им математику в Парижском университете Орсэй. Хаббард доказал, что для уравнения второй степени итерационный процесс всегда будет сходиться к ближайшему корню, за исключением случая, когда начальная точка z_0 равноудалена от обоих корней. В случае исключения последовательность итераций все время остается на прямой, проведенной через середину соединяющего два корня отрезка, перпендикулярно ему, и совершает хаотическое движение. Однако уже для уравнения третьей степени такой простой ответ найти не удалось. Оказывается, еще в 1879 г. эту проблему безуспешно пытался решить и Артур Кэли (Arthur Cayley). Им также был найден ответ для уравнения второй степени, а случай многочленов более высокой степени был анонсирован как будущая публикация, которой не суждено было появиться. Но в отличие от Кэли у Хаббарда в распоряжении был компьютер. Уже к концу семестра Хаббард со своими учениками получили несколько важных экспериментальных результатов.

Они начали с простейшего уравнения третьей степени $z^3 - 1 = 0$. В этом случае имеем три кубических корня из 1, а именно,

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Нанесенные на комплексную плоскость, они образуют равносторонний треугольник, центр которого совпадает с началом координат. Эти корни действительно являются притягивающими неподвижными точками отображения $f(z) = z^3 - 1$. По аналогии с уравнением второй степени можно предположить, что граница областей притяжения выглядит примерно так, как изображено на рис. 25 а, её ещё называют «пирогом Ньютона». Именно такую картину первоначально представлял себе Хаббард, как и многие другие до него. Однако такое предположение оказалось неверным. Более скрупулезное компьютерное исследование выявило, что геометрия границ областей притяжения имеет гораздо более сложную форму. Если раскрашивать разные области притяжения разным цветом, то получим картинку, изображенную на рис. 25 б. Из этого рисунка видно, что граница областей притяжения состоит из сильно переплетенных самоподобных

структур. Оказывается, что на границе между любыми двумя цветами всегда расположена гирлянда островков третьего цвета. Границы этих островков, в свою очередь, состоят из гирлянд островков меньшего размера соответствующего дополнительного цвета и т.д. Непрерывно уменьшаясь в размерах, детали границы постоянно воспроизводят сами себя. В результате оказывается, что каждая точка такой фрактальной границы соседствует сразу с тремя областями притяжения [1].

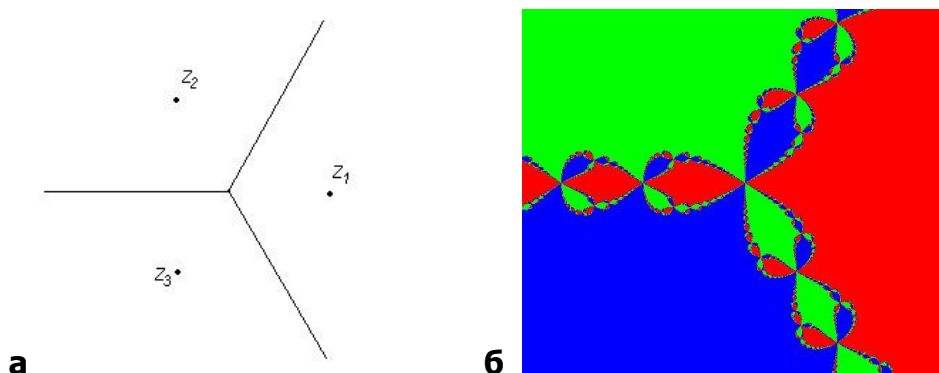


Рис.25. а) Пирог Ньютона, **б)** Фрактал Ньютона

Задания 4.

1. Докажите теорему о характере неподвижной точки (теорема 1).
2. Докажите утверждение: *Если точка \tilde{z} является неподвижной для $f(z)$, то она является неподвижной и для $f^{\{n\}}(z)$.*
3. Пусть ξ – периодическая точка цикла. Если $|(f^{\{n\}})'(\xi)| < 1$, то цикл называется притягивающим. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, покажите, что эта производная одна и та же для всех точек данного цикла.
4. Докажите теоремы 2 и 3.
5. Получите двумерное вещественное отображение построения фрактала Ньютона для функций: а) $f(z) = z^k - 1, k = 3, 4, 5$; б) $f(z) = z^3 - z$; в) собственной функции.

Лабораторный практикум №4

1. Используя компьютер, постройте множество Мандельброта для функции $f(z) = z^k + c, k = 3, 4, \dots$ Как меняется множество в зависимости от k ?

2. Используя компьютер, постройте множество Жюлиа для функции $f(z) = z^k + c, k = 3, 4, \dots$. Подберите такие значения параметра c , чтобы множество Жюлиа вырождалось в пыль Фату и дендрит.
3. Постройте собственный фрактал а) Мандельброта, б) Жюлиа для некоторой функции.
4. Используя компьютер, постройте фрактала Ньютона для: а) $f(z) = z^k - 1, k = 3, 4, 5$; б) $f(z) = z^3 - z$; в) собственной функции.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Паршин Д.А. Физика открытых систем // Лекционный курс. – Режим доступа: <http://lms.physics.spbstu.ru/course/view.php?id=29>
2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7
3. Банников А.С., Ким И.Г., Латыпова Н.В. Численные методы: учеб. пособие. Ч.1. – 2-е изд., испр. и доп. – Ижевск: Изд. центр «Удмуртский ун-т», 2018. – С. 24-26. – ISBN 978-5-4312-0643-6
4. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения): учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Изд. дом «ОНИКС 21 век», 2005. – 432 с.: ил. – ISBN 5-329-01110-8
5. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Учеб. пособие. – Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1999. – 140 с. – ISBN 5-85746-282-7

1.5. Фрактальная размерность

По одному из определений Б. Мандельброта: *фрактал* – это множество, хаусдорфова (фрактальная) размерность которого больше топологической. Напомним, *топологическая размерность* – это топологическое свойство фигур, не изменяющееся при любых деформациях, производимых без разрывов и склеиваний (при взаимно однозначных и непрерывных отображениях). Топологическая размерность всегда равна целому числу. Она определяется по индукции следующим образом: для пустого множества топологическую размерность полагают равной (-1) , для точки – 0 , для линии – 1 , для поверхности или плоской фигуры – 2 , для тела – 3 и т.д. Другими словами, под топологической размерностью множества в линейном

пространстве понимают число линейно независимых координат в этом пространстве. Перейдём к понятию фрактальной размерности.

Эксперимент Ричардсона. Понятие о фрактальной размерности

В работе метеоролога Л. Ричардсона (1881-1953) Мандельброт в 1961 г. обнаружил формулу для определения длины западного Британского побережья и испано-португальской границы. Ричардсон заметил, что результаты сильно зависят от масштаба, который используется на карте. Понятно, что чем более подробной картой пользуемся, тем побережье становится длиннее. Этот же феномен можно обнаружить, используя одну карту, но применяя каждый раз все более мелкие единицы измерения. Полученные Ричардсоном логарифмические значения в прямоугольной системе координат лежат вблизи прямой, удовлетворяющей уравнению [1]:

$$\lg S \approx -0.22 \lg a + \lg S_1,$$

где S – длина измеряемого побережья, S_1 – длина, при измерении которой использовались единицы измерения в 1 км, a – масштаб измерения («линейка»). Число 0.22 определяет угол наклона прямой. Пользуясь свойствами логарифма, имеем

$$S \approx S_1 \left(\frac{1}{a}\right)^{0.22}.$$

Откуда при уменьшении a в 32 раза получим увеличение S примерно вдвое. Теоретически, если $a \rightarrow 0$, то $S \rightarrow \infty$, то есть западное побережье Британии имеет бесконечную длину. Что в реальности не так. Криволинейность длины побережья определяется степенью ее изгибания. Мандельброт добавил 1 к показателю степени и получил число, которое он назвал *фрактальной размерностью* побережья (границы).

Мы ввели понятие о фрактальной размерности береговой линии. Дадим теперь общее определение этой величины. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n находится наш фрактальный объект \mathcal{F} . Покроем теперь этот объект целиком n -мерными шарами диаметра ε . Представим, что нам потребовалось для этого не менее, чем $N(\varepsilon)$ шаров. Тогда, если при достаточно малых ε величина $N(\varepsilon)$ меняется по степенному закону

$$N(\varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D,$$

то степень $D = \dim \mathcal{F}$ называется *фрактальной размерностью* объекта \mathcal{F} . Последнюю формулу можно переписать в виде

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Это и служит нестрогим общим определением и формулой для вычисления фрактальной размерности D . В соответствии с таким определением величина D является локальной характеристикой данного объекта \mathcal{F} . По сути, фрактальная размерность – это численная возможность описать извилистость и неровность границы изучаемого объекта.

Рассмотрим **пример** вычисления фрактальной размерности по полученной формуле для фрактала Кантора. Множество Кантора лежит в пространстве \mathbb{R}^1 , поэтому 1-мерными шарами здесь будут служить интервалы длины ε . Для этого составим таблицу зависимости количества $N(\varepsilon)$ требуемых для покрытия интервалов от их длины ε на каждой итерации

Номер итерации	ε	$N(\varepsilon)$
0	1	1
1	$\frac{1}{3}$	2
2	$\frac{1}{9}$	4
3	$\frac{1}{27}$	8
n	$\frac{1}{3^n}$	2^n

Таблица для нахождения зависимости $N(\varepsilon)$ от длины ε

Первоначально имеем один отрезок единичной длины. На первом шаге два отрезка, каждый длины $\frac{1}{3}$. На втором шаге имеем уже 4 отрезка длины $\frac{1}{9}$, далее имеем 8 отрезков длины $\frac{1}{27}$ и т.д.

Заметим, что $\varepsilon \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow \infty$. Тогда, подставляя в формулу для вычисления фрактальной размерности, имеем

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Клеточный метод вычисления фрактальной размерности

Кроме фрактальной размерности, так же часто используется *клеточная размерность*, которая отличается от определенной выше только тем, что при ее вычислении берутся не шары, а клетки (или n -мерные кубы) со стороной ε . Очевидно, если фрактал является подмножеством прямой, то надо использовать отрезки, на плоскости – квадраты. Если же фрактал – подмножество трехмерного пространства, то квадраты заменяются кубами. Главный недостаток этого метода заключается в том, что посчитанное

значение $N(\varepsilon)$ не всегда даёт наименьшее число клеток со стороной ε , покрывающих фрактал. По сути, клеточная размерность даёт оценку сверху для фрактальной размерности, но для большинства классических фракталов совпадает с ней.



Рис.26. Нахождение фрактальной размерности Южной части Норвегии клеточным методом

Если рассмотреть пример вычисления клеточной размерности для пыли Кантора, то здесь в качестве клеток используются отрезки со стороной ε , и значение в этом случае не меняется.

Мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа-Безиковича

Среди широкого разнообразия «фрактальных размерностей», которые используются в настоящее время, определение Хаусдорфа является самым старым, строгим и наиболее важным. В 1919 г. немецкий математик Феликс Хаусдорф ввел особую метрическую размерность для множеств, которые составляют часть от топологического множества, на основе дробной меры. Он же привёл примеры с дробной размерностью (множество Кантора, кривая Коха и др.) Идеи Хаусдорфа получили развитие в работах А.С. Безиковича и его соавторов. В последующие годы размерность Хаусдорфа-Безиковича применялась в некоторых разделах математики, но только благодаря исследованиям Б. Мандельброта стала популярна в теории фракталов. Преимущество размерности Хаусдорфа состоит в том, что она определена для любого множества и математически удобна, так как основана на мерах, которыми относительно легко манипулировать.

Введём сначала понятие хаусдорфовой меры. Для любого непустого подмножества U из n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n определим диаметр $\|U\| = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}$, как наибольшее расстояние между любой парой точек из U . Будем говорить, что счетный (или конечный) набор открытых множеств $\{U_j\}$ диаметра, не большего δ , является δ -покрытием множества $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \quad \forall j: 0 < \|U_j\| \leq \delta.$$

Пусть s – неотрицательное число. Для любого $\delta > 0$ определим величину

$$H_\delta^s(\mathcal{F}) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\|U_j\|^s : \{U_j\} \text{ – это } \delta \text{ – покрытие } \mathcal{F}\right\}.$$

Рассмотрим все покрытия \mathcal{F} множествами диаметра δ и выберем минимальную сумму s -ых степеней диаметров. Когда δ уменьшается, класс допустимых покрытий \mathcal{F} уменьшается. Поэтому точная нижняя грань (инфинум) возрастает и достигает предела при $\delta \rightarrow 0$. Обозначим

$$H^s(\mathcal{F}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(\mathcal{F}).$$

Этот предел существует для любого подмножества $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, хотя предельное значение может быть (и обычно есть) 0 или ∞ . Величина $H^s(\mathcal{F})$ называется s -мерной хаусдорфовой мерой \mathcal{F} .

Хаусдорфовы меры обобщают близкие идеи длины, площади, объема и т.д. Если \mathcal{F} является борелевским подмножеством \mathbb{R}^n , то $H^s(\mathcal{F}) = c_n V^n(\mathcal{F})$, где постоянная c_n является объемом n -мерного шара диаметра 1, V^n – n -мерный объем \mathcal{F} . Другими словами, для множеств $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ имеем: $H^0(\mathcal{F})$ – это число точек в \mathcal{F} ; $H^1(\mathcal{F})$ дает длину гладкой кривой \mathcal{F} ; $H^2(\mathcal{F}) = \frac{4}{\pi} S(\mathcal{F})$, где $S(\mathcal{F})$ – площадь гладкой поверхности \mathcal{F} ; $H^3(\mathcal{F}) = \frac{6}{\pi} V(\mathcal{F})$, где $V(\mathcal{F})$ – объём тела \mathcal{F} .

Масштабные свойства длины, площади и объёма хорошо известны. При растяжении в λ раз длина кривой умножается на λ , площадь плоской области умножается на λ^2 , а объём трехмерного объекта умножается на λ^3 . Аналогично, s -мерная хаусдорфова мера изменяет масштаб с коэффициентом λ^s . Такие масштабные свойства [1, с.126] являются фундаментальными в теории фракталов.

Масштабное свойство. Если $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$, то $H^s(\lambda\mathcal{F}) = \lambda^s H^s(\mathcal{F})$, где множество \mathcal{F} масштабируется с коэффициентом λ : $\lambda\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x : x \in \mathcal{F}\}$.

Заметим, что $\forall \mathcal{F}, \forall \delta < 1$ функции $H_\delta^s(\mathcal{F})$ и $H^s(\mathcal{F})$ являются невозрастающими по переменной s . Более того, имеет место неравенство $H_\delta^t(\mathcal{F}) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(\mathcal{F})$ при $t > s$. Пусть $\delta \rightarrow 0$. Тогда если $H^s(\mathcal{F}) < \infty$, то $H^t(\mathcal{F}) = 0$ при $t > s$. Из графика видно (см. рис. 27), что существует критическое значение s , при котором ступенчатая функция $H^s(\mathcal{F})$ «прыгает» от ∞ до 0. Это критическое значение называется *размерностью Хаусдорфа-Безиковича* (или *хаусдорфовой размерностью*) \mathcal{F} и обозначается $\dim_H \mathcal{F}$.

Формально

$$\dim_H \mathcal{F} = \inf\{s: H^s(\mathcal{F}) = 0\} = \sup\{s: H^s(\mathcal{F}) = \infty\},$$

так что

$$H^s(\mathcal{F}) = \begin{cases} \infty, & \text{если } s < \dim_H \mathcal{F}, \\ 0, & \text{если } s > \dim_H \mathcal{F}. \end{cases}$$

Если $s = \dim_H \mathcal{F}$, то $H^s(\mathcal{F})$ может быть 0 или ∞ , или может удовлетворять неравенству $0 < H^s(\mathcal{F}) < \infty$, то есть быть конечным.

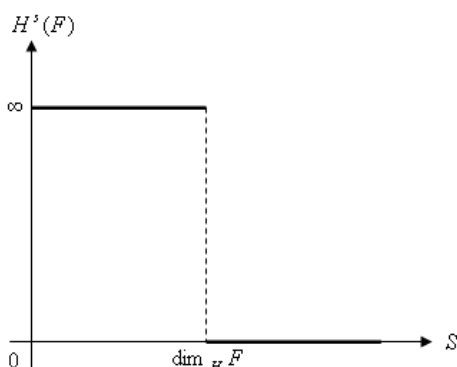


Рис.27. График $H^s(\mathcal{F})$ в зависимости от переменной s

Свойства хаусдорфовой размерности [1]:

1. Если $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, то $\dim_H \mathcal{F} = n$.
2. Если $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ – гладкое m -мерное многообразие, то $\dim_H \mathcal{F} = m$.
3. Если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, то $\dim_H \mathcal{G} \leq \dim_H \mathcal{F}$.
4. Если $\{\mathcal{F}_j\}$ – счётная последовательность множеств, то

$$\dim_H \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j = \sup\{\dim_H \mathcal{F}_j\}.$$

5. Если \mathcal{F} – счётное множество, то $\dim_H \mathcal{F} = 0$.

Рассмотрим **пример** вычисления размерности Хаусдорфа-Безиковича для фрактала Кантора. Пусть \mathcal{K} – фрактал Кантора на отрезке $[0,1]$. Множество Кантора делится на две части (левую и правую):

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_L \cup \mathcal{K}_R, \text{ где } \mathcal{K}_L = \mathcal{K} \cap [0, \frac{1}{3}], \mathcal{K}_R = \mathcal{K} \cap [\frac{2}{3}, 1], \mathcal{K}_L \cap \mathcal{K}_R = \emptyset.$$

Обе части геометрически похожи на исходный фрактал, но масштабированы с коэффициентом $\lambda = \frac{1}{3}$. Рассмотрим s -меру Хаусдорфа для пыли Кантора и применим свойство аддитивности меры для непересекающихся множеств и масштабное свойство:

$$H^s(\mathcal{K}) = H^s(\mathcal{K}_L) + H^s(\mathcal{K}_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(\mathcal{K}) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(\mathcal{K}).$$

Предполагая, что $0 < H^s(\mathcal{K}) < \infty$ при критическом значении $s = \dim_H \mathcal{K}$, разделим обе части равенства $H^s(\mathcal{K}) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(\mathcal{K})$ на $H^s(\mathcal{K})$. Получим уравнение $1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^s$, откуда $s = \dim_H \mathcal{K} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Размерность подобия

Рассмотрим произвольный набор преобразований подобия плоскости $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ с коэффициентами подобия $k_j < 1, \forall j = 1, 2, \dots, m$.

Теорема 1. [2] *Существует единственное непустое компактное множество \mathcal{F} , для которого $\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_j(\mathcal{F})$.*

Множество \mathcal{F} называется *аттрактором* или *инвариантным множеством* системы преобразований подобия. По сути, с набором преобразований подобия можно единственным образом связать аттрактор этой системы. Теорема 1 позволяет строить новые фрактальные объекты с помощью последовательных приближений, причем в некоторых случаях аттрактор является фракталом. Всегда ли это так? Можно ли определить размерность аттрактора заранее по набору коэффициентов подобия?

Определим неотрицательное число $s \geq 0$ как решение уравнения

$$k_1^s + k_2^s + \dots + k_m^s = 1.$$

Единственное решение данного уравнения называется *размерностью подобия* $s = s(\mathcal{F})$ аттрактора \mathcal{F} . Для классических фракталов вычислить размерность подобия не представляет труда.

В качестве **примера** на вычисление размерности подобия рассмотрим опять канторово множество. Система преобразований для пыли Кантора \mathcal{K} состоит из двух преобразований подобия: $f_1(x) = \frac{1}{3}x, f_2(x) = \frac{1}{3}(x - 1) + 1$ с коэффициентами подобия $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$. Самоподобие фрактала выражается: $\mathcal{K} = f_1(\mathcal{K}) \cup f_2(\mathcal{K})$. Решая соответствующее уравнение для размерности подобия: $\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$, получаем $s = s(\mathcal{K}) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Для классических фракталов всегда получается равенство $s(\mathcal{F}) = \dim_H \mathcal{F}$. В общем случае это равенство не выполняется. Приведем достаточное условие [2], обеспечивающее совпадение размерностей Хаусдорфа-Безиковича и подобия. Говорят, что выполнено *условие Морана*, если существует непустое открытое множество V такое, что

$$\bigcup_{j=1}^m f_j(V) \subset V, \quad f_j(V) \cap f_k(V) = \emptyset, j \neq k.$$

Теорема 2. *Если выполнено условие Морана, то размерность подобия аттрактора \mathcal{F} совпадает с его хаусдорфовой размерностью*

$$s(\mathcal{F}) = \dim_H \mathcal{F}.$$

В строгой математической теории под метрической или фрактальной размерностью понимается размерность Хаусдорфа-Безиковича. Однако это довольно сложное абстрактное понятие и рассчитать численно хаусдорфову размерность для произвольного фрактала (например, динамического) достаточно сложно, а то и невозможно. По этой причине вводятся определения фрактальной размерности, допускающие численный расчет (рассмотренный выше клеточный метод – один из самых простых). Как правило, они являются некоторыми оценками размерности Хаусдорфа-Безиковича и могут быть основаны как на метрических свойствах множеств, так и учитывать вероятностную меру. Существует еще несколько различных определений размерности, например, размерность Минковского или химическая размерность фрактала [6]. Суть такого многообразия размерностей в том, что существуют некоторые особые множества, для которых разные размерности принимают разные значения. Однако в практических приложениях чаще всего встречаются объекты, для которых все эти размерности совпадают, поэтому терминологически их часто не различают и говорят о фрактальной размерности объекта. Наиболее часто применяемые виды фрактальных размерностей представлены в [3-6]. В Приложении 1 приводятся алгоритмы методов оценки размерности [6] для некоторых часто встречающихся в расчётах типов данных.

Задания 5.

1. Посмотрите ролик о фракталах и фрактальной размерности [7].
2. Подберите набор преобразований подобия для классических конструктивных фракталов (см. п.1.2). Определите их размерность подобия.
3. Найдите фрактальную размерность: А) кривой Коха, снежинки и креста Коха; Б) ковра и решета Серпинского; В) пирамиды Серпинского и губки Менгера; Г) кривой Пеано; Д) кривой и острова Леви; Е) кривой Минковского.
4. Докажите масштабное свойство хаусдорфовой меры.

5. Докажите неравенство $H_\delta^t(\mathcal{F}) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(\mathcal{F})$ при $t > s, \forall \mathcal{F}, \forall \delta < 1$.
6. Докажите, что уравнение $k_1^s + k_2^s + \dots + k_m^s = 1$ действительно имеет единственное решение при $\forall k_j \in (0,1)$.
7. Проверьте, совпадают ли размерности Хаусдорфа-Безиковича и подобия для набора преобразований числовой оси множества $F = [0,1]: f_1(x) = \frac{2}{3}x, f_2(x) = \frac{2}{3}(x-1) + 1$. Объясните, почему.
8. Найдите фрактальную размерность модифицированного множества Кантора, в котором на каждом шаге выбрасывается центральная пятая часть каждого интервала. Как будет выглядеть для него набор преобразований подобия и чему будет равна размерность подобия?
9. Пусть дано число $r, 0 < r < \frac{1}{2}$. Из отрезка $[0,1]$ выбросим интервал длины $1 - 2r$ с центром в точке $\frac{1}{2}$. Получаем два отрезка длиной r . К каждому из них применим ту же процедуру: выбрасываем средний интервал длиной $r(1 - 2r)$ и т.д. В пределе получим множество, которое называют *обобщенным фракталом Кантора*. Найдите его фрактальную размерность, набор преобразований подобия и вычислите размерность подобия.
10. Придумайте пример фрактала, фрактальная размерность которого в точности равна единице.
11. Придумайте множество, фрактальная размерность которого совпадает (не совпадает) с топологической размерностью.
12. Что можно взять в качестве множества V в определении условия Морана для решета и ковра Серпинского?
13. Придумайте набор преобразований плоскости и множество, при которых размерности подобия и Хаусдорфа-Безиковича совпадают (не совпадают).
14. Рассмотрите систему из четырех преобразований подобия плоскости: $f_j(x) = r(x - a_j) + a_j, j = 1, 2, 3, 4, 0 < r < \frac{1}{2}$, где a_j – вершины единичного квадрата. Какое множество задаётся этим набором преобразований подобия? Найдите его размерности подобия и Хаусдорфа-Безиковича.
15. За основу берётся единичный отрезок. Разделите исходный отрезок на четыре равные части, крайние из которых остаются на месте, а центральные заменяются фрагментом из пяти отрезков в виде буквы А. Далее процедура повторяется для каждого из 7 отрезков длины $\frac{1}{4}$. Постройте 5 итераций полученного фрактала. Найдите фрактальную и химическую размерности фрактала [6].

Лабораторный практикум №5

1. Напишите программу для вычисления фрактальной размерности (см. Приложение 1):
 - а) клеточным методом (или методом подсчёта занятых ячеек);
 - б) методом деления;
 - в) методом скользящего окна;
 - г) используя метод соотношения периметр-площадь;
 - д) методом полувариограмм.
2. Реализуйте на компьютере вычисление фрактальной размерности для:
 - а) конструктивного фрактала, б) динамического фрактала.

Исследовательские проекты

1. *Фрактальная проводимость* [8]. Рассмотрим прямоугольник с шириной 1. Пусть он целиком состоит из проводящего материала. Разделим его на две части диэлектрической перегородкой: на среднем горизонтальном сечении возьмём n -й шаг построения пыли Кантора K_n . На дополнительном к нему множестве – это интервалы, которые выбрасываются при построении – будем строить квадраты, в качестве диагоналей у которых берутся отбрасываемые интервалы. Эти квадратики заполняются диэлектриком (непроводящим материалом), что даёт предканторову перегородку. Зададим электрическое поле, потенциал которого равен единице на верхнем основании и нулю – на нижнем. Введём величину эффективной проводимости нашего прямоугольника в вертикальном направлении

$$J_n = \int_{K_n} j^2(x) dx,$$

где $j(x)$ – вектор плотности тока. Исследуйте предельную величину

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n,$$

то есть выясните, будет ли проводимость перегородки по фракталу Кантора.

2. *Диффузия через фрактальную щель* [8]. Пусть в единичном кубе имеется газ или другое вещество, подчиненное закону диффузии. Стенки куба непроницаемы, поэтому в процессе диффузии общая масса вещества остается постоянной. С течением времени вещество перераспределяется и концентрация выравнивается во всех точках куба, то есть распределение вещества становится равномерным по кубу. Возьмём среднее горизонтальное сечение куба и рассмотрим n -й шаг построения канторовой пыли на квадрате

F_n (см. задание 5.14). Дополнительное к F_n множество (это объединение всех выкидываемых крестов) будем считать стенкой, не проницаемой ни снизу, ни сверху. Тогда верхняя и нижняя половинки куба остаются связанными только через множество F_n и общие свойства диффузии сохраняются. Исследуйте, будет ли сохраняться диффузия, когда половинки кубов соприкасаются только по канторовой пыли на квадрате (при $n \rightarrow \infty$).

3. *Эксперимент Ричардсона.* Используя различные карты и масштабы, найдите фрактальную размерность границы России, Удмуртии, Татарстана или других субъектов РФ. Проведите сравнительный анализ.

4. Проведите сравнительный анализ различных способов вычисления фрактальной размерности.

5. Исследуйте фрактальные свойства дорог Удмуртии и города Ижевска, найдите их фрактальные размерности.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Учеб. пособие. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 1999. – 140 с. – ISBN 5-85746-282-7
2. Edag Gerald A. Measure, Topology and Fractal Geometry. N.Y.: Springer-Verlag, 1990. – 293 p.
3. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 516 с. – ISBN 978-5-93972-920-8
4. Латыпова Н.В. Компьютерная обработка данных. Фракталы: учеб. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2012. – 78 с., прил. – ISBN 978-5-4312-0138-7
5. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.
6. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3
7. Fractals are typically not self-similar // 3Blou1Brown. – Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=gB9n2gHsHN4>
8. Жиков В.В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал. – 1996, №12. – С. 109-117.
9. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7

1.6. Системы итерируемых функций

В изложении истории появления систем итерируемых функций, СИФ (Iterated Function System, IFS) будем придерживаться [1]. В 1981 г. Джон Хатчинсон опубликовал статью «Фракталы и самоподобие», в которой была представлена теория построения фракталов с помощью СИФ. Четыре года спустя появилась статья Майкла Барнсли и Стефана Демко, в которой приводилась уже достаточно стройная теория IFS. В 1987 г. Барнсли основал компанию Iterated Systems, основной деятельностью которой является создание новых алгоритмов и ПО с использованием фракталов. Всего через год, в 1988 г., он выпустил книгу «Фракталы повсюду». Помимо описания СИФ, в ней был получен результат, который лежит в основе математического обоснования идеи фрактального сжатия (компрессии). Если построение изображений с помощью фрактальной математики можно назвать прямой задачей, то построение по изображению IFS – это обратная задача. Довольно долго она считалась неразрешимой, однако Барнсли построил соответствующий алгоритм и в 1990-1991 годах эту идею защитил патентами. Если коэффициенты занимают меньше места, чем исходное изображение, то алгоритм является алгоритмом архивации. Первая статья об успехах Барнсли в области компрессии появилась в журнале BYTE в январе 1988 г. В ней не описывалось решение обратной задачи, но приводилось несколько изображений искусственной природы, сжатых с коэффициентом 1:10000 (что было совершенно ошеломительно), но «среднее изображение требовало для сжатия порядка 100 часов работы на мощной двухпроцессорной рабочей станции, причем с участием человека». Отношение к новому методу изменилось в 1992 г., когда Арнауд Джеквин, один из сотрудников Барнсли, при защите диссертации описал практический алгоритм и опубликовал его. Этот алгоритм был крайне медленным и не претендовал на компрессию в 10000 раз; но его несомненным достоинством было то, что вмешательство человека удалось полностью исключить. Сегодня все известные программы фрактальной компрессии базируются на алгоритме Джеквина. В 1993 г. вышел первый коммерческий продукт компании Iterated Systems. В 1994 г. Ювал Фишер предоставил во всеобщее пользование исходные тексты исследовательской программы, в которой использовалось разложение изображения в квадродерево и были реализованы алгоритмы оптимизации поиска. Позднее появилось еще несколько исследовательских проектов, которые в качестве начального варианта программы использовали программу Фишера. В июле 1995 г. в Тронхейме

(Швеция) состоялась первая школа-конференция, посвященная фрактальной компрессии.

Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, где X – множество, а d – заданная на множестве метрика. Обозначим через $H(X)$ пространство всех непустых компактных подмножеств X . Определим расстояние между элементом $x \in X$ и множеством $B \in H(X)$ следующим образом:

$$d(x, B) = \min_{y \in B} d(x, y).$$

Этот минимум существует, так как B – компакт. Определим теперь расстояние между множествами $A \in H(X)$ и $B \in H(X)$ как

$$d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B).$$

В силу компактности A этот максимум существует и конечен. Рассмотрим функцию $h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$, которая называется *метрикой Хаусдорфа*, а пространство $(H(X), h)$ – метрическим пространством Хаусдорфа. Метрика в пространстве $H(X)$ позволяет ввести понятие предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N: h(E_n, E) < \varepsilon.$$

Рассмотрим совокупность сжимающих отображений $\{T_k\}_{k=1}^m$ с коэффициентом сжатия $0 < s_k < 1, k = 1, 2, \dots, m$, действующих на \mathbb{R}^n . Для любого множества A введём отображение $T(A) \stackrel{\text{def}}{=} T_1(A) \cup T_2(A) \cup \dots \cup T_m(A)$, которое называют *преобразованием Хатчинсона*.

Пусть E_0 – произвольный компакт. Построим итерационную схему:

$$E_1 = T(E_0), \quad E_2 = T(E_1) = T(T(E_0)) \stackrel{\text{def}}{=} T^{\{2\}}(E_0), \dots,$$

$$E_n = T(E_{n-1}) = T(T(E_{n-2})) = T(T \dots (T(E_0)) \dots) \stackrel{\text{def}}{=} T^{\{n\}}(E_0).$$

Совокупность сжимающих отображений $\{T_k\}_{k=1}^m$ вместе с введённой итерационной схемой называют *системой итерируемых функций (СИФ)*. Основная задача – выяснить, когда СИФ порождает предельное множество

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$$

в смысле сходимости в метрике Хаусдорфа. Если предел существует, то множество E называют *аттрактором СИФ*. Причем аттрактор часто

оказывается фрактальным множеством. Имеет место следующее утверждение [2].

Теорема 1. *Преобразование Хатчинсона является сжимающим отображением на H с хаусдорфовой метрикой h и коэффициентом сжатия*

$$s = \max_{k=1, \dots, m} s_k.$$

Любое аффинное преобразование T на плоскости, переводящее точку с координатами (x, y) в точку (u, v) , можно представить в следующем виде:

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, где матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ отвечает за повороты и масштабирование, а вектор-столбец $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ – за параллельные переносы. Все аффинные преобразования, входящие в СИФ, удобно записывать в виде одной матрицы, каждая строчка которой задаёт аффинное преобразование СИФ через коэффициенты a, b, c, d, e, f , а количество строчек соответствует количеству преобразований m :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу, обратную к нахождению аттрактора СИФ [2]. Пусть имеется некоторое изображение I . Необходимо найти совокупность сжимающих аффинных отображений, для которых данное множество является аттрактором. Решение обратной задачи имеет большое значение для таких прикладных исследований, как сжатие изображений, использующееся при передаче изображений в реальном времени, например при передаче телевизионного сигнала.

Один привлекательный способ сжатия изображения заключается в том, чтобы разбить исходное изображение на компоненты и считать их аттракторами некоторых СИФ. Так как каждое аффинное преобразование на плоскости определяется шестью коэффициентами, то полное изображение может быть закодировано достаточно малым их числом. Тогда по этим коэффициентам можно восстановить изображение как совокупность аттракторов с помощью алгоритма СИФ. Проблема заключается в нахождении сжимающих аффинных преобразований для данного аттрактора. Для произвольного аттрактора отыскание аффинных отображений может

оказаться достаточно сложной задачей. Решение её основано на *методе коллажа*, использующем свойства фрактальных изображений.

Пусть некоторая конфигурация X представляет собой объединение (коллаж) N непересекающихся множеств, связанных с X преобразованиями подобия $\{T_k\}_{k=1}^m$ с коэффициентами подобия $s_k < 1, k = 1, 2, \dots, m$. Тогда X – аттрактор СИФ, заданной преобразованиями $\{T_k\}_{k=1}^m$. Например, треугольник Серпинского есть коллаж из трёх копий самого себя, уменьшенных в два раза. Оценка исходного изображения и построенного аттрактора в метрике Хаусдорфа определяется следующей теоремой [2, с. 128].

Теорема 2. Пусть I – непустой компакт (исходное изображение), $\{T_k\}_{k=1}^m$ – сжимающие отображения с коэффициентами сжатия $s_k < 1, k = 1, \dots, m$, E – аттрактор СИФ, связанной с этими отображениями, и $s = \max_k s_k$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $h(I, \cup_{k=1}^m T_k(I)) < \varepsilon$, то $h(I, E) < \frac{\varepsilon}{1-s}$.

Фрактальная архивация основана на том, что мы представляем изображение в более компактной форме – с помощью коэффициентов системы итерируемых функций. Преобразованию подвергаются точки в трехмерном пространстве (x – координата, y – координата, яркость). Процесс компрессии заключается в поиске коэффициентов СИФ, а процесс декомпрессии – в проведении итераций системы до стабилизации полученного изображения (аттрактора СИФ). Достоинства алгоритмов фрактального сжатия изображений – очень маленький размер упакованного файла и малое время восстановления картинки. Фрактально упакованные картинки можно масштабировать без появления пикселизации. Однако процесс сжатия занимает продолжительное время и порой длится часами. В основе его лежит поиск больших кусков изображения подобных некоторым маленьким кусочкам. В выходной файл записываются только коэффициенты преобразований подобия. Данный алгоритм сжатия эффективен, прежде всего, для изображений, имеющих фрактальную структуру. Подробнее об алгоритмах фрактального сжатия можно найти в [3-5].

Задания 6.

1. Проверьте, что для метрики Хаусдорфа $h(A, B)$ действительно выполнены аксиомы метрики.
2. Докажите теоремы 1 и 2.
3. Найдите системы итерируемых функций для классических фракталов.

4. Аффинные преобразования для треугольника Серпинского в матричной форме имеют вид:

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

Являются ли они СИФ? Запишите для них преобразование Хатчинсона и найдите его коэффициент сжатия. Запишите аффинные преобразования, входящие в СИФ, в виде одной матрицы.

5. Фрактал Лист задаётся матрицей [6]:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.377 & 0.06 & 0.6 & 0.3533 & 0 \\ -0.8 & -0.1867 & 0.1371 & 0.8 & 1.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Что собой представляет совокупность сжимающих преобразований данной СИФ?

6. В Приложении 2 (см. также [2,6]) представлены два алгоритма построения СИФ: детерминированный и рандомизированный. Какова их суть и в чём отличие?

Лабораторный практикум №6

Реализуйте на компьютере алгоритм построения фрактала с помощью СИФ:
а) детерминированный, б) рандомизированный.

Исследовательские проекты

1. *Фрактальное сжатие изображений.* Реализуйте один из алгоритмов фрактального сжатия изображений. Исследуйте его достоинства и недостатки. Можно ли алгоритмы фрактального сжатия использовать для архивации других данных?
2. *Фрактальное сжатие видео.* Реализуйте один из алгоритмов фрактального сжатия видео. Исследуйте его достоинства и недостатки.
3. *Снежинка Коха (с вероятностью).* Реализуйте рандомизированный алгоритм построения снежинки Коха, позволяющий управлять вероятностью p ориентации угловых элементов внутрь фигуры, а не только наружу, как это делается при классическом построении. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного фрактала от вероятности p , задаваемой в интервале от 0 до 1 с шагом 0.1. Сравните полученные результаты с теоретической величиной фрактальной размерности классической снежинки Коха. [6]

4. *Снежинка Коха (с параметром шага)*. Реализуйте рандомизированный алгоритм построения снежинки Коха, позволяющий управлять параметром δ – относительной длины удаляемых на каждом шаге элементов. Величина $\delta = 0$ соответствует нулевой длине удаляемого элемента, $\delta = 1$ соответствует случаю, когда исходный отрезок удаляется целиком, при $\delta = \frac{1}{3}$ получаем классический вариант снежинки Коха. Высота достраиваемого равностороннего углового элемента определяется через длину исходного отрезка l и величину δ соотношением: $h = \frac{\sqrt{3}}{4}l(1 - \delta)$. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного фрактала от параметра δ , задаваемого в интервале от 0 до 1 с шагом 0.1. Сравните полученные результаты с теоретической величиной фрактальной размерности классической снежинки Коха. [6]
5. *Решето (ковёр) Серпинского (с вероятностью)*. Реализуйте рандомизированный алгоритм построения решета (ковра) Серпинского, позволяющий управлять параметром p – вероятностью удаления каждого очередного рассматриваемого элемента. При этом могут удаляться не только центральные элементы, как это делается в классических вариантах, но и все другие, получаемые при разбиении на предыдущих итерациях. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного фрактала от вероятности p , задаваемой в интервале от 0 до 1 с шагом 0.1. Сравните полученные результаты с теоретической величиной фрактальной размерности классического решета (ковра) Серпинского. [6]
6. *Игра «Хаос»*. Реализуйте алгоритм для построения фрактальных множеств точек. Для этого на некоторой окружности радиуса R , лежащей в плоскости, на которой производится построение фрактала, выбирается несколько точек-полюсов, являющихся вершинами правильного m -угольника. Эти точки являются вспомогательными и не принадлежат фракталу. Далее в качестве начальной выбирается некоторая произвольная точка, лежащая внутри многоугольника, начиная с которой проводят следующий итерационный процесс. Случайным образом выбирается одна из точек-полюсов, которая соединяется с текущей (рабочей) точкой. Этот отрезок делится на две части так, что отношение длины отрезка, соединяющего текущую точку с точкой деления, к длине всего отрезка составляет величину p , являющуюся параметром задачи. Полученная точка деления

принимается в качестве новой рабочей точки для следующей итерации, и т.д. Последовательность сгенерированных таким образом рабочих точек, за исключением первых нескольких точек порядка 100, образует фрактальное множество. В частности, при $m = 3, p = 0.5$ получается решето Серпинского. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного фрактала от параметра p , задаваемого в интервале от 0 до 1 с шагом 0.1. Сравните полученные результаты с теоретической величиной фрактальной размерности классического решета Серпинского. [6]

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Паршин Д.А. Физика открытых систем // Лекционный курс. – Режим доступа: <http://lms.physics.spbstu.ru/course/view.php?id=29>
2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7
3. Ватолин Д., Ратушняк А., Смирнов М., Юкин В. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. – 384 с.
4. Сэломон Д. Сжатие данных, изображений и звука. – М.: Техносфера, 2004. – 368 с.
5. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003. – 320 с.
6. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.

1.7. Фрактальные кластеры

Совокупность разных условий, при которых происходит рост кластера, составляет основу моделей, используемых для анализа процесса роста кластера и его свойств [1-3]. Компьютерные модели, использующие определенные алгоритмы для описания движения и слипания твердых частиц и кластеров в процессе роста фрактального кластера, позволяют сконструировать фрактальный кластер и проанализировать как его свойства, так и характер роста. Модели сборки фрактального кластера в зависимости от физических условий, при которых она протекает, можно разделить по следующим свойствам:

- характер процесса (кластер - частица или кластер - кластер);

- характер движения частиц или кластеров (прямолинейное или броуновское);
- характер объединения частиц или кластеров в зависимости от вероятности слипания при их соприкосновении.

Характер процесса зависит от реальных физических условий. В некоторых случаях процесс роста кластера происходит в результате присоединения к нему отдельных частиц, в других случаях на первой стадии процесса имеется много частиц, которые объединяются в малые кластеры, а те в свою очередь – в большие кластеры. Так в конечном итоге собирается фрактальный кластер. При этом его компактность и физические свойства зависят от характера движения частиц и кластеров в пространстве, так и от вероятности слипания частиц и кластеров при их соприкосновении.

Существует 3 вида моделей роста фрактального кластера:

- DLA-модель (Diffusion Limited Aggregation),
- CCA-модель (Cluster – Cluster Aggregation),
- RLCA-модель (Reaction Limited Cluster Aggregation).

Первая компьютерная модель для описания сборки кластера была предложена Т. Виттенем (Т. Vitten) и Л. Сандером (L. Sander) в 1981 году [1]. Она была названа DLA-моделью (Diffusion Limited Aggregation) или моделью ограниченной диффузией агрегации (ОДА). В этой модели предполагается, что частицы, совершающие броуновское движение в пространстве, соприкасаясь с кластером, с определенной вероятностью прилипают к нему, в силу этого осуществляется рост кластера. Эта модель позволяет описать эволюцию кластера и проследить за деталями его роста. Модель Виттена-Сандера сыграла важную роль в исследовании фрактальных кластеров, ибо она предложила простой способ сборки кластера. Создание этой модели привлекло внимание к процессу формирования и роста фрактальных кластеров и послужило началом всестороннему моделированию этих процессов и созданию новых моделей и алгоритмов.

В простейшей постановке в двумерном пространстве модель Виттена-Сандера может быть описана следующим образом. Разобьем ограниченное двумерное пространство на множество квадратных ячеек, поместим в него одну частицу и будем добавлять по одной частицу. Каждая новая частица передвигается в соседнюю клетку случайным образом – её путь выбирается методом Монте - Карло. Если частица достигла границы пространства, то она отражается от неё. Движение частицы продолжается до тех пор, пока она не окажется по соседству с одной из частиц кластера. Тогда она останавливается

и закрепляется в данной ячейке, а в пространство запускается следующая частица. Таким способом, «выращивается» фрактальный кластер.

Алгоритм рассматриваемой модели может быть изменен. Например, можно отказаться от деления пространства на ячейки и рассматривать каждую частицу как диск в двумерном пространстве или шар в трехмерном пространстве, задав траекторию движения частиц кластера в виде ломаной линии. Столкновение частиц с частицей кластера с определенной вероятностью приводит к их склеиванию. Тогда пробная частица закрепляется на кластере в соответствующем положении и в пространство запускается следующая частица. Этот вариант называется решеточной DLA-моделью.

Физические условия, принципиально отличающиеся от DLA-модели, отвечают ССА-модели. В этом случае на начальной стадии в рассматриваемой области пространства находятся частицы, которые, двигаясь по определенным траекториям, сталкиваются друг с другом и слипаются в кластеры. На первой стадии процесса образуется большое число кластеров малых размеров, которые далее объединяются в кластеры больших размеров. Со временем число кластеров в пространстве будет падать, а их размеры расти. Ясно, что в этом случае образуется более рыхлые кластеры, чем в рамках DLA-модели, ибо при таком способе сборки у кластера труднее заполняются пустоты.

В рассмотренных моделях предполагалось, что соприкосновение частицы ведет к их слипанию с вероятностью порядка единицы. Другая физическая ситуация отвечает случаю, когда вероятность слипания при касании частицы мала. Тогда частицы глубже проникают в кластер, и в результате этого образуется более компактный кластер. Модель, отвечающая малой вероятности слипания при агрегации, называется RLCA-моделью.

Чаще всего с помощью классической модели ОДА моделируют два типа процессов: рост кристалла путём электроосаждения; образование вязких пальцев в пористых средах.

Рост кристалла путем электроосаждения. Процесс роста кристалла хорошо моделируется с помощью фрактальных кластеров, где агрегация взята в центральной точке плоскости или пространства. Частицы запускаются, как правило, по одной с окружности или сферы заданного радиуса, построенной вокруг центральной точки. Полученная модель точно

характеризует физические свойства процесса, такие, как форму, скорость роста кристаллов, возраст слоёв и т.п. (рис. 28 а).

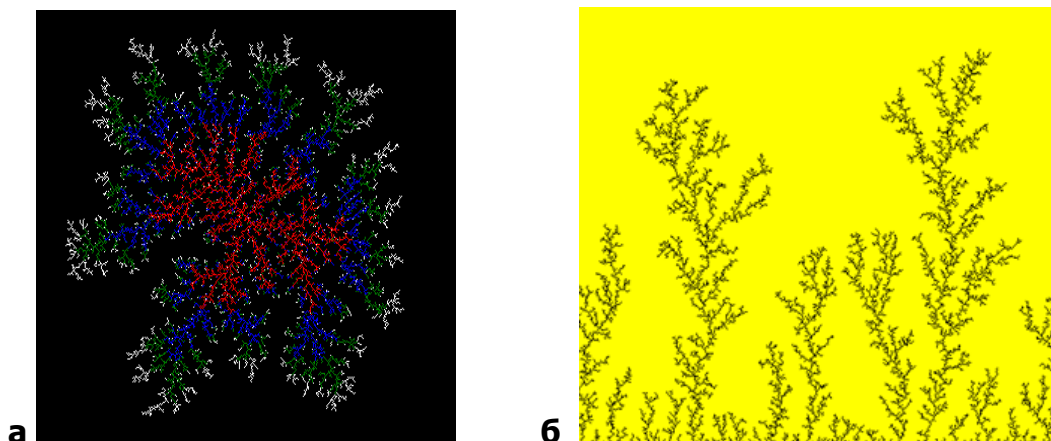


Рис.28. а) Рост кристалла; **б)** образование вязких пальцев [4]

Образование вязких пальцев в пористых средах. Проблема образования, так называемых вязких пальцев в пористых средах, имеет первостепенное значение для добычи нефти. При вытеснении жидкости с малой вязкостью другой жидкостью, с большей вязкостью, первоначально плоская поверхность фронта вытеснения переходит в поверхность, напоминающую пальцы перчатки (рис. 28 б). Последовательное дробление кончиков пальцев приводит к возникновению фрактальных кластеров. Вязкие пальцы наблюдались при закачке воды под давлением в нефтеносный пласт для повышения нефтеотдачи. Но из-за описанного эффекта вода опережает нефть и проникает значительно дальше, чем хотелось бы, и на поверхность выкачивается смесь, содержащая в основном воду. Анализ этого явления и борьба с ним очень важны для практики. Процесс образования вязких пальцев хорошо моделируется, если рост кластеров производится не из центральной точки, а с некоторой линии (на плоскости) или плоскости (в трехмерном пространстве), которые являются дном некоторого сосуда. Частицы запускаются из верхней части сосуда и в процессе своего хаотичного движения отражаются от боковых стенок и крышки, но оседают на его дне и растущих кластерах.

Часто при исследовании таких объектов прибегают к анализу пространственного распределения плотности вещества, или распределению массы объекта. Поэтому используют и другое название – массовые фракталы. Методы определения фрактальной размерности для массовых фракталов можно найти в [4].

Перколяционные фракталы. С. Бродбент (S. Broadbent) и Д. Хаммерсли (J. Hamersley) рассмотрели общую ситуацию, возникающую при случайном распространении жидкости через среду, когда абстрактные термины «жидкость» и «среда» могут быть интерпретированы в соответствии с физическим смыслом задачи. В обычных процессах диффузии случайность есть не что иное, как случайные блуждания частиц жидкости. Примером может служить нерегулярное тепловое движение молекул в жидкости. Другой пример случайности, «вмороженной» в среду, Хаммерсли назвал протеканием, или перколяционным процессом, поскольку жидкость в среде ведет себя, как вода в перколяторе (кофеварке).

Диффундирующая частица может достигать любой точки в среде. Иначе обстоит дело в случае протекания. Наиболее характерной особенностью перколяционных процессов является существование порога протекания, ниже которого процесс распространения жидкости ограничен конечной областью среды. В качестве примера Бродбент и Хаммерсли рассмотрели распространение заболевания деревьев, при котором те сбрасывают листву и перестают расти в саду, где деревья посажены в узлах квадратной решетки. Если расстояния между деревьями возрастают настолько, что вероятность заражения соседнего дерева падает ниже критического значения p_c , то заболевание по саду не распространяется. Порогом протекания для этой задачи служит вероятность $p_c = 0,59275$ для протекания от узла к узлу квадратной решетки. Другой пример – просачивание воды или радиоактивных отходов в трещины и разломы горной породы. Вопрос заключается в том, останется ли вода локализованной в каком-то объеме или будет распространяться все дальше и дальше. И в этой задаче можно ожидать, что существует критический порог концентрации трещин. Величину порога протекания можно определить с помощью численного моделирования. Аналогичной проблемой, имеющей огромный практический интерес, является распространение воды, вытесняющей нефть в пористых породах. В этом случае распространяющийся фронт жидкости (воды) может запереть нефть в некоторой области («ловушке»), что приводит, как показали К. Уилкинсон (K. Wilkinson) и Виллемсен (J. Willemsen), к инвазивной перколяции. Случайность, связанная с инвазией (вторжением) вытесняющей жидкости, зависит, помимо прочего, от динамики образования ловушек. Идеи и понятия теории протекания применимы и к распространению и взаимосвязи трещин и разломов в горных породах и в материалах, используемых в технике.

Во многих приложениях не существует резкого различия между перколяционными процессами и диффузией. Важным случаем является диффузия от источника. Возникающий фронт диффузии имеет геометрическую структуру, тесно связанную с фрактальной геометрией протекания. На это впервые обратил внимание Б. Саповал (B. Sapoval).

Задача о протекании допускает очень простое описание и приводит к множеству интереснейших фрактальных структур. Основные понятия теории протекания проиллюстрируем на примере двумерного протекания на квадратной решетке. Заполним случайным образом некоторую долю узлов квадратной решетки какими-либо объектами. Эти объекты соответствуют порам в матрице. Соседние поры соединены между собой небольшими капиллярными каналами, через которые жидкость, введенная в любую пору, может попасть в соседнюю пору. Поры или узлы, связанные с центром инъекции, то есть с узлом, куда вначале вводится жидкость, образуют так называемый кластер – совокупность соединенных между собой узлов и пор.

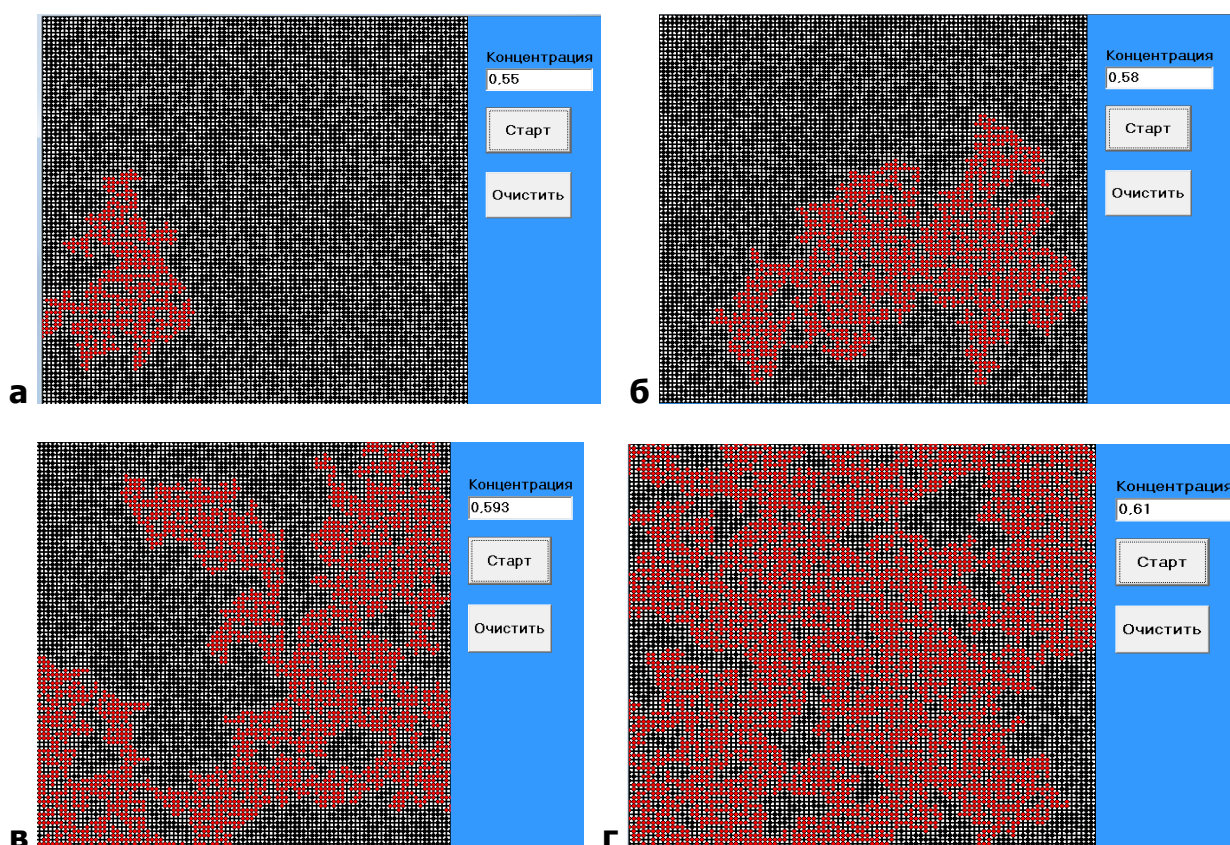


Рис.29. Процесс протекания на квадратной решетке размером 100×100 при вероятностях: **а)** 0.55; **б)** 0.58; **в)** 0.593; **г)** 0.61 [4].

На рис. 29 представлен процесс протекания на квадратной решетке размером 100×100 при различных вероятностях. Повышение вероятности

P иметь в решетке «пустую пору» приводит к тому, что если при $P = 0.55$ кластер имеет незначительные размеры, то при $P = 0.61$ кластер уже простирается на всю решетку и содержит значительную часть всех узлов. Кластер, который распространяется по всей решетке, называется *перколяционным кластером*. При повторении численных экспериментов каждый раз получаются кластеры новых конфигураций. Численное моделирование на очень больших решетках показывает, что вероятность образования простирающегося по всей решетке кластера при $P < P_c$ падает до нуля при $L \rightarrow \infty$, где решетка состоит из $L \times L$ узлов. При $P > P_c$ по всей решетке кластеру принадлежит конечная доля узлов. В случае протекания от узла к узлу на квадратной решетке критическая вероятность P_c , при которой первоначально возникает кластер, простирающийся по всей решетке, равна 0,593 [3]. Результаты экспериментов показывают, что перколяционный кластер на пороге протекания имеет фрактальную структуру с фрактальной размерностью. Фрактальный перколяционный кластер на пороге протекания часто называют внутренним перколяционным кластером. Фрактальная размерность перколяционных кластеров таких, как представлены на рис. 29, по оценкам имеет значение $1,89 \pm 0,03$ [3].

Подробнее о теории перколяции и о задачах, возникающих при использовании фрактальных перколяционных кластерах можно найти [4-7].

Лабораторный практикум №7

1. Реализуйте на плоскости модель Виттена-Сандера.
2. Реализуйте на компьютере моделирование роста кристаллов: а) на плоскости, частицы запускаются с окружности; б) в трехмерном пространстве, частицы запускаются со сферы. Исследуйте геометрические и физические свойства полученного фрактала. Вычислите фрактальную размерность полученного кристалла.
3. Реализуйте на компьютере моделирование процесса образования вязких пальцев: а) на плоскости; б) в трехмерном пространстве. Частицы запускаются сверху. Исследуйте полученную модель, вычислите её фрактальную размерность. Можно ли что-то сделать для ослабления эффекта образования вязких пальцев?
4. Реализуйте на компьютере моделирование процесса протекания и образования фрактального перколяционного кластера [5,7]: а) на одномерной решетке; б) на дереве Кейли; в) на квадратной решетке; г) на треугольной решетке; д) в трехмерном пространстве. С помощью

численных экспериментов найдите порог протекания от узла к узлу и фрактальную размерность полученного кластера.

Исследовательские проекты

1. Проведите сравнительный анализ геометрических и физических свойств DLA-модели и ССА-модели роста фрактальных кластеров: скорость роста, зависимость массы от диаметра и др.
2. Реализуйте RLCA-модель для роста кристалла [5] с использованием параметра p – вероятности прилипания частицы к кластеру в случае соприкосновения. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного кластера от параметра p , задаваемого в интервале от 0.1 до 1 с шагом 0.1. Исследуйте, что будет происходить с кластером, когда вероятность мала $p = 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$.
3. Реализуйте RLCA-модель для роста кластеров с осевой геометрией (вязкие пальцы) [5] с использованием параметра p – вероятности прилипания частицы к кластеру в случае соприкосновения. Постройте зависимость фрактальной размерности полученного кластера от параметра p , задаваемого в интервале от 0.1 до 1 с шагом 0.1. Проведите численные эксперименты при $p = 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$.
4. *Динамическая модель протекания* [7]. Предположим, что если в данный момент времени узел находится в возбужденном состоянии, то в следующий (дискретный) момент времени он возвращается в исходное состояние покоя, но может при этом с вероятностью p возбудить своих ближайших соседей по решетке. В результате разыгрывается стохастический процесс, напоминающий распространение инфекции. Проведите численное моделирование и исследуйте зависимость величины порога направленного протекания.
5. *Задача сфер* [7]. В трехмерном пространстве с помощью генератора случайных чисел задаются координаты центров сфер, имеющих радиус R . Две пересекающиеся сферы называются связанными друг с другом. Требуется определить критическую концентрацию центров, при которой возникает протекание по пересекающимся сферам.
6. Проведите исследование фрактальных свойств кластера какого-нибудь информационного *Web*-сайта.
7. Исследуйте, может ли модель фрактального кластера адекватно описывать авиасообщения, сеть автомобильных и железнодорожных дорог России. Найдите фрактальную размерность существующих кластеров транспортной инфраструктуры РФ.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Сандер Л.М. Фрактальный рост // В мире науки. – 1987. №3. – С. 62-69.
2. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991. – 136 с.
3. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
4. Бейдуллаев Э.И. Модели фрактальных кластеров, их построение и исследование // Выпускная квалификационная работа по специальности «Прикладная математика и информатика». – Ижевск: УдГУ, 2013. – 58 с.
5. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.
6. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. – 526 с.
7. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3

1.8. Понятие о мультифракталах

В изложении используется в основном материал из [1, с. 28-38]. *Мультифракталы* – это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от обычных фракталов, недостаточно введения его фрактальной размерности, а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно [2-3]. Такие фракталы обладают еще одним важным свойством – распределением по своему геометрическому носителю некоторой меры. В качестве такой меры может выступать практически что угодно: плотность населения, концентрация вещества, намагниченность, энергия. Важным моментом является то, что мера распределена по мультифракталу неравномерно, но самоподобно [2,3].

В качестве примера рассмотрим построение решета Серпинского с помощью классической игры «Хаос» [4, с. 107]. Возьмем равносторонний треугольник. Выберем наугад некоторую начальную точку внутри этого

треугольника. Далее наугад выберем одну из вершин треугольника (вероятность при этом равна $\frac{1}{3}$), соединим начальную точку с этой вершиной и на середине получившегося отрезка поставим новую точку, которая теперь будет играть роль начальной. Повторяя описанную процедуру, будем откладывать все новые точки на плоскости, которые за исключением первых 100, заполняют решето Серпинского, причём имеем однородный фрактал. Чтобы получить неоднородный фрактал решета Серпинского, отдадим предпочтение какой-нибудь одной вершине и будем выбирать ее, например, с вероятностью 0.8, другие же вершины оставим равноценными, но на их долю теперь будет приходиться вероятность 0.1. Результат такой «несимметричной игры» приводит к тому, что точки внутри треугольника распределены теперь крайне неравномерно. Большая их часть находится у выбранной вершины и ее прообразов; в то же время у двух других вершин (и их прообразов) точек имеется крайне мало. Полученное множество точек является фракталом, так как свойство самоподобия здесь сохранилось. Концентрация точек – это и есть та мера, которая распределена по геометрическому носителю. Причем фрактальная размерность не изменится и останется равной $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Таким образом, обычный фрактальный подход не позволяет отличить однородные объекты от неоднородных. Неоднородные фракталы обладают рядом новых свойств по сравнению с однородными фракталами, и для их полного описания одного показателя – фрактальной размерности – оказывается недостаточно. Для описания неоднородных фракталов вводят *обобщённые размерности Реньи* [1, 5, 6]. Покрываем множество точек в \mathbb{R}^n одинаковыми n -мерными кубиками с ребром ε и находим вероятность попадания точки в каждый кубик. Обобщенная размерность Реньи D_q имеет порядок q и вводится через обобщенную энтропию Реньи порядка q :

$$H_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^N P_i^q,$$

где P_i – вероятность обнаружения точки множества в i -м элементе покрытия. Тогда размерность порядка q есть

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log H_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon^{-1}}.$$

Обычный однородный фрактал обладает только одной размерностью (все размерности Реньи совпадают с фрактальной размерностью), поэтому

его часто называют *монофракталом*, противопоставляя *мультифракталам*, для описания которых нужен целый спектр размерностей Реньи. Обобщенные размерности Реньи не являются, строго говоря, фрактальными размерностями в общепринятом понимании этого термина. Поэтому наряду с ними для характеристики мультифрактала часто используют *функцию мультифрактального спектра* (или *спектр сингулярностей* мультифрактала), к которой больше подходит термин фрактальная размерность [1]. Физический смысл такой функции заключается в том, что она представляет собой размерность Хаусдорфа некоего однородного фрактального подмножества из исходного множества F , характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек. Соответственно набор различных значений функции мультифрактального спектра представляет собой спектр фрактальных размерностей однородных подмножеств, на которые можно разбить исходное множество F . Термин мультифрактал можно понимать как некое объединение различных однородных фрактальных подмножеств исходного множества, каждое из которых имеет свое собственное значение фрактальной размерности.

Лабораторный практикум №8

1. Реализуйте на компьютере построение неоднородного решета Серпинского с помощью игры «Хаос». Поэкспериментируйте с вероятностью и найдите его фрактальную размерность.
2. Используя игру «Хаос», реализуйте на компьютере построение одного из классических фракталов, сделав его неоднородным. Поэкспериментируйте с вероятностью и найдите его фрактальную размерность.

Исследовательские и информационные проекты

1. Сделайте обзор использования мультифракталов в различных областях науки.
2. Исследуйте возможности применения размерности Ляпунова, информационной и корреляционной размерностей.
3. Исследуйте, как обобщённая размерность Реньи связана с клеточной, корреляционной, информационной и другими размерностями. Сделайте обзор применения этих размерностей на практике.
4. Проведите исследование о функции мультифрактального спектра и о возможностях её использования.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3
2. Божокин С. В. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск, 2001. – 128 с.
3. Федер Е. Фракталы; Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с., ил.
4. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7
5. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.
6. Латыпова Н.В. Компьютерная обработка данных. Фракталы: учеб. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2012. – 78 с., прил. – ISBN 978-5-4312-0138-7

Глава 2. Фрактальные временные ряды

Важным с практической точки зрения частным случаем фрактальных объектов являются фрактальные временные ряды (ВР). Начиная с конца 20-го века, тема хаотических временных рядов популярна в научных журналах и исследованиях. Рассматриваются самые разные ряды, описывающие как геофизические, экономические, медицинские процессы, так и ежедневные вариации уровня преступности или ДТП в регионе, колебания запросов определенных Интернет-сайтов и т.д. Все эти ряды обычно порождаются сложными нелинейными системами, описание которых в виде дифференциальных уравнений или дискретных отображений обычно связано с большими трудностями. Однако уже установлено, что такие ряды, как правило, являются фракталами. Это означает, что характер их поведения остается неизменным на всех масштабах, вплоть до минимального, несмотря на крайнюю их нерегулярность. Другими словами, с точностью до масштабного фактора, такие ряды на разных масштабах выглядят примерно одинаково [1] (см. рис. 2).

Классическая статистика базируется на центральной предельной теореме (или законе больших чисел), которая утверждает, что по мере проведения все большего числа наблюдений, предельное распределение случайных значений будет нормальным распределением. Это означает, что события должны быть независимыми, то есть не должны влиять друг на друга, и при этом все они должны иметь одинаковую вероятность наступления. Долгое время предполагалось, что поведение большинства реальных социально-экономических систем подчиняется нормальному или «почти нормальному» закону.

К началу 90-х годов прошлого столетия фактически отпали сомнения в том, что рынки капитала не подчиняются нормальному закону. Вместе с этим появилось осознание того, что для адекватного моделирования этих рынков нужен новый инструментарий. Многие исследователи пришли к уверенности в том, что подходящий инструментарий новой статистики уже существует в виде непараметрической методологии, которая была открыта Х.Е. Хёрстом, и используется для различения случайного временного ряда и фрактального временного ряда. Дальнейшие исследования Хёрста и других ученых

привели к открытию существования памяти практически во всех ВР, отражающих эволюцию явлений природы – выпадение осадков, пятна на солнце, годовые кольца и т.д. Осознание универсальности этого факта появилось спустя треть века, когда многочисленными исследователями было установлено, что долговременная память присуща многим ВР, отражающим динамику эволюционных процессов в социально-экономической и других сферах человеческой деятельности [2].

2.1. Показатель Хёрста

Метод нормированного размаха, предложенный первоначально Хёрстом для анализа временной зависимости стока воды из различных рек и озёр, может быть применен для определения фрактальной размерности D и других временных рядов и однозначных самоаффинных кривых [3,4]. Этот метод, предложенный Бенуа Мандельбротом, основан на анализе размаха случайной величины и её среднеквадратичного отклонения [5].

Хёрст знал о работе Эйнштейна (1908), в которой обосновывалось следующее утверждение: в процессе броуновского движения случайная частица проходит расстояние R , которое увеличивается пропорционально квадратному корню из времени T наблюдения за этой частицей, то есть $R \approx \sqrt{T}$. Отметим, что это уравнение используется, например, в финансовой экономике для того, чтобы вычислить стандартное отклонение. Хёрст пронормировал размах R стандартным отклонением S и представил следующее обобщение вышеуказанного уравнения: $R/S \approx C\tau^H$, где C – константа и τ – число наблюдений (уровней), составляющих рассматриваемый временной ряд (ВР). Значение R/S называют *нормированным размахом*, а показатель степени H – показателем Хёрста. Если уровни наблюдаемого ВР распределены независимо, то должно выполняться равенство $H = 0.50$. Но Хёрст обнаружил, что $H = 0.91$. Последнее означает, что нормированный размах увеличивается быстрее, чем квадратный корень из времени, то есть рассматриваемый ВР обладает долговременной памятью [2].

Алгоритм метода Хёрста

1) Пусть $\xi(t)$ – последовательность измерений (исследуемый временной ряд) при $t \in [1, \tau]$. Вычислим среднее значение этой величины за время τ :

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t).$$

2) Найдём $X(t, \tau)$ – накопленные отклонения от среднего значения для каждого периода:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{\xi(u) - \langle \xi \rangle\}.$$

3) Вычислим размах $R(\tau)$, как разность между максимальным и минимальным из накопившихся отклонений $X(t, \tau)$ в пределах каждого периода:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau).$$

4) Рассчитаем стандартное отклонение (квадратный корень из дисперсии) для каждого периода τ :

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{u=1}^t \{\xi(u) - \langle \xi \rangle\}^2}$$

5) Вычисляем значение R/S .

6) На каждом шаге уменьшаем период τ вдвое и повторяем шаги 2-6 до тех пор, пока значение R/S не будет меньше некоторого маленького положительного числа.

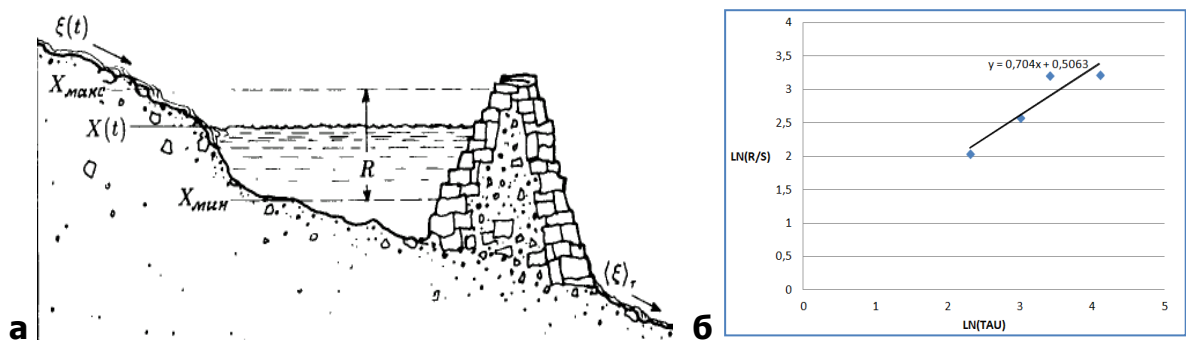


Рис.30. а) Иллюстрация к методу Хёрста; **б)** Пример нахождения показателя Хёрста методом наименьших квадратов

На каждом шаге число независимых интервалов будет удваиваться. Результаты R/S , соответствующие одному и тому же значению запаздывания τ усредняются и вместе со значениями τ откладываются в билигарифмических координатах. В результате получится некоторое множество точек на плоскости, которая образована координатными осями $x = \ln(\tau)$, $y = \ln(R/S)$. Методом наименьших квадратов находим угловой коэффициент прямой линейной регрессии, который даёт значение показателя Хёрста (рис. 30), представляющий собой меру персистентности – склонности процесса к трендам.

Хёрстом был установлен следующий эмпирический закон:

$$\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \sim \tau^H,$$

где H – показатель Хёрста, связанный с фрактальной размерностью D кривой (BP) соотношением: $D = 2 - H$.

Классификация BP

$H = 0.5$ указывает на случайный процесс с независимыми приращениями. События случайны и некоррелированы. Настоящее не влияет на будущее. Размах накопленных отклонений должен увеличиваться пропорционально квадратному корню из времени.

$0 < H < 0.5$ соответствует антиперсистентным (эргодическим) рядам. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем. И чем меньше H , тем больше эта вероятность. В таких процессах после возрастания переменной обычно происходит её уменьшение, а после уменьшения – возрастание. Наличие изломов в зависимости $R/S(\tau)$ свидетельствует о наличии характерных временных масштабов и/или периодичностей. Неустойчивость такого антиперсистентного ряда зависит от близости H к нулю: приближение влечёт усиление изменчивости ряда.

$0.5 < H < 1$ соответствует персистентным (трендоустойчивым) рядам. Если ряд возрастает (убывает) в предыдущий период, то вероятно, что он будет сохранять эту тенденцию еще какое-то время в будущем. Наблюдения не являются независимыми. Каждое наблюдение несёт память обо всех предшествующих событиях. Эта память долговременная, теоретически она сохраняется навсегда. Недавние события оказывают более сильное влияние, по сравнению с отдалёнными событиями. В долговременном масштабе система есть результат длинного потока взаимосвязанных событий. Нынешние события определяют будущее. Трендоустойчивость поведения,

или сила персистентности, увеличивается при приближении H к единице. Приближение H к 0.5, делает ряд более зашумлённым и менее трендовым.

Используются также другие названия: случайный процесс с $H = 0.5$ называют коричневым шумом (от англ. brown – коричневый), персистентный – розовым шумом, антиперсистентный – чёрным. Большинство временных рядов наблюдаемых в природе и науке, обычно можно отнести к одному из рассмотренных классов. Так коричневому шуму соответствует одномерное броуновское движение (так же долгое время предполагалось, что этим процессом описывается поведение цен на бирже). Розовым шумам соответствуют временные ряды, наблюдаемые в процессах турбулентности, к этому же типу поведения относятся ряды, описывающие цены финансовых активов. Чёрные шумы регистрируются в разливах рек, солнечной активности, статистике природных и техногенных катастроф; некоторые исследователи полагают, что поведение цен акций на бирже относятся к этому классу процессов.

Другим способом, позволяющим рассчитать показатель Хёрста для различной глубины анализа τ , является *метод исключения тренда* (Detrended fluctuation analysis, *DFA*). Это широко известное средство исследования корреляционных зависимостей во временных рядах. Следуя сложившейся в экономических исследованиях практике, две модификации: с линейной аппроксимацией и аппроксимацией четвертого порядка для краткости обозначают соответственно как *DFA-1* и *DFA-4* [6].

Алгоритм метода исключения тренда

1. Исследуемый ВР $x(t)$, содержащий N значений, разбивается на $\frac{N}{\tau}$ непересекающихся интервалов. При этом каждый интервал содержит τ значений временного ряда.
2. В пределах каждого интервала осуществляется линейная аппроксимация ряда $x(t)$ методом наименьших квадратов – выделяется локальный тренд: $y_j(t) = a_j t + b_j$, где a_j и b_j – константы для каждого интервала.
3. Для каждого интервала вычисляется величина:

$$F_j^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{t=j\tau+1}^{(j+1)\tau} (x(t) - y_j(t))^2.$$

Далее рассчитывается следующий показатель:

$$F^2(\tau) = \frac{\tau}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N}{\tau}-1} F_j^2(\tau).$$

4. Строя зависимость $\log F(\tau)$ и $\log \tau$, методом наименьших квадратов определяем наклон аппроксимирующей прямой полученной зависимости, который оценивает значение показателя Хёрста H . Тогда фрактальная размерность временного ряда: $D = 2 - H$.

Для модификации *DFA-m* ($m > 1$) вместо линейной аппроксимации (второй этап описанной выше процедуры) применяется аппроксимация более высоких порядков (например, для *DFA-4* в виде многочлена четвертой степени).

Одно из практических применений фрактального анализа состоит в исследовании взаимосвязей во временном ряду. Доказано, что если фрактальная размерность принимает значение 1.5, то приращения во временном ряду независимы между собой. Случай, когда фрактальная размерность меньше 1.5, соответствует персистентному ряду, характеризующемуся эффектами «долговременной памяти». Если фрактальная размерность больше 1.5, то получаем антиперсистентное поведение временного ряда.

Курсовая динамика валют развитых стран, не подвергшихся валютным кризисам, характеризуется наиболее стабильной фрактальной структурой: их фрактальная размерность практически не отличается от значения 1.5. Такое состояние обеспечивает устойчивость макроэкономических систем развитых стран. Перед валютными кризисами курсы валют развивающихся стран обладают завышенными или заниженными значениями фрактальной размерности по отношению к 1.5. В большинстве случаев фрактальная размерность отклоняется от значения 1.5 в меньшую сторону, что свидетельствует о формировании инвесторами «стадного» поведения. После завершения валютного кризиса и наступления фазы послекризисной стабилизации фрактальные размерности приближаются к значению 1.5 [6].

В целях исследования нестационарной динамики фрактальной размерности применяют *метод «скользящего окна»*. Суть его в следующем. В начале ряда данных выделяется последовательность значений, и для этих данных рассчитывается фрактальная размерность, например, методом *DFA-1* или Хёрста. Далее интервал передвигается вправо вдоль временного ряда на одно значение и снова вычисляется фрактальная размерность. Повторяя эту

процедуру в течение исследуемого периода, получаем локальные значения фрактальной размерности.

Лабораторный практикум №1

1. Напишите программу для вычисления фрактальной размерности временного ряда клеточным методом.
2. Используя метод Хёрста, исследуйте поведение реальных временных рядов таких, как стоки рек, запасы продуктов и энергоресурсов, изменение курсов валют и др.
3. Используя метод исключения трендов, исследуйте поведение реальных временных рядов таких, как стоки рек, запасы продуктов и энергоресурсов, изменение курсов валют и др.
4. Используя метод скользящего окна, исследуйте динамику изменения фрактальной размерности некоторого временного ряда (котировки курса валют, нефти, золота, акций и др.).

Исследовательские проекты

1. *Моделирование шумов.* Шумом называют любой сигнал, который имеет нерегулярную, хаотическую форму. В таком сигнале всплески и падения сменяются с виду бессистемно, совершенно случайно. Тем не менее, как и любой сигнал, шум можно анализировать так же, как анализируют любые сигналы. Сгенерируйте три типа шумов: белый, коричневый и розовый. Для построения белого шума, нужно наугад выбирать и записывать числа от 1 до 1000. График полученной совершенно случайно последовательности чисел даст классический вид белого шума. Для построения коричневого шума (броуновское движение) выбираем наугад числа от -500 до +500 и прибавляем их к значению предыдущего числа. Если построить длинную последовательность значений, получим коричневый шум, график которого выглядит более гладким, не таким изрезанным, как белый шум. Розовый шум находится посередине между белым и коричневым шумом: он не такой хаотичный, как белый шум, и не такой приглаженный, как коричневый. Найдите Фурье-спектр полученных шумов и их фрактальную размерность.
2. Исследуйте ценовые ряды акций любой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index), используя а) алгоритм метода Хёрста; б) алгоритм $DFA-m$ ($m = 1,2,3,4$).

Сравните полученные значения показателя Хёрста и фрактальной размерности.

3. Проанализируйте валютные курсы стран как с устойчивым, так и неустойчивым курсом валюты, за разные периоды: а) 1990-2005гг, б) за последние 15-20 лет. Исследуйте, как курсовая динамика стран соотносится с фрактальной структурой. Можно ли методами фрактального анализа предсказать валютные кризисы? [6]
4. Масштабное (скейлинговое) свойство в экономике: если из графиков цен для разных промежутков времени убрать все свидетельства о масштабе, то невозможно будет определить, говорят графики зависимостей о днях, месяцах или годах. Проверьте это масштабное свойство статистически: пусть функция $Z(t)$ описывает изменение цены; тогда $\ln Z(t)$ обладает следующим свойством: распределение её приращения $\Delta = \ln Z(t + d) - \ln Z(t)$ за произвольный временной интервал d не зависит от d , если не считать масштабного коэффициента. Покажите, что распределение Леви удовлетворяет тому же масштабному свойству, что и распределение скачков цены.
5. Проведите исследование и фрактальный анализ колебаний курсов акций медиагрупп.
6. Проведите исследование и фрактальный анализ колебаний рейтингов телепередач.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. О фрактальном анализе хаотических временных рядов. – Режим доступа: <https://textarchive.ru/c-1842283.html>
2. Беляков С.С. Использование агрегирования в методах нелинейной динамики для анализа и прогнозирования временных рядов котировки акций: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13. – Ставрополь, 2005. – 158 с.
3. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.
4. Латыпова Н.В. Компьютерная обработка данных. Фракталы: учеб. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2012. – 78 с., прил. – ISBN 978-5-4312-0138-7
5. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3

6. Мансуров А.К. Прогнозирование валютных кризисов с помощью методов фрактального анализа // Проблемы прогнозирования. 2008, №1 (106). – С. 145-158.
7. Лоскутов А.Ю. Анализ временных рядов: Курс лекций / Физический факультет МГУ. – Режим доступа: https://chaos.phys.msu.ru/loskutov/PDF/Lectures_time_series_analysis.pdf
8. Зиненко А.В. R/S анализ на фондовом рынке // Бизнес-информатика. – №3 (21), 2012. – С. 24-30.
9. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Введение в экономфизику: статистические и динамические модели. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.-Ижевск: ИКИ, 2012. – 340 с.

2.2. Индекс фрактальности

В данном разделе используются результаты, полученные Дубовиковым М.М. и Старченко Н.В. [1,2]. Для надежного вычисления фрактальной размерности с помощью показателя Хёрста H требуется слишком большой репрезентативный масштаб, содержащий несколько тысяч данных [3]. Внутри этого масштаба временной ряд много раз меняет характер своего поведения. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда, необходимо определить размерность D локально.

В работе [1] развивается подход, где для реальных временных рядов такая последовательность аппроксимаций получается автоматически с помощью новых понятий: индекса фрактальности μ и размерности минимального покрытия D_μ . Показано, что использование индекса μ позволяет выявить для этих рядов степенной закон, который выполняется с удивительной точностью. При сравнении индекса μ с другими фрактальными показателями оказывается, что для надежного определения этого индекса с приемлемой точностью требуется данных на два порядка меньше, чем, например, для определения показателя Хёрста H . Это приводит к возможности построения локального фрактального анализа временных рядов с помощью функции $\mu(t)$. Использование функции $\mu(t)$ позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач теории временных рядов: задаче идентификации и задаче прогноза. В частности показано, что индекс μ является идентификатором локального тренда для хаотических рядов и обоснован эффект «затишья перед бурей» (эффект

увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных).

Когда исследовались фрактальные множества с нетривиальной хаусдорфовой размерностью, то никто не мог даже предположить, что такие объекты могут иметь какое-либо отношение к природе. При этом реальный диапазон масштабов, где может наблюдаться фрактальная структура, простирается от расстояний между молекулами в полимерах до расстояния между скоплениями галактик во вселенной. Можно сказать, что все сильные нерегулярности в природе стремятся обрести самоподобную (фрактальную) структуру как наиболее энергетически выгодную. Такую структуру, в частности, на определенном интервале масштабов имеют все наблюдаемые в реальности хаотические временные ряды.

Наиболее простым способом исследования фрактальной структуры временных рядов является вычисление их фрактальной размерности через клеточную размерность D_c . Для определения размерности D_c разобьем плоскость, на которой определен график временного ряда на клетки размером ε и определим число клеток $N(\varepsilon)$, где находится хотя бы одна точка этого графика. С уменьшением ε количество клеток будет расти по

степенному закону: $N(\varepsilon) \sim \left(1/\varepsilon\right)^{D_c}$. Главный недостаток – выход на

степенную асимптотику функции обычно происходит крайне медленно. Это означает, что для надежного вычисления размерности требуется слишком большой репрезентативный масштаб. Внутри такого масштаба временной ряд, как правило, меняет характер своего поведения много раз. Чтобы связать локальную динамику соответствующего процесса с фрактальной размерностью временного ряда, необходимо определить размерность D локально. Для этого попытаемся найти последовательность аппроксимаций, которая при фиксированном ε была бы в некотором смысле оптимальной. Если умножить обе части $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$ на ε^2 , то определение размерности можно переписать в виде степенного закона для площади аппроксимаций:

$$S(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2-D} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Заметим, что такая форма не требует, чтобы симплексы, из которых состоит аппроксимация, были одинаковыми. Достаточно того, чтобы они имели один и тот же геометрический фактор. Это позволяет использовать аппроксимации, которые при данном ε в некотором смысле наилучшим образом приближают исходную функцию.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $y = f(t)$, которая может иметь конечное число точек разрыва первого рода. Такие функции являются естественными и модельными при рассмотрении финансовых временных рядов. Введём равномерное разбиение отрезка

$$\omega_m: a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b,$$

где $t_j - t_{j-1} = \varepsilon = \frac{b-a}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Покроем график этой функции прямоугольниками таким образом, чтобы это покрытие было минимальным по площади в классе покрытий прямоугольниками с основанием ε (рис. 31). Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\varepsilon)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции $f(t)$ на этом отрезке.

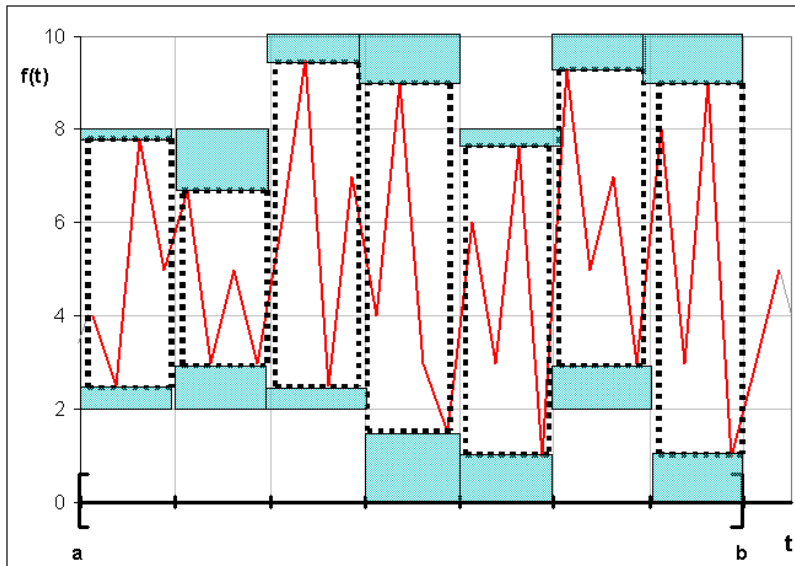


Рис.31. [1]: Построение минимального покрытия: покрываем график функции прямоугольниками с основанием ε и высотой, равной амплитуде колебаний функции на данном отрезке. Голубым цветом показаны участки, определяющие разность между клеточным и минимальным покрытием.

Введем величину:

$$V_f(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m A_i(\varepsilon).$$

Тогда полную площадь минимального покрытия $S_\mu(\varepsilon)$ можно записать в виде: $S_\mu(\varepsilon) = V_f(\varepsilon)\varepsilon$. Поэтому из соотношения $S(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2-D}$ следует, что

$$V_f(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\mu} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{где } \mu \stackrel{\text{def}}{=} D_\mu - 1.$$

Назовем размерность D_μ *размерностью минимального покрытия*. В [1] доказано, что клеточная размерность D_c совпадает с размерностью минимального покрытия для ситуации, представленной на рис. 31: $D_c = D_\mu$.

Заметим, что, несмотря на это равенство, для реальных фрактальных функций минимальные и клеточные покрытия могут давать различные приближения величины $S(\varepsilon)$ к асимптотике $S(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2-D}$, причем величина этого различия может быть весьма значительной.

Так как $D_\mu = D$ и для одномерной функции топологическая размерность $D_T = 1$, то из формулы $\mu = D_\mu - 1$, следует $\mu = D - D_T$. Поэтому в данном случае индекс μ естественно назвать *индексом фрактальности*. При анализе финансовых временных рядов его рассматривают как основной фрактальный показатель [1,2].

Теоретически фрактальность финансовых временных рядов (ряды цен акций и курсов валют) обычно связывают с тем, что для устойчивости рынка на нём должны присутствовать инвесторы с разными инвестиционными горизонтами (от нескольких часов до нескольких лет). Это и приводит к масштабной инвариантности (отсутствию выделенного масштаба) ценовых рядов на соответствующем временном интервале [4].

Алгоритм вычисления фрактального индекса [1]

- 1) Пусть исследуемый ВР $x(t)$ содержит N значений. Для простоты анализа можно ограничиться последними $N=2^{12}=4096$ записями и использовать последовательность m вложенных разбиений ω_m , где $m = 2^n, n = 0, 1, \dots, 12$. Тогда каждое разбиение состоит из 2^n интервалов, содержащих 2^{12-n} значений (торговых дней).
- 2) Для каждого разбиения ω_m находится $A_i(\varepsilon)$, равное разности между максимальной и минимальной ценой на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ (в частности, если $\varepsilon = \varepsilon_0$, то $A_i(\varepsilon)$ равняется разности между максимальной и минимальной ценой за день).
- 3) Далее по формуле вычисляется значение $V_x(\varepsilon) = \sum_{i=1}^m A_i(\varepsilon)$.
- 4) Строя зависимость $\log V_x(\varepsilon)$ и $\log \varepsilon$, методом наименьших квадратов определяется угловой коэффициент аппроксимирующей прямой полученной зависимости a . Тогда $\mu = -a$, $D_\mu = \mu + 1$.

В работах [1,2] отмечается: если $f(t)$ реализует гауссовский случайный процесс, то показатель Хёрста H связан с размерностью D и с индексом μ , соотношением: $H = 2 - D_\mu = 1 - \mu$. Однако реальные финансовые ряды, как правило, не являются гауссовыми, и поэтому индекс μ вычисляется на порядок более точно, чем показатель Хёрста H в подавляющем большинстве

случаев. Что служит главным преимуществом индекса μ по сравнению с другими фрактальными показателями (в частности с показателем Хёрста H). Это даёт возможность использовать его в качестве локальной характеристики, определяющей динамику исходного процесса, поскольку репрезентативный масштаб, необходимый для надёжного определения индекса μ можно считать имеющим тот же порядок, что и характерный масштаб основных состояний процесса. К таким состояниям относятся флэты (периоды относительного спокойствия) и тренды (периоды относительно длительного движения вверх или вниз).

Чтобы соотнести значение μ с поведением ВР, естественно ввести функцию $\mu(t)$ как такое значение μ , которое ещё может быть вычислено с приемлемой точностью на минимальном, предшествующем t интервале τ_μ . В случае непрерывного аргумента t в качестве такого интервала можно было бы взять произвольно малый интервал. Однако, поскольку на практике временной ряд всегда имеет минимальный масштаб, то τ_μ имеет конечную длину (например, $2^5 = 32$). Оказывается, использование функции $\mu(t)$ позволяет существенно продвинуться в решении двух основных задач анализа временных рядов – задачи идентификации и задачи прогноза.

Авторы метода предполагают, что построенный локальный фрактальный анализ можно использовать для прогноза землетрясений, ишемических заболеваний и т.д. Также он легко обобщается, с сохранением всех своих преимуществ, на многомерные фрактальные функции (что очень важно, например, для теории распознавания образов и теории сжатия изображений). Кроме того, с помощью показателя μ получается более адекватное выражение для мультифрактального спектра. Нетривиальным является использование построенного алгоритма для вычисления размерностей странных аттракторов на основе относительно небольшого числа исторических данных. Оказывается, что использование такой процедуры позволяет подойти к проблеме предсказания катастроф совершенно с иной стороны [1].

Лабораторный практикум №2

Используя индекс фрактальности, исследуйте поведение реальных временных рядов таких, как стоки рек, запасы продуктов и энергоресурсов, изменение курсов валют и др. Найдите размерность минимального покрытия. Сравните с размерностями, найденными с помощью показателя Хёрста.

Исследовательские проекты

1. С помощью индекса фрактальности μ исследуйте ценовые ряды акций любой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index). Найдите размерность минимального покрытия. Сравните полученный результат с клеточной размерностью и размерностями, найденными с помощью показателя Хёрста.
2. *Задача идентификации* обычно заключается в корректном определении макросостояния системы на основе наблюдаемой реализации временного ряда [1]. Требуется рассчитать функцию $\mu(t)$ для любой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса. Исследуйте корреляцию между значением μ и характером поведения исходного временного ряда (например, такой его характеристикой, как показатель стабильности временного ряда).
3. *Задача прогноза*, которая в общем случае состоит в определении каких-либо количественных или хотя бы качественных характеристик будущего поведения временного ряда на базе имеющихся исторических данных. Согласно [1], наличие степенной зависимости для функции $V_f(\varepsilon)$ в достаточно широком диапазоне масштабов позволяет обнаружить эффект увеличения крупномасштабных флуктуаций при подавлении мелкомасштабных, который может быть полезным для предсказания сильных колебаний на финансовом рынке. Используя эмпирические данные, с помощью численных расчётов подтвердите (или опровергните) данный эффект.
4. С помощью индекса фрактальности μ проведите исследование и анализ колебаний курсов акций медиагрупп.
5. С помощью индекса фрактальности μ проведите исследование и фрактальный анализ колебаний рейтингов телепередач.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Дубовиков М.М., Старченко Н.В. О фрактальном анализе хаотических временных рядов // <https://textarchive.ru/c-1842283.html>
2. Старченко Н.В. Индекс фрактальности как анализ хаотических временных рядов: дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18, 01.01.03. – М., 2005. – 122 с.
3. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

4. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304 с.

2.3. Клеточно-автоматная модель для прогнозирования временных рядов

Беляков С.С. в [1] предлагает схему прогнозирования ВР на базе клеточного автомата, которая реализуется вместе с процессом моделирования долговременной памяти и завершается получением прогноза, включая оценивание погрешности результата.

Алгоритм реализации клеточно-автоматной прогнозной модели состоит из следующих шести этапов.

1. Использование статистических методов и визуализация для предварительного анализа данного ВР на предмет выявления наличия или отсутствия тяжелых хвостов, трендов, циклических или сезонных компонент и др.
2. Фрактальный анализ данного ВР с целью установления в нём долговременной памяти, включая оценку её глубины, а также выявления в поведении ВР таких характеристик и тенденций, как трендоустойчивость или, наоборот, хаотичность, персистентность и др. Вычислительная часть фрактального анализа базируется на алгоритме *R/S*-анализа.
3. Преобразование данного ВР в лингвистический временной ряд (ЛВР) для применения квазигенетического алгоритма, работающего с комбинаторными конфигурациями, составляющими структуру ЛВР и его терм-множество U .
4. Частотный анализ памяти ЛВР состоит из подэтапов:
 - 1) формирование множества M всех l -конфигураций, имеющихся в полученном ЛВР, $l = 1, 2, \dots, L$, где L – глубина памяти этого ЛВР;
 - 2) вычисление относительных частот переходов l -конфигураций из M в одно из возможных состояний терм-множества U .
5. Формирование прогноза для рассматриваемых ВР и ЛВР путем реализации «мягких вычислений» на базе построенной памяти:
 - 1) получение прогноза в виде нечеткого лингвистического множества (НЛМ);

- 2) преобразование НЛМ в числовое нечеткое множество, которое при необходимости с помощью процедуры дефазификации можно перевести в четкий числовой прогноз.
- б. Валидация, то есть получение оценок погрешности для полученного прогноза данных ВР и ЛВР.

Разберем каждый из этапов подробнее. Если первый этап направлен на исследование ВР стохастическими методами, то второй – исследует ВР с помощью метода Хёрста, рассмотренного ранее.

Третий этап прогнозной модели состоит в преобразовании числового ВР в ЛВР. Для отражения долговременной памяти, присущей ВР, предлагается использовать интервальные значения прогнозируемых показателей, для чего весь спектр наблюдаемых показателей разделяем на 3 альтернативы: низкий уровень, средний уровень, высокий уровень. Если каждому числовому значению элементов ВР поставить в соответствие одну из этих альтернатив, то получим ЛВР. Преобразование ВР в ЛВР означает замену числовых элементов $X = \{x_i\}$ лингвистическими переменными, называемыми термами. Совокупность этих термов принято называть *терм-множеством* и обозначать $U = \{u_i\}$. Элементы терм-множества могут принимать три значения: *H* – низкий уровень, *C* – средний уровень, *B* – высокий уровень. Это и есть значения лингвистических переменных. Обычно ЛВР строится на базе интервального подхода путем построения верхней и нижней огибающих ломаных для графика.

Алгоритм преобразования числового ВР в ЛВР:

- 1) Визуализации гистограммы, представляющей ряд. На этой гистограмме выделяем жирными точками столбики, представляющие явно высокий курс акций, и столбики, представляющие явно низкий курс. Далее, соединяя соседние жирные точки пунктирными отрезками, получаем верхнюю огибающую ломанную (ВОЛ) и нижнюю огибающую ломанную (НОЛ).
- 2) Последовательно для каждого столбика гистограммы рассматриваем отрезок, соединяющий точку его пересечения с НОЛ точкой его пересечения с ВОЛ. Этот отрезок делим на три равновеликих интервала: нижний, средний и верхний. Отмечаем на каждом из таких отрезков концы среднего интервала, после чего каждую пару соседних верхних (нижних) концов средних интервалов соединяем пунктирным

отрезком, в результате чего получаем границы срединной области гистограммы (СОГ).

- 3) Исследуемый ВР преобразуется в ЛВР в зависимости от того, в какой из интервалов попадает значение ВР. Рассматривая i -й столбик этой гистограммы, элемент ВР заменяем термом H , если верх столбика находится ниже СОГ, иначе заменяем термом C , если его верх принадлежит СОГ. Наконец, заменяем термом B , если верх этого столбика находится выше СОГ. ЛВР считается построенным, когда последний элемент ряда заменяется соответствующим термом.

Временные ряды и ЛВР обладают долговременной памятью. Иными словами, в этих рядах заключена информация об определённых закономерностях, которые принято относить к так называемой долговременной памяти. Наличие долговременной памяти у временного ряда подтверждается результатами его R/S -анализа. Основная числовая характеристика этого результата заключается в том, что полученные значения показателя Хёрста H колеблются для ряда в пределах от 0,7 до 0,9. Многолетний опыт, накопленный для рядов с таким значением H , свидетельствует, что в них имеют место долговременные корреляции между текущими и будущими событиями. Эта характеристика является основанием для разработки метода прогнозирования на базе использования долговременной памяти. Поэтому четвёртый этап прогнозной модели заключается в частотном анализе памяти ЛВР.

Через $M(U)$ обозначим множество всех l -конфигураций, где $l \leq L$, L – глубина памяти, которые можно обнаружить в ЛВР: $M(U) = \cup_l M_l$, M_l – это подмножество всех l -конфигураций ЛВР при фиксированном l . Эти подмножества могут иметь следующий вид:

$$M_1 = \{H, C, B\}, \quad M_2 = \{HH, HC, HB, CH, CC, CB, VH, VC, VB\},$$

$$M_3 = \{HHH, HHC, HCH, HCC, HCB, HVC, \dots, BBB\}, \dots$$

После того, как сформировано множество всех возможных конфигураций, исследуются частоты переходов каждой фиксированной конфигурации в следующее состояние $u^0 \in U = \{H, C, B\}$. Если в ЛВР некоторая конкретная фиксированная конфигурация появляется и всякий раз переходит в одно и то же состояние, то говорят, что она обладает памятью. Если данная конфигурация переходит в два фиксированных состояния, то говорят, что конфигурация обладает частичной памятью. Если же конфигурация демонстрирует переходы в каждое из трёх состояний H, C, B , то память у

данной конфигурации не обнаружена. Переходы всех конфигураций с относительными частотами этих переходов представляют собой память клеточного автомата, что является составной частью математической модели, предназначенной для прогнозирования ЛВР.

Пятый этап – формирование прогноза, для которого наиболее адекватным является представление в терминах нечётких множеств (НМ). Для конкретного ЛВР $U = \{u_i\}_{i=1}^n$ осуществим прогнозирование неизвестного значения u_{n+1} на основании уже известных значений по следующей схеме.

Вычислим относительные частоты переходов из 1-конфигурации u_n в состояния H, C, B : $w_1(u_n \rightarrow H), w_1(u_n \rightarrow C), w_1(u_n \rightarrow B)$. Далее вычисляются значения относительных частот переходов из 2-конфигурации $u_{n-1}u_n$ в состояния H, C, B : $w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow H), w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow C), w_2(u_{n-1}u_n \rightarrow B)$. По аналогии вычисляются значения относительных частот переходов из 3-конфигурации $u_{n-2}u_{n-1}u_n$ в состояния H, C, B и т.д. Вычисления проводятся до тех пор, пока какая-то l -конфигурация не будет демонстрировать наличие памяти: например, $w_l(u_{n+1-l} \dots u_{n-1}u_n \rightarrow C) = 1$. Тогда находим ненормированные значения функции принадлежности для нечёткого лингвистического множества (НЛМ), как сумму всех относительных частот переходов с первой по l -конфигураций в каждое из состояний H, C, B :

$$\mu'_K = \sum_{j=1}^l w_j(u_{n+1-j} \dots u_{n-1}u_n \rightarrow K), \quad K = H, C, B.$$

Вычислив сумму полученных значений $\mu = \mu'_H + \mu'_C + \mu'_B$, выполним нормировку: $\mu_K = \frac{\mu'_K}{\mu}$, $K = H, C, B$. Тогда прогнозное значение в виде НЛМ имеет вид: $U_{n+1} = \{(H, \mu_H), (C, \mu_C), (B, \mu_B)\}$. В лингвистических терминах этот прогноз можно сформулировать так: в следующий период с вероятностью μ_C ожидается среднее значение, понижение значения можно прогнозировать с вероятностью μ_H , повышение – с вероятностью μ_B .

Осуществим трансформацию прогнозного НЛМ в числовой прогноз с помощью известной процедуры дефазификации НМ. Опишем процесс преобразования НЛМ в числовое НМ:

$$Y_{n+1} = \{(y_H, \mu_H), (y_C, \mu_C), (y_B, \mu_B)\}.$$

Для того чтобы получить прогнозное значение, необходимо выбрать у ВР ближайшие к последней l -конфигурации ЛВР (где l – это именно то значение, при котором конфигурация продемонстрировала наличие памяти) числовые значения, соответствующие значениям H, C, B . Средние их значения дают нам числовые значения y_K , $K = H, C, B$. Тогда операция дефазификации позволит получить числовое прогнозное значение:

$$y_{n+1} = y_H \mu_H + y_C \mu_C + y_B \mu_B.$$

Наконец, шестой этап состоит в оценке погрешности полученного прогнозного значения. Заметим, что все этапы алгоритма можно автоматизировать с помощью математических пакетов [2].

В экономико-математических моделях часто используют *агрегирование* потому, что ни одна модель не в состоянии вместить всего многообразия реально существующих в экономике продуктов, ресурсов, связей. Агрегирование – это преобразование исходной модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений, которое даёт приближенное описание изучаемого процесса или объекта по сравнению с исходным. Чаще всего агрегирование – объединение, укрупнение показателей по какому-либо признаку. Существует различные способы агрегирования:

- сложение показателей,
- представление группы агрегируемых показателей через их среднюю,
- взятия максимального значения показателя за период агрегирования,
- использование различных взвешивающих коэффициентов, баллов и т.д.

Применение процедуры агрегирования не должно фактически приводить к заметному изменению статистических показателей (значений коэффициентов вариации, асимметрии, эксцесса), то есть должны сохраняться практически без изменений статистические характеристики динамики поведения этих ВР. Предлагается использовать правило: интервал агрегирования следует считать недопустимо большим, если его использование приводит к существенным изменениям статистических показателей временных рядов, получаемых на выходе процедуры агрегирования [1].

Лабораторный практикум №3

1. Напишите программу построения верхней и нижней огибающих ломаных для графика выбранного временного ряда.
2. Напишите программу для преобразования временных рядов в лингвистические временные ряды.
3. Напишите программу частотного анализа ЛВР.

Исследовательские проекты

1. Проведите исследование глубины памяти для лингвистического ВР.
2. С помощью клеточно-автоматной модели исследуйте ценовые ряды акций любой из компаний, входящих в индекс Доу-Джонса (Dow Jones Industrial Index). Найдите их прогноз в терминах НЛМ и числовое значение. Сравните с реальными значениями и оцените относительную погрешность.
3. Проведите фрактальный анализ исходного временного ряда и временных рядов с недельным и двухнедельным интервалами агрегирования.
4. Исследуйте различные способы агрегирования для конкретных временных рядов. В каких случаях происходит сохранение статистических характеристик этих рядов?
5. Проведите формирование прогнозных значений котировки акций одной из крупнейших российских компаний (Лукойл, Норильский никель, Сбербанк, Ростелеком, МТС и др.), верификацию и валидацию прогнозной модели. Оцените точность прогноза.
6. Проведите фрактальный анализ и сформируйте прогнозные значения одной из криптовалют, используя клеточно-автоматную модель. Оцените точность прогноза.
7. Проведите фрактальный анализ и сформируйте прогнозные значения колебаний курсов акций медиагрупп.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Беляков С.С. Использование агрегирования в методах нелинейной динамики для анализа и прогнозирования временных рядов котировки акций: дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13. – Ставрополь, 2005. – 158 с.
2. Еремеева К.С. Исследование поведения временных рядов с помощью фрактального анализа // Выпускная квалификационная работа на получение степени бакалавра по направлению «Прикладная математика и информатика». – Ижевск: УдГУ, 2019. – 47 с.

Глава 3. Некоторые приложения фрактального анализа

3.1. Фрактальные кривые и поверхности

Фрактальные ВР, рассмотренные во второй главе – частный случай фрактальных кривых, у которых исследуемая величина зависит от времени. Они широко используются при описании и моделировании различных явлений в разных областях. Соответствующие алгоритмы построения таких кривых подробно описаны в [1, с. 25-35]: алгоритм смещения средней точки, метод Фурье и др. Этими методами можно получить фрактальные кривые с заранее заданной фрактальной размерностью, различные способы вычисления которой можно найти в [1, с. 51-65].

В инженерной практике очень часто имеют дело с поверхностями или поверхностными свойствами в самом широком спектре контекстов. В некоторых случаях цель состоит в том, чтобы произвести поверхность с заданными физическими или химическими свойствами, но чаще всего поверхности возникают как неотъемлемое проявление определенных индустриальных и естественных процессов. Процессы формирования поверхностей можно отнести к трем основным типам [2]:

1. Процессы, в которых рост поверхности обусловлен потоками вещества. Примеры: кристаллический рост, осаждение атомного пучка или паров химических соединений, отложение осадка, гальванопокрытие, напыление, рост биологических организмов типа колоний бактерий и опухолей.

2. Процессы, в которых материал растворяется или удаляется с поверхности. Примеры: химическое растворение, коррозия, эрозия, выветривание, шлифовка, многие виды полировки.

3. Процессы, которые ведут к спонтанному формированию поверхностей и границ раздела. Примеры: трещинообразование и разрушение, сгорание и распространение пламени, турбулентность, смачивание, впитывание, инвазия и формирование фазовых границ между различными состояниями вещества.

Фрактальная геометрия стала использоваться как в теоретическом, так и в модельном, и экспериментальном исследовании поверхностей. Алгоритмы моделирования фрактальных поверхностей с заранее заданными характеристиками (размерность, показатель Хёрста) подробно представлены в [1,2]. В последние годы было опубликовано много исследований о фрактальной структуре поверхностей. Фрактальным объявлялось все – от молекулярных поверхностей белков до взлетных полос аэродромов. Методы фрактального анализа поверхностей можно найти в [1]. Заметим, что показатель Хёрста в общем случае связан с фрактальной размерностью соотношением: $D = E - H$, где E — евклидова размерность задачи.

Проблемы формирования качества поверхности, и в частности, такой важнейшей его характеристики как шероховатость, приобретают в настоящее время особую актуальность в связи с созданием новых технологий обработки материалов [3]. На основе проведенных экспериментов А.А. Потапов впервые предложил методы оценок с использованием различных фрактальных характеристик качества поверхности изделий и свойств микрорельефа современных конструкционных материалов. По словам Потапова А.А., «разработка фрактально-синергетической модели процесса формирования рельефа поверхности, основанной на анализе заложенных в методах группового воздействия процессов самоорганизации, позволит не только прогнозировать механизмы формирования шероховатости и физико-механических свойств поверхностного слоя, но и управлять ими» [3].

Лабораторный практикум №1

1. Используя алгоритм смещения средней точки [1, с.25], смоделируйте фрактальную кривую для разных значений фрактальной размерности.
2. Используя метод Фурье [1, с.28], проведите генерацию фрактальных временных рядов с заданными характеристиками.
3. Постройте фрактальные кривые, полученные с помощью модели обобщённого броуновского движения [1, с.32] для разных значений фрактальной размерности.
4. Постройте фрактальную поверхность из фрактальных кривых путём операций трансляции, масштабирования и поворота [1, с.36]. Найдите её фрактальную размерность.
5. Используя алгоритм случайного срединного смещения [1, с.39], постройте фрактальную поверхность. Попробуйте раскрасить ее, используя линии уровня. Найдите её фрактальную размерность. Сравните полученные поверхности с реальными поверхностями.

Исследовательские проекты

1. Модель формирования фрактальных поверхностей, связанная с реализацией пространственного броуновского движения [2, с.86]. Поверхность в этом случае имеет характер горного ландшафта и может быть смоделирована пространственным распределением, называемым фрактальным (обобщённым) броуновским распределением. Для формирования фрактального броуновского пейзажа над простой квадратной решеткой используется двухмерный вариант алгоритма Фосса. Исследуйте полученные поверхности в зависимости от их фрактальной размерности.
2. Квазиэлектростатическое распределение электрического потенциала заряженного аэрозоля – пример трехмерного броуновского распределения. Аэрозоли – дисперсные системы, состоящие из мелких твердых или жидких частиц, взвешенных в газовой среде (обычно в воздухе), чрезвычайно распространены в природе и технике. Естественные аэрозоли образуются вследствие природных явлений, прежде всего атмосферных (грозы, смерчи, песчаные бури), а также при вулканических извержениях и масштабных лесных пожарах, выбрасывающих облака пепла и дыма. Искусственные аэрозоли образуются в результате хозяйственной деятельности человека, в частности, при абразивоструйной обработке поверхностей, камерном напылении или, например, при ядерных взрывах. Для такого представления используется реализация алгоритма Фосса на кубической решетке [2, с.88]. Исследуйте полученную генерацию фрактального броуновского рельефа на кубической решетке в зависимости от её фрактальной размерности.
3. Проверьте, можно ли использовать для генерации фрактальных поверхностей следующий алгоритм. Предлагается заполнить двумерную матрицу случайными равномерно распределенными числами, а затем проводить итеративную процедуру сглаживания значений матрицы с помощью процедуры усреднения по ближайшим соседям. При этом на каждой итерации производится расчёт новой матрицы, в которой каждый элемент вычисляется как среднее значение соответствующего элемента и его ближайших четырех соседних элементов из матрицы, полученной на предыдущей итерации. Найдите фрактальную размерность полученной поверхности. Исследуйте, как изменятся поверхности и размерность, если при усреднении используется окружение из 8, 12, 20 и 24 ближайших соседей [1, с.84].

Используемые и рекомендуемые источники:

10. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. – Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2004. – 89 с.
11. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. – 200 с., ISBN 978–5–87941–829–3
12. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиотехника. Наносистемы. Информационные технологии. – №1-2. Т. 1, 2009. – С. 64-128.
13. Латыпова Н.В. Компьютерная обработка данных. Фракталы: учеб. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2012. – 78 с., прил. – ISBN 978-5-4312-0138-7

3.2. Ранговые распределения

Ранг в систематике — это уровень в иерархически организованном множестве элементов. Ранговые распределения используются при анализе сложных многокомпонентных систем самой различной природы: социальных систем (табель о рангах), систем живых организмов (виды, классы, отряды, семейства), техноценозов (номенклатура изделий) и т.п. Ранги в систематике упорядочены значениями натурального ряда и определяют разбиение системы на компоненты, характеризующиеся определенным статусом (доходом, распространённостью, стоимостью, потреблением электроэнергии и т.д.). Каждому рангу отвечает определенная численность его представителей, что позволяет говорить о представленности того или иного ранга как функции соответствующего ему статуса. В любой системе существуют компоненты, сравнительно немногочисленные, но обладающие, в определенном смысле, высоким статусом, и сравнительно многочисленные компоненты с низким статусом, причём по мере понижения статуса число соответствующих рангов увеличивается. Ценотическая парадигма утверждает, что зависимость эта носит обычно гиперболический характер

$$P(i) = \frac{P(1)}{i^\beta},$$

где i – номер ранга, $P(1)$ – представленность первого ранга. [1]

На подобную частотную закономерность впервые обратил внимание стенографист французского парламента Ж.-Б. Эступ (1916 г.). В поисках оптимальных методов стенографии он обнаружил, что при достаточно большом объёме информации в таких сообщениях имеет место следующая частотная зависимость: $P(i) \cdot i = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots$, где $P(i)$ – относительная частота i -го слова в словарном списке. В 1935 г. вышла монография американского лингвиста Дж. Ципфа «Психобиология языка», в которой приведена содержательная трактовка обнаруженной Эступом зависимости: «Слова, требующие больше времени для их прочтения вслух, должны встречаться реже, чем короткие, легко произносимые». После выхода книги данная закономерность стала именоваться законом Ципфа. [2]

В 1954 г. Бенуа Мандельброт внес небольшие изменения в формулу Ципфа, добившись более точного соответствия теории практике. Позднее он предложил его теоретическое обоснование, полагая, что письменный язык можно сравнивать с кодированием, причем все знаки должны иметь определенную «стоимость». Исходя из требований минимальной стоимости сообщений, Б. Мандельброт математическим путем пришел к аналогичной закону Ципфа зависимости:

$$P(i) = \frac{C}{(a+i)^\gamma}, \quad i = 1, 2, \dots; \quad C, a, \gamma = \text{const}.$$

Эта закономерность известна, как закон Ципфа-Мандельброта. Выяснилось, что закон хорошо согласуется с частотными данными отдельных литературных произведений с чёткой сюжетной линией и практически не выполняется для частотных данных по произвольным лексическим выборкам, не обладающим смысловой корреляцией. Другими словами, закон Ципфа-Мандельброта оказался законом не языка, а текста, представляющего отдельное семантически коррелированное информационное сообщение [2]. Подобные рангово-степенные закономерности в дальнейшем обнаружили универсальный характер. Приведём некоторые из них.

Популярное в экономической статистике распределение итальянского экономиста и социолога В. Парето, описывающее доходы населения, в ранговой форме также имеет гиперболический вид (1897 г.):

$$P(i) = (P(1) - b) \left(\frac{a + 1}{a + i} \right)^\beta + b,$$

где a и b – параметры распределения. При $b = 0$ соотношение сводится к формуле Мандельброта [1].

Американский математик А. Лотки показал (1926 г.), что деятельность учёных, характеризующаяся количеством их публикаций, выражается законом Ципфа-Мандельброта с параметрами $a = 0$, $\gamma = 2$. Распределение научной продуктивности учёных носит асимметрический, неравномерный характер. Инвариантность и устойчивость закономерности Лотки во множестве научных областей позволяет говорить о нем как об одном из важнейших библиометрических законов. Подробнее о методах исследования документальных информационных потоков и закономерностях, выявленных в мировой системе научной коммуникации, о стохастическом подобию и фрактальности информационных массивов можно найти в [3,4].

Немецкий географ Ф. Ауэрбах, анализируя численность населения городов в административном регионе, выявил закономерность, аналогичную закону Ципфа.

Г.Г. Малинецкий отмечает, что закономерности Ципфа-Мандельброта наблюдаются в статистике чрезвычайных ситуаций (аварий, наводнений, ураганов и т.п.), с ранжировкой по числу погибших; описывают распространение вирусов в Интернете и ВИЧ-инфицированного населения; используются при построении прогнозов, минимизации рисков, для составления тезаурусов поисковых компьютерных систем [5-7].

В работах [2,8] проиллюстрировано на примерах проявление закона Ципфа-Мандельброта в учебном процессе, в частности, при анализе ошибок результатов тестирования и в статистике профессиональной направленности ЕГЭ-респондентов. Природа степенных статистик такова, что для них вероятность редких событий оказывается выше, чем для статистик с нормальным законом распределения. Поведение такого рода характерно для сложных систем, когда одно неординарное событие обуславливает возникновение длинных причинно-следственных корреляций, порождающих лавину изменений (не исключая катастрофический сценарий), посредством которых система приобретает новое качество. В системе ЕГЭ редкие события обусловлены выбором ЕГЭ-респондентами интересующего профильного предмета на основе индивидуальных предпочтений, что отражается на статистике по профильным предметам. Стандартные методы анализа статистики по профильным предметам показывают, что в этом случае мы имеем дело с распределением Пуассона и обнаруженный факт является предсказуемым, поскольку именно такая статистика описывает распределение редких событий [8].

Гиперболическая ранговая параметризация сложных иерархических структур принципиально связана с их самоподобием. Эта связь показана в работе [1] с использованием экологической фразеологии и инструментария мультифрактального формализма.

Лабораторный практикум №2

1. Проведите анализ и исследование литературного текста на соответствие закону Ципфа-Мандельброта. Найдите константы закономерности.
2. Проведите анализ некоторых статистических данных на соответствие рангово-степенной закономерности Парето. Найдите параметры распределение.
3. Приведите примеры (отличные от представленных в тексте выше) ранговых распределений, зависимость которых носит гиперболический характер.

Исследовательские и информационные проекты

1. Исследуйте самоподобие информационного пространства (например, электронные журналы или другие тематические массивы) с помощью закона Лотки (для распределения авторов).
2. Исследуйте самоподобие информационного пространства (например, электронные периодические журналы по некоторым отраслям знаний) с помощью закона Брэдфорда (для периодических изданий).
3. Сделайте обзор исследований на использование закона Парето и распределения Парето.
4. Проверьте, удовлетворяют ли города России и одного из её регионов по численности населения распределению Дж. Ципфа.
5. Сделайте обзор современных методов исследования документальных информационных потоков, и их применения в ИТ.
6. Исследуйте фрактальные свойства для кластеров информационных Web-сайтов. Найдите его фрактальную размерность.
7. Проведите анализ статистики выбора профильных предметов по ЕГЭ в Удмуртии и других регионов РФ на наличие закономерностей и ранговых корреляций.
8. Проведите разбор доказательства [1] связи гиперболической ранговой параметризации сложных иерархических структур с их самоподобием.
9. Проведите обоснование закономерности Ципфа-Мандельброта.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. – 200 с., ISBN 978–5–87941–829–3
2. Фирстов В.Е., Иванов Р.А. Из истории стенографии и интерпретации закона Ципфа-Мандельброта в учебном процессе // Ярославский пед. вестник – 2013, №4 – Том III (Естественные науки) – С. 14-20.
3. Латыпова Н.В. Компьютерная обработка данных. Фракталы: учеб. пособие. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2012. – 78 с., прил. – ISBN 978-5-4312-0138-7
4. Иванов С.А. Стохастические фракталы в информатике // НТИ. Сер. 2. Информ. процессы и системы. – 2002. №8 – С. 7-18. – ISSN 0548-0027.
5. Малинецкий Г.Г. Выбор стратегии // Компьютера. – 2003. – № 38 (513). – С. 25-31.
6. Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П. Синергетика, прогноз и управление риском // Синергетическая парадигма. Нелинейное мышление в науке и искусстве. – М.: Прогресс-Традиция, 2002. – С. 378-405.
7. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – Изд. 4, испр. и доп. – М.: УРСС, 2019.
8. Фирстов В.Е., Иванов Р.А. Статистические закономерности и ранговые корреляции профессиональной направленности результатов ЕГЭ в Саратовской области (2009–2012 гг.) // Известия Саратовского ун-та. Нов. серия. Сер. Философия. Психология. Педагогика. – 2013. Т. 13. Вып. 4. – С. 106–115.

3.3. Фрактальная графика и обработка изображений

Фракталы часто используются для создания различного рода визуализаций, видеоинсталляций, создания спецэффектов в компьютерной графике и т.д. [1] Во многих играх, где присутствуют разного рода природные ландшафты, используются фрактальные алгоритмы. Этот способ довольно эффективно зарекомендовал себя. Так как настоящие природные объекты имеют в основе своей фрактальную структуру, программисты успешно создают компьютерные ландшафты на основе фрактальных алгоритмов. Более того, к настоящему времени существует большое количество программ для генерации ландшафтов и пейзажей.

Тот же принцип, что и в играх, используют в кино для создания различных фантастических пейзажей с помощью компьютерных программ работающих на фрактальных алгоритмах. Интересный факт: в известном космическом фильме Ридли Скотта «Чужой» в эпизоде, когда команда спускается на поверхность планеты, монитор в корабле передаёт изображение поверхности планеты в виде сетки. Именно это изображение и было получено при помощи фрактальной геометрии. Фрактальная геометрия позволяет художникам по спецэффектам без труда создавать такие объекты как облака, дым, пламя, звёздное небо и пр. Фрактальные изображения, смоделированные в различных генераторах, необычайно красивы. Что уж тогда говорить о фрактальной анимации – это действительно потрясающее зрелище. Фрактальную анимацию с успехом применяют видежеи в видеосетах с помощью, так называемых, программ видежеинга. Часто видеоинсталляции используются на концертах исполнителей электронной музыки.

Фракталы прекрасно зарекомендовали себя при обработке изображений, улучшении качества и четкости изображения. Фрактальная обработка изображений намного улучшает распознавание объектов на фотографиях и других изображениях для любой области её применения.

В Институте радиотехники и электроники (ИРЭ) им. В.А. Котельникова РАН под руководством Потапова А.А. [2-4] созданы эффективные методы измерения фрактальных характеристик (фрактальных сигнатур) и обработки изображений, которые широко применяются в различных физико-технических, астрономических, биологических, медицинских и т.п. исследованиях. В частности, с помощью синтезированных фрактальных алгоритмов удается выделить номера автомобилей, оптические изображения которых получены в условиях очень сильных помех (пыль, дым, туман). Впервые предложенные и разрабатываемые научной школой Потапова А.А. цифровые фрактальные методы позволяют частично преодолевать априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью информации о геометрии (топологии) выборки – одномерной или многомерной. В методах фрактальной обработки необходим учёт скейлинговых эффектов реальных радиосигналов и электромагнитных полей. Предложенные фрактальные методы существенно дополняют текстурные и позволяет более надёжно производить операцию кластеризации. После цифровой фрактальной обработки изображений поверхности, кроме устойчивого разделения по типам земных покровов, отмечаются невидимые (скрытые) до этой обработки особенности: например, данные кластеризации дистанционного зондирования различных земных покровов [4]. Это

позволяет говорить о применении созданных методов фрактального распознавания для идентификации участков изображения, «невидимых» при классических методах кластеризации по полю яркостей. Экспериментально также доказана возможность эффективной кластеризации однородных протяженных связных областей с помощью фрактальной фильтрации. Интересные примеры по цифровой фрактальной обработке изображений можно найти в [2-4]: стеллс-объекты, медицинские изображения и др.

Отметим, что возможности фрактального сжатия изображений рассмотрены достаточно подробно в п. 1.6. А каким образом фрактальный подход можно использовать в криптографии, представлено в следующем параграфе.

Исследовательские и информационные проекты

1. Проведите исследование с точки зрения фрактальных свойств мозаики и восточного орнамента.
2. Проведите моделирование с помощью фрактальной графики таких объектов, как: а) пламя и дым, б) звёздное небо, в) природный ландшафт.
3. Сделайте обзор современных методов фрактальной обработки изображений.
4. Сделайте обзор использования фракталов в компьютерных играх, мультипликации и кинофильмах. Какие киностудии преуспели в этом?

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Терехова Н.Ю. Фрактальная графика: методические указания к лекциям и лабораторным работам по курсу «Основы графического дизайна» – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 24 с.
2. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиотехника. Наносистемы. Информационные технологии. – №1-2. Т. 1, 2009. – С. 64-128.
3. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах / дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах; пер. с англ. под ред. Т.Э. Кренкеля. – М.: Техносфера, 2006. – С. 374-479.
4. Новейшие методы обработки изображений / А.А. Потапов [и др.]; под ред. А.А. Потапова. – М.: Физматлит, 2008. – 496 с.

3.4. Фрактальная криптография

В работе [1] Кулешов С.В. предлагает итерационно-функциональный подход к использованию алгебраических фракталов в шифровании передаваемых данных. Предлагаемый подход является вариантом гаммирования – процесса «наложения» гамма-последовательности на открытые данные, где в качестве такой последовательности псевдослучайных элементов используется фрактальная последовательность. Ключевой проблемой технических средств защиты информации является порождение действительно случайной последовательности битов. Применение шумоподобных систем, основанных на фрактальных сигналах, даёт потенциальное преимущество над традиционными системами псевдослучайных последовательностей.

Алгоритм фрактального шифрования (для изображения)

1. Изображение должно быть представлено потоком битов.
2. Ключ формируется следующим образом: выбирается вид алгебраического фрактала; указывается количество итераций и параметры для функции цвета; определяется масштаб и размеры шифрующего изображения (они должны совпадать с исходным изображением).
3. На основе этих данных строится итерационный фрактал (шифрующее изображение), который представляется в виде потока битов.
4. Затем, применяя некоторую обратимую функцию к парам значений точек исходного изображения и изображения построенного фрактала, получается новое изображение, которое и передается по каналу связи.

Для расшифровки сообщения требуется, зная начальные значения процедуры построения фрактальной последовательности, восстановить изображение фрактала и, применяя операцию, обратную по отношению к операции передающей стороны, восстановить исходное изображение.

Настоящий метод применим для любых типов данных. При этом шифруемая последовательность кодов символов (текст) или отсчетов некоторой физической величины (звук) располагается по строкам прямоугольной матрицы, после чего применяют описанный выше метод. Фрактальное шифрование также демонстрирует возможность передачи дополнительной информации без увеличения объёма передаваемых данных

[1]. При оптимальном выборе начальных условий итерационного процесса и использовании асимметричного фрагмента фрактала можно обеспечить значимость всех битов выбранного ключа при выполнении операции шифрования. Полученный сигнал сложно отличить от шума, к тому же для расшифровки необходимо знать конкретный вид динамической системы и начальный параметр процесса.

Фракталы по небольшому количеству начальных данных позволяют получать псевдослучайную числовую последовательность, современные методы крипто-анализа которой на сегодняшний день не дадут высокого результата. В то же время, зная исходную итерационную функцию и её начальные параметры, шифрование и дешифрование секретных сообщений проводится путем несложных вычислений, что даёт возможность реализации данного метода без особых проблем [2]. Использованию алгебраических фракталов для формирования одноразового блокнота посвящена диссертация А.В. Синьковского [3]. В статье [4] используются фрактальные изображения в качестве секретных ключей при внедрении цифровых водяных знаков в изображения.

Фракталы в алгоритмах шифрования применяются для [5]:

- повышения стойкости алгоритма за счёт возможности генерации ключа неограниченной длины;
- генерации псевдослучайных последовательностей;
- реализации шифров подстановки и шифров замены;
- реализации визуальной криптографии различных изображений.

В настоящее время фрактальные последовательности используются при шифровании изображений, а также в различных методах идентификации и биометрического шифрования: сканирование отпечатка пальца, сетчатки и радужки глаза, линии руки, лица и др.

Многие страны применяют биометрическое шифрование в предотвращении преступлений и мошенничества, розыске и криминалистике, учёте посещаемости, платёжных системах, контроле доступа и контроле безопасности границ. Подробнее о криптографических алгоритмах можно почитать, например в [6,7].

Лабораторный практикум №4

Реализуйте алгоритм фрактального шифрования для выбранного типа данных (изображение, текст, звук) с помощью алгебраических фракталов.

Исследовательские и информационные проекты

1. Сделайте обзор современных криптографических методов, использующих фракталы.
2. Разработайте криптографический алгоритм шифрования изображений с использованием теории фракталов. Исследуйте его возможности и эффективность.
3. Разработайте криптографический алгоритм шифрования текстов, используя теорию фракталов. Исследуйте его возможности и эффективность.
4. Разработайте криптографический алгоритм шифрования звуковых сообщений, используя теорию фракталов. Исследуйте его возможности и эффективность.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Кулешов С.В. Фрактальное шифрование // Труды СПИИРАН. Вып. 2. Т. 1. – СПб.: СПИИРАН, 2004. – С. 231-235.
2. Пителинский К.В., Синьковский А.В. Роль коммуникаций в информационном обществе и фрактальные алгоритмы шифрования данных // Вопросы защиты информации. – М.: НТЦ оборонного комплекса «Компас», 2005. – Вып. 4 (71). – С. 15-17. – ISSN 2073-2600.
3. Синьковский А.В. Разработка эффективных методов решений по защите информации с использованием фрактального моделирования в условиях автоматизированного проектирования и производства: автореф. дисс. ... канд. тех. наук: 05.13.06 – М., 2007. – 28 с.
4. Магомедова Д.И., Симонян А.Г., Смычѐк М.А. Использование алгебраических фракталов для защиты информации стеганографическими методами от несанкционированных воздействий // Вестник НГИЭИ. – 2018. № 8 (87). – С. 5–15.
5. Борискевич А.А. Алгоритм маркирования изображений на основе визуальной криптографии для защиты от несанкционированного распространения информации // Доклады Белорусского гос. Ун-та информатики и радиоэлектроники: журнал. — Минск: Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2012. – Вып. 5 (67). – С. 73-79. – ISSN 1729-7648
6. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке СИ. – М.: Триумф, 2002. – 816 с. – ISBN 5-89392-055-4.

7. Музыкантский А.И., Фурин В.В. Лекции по криптографии. – М.: МЦНМО, 2013. – 2-е изд., стереотип. – 68 с.

3.5. Фрактальные сети и лабиринты

Фрактальные лабиринты встречаются в природе и технике повсеместно [1-3]. Это транспортные и коммуникационные сети, фильтрационные каналы, системы сбора и распределения ресурсов и информации, речные системы, системы кровоснабжения, молниевые разряды и т.д. Известно, что плотность фрактальных структур уменьшается по степенному закону с ростом их линейных размеров. Благодаря этому, транспортные свойства фрактальных сетей заметно отличаются от регулярного случая. Также в сфере сетевых технологий было проведено множество исследований, показывающих самоподобие трафика, передаваемого по сетям разного рода. Особенно это касается речевых, аудио и видео сервисов. Поэтому сейчас ведутся разработки и исследования возможности фрактального сжатия трафика с целью более эффективной передачи информации.

При проектировании, запуске и эксплуатации телекоммуникационных сетей одной из основных проблем является задача обеспечения качества обслуживания. До недавнего времени решение такой задачи при проектировании систем распределения информации обеспечивала теория телетрафика. Она является одной из ветвей теории массового обслуживания, и появилась в результате исследований А.К. Эрланга, Т. Энгсета, Г.О. Делла, К. Пальма, А.Я. Хинчина и др. Теория массового обслуживания хорошо описывает процессы, происходящие в таких системах распределения информации, как телефонные сети, построенных по принципу коммутации каналов. Наиболее распространенной моделью потока вызовов (данных) в теории телетрафика является простейший поток (стационарный, ординарный поток без последействия). Настоящий период бурного развития высоких технологий привел к появлению и повсеместному распространению сетей с пакетной передачей данных, которые постепенно стали вытеснять системы с коммутацией каналов, но те, по-прежнему, проектировались на основе общих положений теории телетрафика. [4]

Однако, в 1993 г. группа американских исследователей W. Leland, M. Taqqu, W. Willinger и D. Wilson опубликовали результаты своей новой

работы, которая в корне изменила существующие представления о процессах, происходящих в телекоммуникационных сетях с коммутацией пакетов. Эти исследователи изучили трафик в информационной сети корпорации Bellcore и обнаружили, что потоки в ней нельзя аппроксимировать простейшими потоками, потому что они имеют совершенно иную структуру, чем принято в классической теории телетрафика. В частности, было установлено, что трафик такой сети обладает свойством самоподобия., то есть выглядит качественно одинаково при почти любых масштабах временной оси, имеет память (последствие), а также характеризуется высокой пачечностью. В результате теоретический расчёт параметров системы распределения информации, предназначенной для обработки такого трафика, по классическим формулам даёт некорректные и неоправданно оптимистические результаты. Более того, привычные алгоритмы обработки трафика, созданные для работы с простейшими потоками, оказываются недостаточно эффективными для потоков с самоподобием. Проблеме самоподобия телетрафика за последние годы посвящены тысячи работ, и она до сих пор не утратила своей актуальности [4]. Упомянем только некоторые из них, не претендуя на полноту обзора.

В книге [5] рассмотрены основы теории фрактальных стохастических процессов. На основе реальных изменений трафика телекоммуникационных сетей сформулированы математические модели этих процессов.

В работе [6] были проведены исследования суммарного передаваемого сетевого трафика и соответствующих аппаратных процессов сервера сети университета. Для всех процессов было установлено самоподобие и рассчитан показатель Хёрста, характеризующий наличие долговременной памяти временного ряда. На основе этого делается вывод о возможности в дальнейшем применения фрактальных моделей для работы с данными, в том числе использования методов прогнозирования. Показателем этой памяти служит коэффициент Хёрста H – мера самоподобия или статистической инерции процесса.

Интерпретация показателя Хёрста здесь следующая:

$H=0,5$ – подразумевает белый шум, то есть трафик представляет независимый, случайный процесс.

$0,5 < H < 1$ – означает черный шум или персистентность трафика. Трафик характеризуется эффектом долговременной памяти и имеет склонность следовать трендам (хорошо предсказуем).

$0 < H < 0,5$ – означает розовый шум или антиперсистентность. Агрегированный трафик меняет направление чаще, чем ряд случайных независимых величин.

Таким образом, значение H можно интерпретировать как степень предсказуемости (прогнозируемости) трафика. [4]

Оценка качества обслуживания является одной из важнейших задач при создании и конфигурировании современных систем телекоммуникации. На протяжении многих лет при анализе потоков «голосовых» и текстовых сообщений успешно использовались марковские процессы, во многих случаях позволяющие получить явные формулы для расчёта стационарных характеристик производительности в рассматриваемых моделях. Однако информация в современных системах телекоммуникации обладает сложной структурой, кардинально отличной от обычной телефонии или почтовых сервисов. В работе [7] получена оценка для вероятности переполнения большого буфера для неоднородной модели входящего трафика.

По словам Потапова А.А. [8], «Самые общие и глобальные принципы и закономерности природы часто повторяются и в отдельных малых ее частях. Или наоборот: каждый частный случай даёт хотя и приближённое представление о целом, но отражает суть и принцип его образования. Примеров тому много – растрескивание земли, образование рыбьих стай, работа систем сбора информации, административное разделение государств и т.д.» Среди технических примеров термина «фрактальный лабиринт» автор отмечает форму радиоантенн, которая, представляя собой самоподобный излом линии вибратора, способна эффективнее соразмерных аналогов принимать сигнал. Такие антенны называются фрактальными и широко применяются сейчас в средствах связи массового потребления. Другой пример – «фрактальный конденсатор», за счет фрактальной структуры (схемы замещения) имеет уникальные электротехнические свойства. Математический плоский фрактал нигде не плотен, но когда речь идёт о физическом фрактале, количество итераций и каждый геометрический размер которого конечны, размерность фрактала становится пропорциональна коэффициенту заполнения им пространства. В свою очередь, размерность кривой зависит исключительно от формы образующего её элемента и не всякий фрактал может эффективно заполнить выделенную область. [8]

Подробнее о применении фракталов в радиосистемах будет рассмотрено в следующем параграфе.

Исследовательские и информационные проекты

1. Сделайте обзор фрактальных сетей и лабиринтов, встречающихся в природе.
2. Сделайте обзор фрактальных сетей и лабиринтов, встречающихся в человеческой жизнедеятельности. В каких современных разработках используются фрактальные сети и лабиринты?
3. Проведите исследование суммарного передаваемого сетевого трафика и соответствующих аппаратных процессов сервера сети Удмуртского государственного университета. Установите, имеется ли самоподобие, вычислите показатель Хёрста, охарактеризуйте наличие памяти временного ряда.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012. – 200 с., ISBN 978–5–87941–829–3
2. Иудин Д.И. Трахтенгерц В.Ю. Фрактальные лабиринты: структурная динамика // «Нелинейные Волны»-2006. – Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2007. – С. 360–377.
3. Иудин Д.И., Гелашвили Д.Б. Перколяционные эффекты в биоэкологических системах // «Нелинейные Волны»-2010. – Отв. ред. А.В. Гапонов-Грехов, В.И. Некоркин. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2011. – С. 412–434.
4. Понятие о самоподобном (фрактальном) трафике / Лекция с сайта Helpiks.org – Режим доступа: <https://helpiks.org/6-66898.html>
5. Шелухин О.И. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / О.И. Шелухин, А.М. Тенякшев, А.В. Осин; Под ред. О.И. Шелухина. – М.: Радиотехника, 2003. – 479 с.: ил., табл. – ISBN 5-93108-030-9
6. Басараб М.А., Колесников А.В., Иванов И.П. Анализ сетевого трафика корпоративной сети университета методами нелинейной динамики // Наука и образование: Электронный научно-технический журнал. – 2013. №8 – Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/587054.html>
7. Гончаров Б.А., Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. – 2018. №4. – С.50–63. – Режим доступа: <https://doi.org/10.26456/vtpmk517>
8. Грачев В.И., Потапов А.А., Потапов В.А. Фрактальные лабиринты // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. (РЭНСИТ). – №2. Т.3, 2011. – С. 103-109.

3.6. Фракталы в технических науках

Начиная с 80-х гг. XX в., научный коллектив под руководством Потапова А.А. в институте радиотехники и электроники (ИРЭ) им. В.А. Котельникова последовательно ищут новые радиофизические подходы, так или иначе связанные с применением теории фракталов, детерминированного хаоса, скейлинговых эффектов и дробных операторов [1-5]. В данном параграфе в основном используются материалы публикаций Потапова А.А.

В телекоммуникациях фракталы используются для создания фрактальных антенн. Фрактальные антенны – относительно новый класс электрических малых антенн (ЭМА), принципиально отличающийся своей геометрией от известных решений. Традиционная эволюция антенн базировалась на евклидовой геометрии (линия, круг, эллипс, параболоид и т.п.). Фрактальная антенна с удивительно компактным дизайном обеспечивает превосходную широкополосную производительность в маленьком форм-факторе. Достаточно компактны для установки или встраивания в различных местах, фрактальные антенны используются для морских, воздушных транспортных средств, или мобильных телефонов.

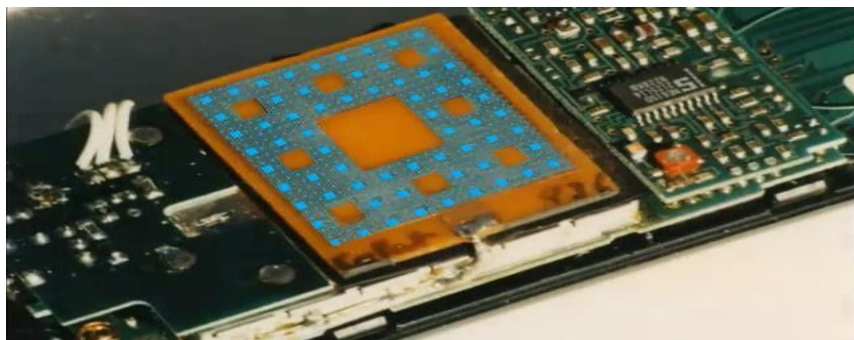


Рис. 32. Антенна на основе ковра Серпинского

Антенные устройства и частотно-избирательные поверхности (ЧИП) являются неотъемлемой частью радиосистемы. Опыт анализа и синтеза фрактальных антенн доказывает их эффективность при разработке многочастотных радиолокационных и телекоммуникационных систем [2-4]. Области применения фрактальных антенн: современные телекоммуникации, шумовая радиолокация, нелинейная радиолокация, системы поиска, локализации и трассировки мобильных объектов, пеленгация в сложных городских условиях, определение местоположения несанкционированных

источников радиоизлучения при борьбе с террористами, оперативная связь в войсках, маркеры на различных предметах, космическая связь, современный физический эксперимент и т.п. Уникальной особенностью фрактальных антенн является теоретически бесконечное уплотнение ограниченной области пространства геометрией антенны, и как результат – дополнительные резонансные частоты в диапазоне длин волн, часто значительно превышающих геометрические размеры фрактальной структуры. На сегодняшний день не существует строгой электродинамической теории, объясняющей и предсказывающей достаточно уникальные свойства структур, построенных на основе фрактальных множеств [1]. Но все попытки использовать геометрические фракталы в реальных задачах радиофизики подразумевают под собой ограничение числа итераций построения фрактала, то есть использование предфрактала.

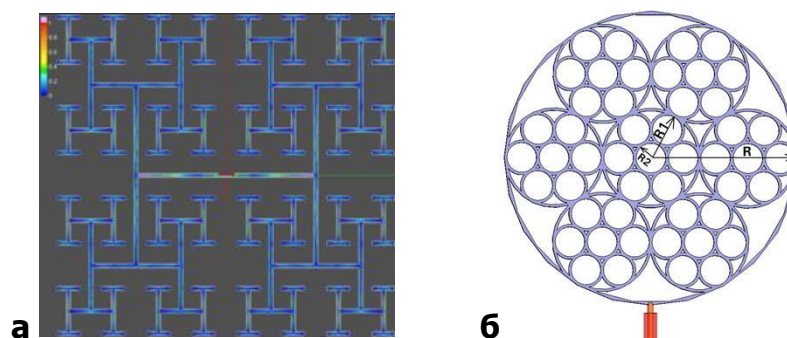


Рис. 33. а) Распределение токов по фрактальной антенне «Дерево Кейли»;
б) Схема монопольной антенны A2 [1-3].

При разработке современных радиопоглощающих покрытий и материалов, которые должны обеспечивать поглощение широкого спектра электромагнитного излучения при произвольных углах зондирования и поляризации падающего излучения, перспективно применение фрактальных искусственных композитов и метаматериалов [2-4]. Помимо прямого назначения, они могут иметь разнообразное функциональное назначение, и их относят к «интеллектуальным» или «умным» материалам. Применение рекурсивного процесса позволяет создавать самоподобную иерархическую структуру, вплоть до отдельных проводящих дорожек в микросхеме и в наноструктурах. При этом необходимо учитывать и научиться рассчитывать взаимное и коллективное влияние всех электромагнитных полей со всеми компонентами микросхемы: проводящие дорожки, полупроводник, диэлектрик и т.д.

Фрактальные фотонные и магнотонные кристаллы обладают целым рядом преимуществ перед своими классическими аналогами и являются

принципиально новыми средами для передачи информации. Традиционные материалы с фотонными запрещёнными зонами используют брэгговское рассеяние, чтобы создать запрещённые зоны. Естественным следствием брэгговского механизма рассеяния является то, что толщина и поперечные размеры фотонных кристаллов должны составлять несколько длин волн. Применение планарных проводящих фракталов даёт возможность создавать сложные отражающие и пропускающие зоны в широком диапазоне частот. В этом случае фрактальная структура может быть сверхволновой. При конструировании фрактальных фотонных и магнанных кристаллов удобны детерминированные геометрические фракталы, которые имеют легко прогнозируемые характеристики и могут быть достаточно просто сгенерированы. Анализ результатов численного моделирования [3] показал, что электромагнитная волна возбуждает токи в металлических проводниках фрактала, амплитуда которых достигает максимума в диапазоне сильно отражающих частот. Кроме того, такие фрактальные структуры можно использовать как радиолокационные экраны, искажающие радиопортреты исследуемых объектов [2-4].

Ещё одной областью исследований коллектива Потапова А.А. являются фрактальные характеристики радиотеплового излучения атмосферы. Миллиметровые волны (ММВ) активно взаимодействуют с газами земной атмосферы, особенно с кислородом и водяным паром, а также с гидрометеорными образованиями, к которым относятся дожди, облака, снегопады и т.п. В результате этого взаимодействия ММВ сильно поглощаются и рассеиваются в тропосфере. Для рассматриваемых задач Потапов А.А. предложил следующие основные пути: а) миниатюрные фрактальные антенны, б) фрактальные структуры в фотонных и магнанных кристаллах, в) физическое моделирование фрактальных импедансов и дробных операторов, г) перколяционный синтез наноструктурированных композитов и т.п. Модели образования фрактальных кластеров используются для создания и анализа материалов с необычными физическими свойствами. Так, можно создавать материалы, способные поглощать электромагнитное излучение в достаточно широком диапазоне длин волн, новые красители, жидкокристаллические системы, наноструктуры, твердые вещества с пористостью до 99%.

Основываясь на полученных результатах, Потапов А.А. уже говорит о проектировании не только фрактальных элементов (устройств), но и фрактальных радиосистем [1,5]. Такие фрактальные радиосистемы структурно включают в себя фрактальные антенны и цифровые фрактальные

обнаружители, основаны на фрактальных методах обработки информации, а в перспективе могут использовать фрактальные методы модуляции и демодуляции радиосигналов. При таком «фрактальном» подходе естественно сосредоточить внимание на описании, а также обработке радиофизических сигналов (полей), исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотезы скейлинга и распределений с «тяжёлыми хвостами» или устойчивых распределений. Предложенные А.А. Потаповым фрактальные радиосистемы и фрактальные радиоэлементы, открывают новые возможности в современной радиоэлектронике и могут иметь в будущем самые широкие перспективы практического применения [1,5].

Исследовательские и информационные проекты

Сделайте обзор современных методов и разработок, использующих фракталы а) в радиосистемах; б) в создании новых материалов; в) в телекоммуникации; г) других технических науках.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Потапов А.А. Фракталы, скейлинг и дробные операторы в физике и радиотехнике // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – №1-2. Т.1, 2009. – С. 64-128.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: Логос, 2002. – 664 с.
3. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.
4. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах // Дополнение к книге: Кроновер Р. «Фракталы и хаос в динамических системах»: Пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006. – С. 374 – 479.
5. Потапов А.А. Физические основы и принципы построения фрактальных радаров и фрактальных сенсоров: новое направление – Фрактальный анализ и его применение в теории статистических решений и в статистической радиотехнике // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. (РЭНСИТ) – №2. Т.9, 2017. – С. 129-138.

3.7. Фракталы в естествознании и медицине

Как отмечается в [1], общая черта фрактальных ветвящихся структур в живой природе – увеличение площади раздела фаз, максимальное заполнение пространства, что обеспечивает живым организмам максимизацию площади обмена с окружающей средой и соответствующую интенсификацию метаболизма при минимизации общего объема (принцип минимакса). В этом – биологическая функция фрактальных структур, создающих огромное разнообразие биологической формы и функции. Именно фрактальная размерность представляет собой показатель, меру заполнения пространства фрактальной структурой. Исследования фракталов и хаоса в биологии постепенно охватывают все уровни организации живого, от молекул до экосистем. Даже простое и далеко не полное перечисление тематики даёт представление о размахе исследований фракталов в биологии и биомедицине. На молекулярном уровне это изучение первичной и вторичной структуры ДНК, РНК, белков, других макромолекул и их комплексов, динамики окислительных процессов и т.д. На субклеточном и клеточном уровне исследуются фрактальные свойства пространственной организации мембран, цитоплазмы, ядер, распределения рецепторов и молекул адгезии (одна из вновь открытых молекул клеточной адгезии получила название «фракталкин»), кинетика связывания лигандов с рецепторами, динамика клеточного движения, морфология различных клеток и их ассоциаций. Тканевой уровень фрактальных исследований включает морфологическую организацию и разнообразные гистогенезы в норме и патологии, особенно при онкогенезе. На уровне органов и организма изучается фрактальная организация дыхательной, сосудистой и других систем животных и растений, множество физиологических и поведенческих реакций организма в норме и патологии. Словом, распределение исследований фракталов в биологии само представляет собой быстро растущий и ветвящийся фрактальный кластер. На основе программ с использованием алгоритмов построения фрактальных структур созданы компьютерные имитационные модели ряда биологических объектов.

Сам по себе человеческий организм состоит из множества структур, удовлетворяющих свойству фрактальности: кровеносная система, мышцы, бронхи и т.д. Поэтому учёные задумались можно ли применять фрактальные алгоритмы для диагностики или лечения каких-либо заболеваний? Оказывается, возможно.

Например, теория фракталов применяется для анализа электрокардиограмм. В последние годы, несмотря на успехи в разработке новых лабораторных и инструментальных методов диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, продолжается их рост. Периоды биоритмов, в частности, сердечного ритма, длительностью порядка часа, суток и более, можно изучать традиционными методами гистограммного или спектрального анализа. Однако оценка хроноструктуры величины и ритмов фрактальной размерности и показателей Хёрста позволяют на более ранней стадии и с большей точностью и информативностью судить о нарушениях гомеостаза и развитии конкретных заболеваний [2].

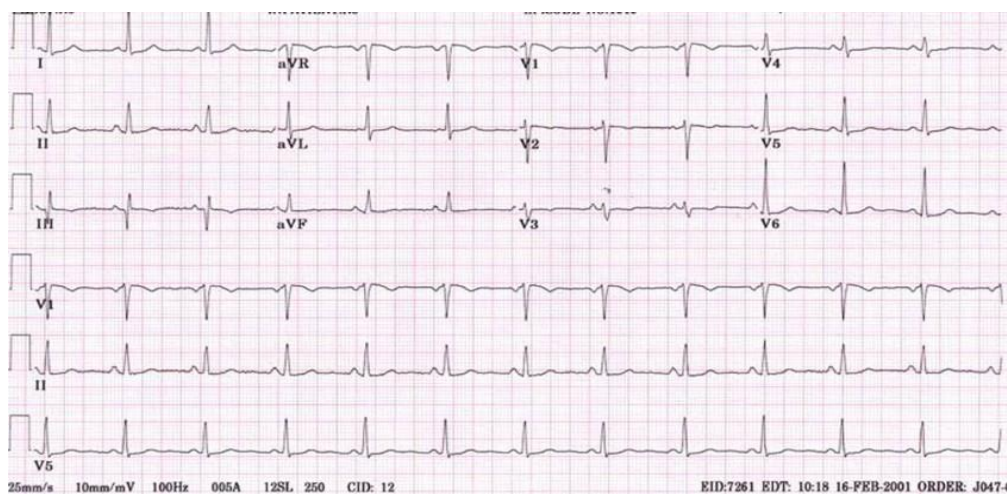


Рис. 34. Пример кардиограммы

Также фракталы используются (пока на стадии успешных экспериментов) в обработке медицинских рентгеновских изображений. Рентгеновские снимки, обработанные с помощью фрактальных алгоритмов, дают более качественную картинку, а соответственно и более точную диагностику [2]. Метод фрактального анализа изображений позволяет выявить наличие аномалий в рентгеновском изображении легких задолго до появления серьёзных клинических симптомов и проследить динамику изменения патологии, как в процессе развития болезни, так и под влиянием лечения. Установлено, что изображения легких с патологией обладают отличительной фрактальной размерностью относительно изображений нормы [3].

Ещё одна область в медицине, где активно могут применяться фракталы – это гастроэнтерология. Электрогастроэнтерография – метод исследования, позволяющий оценить биоэлектрическую активность желудка, двенадцатиперстной кишки и других отделов ЖКТ. Он основан на регистрации изменений электрического потенциала от органов ЖКТ.

Применение фрактального анализа к получаемым биоэлектрическим сигналам от органов, позволяет судить о моторной функции ЖКТ и успешно диагностировать различные заболевания [2].

Поскольку фрактальная геометрия описывает морфогенетические законы сложных структур, то эти законы могут использоваться для математического моделирования формирования ретинальных сосудов (нормальной васкуляризации сетчатки) во время развития и в разработке автоматических методов диагностики заболеваний сетчатки. Фрактальный анализ сетчатки – математический метод, позволяющий оценить степень сложности геометрии сосудистых сетей. Получены многочисленные свидетельства, что разветвленная сосудистая сеть нормальной сетчатки статистически самоподобна и проявляет свойства фрактала, а фрактальный анализ можно применять для автоматизированной диагностики сосудистых заболеваний сетчатки [4].

Американские учёные [5] составили карты адгезии [адгезия (от лат. *adhaesio* – прилипание) в физике – сцепление поверхностей разнородных твёрдых и/или жидких тел] поверхностей нормальных и раковых клеток. Оказалось, что эти карты имеют разную фрактальную размерность. Возможно, это открытие в будущем поможет создать новые эффективные методы диагностики и лечения онкологических заболеваний [2].

В работе [6] применён мультифрактальный формализм к видовой структуре сообщества флоры. Это сообщество рассматривается как множество, состоящее из отдельных фрактальных подмножеств, которые можно интерпретировать как совокупности особей, относящихся к видам со сходной представленностью. Для таких подмножеств можно вычислить фрактальную размерность, которая и будет характеризовать видовое разнообразие. Обсуждаются результаты применения правила Виллиса к анализу таксономического разнообразия флоры Самарской Луки (бассейн р. Волги). Утверждается, что закономерности, выявленные для мультифрактального спектра видовой структуры сообщества, в известной мере, сохраняются и для спектра родовой структуры.

Очень часто фракталы применяются в геологии и геофизике [2], для вычисления длины побережий (см. п.1.5). Также фрактальный анализ помогает в поиске и разработке месторождений полезных ископаемых, распределение которых очень часто происходит по фрактальному механизму. Исследование разломной тектоники и сейсмичности порой тоже исследуется

с помощью фрактальных алгоритмов. Геофизика использует фракталы и фрактальный анализ для исследования аномалий магнитного поля, для изучения распространения волн и колебаний в упругих средах, для исследования климата и многих других вещей. В физике твёрдых тел фрактальные алгоритмы позволяют точно описывать и предсказывать свойства твёрдых, пористых, губчатых тел, различных аэрогелей. Это помогает в создании новых материалов с необычными и полезными свойствами. Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны, и поэтому их сложно смоделировать традиционными методами. А переход к фрактальному представлению позволяет лучше понять их динамику, как сложной системы.

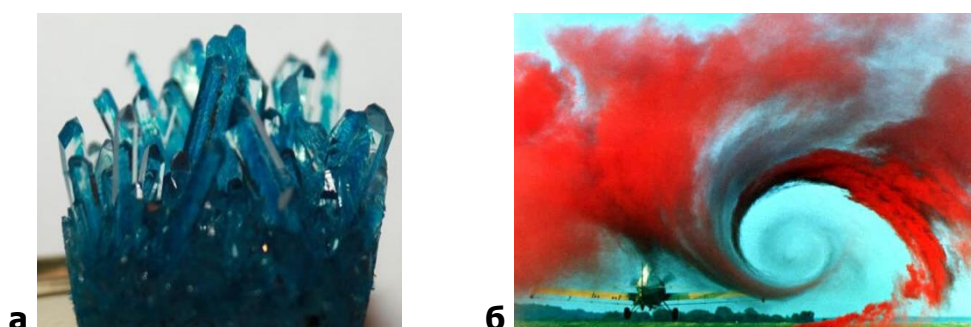


Рис. 35. а) Пример кристалла, **б)** турбулентность

Распределения звезд, галактики, скопления галактик и тому подобные материи издавна завораживают как любителей, так и специалистов, однако кластеризация до сих пор остаётся на периферии астрономии, да и всей астрофизики в целом. Главная причина заключается в том, что никто так и не в состоянии объяснить, почему распределение материи подчиняется иррегулярным иерархическим законам – по крайней мере, в определенном диапазоне масштабов. Во многих трудах, посвященных этой теме, всё чаще используется концепция фрактальности вселенной и появилась теория фрактальной космологии, которая отрицает пространственную однородность Вселенной на больших масштабах и предполагает у неё фрактальную размерность, меньшую трёх [7].

В работе [8] рассмотрена фрактальная парадигма построения моделей и логических схем алгоритмов обработки, анализа и классификации больших потоков астрономических данных об орбитах и траекториях малых тел. Данные построения основаны на теории фрактальных размерностей пространственных и временных структур, алгоритмическая и содержательная сущность которых заключается в следующем. Во-первых, обработка потока данных состоит в том, чтобы определить, образует ли он фрактальную

структуру. Если да, то необходимо определить центры фрактальной связанности потока данных и получить оценки индекса информационной связанности. Во-вторых, алгоритмы и процедуры технологий анализа и классификации обработанного потока позволяют выделить монофрактальные структуры, если поток образует мультифрактал, и классифицировать их по признаку принадлежности к классам перколирующего фрактала или фрактального агрегата, а также оценить меру расхождения между геометрическими и информационными фрактальными размерностями, как индикатора единства количественных и качественных характеристик потока. Прикладные аспекты результатов работы тесно связаны с решением задач астероидно-кометно-метеорной безопасности и проблемой космического мусора. Предложены методы фрактальной теории решения сложных нелинейных задач обработки, анализа и интерпретации результатов динамической эволюции объектов космического пространства с нерегулярной пространственно-временной фрактальной геометрией.

Исследовательские и информационные проекты

1. На основании доступных данных вычислите фрактальную размерность распределения материи во Вселенной. Постройте модель распределения материи во Вселенной с произвольной фрактальной размерностью D .
2. Сделайте обзор современных методов и разработок, использующих фракталы в медицине и биологии.
3. Сделайте обзор современных методов и разработок, использующих фракталы в астрономии и физике.
4. Сделайте обзор современных методов и разработок, использующих фракталы в географии, геологии и добыче ископаемых.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Исаева В.В., Каретин Ю.А., Чернышев А.В., Шкуратов Д.Ю. Фракталы и хаос в биологическом морфогенезе. – Владивосток, 2004. – 128 с.
2. Сайт по фрактальной графике и алгоритмическому искусству Meskalinerush. – Режим доступа: <https://m-rush.ru/theory/item/184->
3. Иванников В.П., Кабакова А.В. Применение фрактальной математики к компьютерному анализу рентгенограмм // Медицинская физика – 2014, №4. – С. 51-56.
4. Зуева М.В. Нелинейные фракталы: приложения в физиологии и офтальмологии // Офтальмология, 2014. – Т.11, №1. – С. 4-11. Режим

- доступа: <https://docplayer.ru/26060813-Nelineynye-fraktaly-prilozheniya-v-fiziologii-i-ofthalmologii-obzor.html>
5. Dokukin M.E., Guz N.V., Gaikwad R.W., Woodworth C.D., Sokolov I. Cell Surface as a Fractal: Normal and Cancerous Cervical Cells Demonstrate Different Fractal Behavior of Surface Adhesion Maps at the Nanoscale // Phys. Rev. Lett. 2011. 107, 028101.
 6. Розенберг Г.С. Фрактальные методы анализа структуры сообществ // Принципы экологии. – 2018. № 4. – С. 4–43.
 7. Фрактальная космология: материал из Википедии. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Фрактальная_космология
 8. Мышев А.В., Дунин А.В. Фрактальные методы в информационных технологиях обработки, анализа и классификации больших потоков астрономических данных // Труды XIX Международной конференции «Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных» (DAMDID/RCDL'2017), Москва, 10–13 октября 2017 г. – С. 172-176.

3.8. Фракталы в философских науках

Современный этап развития гуманитарного знания характеризуется синтезом наук, появлением таких новых феноменов, объяснение которых требует усилий, как гуманитариев, так и представителей естественных и технических наук. Современная культура всё чаще обращается к понятию фрактальности; из математического мира фрактал перебрался в сферу гуманитарных и в особенности – междисциплинарных исследований. Предприняты попытки многих исследователей расширить концепцию фрактала, обобщить его идею на совершенно другие области, прежде всего на процессы мышления.

Так В.В. Тарасенко, занимающийся проблемами самоорганизации и применением фракталов в методологии науки, в своей книге «Фрактальная логика» [1] после исторического обзора возникновения концепции фрактала ставит проблему создания исчисления «логических фракталов» – парадоксальных суждений с бесконечным количеством значений, генерируемых рекурсивными обратными связями. В работе сформулирован «принцип дополнительности» фрактальной концепции, обсуждается и формализуется комплиментарность (дополнительность) суждений об

измерении природных объектов. В другой работе [2] автор убедительно показывает фрактальный характер метанауки, обращаясь к логическому, психологическому, филологическому, кибернетическому, философскому, культурологическому и другим аспектам семиотики. В книге предлагается интерпретация классических категорий семиотики (знак, предмет, понятие, обозначение и пр.) как фрактальных процессов, разворачивающихся в эволюционных и самореферентных динамиках. Очень важной является попытка «фрактальной» реинтерпретации семантического треугольника Фреге, формирование его «эволюционно-динамической» версии.

В статье [3] Латыпов И.А. к искусственным фрактальным объектам относит структуру сети Интернет и характеризует рекурсивностью наряду с фрактальностью развитие информационно-коммуникационных отношений в сети. Рекурсивность – термин, обозначающий повторяющийся характер человеческой деятельности и любого социального феномена как такового, устанавливающий отношения различия с тем, что повторяется.

В качестве примера рекурсивных информационно-коммуникационных отношений автор рассматривает сетевое распространение мемов. Мем – это единица культурной информации, распространяемая от одного человека к другому посредством обучения, подражания, повторения и т.п. Происхождение понятия «мем» характеризуется различными версиями. Одна из версий исходит из английского слова «memory» или латинского слова «memoria» – память. Другая версия – от греческого слова «μίμημα» – подобие. Распространение интернет-мемов как ментальных вирусов часто проводится вполне осознанно по аналогии с размножением биологических вирусов. Иногда интернет-мемы «вбрасываются» в блоги без какого-либо определенного намерения и распространяются уже далее как дань сетевой моде повторения. В частности, примером интернет-мема является вирусоподобное распространение сюжета «Мистер Трололо» с вокализмом Эдуарда Хила. Подобные интернет-мемы можно относить к разновидности медиа-вирусов. Термин мем «введен для описания процессов хранения и распространения отдельных элементов культуры. Мемы — это просто информация, но функционирование мемов имеет заметные физические и поведенческие последствия. Мемы могут распространяться горизонтально (между представителями одного поколения), и вертикально (от поколения к поколению)». [3]

Другим примером рекурсивных информационно-коммуникационных отношений является повторяющийся характер распространения рекламной информации. Фрактальность же наглядно проявляется, если рассматривать

онлайнное распространение рекламной информации. Тем самым, повторяющийся характер реализуется в рекламе более сложным образом на следующих этапах рекламной деятельности. Онлайнное распространение повторяющейся рекламной информации наиболее ярко воплощает кажущуюся разнородность системы рекламной коммуникации в сетевых СМИ. Сетевые СМИ стали сейчас наиболее динамичной составляющей системы массмедиа в целом и обгоняют по многим параметрам печатную и наружную рекламу. [3]

Фрактальность самоподобия в конструировании сети этих отношений реализует принцип системного подхода. Поэтому для конструирования сети информационно-коммуникационных отношений характерно её рассмотрение как сложной иерархии подсистем различных уровней. Эта сложная системность, в свою очередь, может разворачиваться и на метауровне. Фрактальное самоподобие может быть характерно для различных структур информационного общества как сетевого общества (*network society*). Новые информационные технологии меняют логику коммуникационной деятельности. Сетевая логика развития реализует и обилие синергетических эффектов самоорганизации сети информационно-коммуникационных отношений как сети сетей. Сетевая структура является оптимальной для развития в неопределенном информационном и социальном пространстве. Кроме того, с сетевым принципом связана гибкость, текучесть и изменчивость динамичных процессов развития информационного общества. Неизменной становится, прежде всего, фрактальная изменчивость социальных трансформаций и процессов развития рекурсивной сети информационно-коммуникационных отношений. [3]

В статье [4] с социально-философской точки зрения рассматриваются мультифрактальные характеристики полисубъектных коммуникаций в процессе сетевой информационной деятельности. Предлагается мультифрактальный подход к теории полисубъектной социальности. Предлагаемая философская трактовка данного подхода к заявленной проблеме характеризует самоподобие сетей полисубъектных отношений. В данном исследовании информационными называются общественные отношения по поводу производства, хранения, передачи и потребления информации. Сетевая же коммуникация в данной работе трактуется как вид коммуникации в Интернет-пространстве. Автор отмечает, что понятие фрактала и мультифрактала становится актуальным и для коммуникативистики. Мультифрактальность информационных отношений в сети формируется в результате самоорганизации различных фрактальных

подструктур информационного пространства сетевых коммуникаций. Интернет-пространство в целом развивается мультифрактальным образом в результате последовательной смены и развития различных соответствующих алгоритмов. В качестве подтверждающих примеров И.А. Латыпов отмечает следующие. 1) В развитии некоторых сегментов Интернет-пространства (например, китайского) в последнее время появляются определенные алгоритмы, не предполагавшиеся на заре Интернет-технологий (в частности, алгоритмы фильтрации контента). 2) Формирование и развитие же кириллического домена сети «.рф» в России в некоторой степени облегчило проникновение Интернет-технологий в сельскую местность и расширение круга пользователей сетевых коммуникаций, и т.д. 3) Развитие в Интернет-пространстве и возможная последующая смена алгоритмов цифровой подписи и электронного документооборота многократно увеличили возможности технологий электронной коммерции и «электронного правительства». 4) В связи с бурным ростом возможностей мобильного доступа к сети совершенствуются алгоритмы развития и самоорганизации Интернет-пространства в целом, и т.д.

В статье [5] приводятся некоторые предварительные результаты социально-теоретического анализа сетевых медиакоммуникаций в качестве предметного поля междисциплинарных исследований с точки зрения мультифрактальности, которая трактуется как одновременная реализация нескольких фрактальных моделей в ней. Предлагаемая теоретическая трактовка данного подхода к заявленной проблеме характеризует самоподобие сетей медиакоммуникаций. Однако в сетевых коммуникациях, наряду с этим, для самоорганизации виртуальных сообществ столь же существенными (если не более существенными) начинают становиться мультифрактальные факторы.

Мультифракталы используются Б. Мандельбротом в моделировании реальных рынков [6]. Но теоретическая основа такого моделирования может быть использована для анализа активности распространения информации в сетевых медиакоммуникациях.

На начальных этапах моделирования реальных рынков, по Мандельброту, используется описываемый ниже генератор фрактала (см. рис. 3б). Использование же нескольких различных генераторов фракталов и порождает мультифрактал. «Можно начертить простой график, который отражает последовательные изменения цен от времени 0 к более позднему времени 1. Сами интервалы выбраны произвольно; они могут представлять секунду, час, день или год. Процесс начинается с цены, представленной прямой линией тренда (иллюстрация 1). Затем используется ломаная линия,

названная генератором, чтобы создать модель, которая соответствует колебаниям цены вверх и вниз. Генератор состоит из трех частей, которые интерполированы вдоль прямой линии тренда. (Генератор с меньшим количеством, чем три, не смоделировал бы цену, которая может двигаться вверх и вниз). После прорисовки начального генератора, его три части интерполированы тремя более короткими. Повторение этих шагов воспроизводит форму генератора, или ценовую кривую, но в сжатых масштабах. И горизонтальная ось (шкала времени) и вертикальная ось (цена) сжаты, чтобы приспособить к горизонтальным и вертикальным границам каждую часть генератора. ... Понятно, что каждая часть по форме примерно подобна целому» [6] (см. рис.36). Тем самым, мультифрактал формируется в результате последовательной смены и развития соответствующих алгоритмов генерирования различных фракталов.

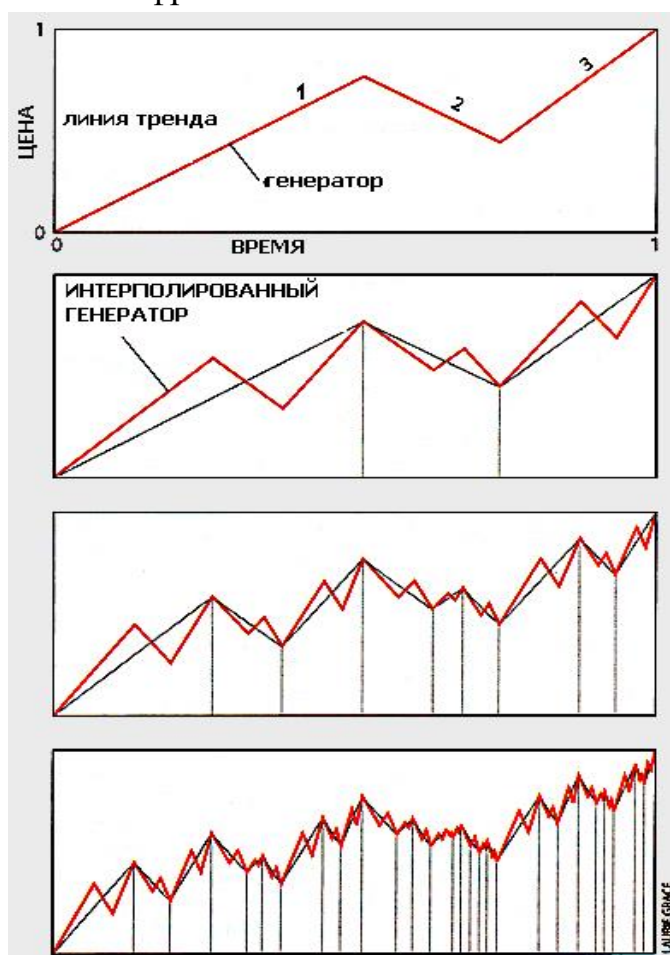


Рис. 36. Начальные этапы использования генератора мультифрактала по Мандельброту Б. ([6]).

Использование генераторов мультифракталов по аналогии с методологической концепцией Мандельброта позволяет описывать сетевые коммуникации более точно, а значит, и даёт возможности для более глубоких исследований. По горизонтальной оси аналогичных графиков так

же, как и в примере Мандельброта, будет откладываться время. Вертикальная же ось координат в анализе сетевых медиакоммуникаций может выражать степень активности распространения информации. Управляющим же параметром в процессах самоорганизации сетевых медиакоммуникаций будет социально значимая информация (то есть различные информационные поводы, возможные информационные вбросы и т.п.). Аналогичные графики могут быть выстроены для частоты и цитируемости сетевых публикаций. Перспективы исследований медиакоммуникаций связаны с анализом самоподобных фракталоподобных коммуникаций (с развитием фрактальной и мультифрактальной методологии), например, по аналогии с финансово-экономическим исследованием мультифрактальных колебаний курсов акций медиагрупп или рейтингов телепередач и т.п. [5]

Дунас Д.В. в своей работе [7] рассматривает медиакоммуникацию как фрактальную диссипативную систему и сравнивает массовую коммуникацию с классическим примером – фракталом Кантора.

Исследовательские и информационные проекты

1. Исследуйте с точки зрения фрактального анализа апории Зенона и другие логические парадоксы.
2. Проведите исследование классических категорий семиотики (знак, предмет, понятие, обозначение и пр.) с точки зрения теории фракталов.
3. Исследуйте информационно-коммуникационные отношения в социальных сетях с помощью фрактального анализа.
4. Исследуйте интернет-мемы и их распространение с точки зрения фрактального анализа. Приведите примеры.
5. Проведите исследование медиа-вирусов и их распространение в сети с точки зрения теории фракталов. Приведите примеры.
6. Исследуйте онлайн-распространение рекламной информации с помощью фрактального анализа. Приведите примеры.
7. Проведите фрактальный анализ самоорганизации виртуальных сообществ в сети Интернет.
8. Используя генератор мультифракталов Б. Мандельброта, смоделируйте графики а) активности распространения информации, б) частоты и цитируемости сетевых публикаций. Сравните с реальными графиками.
9. Проведите исследование мультифрактальных колебаний курсов акций медиагрупп.
10. Проведите исследование мультифрактальных колебаний рейтингов телепередач.

Используемые и рекомендуемые источники:

1. Тарасенко В.В. Фрактальная логика. – М.: «Прогресс-Традиция», 2002. – 160 с. – ISBN 5-89826-119-2.
2. Тарасенко В.В. Фрактальная семиотика. Слепые пятна, перипетии и узнавания. – М.: Либроком, 2009. – 232 с.
3. Латыпов И.А. Фрактальность рекурсивной сети информационно-коммуникационных отношений // Сб. научных статей «Актуальные тенденции социальных коммуникаций: история и современность». – Ижевск, 2013. – С. 149-152.
4. Латыпов И.А. Полисубъектная мультифрактальность информационных отношений в сети: философские аспекты // Вестник Гуманитарного университета. – Екатеринбург, 2014. № 4 (7). С. 80-87. ISSN 2308-8117.
5. Латыпов И.А. О мультифрактальности сетевых медиакоммуникаций в ЕС и РФ: социально-теоретический аспект // Актуальные тенденции социальных коммуникаций: история и современность. (Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные тенденции социальных коммуникаций: история и современность», 29 октября 2018 г., Ижевск) / Под ред. Г.В. Мерзляковой и др. – Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет», 2018. – С. 13-18. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=36754727> (Дата обращения: 18.08.2020).
6. Mandelbrot В.В. A Multifractal Walk Down Wall Street (Мультифрактальная прогулка вдоль Уолл Стрит) – Режим доступа: <http://www.adamaz.ru/mandelbrot/178-multifraktalnaja-progulka.html>
7. Дунас Д.В. Влияние антропологического фактора на теорию массовой коммуникации // Вест. Моск. Ун-та. Сер. 10. Журналистика. – 2009. №1 – С. 80-94.

Приложения

Приложение 1

Рассмотрим алгоритмы методов оценки размерности для некоторых часто встречающихся в расчётах типов данных. Методы взяты из книги: Иудин Д.И. Фракталы: от простого к сложному / Д.И. Иудин, Е.В. Копосов; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т – Н. Новгород: ННГАСУ, 2012.–200 с., ISBN 978–5–87941–829–3

I. *Метод подсчета занятых ячеек (box-counting)*. Этот метод один из самых простых, чаще всего применяется для оценки размерности множества на плоскости по его изображению, хотя он легко обобщается на пространство любой размерности.

1. Изображение покрывается сеткой с размером ячейки ε .
2. Подсчитывается число занятых ячеек $N(\varepsilon)$.
3. Повторяются шаги 1-2 с увеличением размера ячейки ε от минимального до максимального. Увеличение обычно следует геометрическому ряду: например 2, 4, 8, 16.
4. Строится график зависимости $N(\varepsilon)$ в билогарифмических координатах.
5. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, он и представляет собой показатель Хёрста H , а фрактальная размерность равна $D = 2 - H$.

II. *Метод скользящего окна (gliding box)*. Этот метод является модификацией предыдущего. Он применяется, когда имеется сетка, каждая ячейка которой либо занята, либо нет (любое изображение легко приводится к такому виду).

1. Выбирается «окно анализа» некоторого размера ε .
 2. Окно помещается во все доступные позиции на сетке и подсчитывается число окон, захвативших хотя бы одну точку объекта $N(\varepsilon)$.
- Шаги 3-5 соответствуют методу подсчёта ячеек.

III. *Метод деления (divider method)*. Фактически это метод, использованный Ричардсоном. Применяется для оценки размерности линии по её изображению.

1. Выбирается раствор воображаемого циркуля ε .
2. Осуществляется проход линии этим циркулем и подсчитывается понадобившееся число шагов $N(\varepsilon)$.

Шаги 3-5 соответствуют методу подсчёта ячеек.

IV. *Метод соотношения периметр-площадь*. Применяется для определения фрактальной размерности береговой линии архипелага островов какой-либо природы по карте.

1. Для каждого острова определяется периметр P и площадь A .
2. Строится график зависимости $P(A)$ в билוגарифмических координатах.
3. Методом наименьших квадратов оценивается наклон этого графика, фрактальная размерность оценивается как удвоенный наклон.

V. *Метод полувариограмм (semivariogram method)*. Применяется, когда имеется набор точек, характеризующихся какой-либо величиной, это может быть временная серия или измерения на плоскости.

1. Измеряется расстояние между каждой парой точек (обычно евклидово).
2. Вычисляется разница в изучаемой величине для каждой пары точек и возводится в квадрат.
3. Строится график зависимости квадратов различий от расстояний между точками в билוגарифмических координатах.
4. Фрактальная размерность вычисляется как $D = n - \frac{m}{n}$, где m – наклон графика, n – размерность пространства.

В заключение следует отметить, что все методы основаны на степенных законах. Такого рода зависимости характерны для фракталов и являются математическим выражением их свойства самоподобия. Однако это свойство у реальных природных фракталов выполняется лишь на некотором конечном диапазоне масштабов, вне этого диапазона самоподобие и фрактальные свойства пропадают. Поэтому для таких фракталов не имеет смысла предельный переход, использующийся в определениях размерности по Хаусдорфу. Их фрактальная размерность должна оцениваться только по тем участкам графиков, где степенная зависимость сохраняется, то есть во всех изложенных выше алгоритмах наклон графиков в билוגарифмических координатах должен определяться только по линейному участку.

Приложение 2

Рассмотрим два алгоритма реализации СИФ: детерминированный и рандомизированный. Алгоритмы взяты из книги: Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Техносфера, 2006. – 488 с. – ISBN 5-94836-068-7

Детерминированный алгоритм СИФ

Назначение: детерминированная система итерированных функций.

Вход: C (матрица аффинных коэффициентов), m (количество аффинных отображений), n (размер квадратного окна), E_0 (матрица $n \times n$ начальных значений), L (число итераций)

Выход: T (бинарная матрица аттрактора размера $n \times n$)

Инициализация:

$S = 0$ (нулевая матрица аттрактора размера $n \times n$)

$T = E_0$

Шаги:

for $k = 1$ to L

 for $i = 1$ to n , for $j = 1$ to n

 if $T(i, j) = 1$

 for $l = 1$ to m

$ii = [C(l, 1)i + C(l, 2)j + C(l, 5)] + 1$

 if $1 \leq jj \leq n$

$jj = [C(l, 3)i + C(l, 4)j + C(l, 6)] + 1$

 if $1 \leq jj \leq n$

$S(ii, jj) = 1$

 end if

 end if

 end for

 end if

 end for, end for

$T = S$

$S = 0$

end for

Если какая-то точка выйдет за пределы окна $n \times n$, то это приведёт к аварийной остановке программы. Обычно это происходит на первых итерациях. Практическое решение состоит в том, чтобы проверять новые точки сразу же после их нахождения и прекращать вычисления для точек, вышедших за пределы окна.

Рандомизированный алгоритм СИФ

Заметим, что аффинное преобразование $T_j(x) = A_j x + a_j$ уменьшает или увеличивает площади в $|\det A_j|$ раз. Для того чтобы в процессе случайного выбора преобразования с малым определителем не появлялись очень часто, имеет смысл производить выбор с вероятностями, пропорциональными определителям. Для этого определяют вектор $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, где

$$p_j = \frac{\det A_j}{\sum_{i=1}^m \det A_i}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Назначение: рандомизированная система итерированных функций.

Вход: C (матрица аффинных коэффициентов), m (количество аффинных отображений), $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ (вероятности), a, b, c, d (координаты окна, $[a, b] \times [c, d]$), (x_0, y_0) (начальная точка), L (число итераций, порядка тысячи)

Выход: изображение аттрактора

Инициализация: графическое окно выхода $[a, b] \times [c, d]$

Шаги:

for $j = 1$ to 100

$k = \text{PICK}(P)$ {данная команда означает, что целое число k выбирается случайным образом с вероятностью p_k }

$x = [C(k, 1)x_0 + C(k, 2)y_0 + C(k, 5)]$

$y = [C(k, 3)x_0 + C(k, 4)y_0 + C(k, 6)]$

$x_0 = x$

$y_0 = y$

end for

for $j = 1$ to L

$k = \text{PICK}(P)$ {данная команда означает, что целое число k выбирается случайным образом с вероятностью p_k }

$x = [C(k, 1)x_0 + C(k, 2)y_0 + C(k, 5)]$

$y = [C(k, 3)x_0 + C(k, 4)y_0 + C(k, 6)]$

отобразить точку (x, y)

$x_0 = x$

$y_0 = y$

end for

Учебное издание

Наталья Владимировна Латыпова

ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Компьютерный набор и вёрстка: Н.В. Латыпова

В оформлении обложки использованы результаты работы программы «Черепашка» Михайловой Л.А.

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 00.00.20

Формат 60×84 ¹/₁₆

Печать офсетная. Усл. п.л. ____

Тираж __ экз.

Издательство «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4.
Тел. +7(3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru