Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра теоретической физики

А. А. Килин, И. С. Мамаев, Т. Б. Иванова

МЕХАНИКА СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2020

УДК 531.011(075.8)
ББК 22.213.38я73
К 392

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом УдГУ.

Рецензент: д-р техн. наук А. В. Щенятский.

Работа подготовлена в Уральском математическом центре в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FEWS-2020-0009).

К 392 **Килин А. А., Мамаев И. С., Иванова Т. Б.**
Механика систем со связями: учеб.-метод. пособие / А. А. Килин, И. С. Мамаев, Т. Б. Иванова. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2020. — 94 с.
ISBN 978-5-4312-0806-5

В пособии изложены некоторые методы аналитической механики решения задач со связями. Основное внимание уделено неголономным системам, связанным с качением. При составлении уравнений движения для конкретных систем используются как общие уравнения динамики, так и уравнения Ферререса с неопределенными множителями, уравнения Воронца и Чаплыгина. Представлены результаты качественного анализа задач о качении диска и шара (однородного и неоднородного) по плоскости и сфере, шара по поверхностям второго порядка. Содержатся задачи для аудиторных занятий и самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов физико-математических направлений подготовки университетов, а также для широкого круга исследователей при углубленном ознакомлении с предметом.

УДК 531.011(075.8)
ББК 22.213.38я73

ISBN 978-5-4312-0806-5

Содержание

Предисловие 5
Введение 8
1. Уравнения движения неголономных систем 12
1.1. Типы связей. Уравнения связей 12
1.2. Обобщенные координаты и скорости. 14
1.3. Уравнения движения неголономных систем с множителями связей 17
1.4. Уравнения Воронца 21
1.5. Уравнения Чаплыгина 23
1.6. Задачи 29
2. Избранные задачи неголономной механики 34
2.1. Динамика шара Чаплыгина 34
2.1.1. Уравнения движения и их интегрирование . 34
2.1.2. Бифуркационная диаграмма, периодические решения и точка контакта 40
2.2. Динамика катящегося диска 49
2.2.1. Качение твердого тела по плоскости 49
2.2.2. Движение точки контакта 56
2.2.3. Качественный анализ 56
2.3. Качение тела по поверхностям 61
2.3.1. Уравнения движения твердого тела по плоскости и сфере без проскальзывания 61
2.3.2. Тело на плоскости 64
2.3.3. Тело на сфере 73
2.4. Качение шара по поверхности. Новые интегралы и иерархия динамики 77

2.4.1. Уравнение движения шара по поверхности 77
2.4.2. Движение шара по поверхности вращения . 80
2.5. Задачи 88

Список рекомендуемой литературы 91

Предисловие

Содержание данного учебно-методического пособия составляют основные разделы, изучаемые студентами Удмуртского государственного университета (УдГУ) при освоении дисциплин «Механика систем со связями» и «Механика неголономных систем», рекомендации для решения задач теоретической механики с голономными и неголономными связями. При написании преследовалась цель продемонстрировать основные аналитические методы решения конкретных задач теоретической механики со связями по возможности в наиболее простой и ясной форме, при сохранении необходимой научной строгости.

Материал в пособии разделен на две основные части. Первая часть посвящена классификации систем со связями и выводу уравнений движения неголономных систем. Отметим, что основное содержание пособия посвящено системам с неголономными связями, голономные системы обсуждаются только в первой части при рассмотрении общей классификации механических систем и более подробно изучаются в основной части курса «Теоретическая механика». Во второй части подробно рассматриваются некоторые конкретные задачи неголономной механики с подробным выводом и анализом уравнений движения.

Кроме краткого изложения теоретического материала, в данном пособии представлены примеры решения типовых задач по каждому разделу, а также перечень аудиторных и контрольных задач и задач для самостоятельного решения. Для некоторых примеров приведены решения с графическими иллюстрациями, полученными с помощью компьютерной программы для аналитических и численных вычислений Maple и программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос», что способствует лучшему пониманию предмета.

Для успешного освоения материалов, представленных в данном пособии, читателю будет полезно ознакомиться с содержанием ранее изданных монографий [1–6], в которых изложены в наиболее полном виде теоретические основы механики систем со связями, приведены некоторые примеры решения классических задач неголономной механики.

Отметим также учебно-методическое пособие [7], опубликованное на кафедре теоретической физики УдГУ, для изучения теории неголономных динамических систем с использованием математических и графических возможностей программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос» (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2011611415; авторы: Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А.). В пособии описан интерфейс программного комплекса со всеми управляющими элементами. В качестве примеров подробно рассмотрены различные варианты задачи качения твердого тела без проскальзывания и верчения, приведены соответствующие управляющие параметры, доступные исследователю через интерфейс программного комплекса. Большинство задач, изучаемых в рамках дисциплин «Механика систем со связями» и «Механика неголономных систем», в том числе при выполнении самостоятельных и контрольных работ, также могут быть успешно решены с использованием указанного программного комплекса.

Необходимость издания данного пособия обусловлена отсутствием современных изданий по данной тематике в библиотечном фонде УдГУ. Предыдущие сборники и пособия, изданные более 30 лет назад, не отвечают современным условиям и требованиям образовательных стандартов. В основу пособия положены лекции, читаемые в Институте математики, информационных технологий и физики в УдГУ для студентов направлений «Физика» и «Прикладные математика и физика». Содержание данного пособия соответствует учебным программам дисциплин «Механика систем со связями» (за исключением некоторых подразделов второй части) и «Механика неголономных систем».

Методическое пособие рассчитано на высокий уровень физико-математической подготовки студентов и необходимо для освоения следующих компетенций:

– способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач;

– способность использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин;

– способность применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки).

Пособие предназначено для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для неспециалистов в области теоретической механики для первоначального ознакомления с предметом.

Введение

Как известно, при движении системы, состоящей из n материальных точек, относительно некоторой инерциальной прямоугольной декартовой системы координат ее состояние определяется радиус-векторами $\boldsymbol{r}_i$ и скоростями ее точек $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Во многих механических системах положения и скорости точек системы не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*.

Подробно о классификации видов связей и возникающих в связи с ними особенностях записи уравнений движения, аналитических и численных методах исследования механических систем рассказывается в первой части данного учебно-методического пособия. На конкретных примерах показано, как определяются и в каких случаях могут возникать интегрируемые и неинтегрируемые кинематические (дифференциальные) связи (связи, накладывающие ограничения на возможные значения скоростей).

Наибольший интерес для нас будут представлять системы с неинтегрируемыми дифференциальными связями, которые называются *неголономными*.

Как известно, произвольное движение системы изображается в ее пространстве конфигураций и времени некоторой кривой. Если система голономна, то любая кривая в этом пространстве, идущая в направлении возрастающих времен, изображает некоторое движение системы. Однако для неголономных систем это не имеет места, и лишь некоторые кривые в пространстве конфигураций и времени соответствуют движениям системы, совместным с ее связями. Точка конфигурационного пространства неголономной системы, изображающая в некоторый определенный момент времени ее положение, не может сместиться в любом направлении, поскольку определяющие это смещение дифференциалы обобщенных координат и времени удовлетворяют конкретным неголономным связям. Такие ограничения приводят к некорректности использования принципа наименьшего действия в общем виде и уравнений Лагранжа (второго рода).

Общее понимание неприменимости уравнений Лагранжа и вариационных принципов в неголономной механике принадлежит Г. Герцу, который обсуждает эти вопросы в своем фундаментальном труде «Принципы механики, изложенные в новой связи» [8] при исследовании задачи о качении тела без проскальзывания по горизонтальной плоскости. При этом исторически первой общей формой уравнений неголономной механики следует считать уравнения Ферререа с неопределенными множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (1871 г.)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}. \tag{1}$$

В уравнениях (1) q_i — обобщенные координаты, $\dot{q}_i$ — обобщенные скорости ($i = 1, 2, \ldots, n$), T — кинетическая энергия, Q_i — обобщенные силы. К уравнениям (1) необходимо присоединить k уравнений связи ($j = 1, 2, \ldots k$):

$$f_j(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(\boldsymbol{q}, t)\dot{q}_i + b_j(\boldsymbol{q}, t) = 0, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n), \dot{\boldsymbol{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. Таким образом, получим $n + k$ уравнений для определения величин $\boldsymbol{q}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Отметим, что рассматриваемые в неголономной механике связи, как правило, являются линейными по обобщенным скоростям. Именно такие связи реализуются в содержательных задачах, рассматриваемых во второй части данного пособия.

В общем случае большое количество уравнений в системе (1), (2) и наличие k дополнительных неопределенных множителей может привести к значительным сложностям при исследовании движения. Кроме того, когда целью исследования является только нахождение движения, то есть определение зависимостей $q_i(t) (i = 1, 2, \ldots, n)$, вычисление величин $\lambda_j (j = 1, 2, \ldots, k)$, позволяющих найти реакции связей, является совершенно излишней процедурой.

Для неголономных систем со связями (2) П. В. Воронец получил уравнения, которые по форме близки к уравнениям Лагранжа второго рода и свободны от упомянутых недостатков. Вывод этих уравнений в случае стационарных (не зависящих явно от времени) связей приводится в пункте 1.4.

Кроме уравнений Ферререса и Воронца в неголономной механике используются также уравнения Чаплыгина (см. п. 1.5), Аппеля, Маджи, Вольтерра, Больцмана – Гамеля. Все эти формы связаны с различными способами исключения неопределенных множителей и на практике, как правило, не используются. При составлении конкретных уравнений движения, связанных, например, с качением, обычно пользуются общими уравнениями динамики или универсальными уравнениями в форме (1).

Вторая часть данного пособия представляет собой исследования, связанные с анализом конкретных неголономных систем. Первые постановки подобных задач восходят к Э. Раусу, С. А. Чаплыгину, П. В. Воронцу, П. Аппелю и Г. К. Суслову, которые нашли замечательные интегрируемые ситуации и дали их аналитическое и качественное описание. Большинство из этих задач связано с качением тел. В последние десятилетия развитие исследований неголономных систем связано с нахождением новых интегрируемых задач, которые принадлежат В. В. Козлову, А. П. Маркееву, А. П. и Л. Е. Веселовым, Ю. Н. Федорову и авторам данного издания. Более подробный исторический очерк и описание недавних результатов исследований неголономных механических систем можно найти в [3–5].

На сегодняшний день результаты и формализм неголономной механики находят применение в прикладных исследованиях, например, при моделировании движения сложных робототехнических устройств, связанных с качением. Для их исследования, в связи со сложностью большинства неголономных систем из приложений, качественного (аналитического) анализа недостаточно. Для комплексного исследования целесообразно комбинировать аналитические исследования с численными.

Для проведения аналитических и численных исследований динамических систем применяют, как правило, несколько наиболее известных программных средств — Maple, Mathematica, MatLab. Однако вычислительная среда, создаваемая этими пакетами, несмотря на ее универсальность, направлена преимущественно на проведение аналитических вычислений. Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений с одновременным выводом нескольких потоков информации уже является для этих программных средств невыполнимой.

Для решения данной задачи в Институте компьютерных исследований УдГУ был разработан программный комплекс «Компьютерная динамика: хаос», функциональности которого достаточно для комплексного исследования широкого спектра различных (в том числе неголономных) динамических систем. Данный программный комплекс может быть использован для проектирования и исследования различных систем динамики твердого тела, неголономных систем, систем вихревой гидродинамики, при проведении практических занятий по курсам теоретической механики, а также другим курсам, связанным с нелинейными динамическими системами. Некоторые научные результаты, полученные с помощью данного комплекса, также приведены во второй части данного учебно-методического пособия.

1. Уравнения движения неголономных систем

1.1. Типы связей. Уравнения связей

Рассмотрим движение системы N материальных точек относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, предполагаемой неподвижной. Состояние системы задается радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_i$ и скоростями $\boldsymbol{v}_i$ ее точек $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на величины $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{v}_i$, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются *связями*.

Пример 1. Точка движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x, y, z — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - f^2(t) = 0$.

Пример 2. Две материальные точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длиной l. Связь задается соотношением $l^2 - (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 \geqslant 0$.

В общем случае связь задается соотношением[1] $f(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t) \geqslant 0$. Если в этом соотношении реализуется только знак равенства, то связь называется *удерживающей* (*двусторонней, неосвобождающей*). Если же реализуется знак неравенства, то связь называется *неудерживающей* (*односторонней, освобождающей*). В примере 1 связь удерживающая, в примере 2 — неудерживающая.

Если уравнение связи можно записать в виде $f(\boldsymbol{r}_i, t) = 0$, не содержащем проекции скоростей точек системы, то связь называется *геометрической* (*конечной, голономной*). В примере 1 связь геометрическая.

Если же в уравнение связи

$$f(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t) = 0 \tag{3}$$

[1]Обозначением $f(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{v}_i, t)$ мы пользуемся для краткой записи функции $f(r_1, \ldots,\ r_N,\ v_1, \ldots,\ v_N,\ t)$. Функция f имеет в общем случае $6N + 1$ аргументов: $3N$ координат x_i, y_i, z_i точек P_i, $3N$ проекций их скоростей $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ и время t. Функцию f предполагаем дважды непрерывно дифференцируемой.

входят проекции скоростей $\boldsymbol{v}_i$, то связь называется *дифференциальной* (*кинематической*), так как она является, по сути дела, дифференциальным уравнением относительно радиусов-векторов или координат точек.

Дифференциальную связь (3) называют *интегрируемой*, если ее можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Неинтегрируемую дифференциальную связь называют *неголономной связью*.

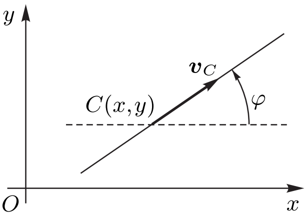


Рис. 1

Пример 3 (Движение конька по льду). Пусть конек движется по льду, расположенному в горизонтальной плоскости. Конек будем моделировать тонким стержнем, одна из точек которого, например C на рисунке 1, во все время движения имеет скорость, направленную вдоль стержня. Если ось Oz направлена вертикально, x, y, z — координаты точки C, а φ — угол, который образует стержень с осью Ox, то связи задаются двумя соотношениями: $z = 0$, $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$.

В данном примере дифференциальная связь $\dot{y} = \dot{x}\operatorname{tg}\varphi$ неинтегрируемая. Покажем это. Предположим противное, т. е. что x, y, φ связаны соотношением $f(x,\, y,\, \varphi,\, t) = 0$. Пусть x, y, φ отвечают реальному движению конька. Вычислим полную производную f по времени

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Используя уравнение связи, $\dot{f}$ можно записать в виде

$$\dot{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

Отсюда, ввиду независимости величин $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$, получаем равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}\varphi\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ввиду произвольности угла φ из этих равенств следует, что частные производные функции f по всем ее аргументам равны нулю, то есть f не зависит от x, y, φ, t. Следовательно, предположение об интегрируемости связи $\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi$ неверно.

Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной*. Если же среди связей, наложенных на систему, есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной*.

В дальнейшем, при изучении движения неголономных систем, мы будем предполагать, что соответствующие им дифференциальные связи *линейны* относительно проекций $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ скоростей точек системы. Как геометрических, так и дифференциальных связей, наложенных на систему, может быть несколько. Таким образом, их аналитическое представление имеет вид

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i, t) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta i} \cdot \boldsymbol{v}_i + a_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{5}$$

Векторы $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ и скаляры a_β — заданные функции от $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2, \ldots$, $\boldsymbol{r}_N$ и t. В частных случаях r и s могут быть равными нулю.

Геометрические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если t не входит в их уравнения (4). Дифференциальные связи (5) называются *стационарными* или *склерономными*, если функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t, а функции a_β тождественно равны нулю. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

В примере 1 связь голономная реономная, в примере 3 связь неголономная склерономная.

1.2. Обобщенные координаты и скорости.

Рассмотрим несвободную систему со связями (4), (5). Будем предполагать, что r функций f_α от $3N$ аргументов x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$

независимы (время t здесь рассматривается как параметр). В противном случае одна из связей противоречила бы остальным или была бы их следствием.

Наименьшее число параметров, необходимое для задания возможного положения системы, называется числом ее независимых *обобщенных координат*. Так как функции $f_\alpha \quad (\alpha = 1, \ldots, r)$ независимы, то число обобщенных координат, которое мы будем обозначать m, равно $3N - r$. За обобщенные координаты можно принять m из $3N$ декартовых координат x_i, y_i, z_i, относительно которых можно разрешить систему уравнений (4). Или можно ввести любые другие m независимых величин $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_m$, в своей совокупности определяющих конфигурацию системы. Они могут быть расстояниями, углами, площадями и т. п., а могут и не иметь непосредственного геометрического толкования. Требуется только, чтобы они были независимы, а декартовы координаты x_i, y_i, z_i точек системы можно было выразить через $q_1,\ q_2,\ \ldots, q_m$ и t:

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2,\ \ldots, q_m, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{6}$$

Эти функции, будучи подставленными в уравнения (4), обращают их в тождества. При этом ранг матрицы перехода $\dfrac{\partial(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)}{\partial(q_1, \ldots, q_m)}$ равен m. Это следует из того, что среди $3N$ функций x_i, y_i, z_i из (6) от m аргументов $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ (t — параметр) имеется m независимых, через которые могут быть выражены все остальные координаты точек системы.

При движении системы ее обобщенные координаты изменяются со временем. Величины $\dot{q}_j$ называются *обобщенными скоростями*. Скорости точек системы в декартовой системе координат найдем, продифференцировав сложные вектор-функции времени (6):

$$\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{7}$$

Запишем в обобщенных скоростях уравнения (5) неголономных связей. Подставив (6) и (7) в (5), получим

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1, \ldots, q_m, t) = 0, \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

Величины $b_{\beta j}$, b_β определяются равенствами

$$b_{\beta j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta i} \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$b_\beta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \cdot \boldsymbol{a}_{\beta i} + a_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s).$$

Здесь в векторах $\boldsymbol{a}_{\beta i}$ и скалярах a_β величины $\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{r}_N$ заменены на их выражения (6).

Для голономной системы обобщенные скорости $\dot{q}_j$ независимы и совершенно произвольны. В неголономной системе обобщенные координаты, как и в голономной системе, могут принимать произвольные значения, но при этом обобщенные скорости не будут независимы; они связаны s соотношениями (8). При этом число степеней свободы голономной системы совпадает с числом ее обобщенных координат, а число степеней свободы неголономной системы меньше числа m обобщенных координат на количество s дифференциальных неинтегрируемых связей[2].

Пример 4 (Абсолютно твердое тело). Абсолютно твердое тело (или просто твердое тело) — это такая механическая система, у которой взаимные расстояния между точками постоянны. Очень многие объекты природы и техники моделируются в теоретической механике системами, состоящими из отдельных материальных точек и абсолютно твердых тел.

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка P_k твердого тела имеет радиус-вектор $\boldsymbol{r}_k$, то по определению при любых i, j величины $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = r_{ij}$ постоянны во все время движения. Если помимо связей, обеспечивающих постоянство расстояний r_{ij}, на твердое тело не наложено никаких других связей, то его называют *свободным твердым телом*. Свободное твердое тело является голономной склерономной системой.

[2]Конечно, предполагается, что связи (8) являются независимыми.

Свободное твердое тело (такое, в котором есть три точки P_1, P_2, P_3, не лежащие на одной прямой) имеет шесть степеней свободы, как бы ни было велико число N образующих его точек. Твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы; если у тела неподвижны две точки, то оно имеет одну степень свободы. Если свободное твердое тело представляет собой бесконечно тонкий стержень (или связанные им две материальные точки), то оно имеет пять степеней свободы.

Далее мы будем рассматривать движение твердых тел, на которые наложены связи, в том числе неголономные. Одним из часто встречающихся примеров неголономных систем является твердое тело, которое катится по какой либо поверхности без проскальзывания.

1.3. Уравнения движения неголономных систем с множителями связей

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах имеет вид

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0, \qquad (9)$$

где T — кинетическая энергия системы, Q_j — обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_j, в общем случае она является функцией $q_l, \dot{q}_l, t$, $(l = 1, 2, \ldots, m)$, δq_j — вариации обобщенных координат, которые связаны с виртуальными перемещениями $\delta \boldsymbol{r}_i$ точек системы соотношением

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Для голономной системы вариации δq_j произвольны. В неголономной же системе они связаны соотношениями, которые получаются из (8) путем отбрасывания величин b_β и замены $\dot{q}_j$ на δq_j:

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}\delta q_j = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \qquad (10)$$

Пусть на систему наложено s дифференциальных неинтегрируемых связей, заданных равенствами (8):

$$\sum_{j=1}^{m} b_{\beta j}(q_1, \ldots, q_m, t)\dot{q}_j + b_\beta(q_1, \ldots, q_m, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, s). \tag{11}$$

Тогда в общем уравнении динамики (9) величины δq_j не могут быть произвольными. Они связаны s независимыми соотношениями (10), и число степеней свободы системы равно $n = m - s$.

Для вывода уравнений движения воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Каждое из s равенств (10) умножим на свой неопределенный скалярный множитель λ_β и результаты вычтем из (9). Тогда получим

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j} \right) \delta q_j = 0. \tag{12}$$

В силу независимости равенств (10) ранг матрицы, составленной из коэффициентов $b_{\beta j}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, m)$, равен s. Следовательно, хотя бы один из ее миноров порядка s отличен от нуля. Для определенности будем считать, что

$$\det \left\| b_{\beta, n+k} \right\|_{\beta, k=1}^{s} \neq 0. \tag{13}$$

Тогда величины $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ можно принять за независимые, а δq_{n+k} $(k = 1, \ldots, s)$ однозначно выражаются через них из равенств (10).

Выберем величины λ_β $(\beta = 1, 2, \ldots, s)$ так, чтобы коэффициенты при $\delta q_{n+1}, \ldots, \delta q_m$ в выражении (12) обратились в нуль. При условии (13) это сделать можно, и притом единственным способом. При таком выборе величин λ_β в выражении (12) будут содержаться только независимые вариации δq_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и, следовательно, коэффициенты при них должны равняться нулю.

Таким образом, приходим к следующим m уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

К ним еще надо присоединить s уравнений связей (11). Тогда получим систему $m+s$ уравнений для определения величин q_j, λ_β. Величины λ_β называются *множителями связей*. Слагаемые $\sum\limits_{\beta=1}^{s} \lambda_\beta b_{\beta j}$ в уравнениях (14) представляют собой обобщенные реакции связей.

Пример 5. В качестве примера рассмотрим движение конька по горизонтальной поверхности льда (см. пример 3 на с. 13 и рис. 1) в предположении, что трение отсутствует. Пусть C — центр масс конька. Положение конька зададим тремя обобщенными координатами x, y, φ, смысл которых ясен из рисунка 1.

Неинтегрируемая связь задается уравнением

$$\dot{x}\operatorname{tg}\varphi - \dot{y} = 0. \tag{15}$$

Если m — масса конька, а J_C — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс, то кинетическая энергия вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2. \tag{16}$$

Уравнения (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x + \lambda \operatorname{tg}\varphi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} &= Q_y - \lambda, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как трения нет, а потенциальная энергия конька постоянна, то обобщенные силы Q_x, Q_y, Q_φ равны нулю. Уравнения (17) с учетом выражения (16) запишутся в виде

$$m\ddot{x} = \lambda \operatorname{tg}\varphi, \quad m\ddot{y} = -\lambda, \quad \ddot{\varphi} = 0. \tag{18}$$

Пусть в начальный момент $t = 0$ центр масс конька находится в начале координат и конек расположен вдоль оси Ox, то есть $x(0) = 0, y(0) = 0, \varphi(0) = 0$. Пусть далее в начальный момент скорость центра масс равна v_0, а угловая скорость конька ω_0, т. е. $\dot{x} = v_0, \dot{\varphi} = \omega_0$. Из уравнения связи (15) находим тогда, что при $t = 0$ $\dot{y} = 0$. Третье уравнение системы (18) при этих начальных условиях дает

$$\varphi = \omega_0 t, \tag{19}$$

то есть конек движется, равномерно вращаясь вокруг вертикали.

Исключив теперь величину λ из первых двух уравнений системы (17), получим

$$\ddot{x} + \ddot{y} \operatorname{tg} \omega_0 t = 0.$$

Используя уравнение связи (15), исключаем отсюда величину $\ddot{y}$. Тогда с учетом равенства (19) получим уравнение относительно x:

$$\ddot{x} + \omega_0 \operatorname{tg} \omega_0 t \dot{x} = 0. \tag{20}$$

Из (15), (19) и (20) с учетом начальных условий найдем

$$x = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \qquad y = \frac{v_0}{\omega_0}(1 - \cos \omega_0 t). \tag{21}$$

Отсюда следует, что центр масс конька равномерно со скоростью v_0 движется по окружности радиусом v_0/ω_0, центр которой находится на оси Oy (рис. 2).

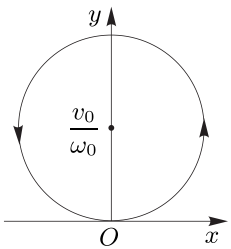


Рис. 2

Множитель связи λ можно найти теперь из (21) и второго из уравнений системы (18):

$$\lambda = -m\omega_0 v_0 \cos \omega_0 t. \tag{22}$$

При известной величине λ можно найти реакцию $\boldsymbol{R}$ связи. Для ее проекций R_x, R_y из (18), (19) получаем выражения

$$R_x = \lambda \operatorname{tg} \omega_0 t, \qquad R_y = -\lambda.$$

Подставив в них значение λ из формулы (22), получим

$$R_x = -m\omega_0 v_0 \sin \omega_0 t, \qquad R_y = m\omega_0 v_0 \cos \omega_0 t.$$

Реакция $\boldsymbol{R}$ имеет постоянную величину $m\omega_0 v_0$ и направлена к центру окружности, по которой движется центр масс конька.

1.4. Уравнения Воронца

Система уравнений (11), (14) помимо функций q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ содержит еще s дополнительных неизвестных — множителей связей λ_β, $(\beta = 1, 2, \ldots, s)$. Число уравнений в системе (11), (14) равно $m + s = n + {}$ $+ 2s$, т. е. превышает число степеней свободы на удвоенное количество неинтегрируемых связей.

Большое количество уравнений в системе (11), (14) и наличие в ней множителей связей ведет к значительным сложностям при исследовании движения. К тому же, когда целью исследования является только нахождение движения, т. е. определение зависимостей $q_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$, вычисление величин λ_β, позволяющих найти реакции связей, является совершенно излишней процедурой.

Для неголономных систем со связями (11) П. В. Воронец получил уравнения, которые по форме близки к уравнениям Лагранжа второго рода и свободны от упомянутых недостатков. Выведем эти уравнения, предполагая, что система склерономна.

В случае склерономной системы величины b_β в уравнениях связей (11) равны нулю, а коэффициенты $b_{\beta j}$ не зависят от времени. Среди m обобщенных скоростей есть n независимых; пусть это будут обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Тогда из (11) находим

$$\dot{q}_{n+k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\dot{q}_i \quad (k = 1, 2, \ldots, s = m - n), \tag{23}$$

где α_{ki} — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Когда система неголономна, то величины

$$A_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu j}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu i}\right) \tag{24}$$

не могут все одновременно быть тождественно равными нулю[3]. Уравне-

[3] Если бы это было не так, то для всех k имели бы место равенства $q_{n+k} = f_k(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, т. е. система не была бы неголономной. Действительно, условия $A_{i,j}^{(k)} = {}$ $= 0$ $(i\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, s)$ суть записанные с учетом равенств (23) условия того, что величина $dq_{n+k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ki} dq_i$ является полным дифференциалом.

ния движения, содержащие множители связей, запишутся в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} - \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} = Q_{n+k} + \lambda_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).
\end{aligned} \tag{25}$$

Эти уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (23).

Обозначим Θ функцию, получающуюся в результате исключения при помощи равенств (23) величин $\dot q_{n+k}$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ из выражения для кинетической энергии T:

$$T(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_m, t) = \Theta(q_1, \ldots, q_m, \dot q_1, \ldots, \dot q_n, t).$$

Согласно (23), справедливо равенство

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \alpha_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{26}$$

Заменив здесь величины $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_i}$ и $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}$ на их выражения из уравнений (25), получим, что члены, содержащие множители связей, взаимно уничтожаются, и равенство (26) запишется в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} \frac{\partial T}{\partial q_{n+k}} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ki} Q_{n+k} + \sum_{k=1}^{s} \frac{d\alpha_{ki}}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}}. \tag{27}$$

Учитывая, что в соответствии с (23)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_l} = \frac{\partial T}{\partial q_l} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot q_{n+k}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_l} \dot q_j \right) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n),$$

из равенства (27) получаем

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left(Q_{n+k}+\frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}}\right)+\\+\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial T}{\partial\dot q_{n+k}}\left[\frac{d\alpha_{ki}}{dt}-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i}+\sum_{\mu=1}^{s}\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_{n+\mu}}\alpha_{\mu i}\right)\dot q_j\right].\end{gathered}\tag{28}$$

Замечая, что выражение, заключенное в квадратные скобки в соотношении (28), тождественно равно величине

$$\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\qquad(i=1,2,\,\ldots,n;\;k=1,2,\,\ldots,s),$$

где величины $A_{ij}^{(k)}$ определены равенствами (24), и вводя для импульсов обозначение

$$\theta_k=\frac{\partial T}{\partial\dot q_{n+k}}\qquad(k=1,2,\,\ldots,s),$$

получаем окончательно уравнения

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}\left(Q_{n+k}+\frac{\partial\Theta}{\partial q_{n+k}}\right)+\\+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right)\qquad(i=1,2,\,\ldots,n).\end{gathered}\tag{29}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Воронца*. Они должны рассматриваться совместно с уравнениями связей (23). Полученная система уравнений движения неголономной системы не содержит множителей связей. Число уравнений равно $n+s$, т. е. совпадает с числом обобщенных координат.

1.5. Уравнения Чаплыгина

Пусть кинетическая энергия T, коэффициенты α_{ki} $(k=1,\ldots,s;\ i=1,\ldots,n)$ в уравнениях связей (23) и обобщенные силы Q_l $(l=1,\ldots,m)$ не зависят от обобщенных координат q_{n+k} $(k=1,\ldots,s)$.

Тогда уравнения (29) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{k=1}^{s}\alpha_{ki}Q_{n+k}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right) \qquad (30)$$
$$(i=1,2,\,\ldots,n),$$

где

$$A_{ij}^{(k)}=\frac{\partial\alpha_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial\alpha_{kj}}{\partial q_i}\qquad (i,j=1,2,\,\ldots,n;\ k=1,2,\,\ldots,s). \qquad (31)$$

Если в выражениях для обобщенных сил Q_l $(l=1,\ldots,m)$ и импульсов θ_k $(k=1,\ldots,s)$ при помощи уравнений связей (23) исключить обобщенные скорости $\dot q_{n+k}$ $(k=1,\ldots,s)$, то получим систему уравнений относительно q_i $(i=1,\ldots,n)$, которую можно интегрировать независимо от уравнений связей (23). Эти уравнения впервые были получены Чаплыгиным и носят его имя.

После интегрирования уравнений (30) координаты $q_{n+1},\ldots,q_m$ найдутся из (23) при помощи квадратур. Если обобщенные силы потенциальны и потенциал Π не зависит от обобщенных координат q_{n+k}, то уравнения (30) примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot q_i}-\frac{\partial\Theta}{\partial q_i}=-\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}+\sum_{k=1}^{s}\theta_k\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^{(k)}\dot q_j\right)\qquad (i=1,2,\,\ldots,n).$$

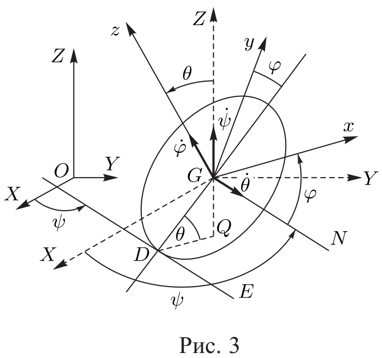


Рис. 3

Пример 6 (Качение диска по неподвижной горизонтальной плоскости). Пусть однородный круговой диск катится без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее одной точкой своего края. Движение отнесем к неподвижной системе координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке O опорной плоскости; ось OZ направлена вертикально вверх (рис. 3).

Пусть $GXYZ$ — поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы $OXYX$. Система координат $Gxyz$ жестко связана с диском: ее ось Gz перпендикулярна плоскости диска. За обобщенные координаты примем три угла Эйлера и две координаты x, y проекции Q центра тяжести G на опорную плоскость в системе $OXYZ$. Третья координата z центра тяжести есть его расстояние до опорной плоскости. Из рисунка 3 видно, что

$$z = \rho \sin\theta, \tag{32}$$

где ρ — радиус диска.

Кинетическая и потенциальная энергия диска определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \qquad \Pi = mg\rho\sin\theta,$$

где m — масса диска, g — ускорение свободного падения, p, q, r — проекция угловой скорости ω диска на оси Gx, Gy, Gz, являющиеся его главными центральными осями инерции, A, B, C — моменты инерции диска относительно осей Gx, Gy, Gz, причем

$$A = B = \frac{1}{4}m\rho^2, \qquad C = \frac{1}{2}m\rho^2,$$

а p, q, r задаются кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \varphi. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что, согласно (32),

$$\dot{z} = \rho\dot{\theta}\cos\theta, \tag{33}$$

выражение для кинетической энергии диска можно записать в виде

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{8}m\rho^2(1 + 4\cos^2\theta)\dot{\theta}^2 + \\ + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{1}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2. \end{aligned} \tag{34}$$

Уравнения связей получим из условия отсутствия скольжения. Если скольжения нет, то скорость $\boldsymbol{v}_D$ точки диска, которой он касается опорной плоскости, равна нулю. Поэтому

$$\boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{GD} = 0, \tag{35}$$

где $\boldsymbol{v}_G$ — скорость центра тяжести, $\boldsymbol{GD}$ — радиус-вектор точки D относительно G.

На рисунке 3 прямая DE является касательной к диску в точке D. Она параллельна линии узлов GN. Прямая DG перпендикулярна DE, лежит в плоскости, проходящей через оси GZ и Gz, и составляет угол φ с осью Gy. В системе координат $OXYZ$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}'_G &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),\\
\boldsymbol{GD}' &= \rho(\cos\theta\sin\psi,\ -\cos\theta\cos\psi,\ -\sin\theta),\\
\boldsymbol{\omega}' &= (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta, \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta, \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta).
\end{aligned}$$

Третья компонента векторной правой части равенства (35) тождественно равна нулю в силу равенства (33). Приравнивание нулю первых компонент дает уравнения связей:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \rho[\dot{\theta}\sin\psi\sin\theta - (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\psi],\\
\dot{y} &= -\rho[\dot{\theta}\cos\psi\sin\theta + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\sin\psi].
\end{aligned} \tag{36}$$

Так как П, T и уравнения связей не содержат обобщенных координат x, y, то уравнения движения диска могут быть записаны в форме уравнений Чаплыгина.

Для удобства вычислений введем временно обозначения

$$q_1 = \theta, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \psi, \quad q_4 = x, \quad q_5 = y.$$

Тогда коэффициенты α_{ki} $(k = 1, 2;\ i = 1, 2, 3)$ в уравнениях связей (23) имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \rho\sin q_1\sin q_3, & \alpha_{12} &= -\rho\cos q_3,\\
\alpha_{13} &= -\rho\cos q_1\cos q_3, & \alpha_{21} &= -\rho\sin q_1\cos q_3,\\
\alpha_{22} &= -\rho\sin q_3, & \alpha_{23} &= -\rho\cos q_1\sin q_3.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (31) следует, что

$$A_{23}^{(1)} = -A_{32}^{(1)} = \rho \sin q_3, \qquad A_{23}^{(2)} = -A_{32}^{(2)} = -\rho \cos q_3.$$

Остальные величины $A_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$ тождественно равны нулю.

Для обобщенных импульсов θ_1, θ_2 имеем выражения

$$\theta_1 = m\dot{x} = m\rho(\sin q_1 \sin q_3 \dot{q}_1 - \cos q_3 \dot{q}_2 - \cos q_1 \cos q_3 \dot{q}_3),$$
$$\theta_2 = m\dot{y} = -m\rho(\sin q_1 \cos q_3 \dot{q}_1 + \sin q_3 \dot{q}_2 + \cos q_1 \sin q_3 \dot{q}_3).$$

Если теперь возвратиться к исходным обозначениям, то уравнения Чаплыгина запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} &= -mg\rho\cos\theta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} &= m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial\Theta}{\partial\psi} &= -m\rho^2\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь Θ есть кинетическая энергия (34), в которой величины $\dot{x}$, $\dot{y}$ исключены при помощи уравнений связей (36):

$$\Theta = \frac{5}{8}m\rho^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}m\rho^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2 + \frac{3}{4}m\rho^2(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})^2.$$

Подставив функцию Θ в (37), получим систему уравнений движения

$$\begin{gathered} \ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2 + \frac{6}{5}\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\psi} + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta = 0, \\ \frac{d}{dt}(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\psi}, \\ \frac{d}{dt}[(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}] = -\frac{2}{3}\sin\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}. \end{gathered} \tag{38}$$

Если эта система проинтегрирована, то движение центра тяжести диска найдется при помощи конечного соотношения (32) и двух квадратур из (36).

Уравнения движения (38) допускают частные решения, для которых $\theta = \theta_0 = \text{const}$. При этом

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \text{const}, \qquad \dot{\psi} = \omega_2 = \text{const},$$

а угол θ_0 удовлетворяет следующему соотношению, вытекающему из первого уравнения системы (38):

$$\cos\theta_0 \sin\theta_0 \omega_2^2 + \frac{6}{5}\sin\theta_0 \omega_1 \omega_2 + \frac{4}{5}\frac{g}{\rho}\cos\theta_0 = 0. \tag{39}$$

Если $\theta_0 = \pi/2$, то это уравнение переходит в условие $\omega_1\omega_2 = 0$. Отсюда следует, что существуют следующие движения диска:

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 \neq 0, \tag{40}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 \neq 0, \qquad \omega_2 = 0, \tag{41}$$

$$\theta_0 = \pi/2, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0. \tag{42}$$

В движении (40) диск вращается с произвольной постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг одного из своих диаметров, который неподвижен и занимает вертикальное положение. В движении (41) диск катится по прямой, при этом плоскость диска вертикальна, а центр тяжести движется с произвольной постоянной скоростью $|\omega_1\rho|$. Движение (42) соответствует покою диска в вертикальной плоскости.

В общем случае, когда $\theta_0 \neq \pi/2$, величины ω_1, ω_2, θ_0 связаны между собой соотношением (39), которое, следовательно, определяет двухпараметрическое семейство движений диска. Для этих движений из уравнений связей (36) получаем

$$x = \alpha - \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\sin\psi, \quad y = \beta + \rho\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\cos\psi,$$

где α и β — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям, а $\psi = \omega_2 t + \psi_0$. Отсюда и из (32) следует, что центр тяжести диска движется по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости и имеющей центр в точке $(\alpha, \beta, \rho\sin\theta_0)$; радиус этой окружности

$$R = \rho\left|\frac{\omega_2\cos\theta_0 + \omega_1}{\omega_2}\right|.$$

Отсюда и из рисунка 3 следует, что точка D касания во время движения диска описывает на опорной плоскости OXY окружность с центром в точке $(\alpha,\ \beta)$ и радиусом, равным $\rho|\omega_1/\omega_2|$.

В самом общем случае аналитическое исследование движения диска приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка и квадратурам. Чтобы показать это, заметим, что $\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r$, и, рассматривая промежуток времени, на котором $\dot{\theta} \neq$ $= 0$, перейдем во втором и третьем уравнениях системы (38) к новой независимой переменной θ. Тогда получим

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2}{3}\sin\theta\dot{\psi}, \quad \frac{d}{d\theta}\left(r\cos\theta + \frac{1}{6}\sin^2\theta\dot{\psi}\right) = -\frac{2}{3}\sin\theta(r - \dot{\psi}\cos\theta). \quad (43)$$

Исключив из этих уравнений величину $\dot{\psi}$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{dr}{d\theta} - \frac{4}{3}r = 0,$$

которое, если положить $u = \cos^2\theta$, принимает вид

$$u(1-u)\frac{d^2r}{du^2} + \frac{1}{2}(1-3u)\frac{dr}{du} - \frac{1}{3}r = 0.$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка представляет собой известное из теории дифференциальных уравнении гипергеометрическое уравнение Гаусса. Его интегрирование дает величину r как функцию угла θ. Из первого уравнения системы (43) и равенства $\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} = r$ определяются затем $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ как функции угла θ. Таким образом, задача нахождения углов Эйлера сводится к нахождению θ как функции времени, так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ найдутся при известной функции $\theta(t)$ посредством квадратур.

1.6. Задачи

1.1. Запишите и проклассифицируйте связи, накладываемые на следующие системы:

1) шарик закреплен на тонкой невесомой нити и может совершать колебательные движения в плоскости;

2) шарик закреплен через недеформируемый стержень с шарниром и может совершать колебательные движения в плоскости;
3) шарик закреплен на тонкой невесомой нити, которая продернута через неподвижное кольцо. Конец нити движется со скоростью $\boldsymbol{u}$, начальная длина нити l_0.

1.2. Точка M (преследующая) все время движется в направлении точки N (преследуемой) (см. рис. 4). При этом очка N движется вдоль оси Ox по закону $x = \xi(t)$. Запишите и проклассифицируйте уравнение связи.

1.3. При качении твердого тела без проскальзывания по абсолютно шероховатой плоскости на систему накладывается связь, соответствующая тому, что скорость точки контакта с опорной плоскостью в каждый момент времени равна нулю. Запишите и проклассифицируйте соответствующие уравнения связи для следующих систем, которые описывают качение твердого тела без проскальзывания по абсолютно шероховатой плоскости:

1) тонкий обруч катится по неподвижной плоскости, сохраняя вертикальное положение;
2) цилиндр катится по горизонтальной неподвижной плоскости,
3) однородный шар катится по неподвижной горизонтальной плоскости,
4) однородный шар катится по плоскости, которая вращается вокруг нормали к ней с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$,
5) круглый однородный диск с острым краем катится по неподвижной плоскости. В качестве обобщенных координат удобно выбрать (x, y) точки контакта M и углы φ, ψ, θ (см. рис. 5).

1.4. Колесико с острым краем, схематически изображенное на рисунке 6а (вид сверху), придавлено к бумаге, лежащей на плоскости, и катится по ней без проскальзывания ни в направлении своей касательной, ни в направлении, перпендикулярном к нему. Запишите соответствующие уравнения связей в линейном от обобщенных скоростей виде. В данном случае за обобщенные координаты удобно выбрать координаты (x, y) точки контакта и углы φ, θ (см. рис. 6а).

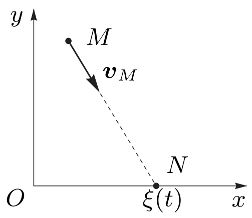


Рис. 4

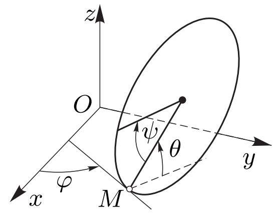
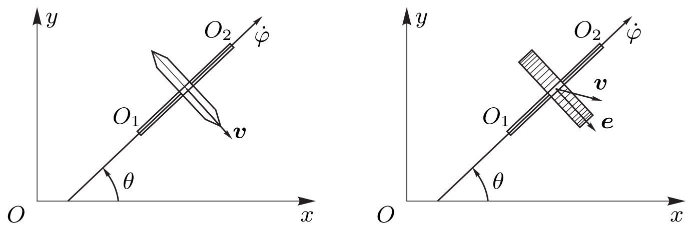


Рис. 5

1.5. Колесико с поперечной насечкой, схематически изображенное на рисунке 6b, придавлено к бумаге, лежащей на плоскости, и катится по ней. При этом оно имеет возможность проскальзывать в поперечном направлении (вдоль O_1O_2) без вращения (в отличие от колесика с острым краем из предыдущей задачи). Запишите соответствующее уравнение связи в линейном от обобщенных скоростей виде и проклассифицируйте его.



a) b)

Рис. 6

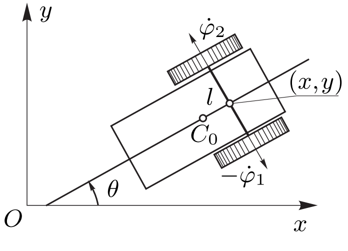


Рис. 7

1.6. Двухколесная тележка катится по шероховатой плоскости (рис. 7). Запишите уравнения связи, соответствующие условиям качения без проскальзывания для правого, левого колеса и отсутствия бокового проскальзывания обоих колес. В качестве обобщенных координат удобно выбрать (x, y) точки пересечения оси симметрии тележки с осью колес, а также углы поворота φ_1 правого и φ_2 левого колес.

1.7. Рассмотрите систему, описанную в задаче 1.6, в предположении, что центр масс C_0 находится на оси симметрии на расстоянии l от точки (x, y). Масса кузова равна m_0, радиус инерции кузова относительно вертикали, проходящей через точку (x, y), равен k_0, момент инерции колеса относительно диаметра равен A, C — осевой момент инерции, m_1 — масса каждого колеса. Запишите уравнения движения в форме Чаплыгина.

Указания к решению: Запишите выражение для кинетической энергии, которая представляется в виде суммы кинетических энергий кузова, правого и левого колес. В уравнения связей (см. задачу 1.6) и кинетическую энергию явно входит только одна обобщенная координата θ, поэтому можно выбрать в качестве одной из двух независимых вариаций $\delta\theta$.

1.8. Твердое тело может перемещаться по неподвижной горизонтальной плоскости, опираясь на нее тремя точками, две из которых свободно (без трения) скользят по плоскости, а третья является точкой опоры лезвия (или краем режущего колесика), которая жестко связана с движущимся телом. Точка опоры может свободно перемещаться по плоскости вдоль лезвия, но не в поперечном направлении. Такую систему называют *сани Чаплыгина* (рис. 8).

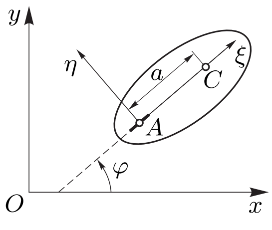


Рис. 8

Положение саней определяется координатами (x, y) точки опоры A (контакта с плоскостью) относительно неподвижной системы координат и углом поворота φ, который определяет ориентацию системы. Пусть (v_1, v_2) — скорость точки контакта в проекции на оси подвижной системы координат $A\xi\eta$ (ось $A\xi$ вдоль лезвия), которая жестко связана с санями, $\omega = \dot{\varphi}$ — угловая скорость вращения тела вокруг вертикальной оси, m — масса тела, (a, b) — координаты центра масс в подвижной системе отсчета (на рис. 8 $b = 0$), J_0 — момент инерции саней относительно вертикальной оси. Запишите уравнение связи, соответствующее невозможности движения точки контакта вдоль оси $A\eta$, и уравнения движения системы с неопределенными множителями (п. 1.3) для следующих случаев:

1) $b = 0$, то есть центр масс саней находится на оси $A\xi$,
2) $b \neq 0$,
3) $a = b = 0$ (проекция центра масс саней совпадает с положением точки контакта),
4) $a = b = 0$ (проекция центра масс саней совпадает с положением точки контакта), но проекция линейной скорости точки контакта лезвия на ось $A\eta$ равна некоторой постоянной величине $v_0 \neq 0$ (обобщенная модель саней Чаплыгина).

1.9. Рассмотрите движение конька на наклонной поверхности льда, α — угол наклона плоскости (исследование системы на горизонтальной поверхности смотрите в примере 5 на с. 19). Запишите уравнения движения в форме Чаплыгина, постройте траекторию движения точки контакта при различных начальных условиях.

2. Избранные задачи неголономной механики

2.1. Динамика шара Чаплыгина

В работе [9] С. А. Чаплыгин провел полное исследование задачи о качении динамически несимметричного шара по плоскости при единственном предположении о совпадении центра масс шара с его геометрическим центром. В этой работе С. А. Чаплыгин привел интегралы движения системы, нашел интегрирующий множитель и получил решение уравнений движения в квадратурах. Несмотря на приведенную им геометрическую интерпретацию, движение шара Чаплыгина в абсолютном пространстве практически не было изучено.

В данном разделе анализируется движение шара Чаплыгина в абсолютном пространстве. В частности особенно подробно исследуются траектории точки контакта, которые можно воспроизвести в натурном эксперименте, заставляя шар катится по плоскости, посыпанной, например, порошком ликоподия. Для различных типов движений в системе, связанной с телом, рассмотрены соответствующие движения в абсолютном пространстве.

2.1.1. Уравнения движения и их интегрирование

Рассмотрим задачу о качении уравновешенного динамически несимметричного шара по горизонтальной шероховатой плоскости [9]. Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается системой

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \tag{44}$$
$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2,$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт вертикали, $\mathbf{I}$ — тензор инерции шара относительно его центра, m — масса шара, a — его радиус. Вектор $\boldsymbol{M}$ имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта.

Как показал С. А. Чаплыгин в [9] уравнения (44) обладают интегрирующим множителем

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad \boldsymbol{J} = \mathbf{I} + D\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|$$

и четырьмя независимыми интегралами

$$h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad C = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \quad n = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}),$$

что позволяет проинтегрировать систему по *теореме Эйлера–Якоби*. В этой же работе С. А. Чаплыгин выполнил также интегрирование системы (44) в гиперэллиптических функциях.

Для определения движения шара в абсолютном пространстве к системе (44) следует добавить уравнения для ортов неподвижной системы

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{45}$$

Большой интерес для понимания движения шара в абсолютном пространстве представляет траектория точки контакта на плоскости, которая очевидно совпадает с траекторией центра масс. Уравнение движения точки контакта можно получить из условия равенства нулю ее скорости (неголономной связи):

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{46}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость центра масс, $\boldsymbol{r} = -a\boldsymbol{\gamma}$ — вектор, соединяющий центр масс и точку контакта. Запишем уравнение (46) в проекциях на неподвижные оси координат:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha}) = a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}), \quad \dot{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\beta}) = -a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}).$$

Вместе с (45) полученные уравнения определяют траекторию точки контакта (и центра масс) на плоскости.

1. Интегрирование уравнений движения в случае нулевой константы площадей. Рассмотрим сначала сведение задачи к квадратурам в случае нулевой постоянной площадей $C = (M, \gamma) = 0$.

В (44) произведем замену переменных, приведенную в работе А. В. Борисова, И. С. Мамаева [10],

$$dt \to \mu d\tau, \qquad \boldsymbol{M} \to \frac{1}{\mu}\boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{\gamma} \to \boldsymbol{\gamma}.$$

После этого уравнения движения можно представить в гамильтоновом виде с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\gamma}))(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M}) + \frac{1}{2}D(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{M})^2. \qquad (47)$$

Интегралы движения принимают вид

$$C = \frac{1}{\mu}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}), \qquad n = \frac{1}{\mu^2}\boldsymbol{M}^2, \qquad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1. \qquad (48)$$

Покажем, что интегрирование системы возможно при помощи обычного разделения переменных. Для этого перейдем к сфероконическим координатам q_1, q_2, которые задаются как корни квадратного уравнения

$$f(q) = \frac{\gamma_1^2}{a_1 - q} + \frac{\gamma_2^2}{a_2 - q} + \frac{\gamma_3^2}{a_3 - q} = 0,$$

где $a_i = \dfrac{1}{I_i}$ и $a_3 < q_2 < a_2 < q_1 < a_1$. Выражения для $\boldsymbol{\gamma}$ в новых координатах имеют вид

$$\begin{gathered}\gamma_1^2 = \frac{(a_1 - q_1)(a_1 - q_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \qquad \gamma_2^2 = \frac{(a_2 - q_1)(a_2 - q_2)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)},\\ \gamma_3^2 = \frac{(a_3 - q_1)(a_3 - q_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}.\end{gathered} \qquad (49)$$

Выражение для момента $\boldsymbol{M}$ через новые координаты q_1, q_2 и сопряженные им импульсы p_1, p_2 имеет вид

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\gamma} = p_1\left(\frac{\delta q_1}{\delta \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}\right) + p_2\left(\frac{\delta q_2}{\delta \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}\right), \qquad (50)$$

где $\dfrac{\delta q_1}{\delta \boldsymbol{\gamma}}$, $\dfrac{\delta q_2}{\delta \boldsymbol{\gamma}}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ выражаются через q_1 и q_2 по формулам (49). Окончательно получим

$$M_1 = F(q_1, q_2)\sqrt{a_2 - a_3}\left(p_1\sqrt{\frac{a_1 - q_1}{a_1 - q_2}} - p_2\sqrt{\frac{a_1 - q_2}{a_1 - q_1}}\right),$$
$$M_2 = F(q_1, q_2)\sqrt{a_1 - a_3}\left(p_1\sqrt{\frac{q_1 - a_2}{a_2 - q_2}} + p_2\sqrt{\frac{a_2 - q_2}{q_1 - a_2}}\right),$$
$$M_3 = F(q_1, q_2)\sqrt{a_1 - a_2}\left(-p_1\sqrt{\frac{q_1 - a_3}{q_2 - a_3}} + p_2\sqrt{\frac{q_2 - a_3}{q_1 - a_3}}\right),$$
$$F(q_1, q_2) = \frac{2}{q_1 - q_2}\sqrt{\frac{(a_1-q_1)(a_1-q_2)(q_1-a_2)(a_2-q_2)(q_1-a_3)(q_2-a_3)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_1-a_3)}}.$$

Подставив (49) и (50) в (47)–(48), выразим гамильтониан в канонических переменных

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right)^{-1}(-p_1^2 f(q_1) + p_2^2 f(q_2)),$$
$$f(q) = \frac{1}{q}(q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(1 + Dq), \tag{51}$$

дополнительный интеграл можно представить в форме

$$n = \frac{-p_1^2 f(q_1) q_1 (1 + Dq_2) + p_2^2 f(q_2) q_2 (1 + Dq_1)}{q_1 - q_2}.$$

Как видно из (51), в новых переменных уравнения разделяются. Решение уравнения Гамильтона – Якоби имеет вид

$$S(q_1, q_2, \alpha_1, \alpha_2) = \pm\int \frac{2\alpha_1 + q_1\alpha_2}{\sqrt{R(q_1)}}d\,q_1 \pm \int \frac{2\alpha_1 + q_2\alpha_2}{\sqrt{R(q_2)}}d\,q_2,$$
$$R(q) = (2\alpha_1 + q\alpha_2)(q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(1 + Dq), \tag{52}$$

где α_1, α_2 — константы разделения, связанные со значениями интегралов (48) следующим образом:

$$\alpha_1 = H, \qquad \alpha_2 = 2DH - n.$$

Используя S как производящую функцию, можно перейти к новым (по Якоби — оскулирующим) переменным $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\delta\, S}{\delta\, \boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \frac{\delta\, S}{\delta\, \boldsymbol{\alpha}}. \tag{53}$$

В этих переменных уравнения движения имеют вид

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\delta H}{\delta \beta_i} = 0, \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\delta H}{\delta \alpha_i} = \delta_{1i}, \qquad i = 1, 2,$$

и их решение

$$\alpha_i = \mathrm{const}, \qquad \beta_i = \delta_{1i}\tau + \beta_i^0, \qquad i = 1, 2, \tag{54}$$

где β_i^0 — константы, определяющие начальное положение на траектории. Таким образом, решение (54) и система (53) задают траекторию (первое уравнение системы) и движение по ней (второе уравнение) в фазовом пространстве $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$. Соответствующие уравнения Абеля – Якоби, определяющие эволюцию q_1 и q_2, имеют вид

$$\frac{d\,q_1}{\sqrt{R(q_1)}} \pm \frac{d\,q_2}{\sqrt{R(q_2)}} = d\,\tau, \qquad \frac{q_1 d\,q_1}{\sqrt{R(q_1)}} \pm \frac{q_2 d\,q_2}{\sqrt{R(q_2)}} = 0.$$

Явная зависимость $\boldsymbol{p}(\tau)$, $\boldsymbol{q}(\tau)$ может быть получена в тэта-функциях.

2. Интегрирование уравнений движения в случае ненулевой константы площадей. В случае ненулевой константы площадей $C = (M, \gamma) \neq 0$ уравнения движения интегрируются с помощью сведения к случаю $C = 0$. Для этого введем новые переменные:

$$M_i = \mu'\gamma_i' + \mu M_i', \qquad \gamma_i = \lambda'\gamma_i' + \lambda M_i' \tag{55}$$

и подберем постоянные $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ так, чтобы с учетом интегралов движения выполнялись соотношения:

$$(M', M') = n_1, \quad (\gamma', \gamma') \quad = 1, \quad (M', \gamma') = 0.$$

Подставляя (55) в интегралы движения, получаем

$${\mu'}^2 + \mu^2 n_1 = n, \quad {\lambda'}^2 + \lambda^2 n_1 \quad = 1, \quad \lambda'\mu' + \lambda\mu n_1 = C.$$

Потребуем, чтобы интегралы энергии h_1 и количества момента n_1 в новых переменных имели вид интегралов на нулевом уровне константы площадей:

$$(\boldsymbol{J}'\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{\omega}') - D'(\boldsymbol{\omega}', \gamma')^2 = 2h, \quad (\boldsymbol{J}'\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{J}'\boldsymbol{\omega}') - {D'}^2(\boldsymbol{\omega}', \gamma')^2 \quad = n, \tag{56}$$

где $\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} + D\boldsymbol{E}$ — матрица моментов инерции относительно точки контакта, инвариантная относительно замены (55). Используя (56), получаем соотношения

$$(\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 h_1 = h\lambda'^2 + \frac{\mu'^2}{D}, \quad (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{1}{D'} = h\lambda^2 + \frac{\mu^2}{D},$$
$$h\lambda'\lambda + \frac{\mu\mu'}{D} = 0, \quad (\lambda'\mu - \mu'\lambda)^2 \frac{h_1}{D'} = \frac{h}{D}.$$

Константы, связывающие M, γ и M', γ', определяются уравнениями

$$\begin{gathered} f^2 - \frac{n - hD}{C} f - hD = 0, \quad \mu = \lambda f, \\ \left[n - C^2 + (C - f)^2\right] \lambda'^2 = (C - f)^2, \\ \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{C - f}{n - Cf}, \quad \lambda\mu - \mu\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda'}(C - f), \end{gathered} \tag{57}$$

и между постоянными интегралов выполнены равенства:

$$\lambda^2 h_1 = \frac{(f - C)h}{f\left(n - C^2 + (C - f)^2\right)}, \quad \lambda^2 n_1 \ = \frac{n - C^2}{n - C^2 + (C - f)^2}. \tag{58}$$

Так как интегрирование в переменных M', γ' (на нулевой константе площадей) может быть проведено в тэта-функциях, то становится возможным осуществить интегрирование и при $C \neq 0$.

Отдельно следует рассмотреть случай, когда вектор $\boldsymbol{M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{\gamma}$, так как в этом случае замена (55) оказывается неприменимой. В данном случае $\boldsymbol{M} = C\boldsymbol{\gamma}$, и интегралы имеют вид

$$\begin{gathered} \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad C = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad n = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}) = C^2, \\ h = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{C}{2}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}). \end{gathered} \tag{59}$$

Уравнения движения при $\boldsymbol{M} = C\boldsymbol{\gamma}$ совпадают с уравнениями Эйлера. Действительно, из (44) и (59) получим выражение для угловой скорости $\boldsymbol{J\omega} = \left(C + \dfrac{2Dh}{C}\right)\boldsymbol{\gamma}$ и уравнения движения в виде $\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Таким образом, решение в данном случае выражается в эллиптических функциях.

2.1.2. Бифуркационная диаграмма, периодические решения и точка контакта

1. Случай $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$. Рассмотрим случай нулевой константы площадей $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$. Бифуркационные кривые при $C = 0$ находятся из условия кратности корней полинома $R(q)$ (52).

В результате на плоскости (h, n) получаем три прямые

$$p_i : \quad h = \frac{n}{I_i + D}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{60}$$

Область возможных движений заключена между прямыми p_1 и p_3 (рис. 9).

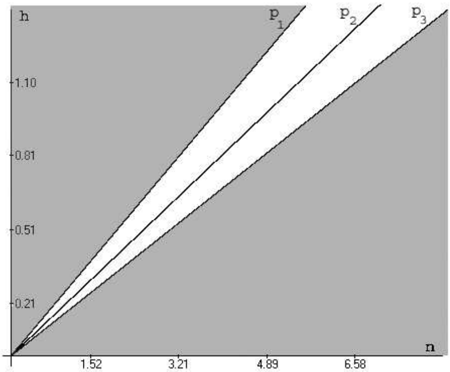


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма при $I_1 = 1$, $I_2 = 1.5$, $I_3 = 3$, $D = 1$, $C = 0$

2. Случай $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$ Сначала отметим, что для реальных движений всегда выполняется соотношение $n \geqslant C^2$, поэтому на бифуркационной диаграмме всегда будет присутствовать ограничивающая прямая $n = C^2$.

Так как этот случай при помощи замены (55) сводится к случаю нулевой константы площадей, то в преобразованных переменных бифуркационные прямые будут иметь вид (60), то есть

$$h_1 = \frac{n_1}{I_i' + D'}.$$

Чтобы получить бифуркационные кривые в исходных переменных, достаточно сделать обратное преобразование координат $M_i', \gamma_i' \to M_i, \gamma_i$. При замене (55) изменяются как моменты инерции относительно центра масс I_i, так и параметр неголономности D, однако моменты инерции относительно точки контакта остаются неизменными:

$$J_i = I_i + D = I_i' + D' = J_i'.$$

Из (58) находим

$$\frac{h_1}{n_1} = \frac{(f - C)h}{f(n - C)} = \frac{1}{J_i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя сюда выражение для f из (57), окончательно получаем бифуркационные кривые

$$p_i: \quad h = \frac{1}{J_i}\left(n + \frac{DC^2}{I_i}\right).$$

Область возможных движений снова заключена между p_1 и p_3, а также ограничена слева прямой $n = C^2$.

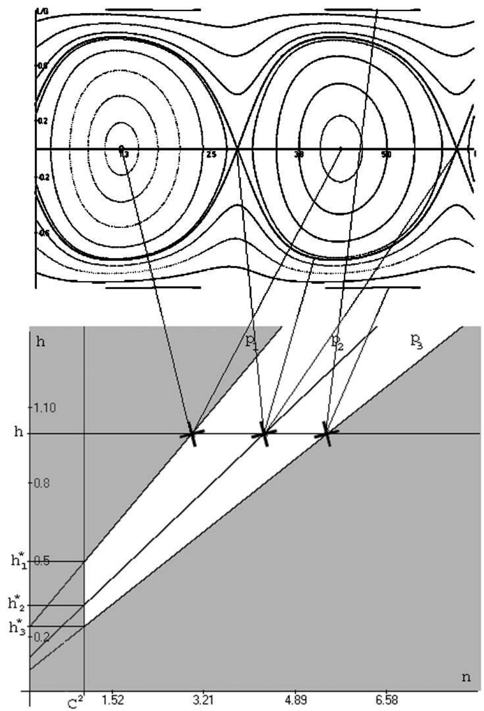
На рисунке 10а изображена бифуркационная диаграмма при $C \neq 0$ и периодические решения на сечении Пуанкаре в переменных Андуайе – Деприи, соответствующие точкам на ветвях бифуркационной диаграммы (см., например, [11]). Эти периодические решения представляют собой вращения, при которых $\boldsymbol{\omega}$ параллельна одной из главных осей. Так, точкам на ветви p_1 соответствуют периодические решения

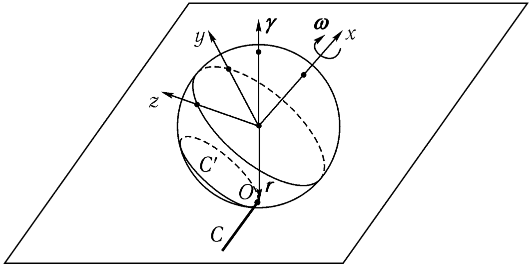
$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,0,0), \quad \boldsymbol{\gamma} = \left(\gamma_1, \sqrt{1 - \gamma_1^2}\cos(\omega_1 t), \sqrt{1 - \gamma_1^2}\sin(\omega_1 t)\right),$$

где γ_1 и ω_1 выражаются через интегралы

$$\omega_1^2 = \frac{2I_1^2 h + DC^2}{J_1 I_1^2}, \quad \gamma_1^2 = \frac{J_1 C^2}{2I_1^2 h + DC^2}.$$

В абсолютном пространстве такие движения представляют собой вращение шара вокруг одной из главных осей. При этом данная ось сохраняет





b)

Рис. 10. a) Бифуркационная диаграмма при $I_1 = 1$, $I_2 = 1.5$, $I_3 = 3$, $D = 1$, $C = 1$ и отображение Пуанкаре на уровне энергии $h = 1$; b) Движение шара в абсолютном пространстве, представляющее собой суперпозицию равномерного поступательного движения и равномерного вращения в перпендикулярной плоскости, соответствует ветви p_1 на бифуркационной диаграмме (O — точка контакта, C — след точки контакта на плоскости, C' — след точки контакта на шаре) постоянное положение в пространстве, а след точки контакта на плоскости представляет собой прямую (рис. 10b).

Как видно из бифуркационной диаграммы, ветвям p_1 и p_3 соответствует устойчивое вращение относительно наименьшей и наибольшей осей соответственно. Ветви p_2 соответствуют неустойчивые вращения вокруг средней оси. Кроме того, ей также соответствуют сепаратрисные движения, соединяющие два периодических решения с противоположными направлениями $\boldsymbol{\omega}$.

Вернемся к случаю $C = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}) = 0$. Выберем орт оси x $\boldsymbol{\alpha}$ параллельным вектору кинетического момента $\boldsymbol{M}$. Второе уравнение системы (45) при этом принимает вид

$$\dot{y} = -\left(\frac{\boldsymbol{M}}{\sqrt{n}},\boldsymbol{\omega}\right) = -\frac{2h}{\sqrt{n}} = \mathrm{const}.$$

Таким образом, центр масс шара и точка контакта равномерно движутся вдоль направления перпендикулярного вектору кинетического момента. При этом в направлении ему параллельном движение шара в общем случае представляет собой некоторую комбинацию поступательного и периодического колебательного движений. Указанное свойство движения шара впервые привел С. А. Чаплыгин в своей работе [9].

В случае $C = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}) \neq 0$, используя замену (55), можно показать, что движение шара теперь уже в обоих направлениях будет представлять собой комбинацию поступательного и периодического колебательного движений. Явное выражение для точки контакта было получено С. А. Чаплыгиным в его работе [9]. Однако ввиду сложности выражений, представляющих собой интегралы рациональных выражений от тэта-функций, аналитическое исследование движения точки контакта по плоскости провести невозможно.

На рисунке 11 представлены траектории точки контакта для различных точек на бифуркационной диаграмме, полученные численно. Особенный интерес представляет собой сепаратрисное движение, приведенное на рисунке 11d, при котором вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ переворачивается и принимает положение, противоположное исходному. Ввиду сложности

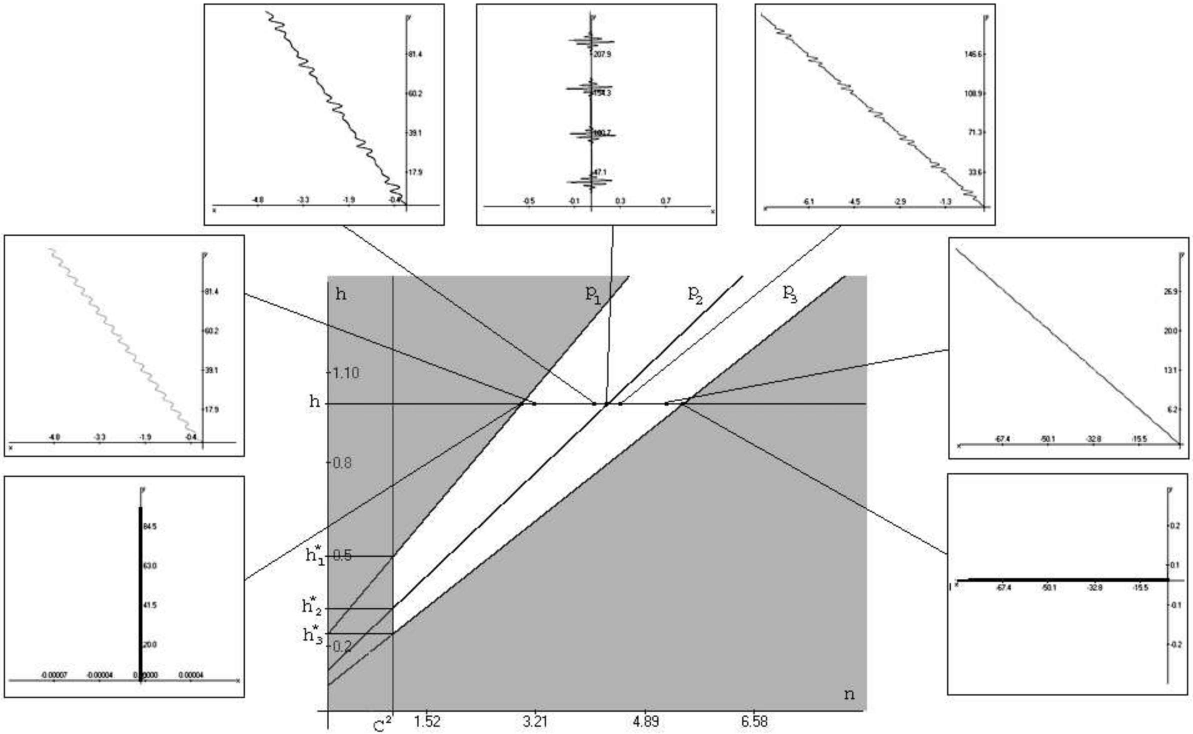


Рис. 11. Бифуркационная диаграмма при $I_1 = 1$, $I_2 = 1.5$, $I_3 = 3$, $D = 1$, $C = 1$ и траектории точки контакта, соответствующие различным точкам диаграммы

точного попадания на сепаратрису и ошибок счета при численном интегрировании, на рисунке видны несколько таких «переворотов». Как видно из рисунков, общей ситуацией для рассмотренных случаев является неограниченность движения точки контакта.

3. Случай $\boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$. В этом случае замена (55) не действительна, и на бифуркационной диаграмме ему соответствует отрезок вертикальной прямой $n = C^2$, ограниченный ветвями p_1 и p_3 диаграммы (рис. 10). Точкам пересечения прямой $n = C^2$ с ветвями p_1, p_2 и p_3 ($h = h_1^*, h_2^*, h_3^*$) соответствуют вращения вокруг главных осей, причем такие, что точка контакта остается на месте. Исключение составляет точка пересечения со второй ветвью, которой, кроме того, соответствует сепаратрисное движение. Рассмотрим этот случай более подробно. Точке (C^2, h_2^*) на диаграмме соответствует два периодических решения, являющихся вращениями вокруг средней оси в разные стороны. Эти два решения соединены семейством двоякопериодических траекторий, во время движения по которым происходит переворот шара. Выбрав решения уравнений (45) из этого семейства так, чтобы они удовлетворяли условию ортогональности, получим

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{a_{32}}{a_{31}}\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda t},\, -\operatorname{th}\lambda t,\, \frac{a_{21}}{a_{31}}\frac{1}{\operatorname{ch}\lambda t}\right),$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{a_{32}}{a_{31}}\operatorname{th}\lambda t\cos\nu t + \frac{a_{21}}{a_{31}}\sin\nu t,\, \frac{\cos\nu t}{\operatorname{ch}\lambda t},\, \frac{a_{21}}{a_{31}}\operatorname{th}\lambda t\cos\nu t - \frac{a_{32}}{a_{31}}\sin\nu t\right),$$
$$\boldsymbol{\beta} = \left(\frac{a_{32}}{a_{31}}\operatorname{th}\lambda t\sin\nu t - \frac{a_{21}}{a_{31}}\cos\nu t,\, \frac{\sin\nu t}{\operatorname{ch}\lambda t},\, \frac{a_{21}}{a_{31}}\operatorname{th}\lambda t\sin\nu t + \frac{a_{32}}{a_{31}}\cos\nu t\right), \tag{61}$$

где

$$a_{ij} = \sqrt{\frac{1}{J_i} - \frac{1}{J_j}}, \quad \nu = \frac{C}{I_2}, \quad \lambda = C\frac{J_2}{I_2}a_{32}a_{21}.$$

Подставляя (61) в (45), получим для точки контакта

$$\dot{x} = \lambda\frac{\cos\nu t}{\operatorname{ch}\lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda\frac{\sin\nu t}{\operatorname{ch}\lambda t}.$$

Считая, что при $t \to -\infty$ точка контакта находилась в начале координат, получим

$$x(t) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\cos \nu\tau}{\operatorname{ch} \lambda\tau} d\tau, \quad y(t) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\sin \nu\tau}{\operatorname{ch} \lambda\tau} d\tau. \tag{62}$$

След точки контакта при таком движении для разных наборов моментов инерции приведен на рисунке 12.

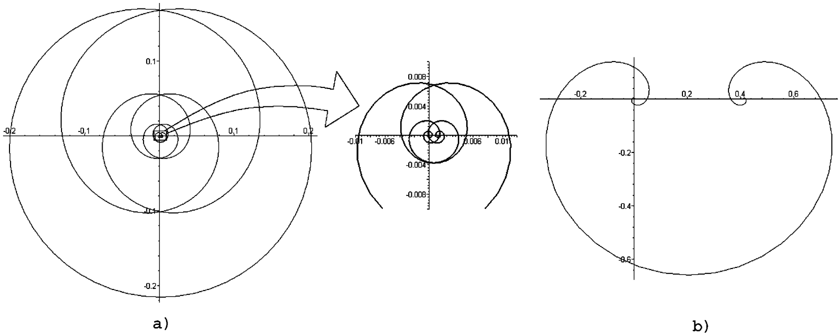


Рис. 12. Двоякоасимптотические траектории точки контакта на плоскости при $\boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ и $h = h_2^*$: a) $I_1 = 1, I_2 = 1.5, I_3 = 2, C = 1 - \Delta = 0.002858$; b) $I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 5, C = 1 - \Delta = 0.411829$

Устремляя $t \to \infty$ в (62), получим $x(\infty) = \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\cos \nu\tau}{\operatorname{ch} \lambda\tau} d\tau, \quad y(\infty) = 0$. Таким образом, переворот оси вращения происходит со смещением центра масс шара на величину $\Delta = x(\infty)$ или, если $\lambda \neq 0$,

$$\Delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{\nu}{\lambda} t}{\operatorname{ch} t} dt.$$

При движении точки контакта по сфере угол пересечения ее траектории с меридианами постоянен вдоль всей траектории. Данное свойство движения легко получить из уравнений движения (44) и приведенного гиперболического решения (61). Таким образом, точка контакта на сфере при $h = h_2^*$ движется по локсодроме.

Рассмотрим теперь снова всю прямую $n = C^2$. Как было указано выше, уравнения движения в данном случае принимают форму уравнений Эйлера. Решения уравнений движения для $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ при этом выражаются в эллиптических функциях. Таким образом, в системе, жестко связанной с телом, точка контакта движется по замкнутым траекториям. В абсолютном пространстве след точки контакта на плоскости уже не является замкнутым и представляет собой достаточно сложные кривые. Для различных наборов моментов инерции уровней энергии эти кривые приведены на рисунке 13.

Как видно на рисунке, практически все кривые, за исключением критических, являются ограниченными.

Двигаясь по прямой $\boldsymbol{M}^2 = C^2$ от $h = h_1^*$ до $h = h_3^*$, траектория точки контакта претерпевает несколько бифуркаций. Вблизи точки $h = h_1^*$ траектории представляют собой квазипериодические кривые, радиус огибающих которых стремится к нулю при приближении к критическому значению h (рис. 13a). Вблизи $h = h_3^*$ траектории, в зависимости от параметров, либо ведут себя аналогичным образом, либо радиус огибающих бесконечно растет при приближении к $h = h_3^*$. Однако при этом разница между радиусами огибающих и скорость дрейфа вдоль огибающих стремятся к нулю (рис. 13b). Таким образом, в пределе шар, как и в предыдущем случае, вращается на одном месте, а траектория точки контакта вырождается в точку.

Наибольший интерес при движении по рассматриваемой прямой $n = C^2$ на бифуркационной плоскости представляет окрестность точки $h = h_2^*$. В само́й точке кривая представляет собой два отрезка спирали со смещенными на величину Δ центрами (рис. 12). Вблизи указанного значения H число витков спиралей становится конечным, и весь отрезок траектории между двумя касаниями внешней огибающей начинает квазипериодически вращаться вокруг некоторого центра (рис. 13c, d). При этом радиус, по которому движется центр спиралей, стремится к $\dfrac{\Delta}{2}$ при $h \to h_2^*$. В зависимости от величины Δ и других параметров системы, центр огибающих может лежать как внутри спирали, так и вне

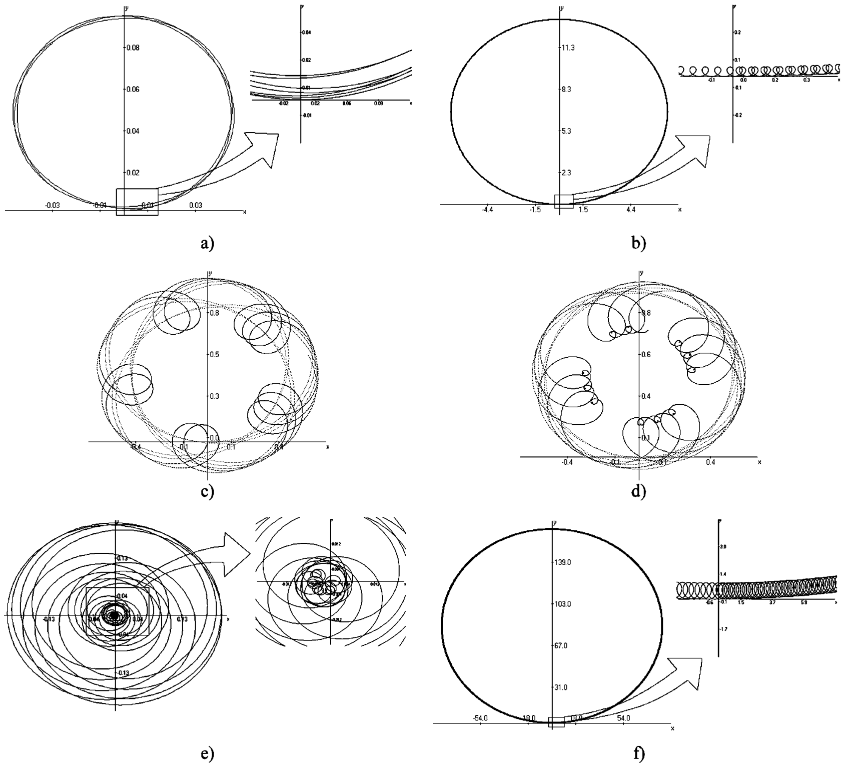


Рис. 13. Траектории точки контакта на плоскости при $\boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ и $C = 1$ для различных значений моментов инерции и энергии. $I_1 = 1, I_2 = 3, I_3 = 5, C = 1$: а) $h = 0.4993$; b) $h = 0.1002$; c) $h = 0.1674$; d) $h = 0.16667$; f) $h = 0.180278$. $I_1 = 1, I_2 = 1.5, I_3 = 2, C = 1$: e) $h = 0.33335$

ее (рис. 13d, e). По мере удаления от критического значения h число витков спирали уменьшается и становится равным единице.

Отметим также, что при определенных параметрах системы (в частности, при больших Δ) существует некоторое критическое значение энергии, при котором движение точки контакта становится инфинитным (рис.13f).

2.2. Динамика катящегося диска

В данном разделе рассматривается движение тяжелого динамически симметричного круглого диска по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости. В данной задаче мы воспользуемся достаточно очевидной формой уравнений движения неголономной системы, полученной из общих принципов динамики — закона сохранения кинетического момента, записанного в осях, жестко связанных с диском.

Интегрируемость задачи о качении диска была впервые установлена С. А. Чаплыгиным (1897), который свел ее к анализу гипергеометрических квадратур в работе [15]. Интегрирование уравнений движения диска в гиперэллиптических функциях обнаружили также в 1900 году независимо друг от друга и от Чаплыгина П. Аппель [16] и Д. Кортевег [17].

Некоторые результаты качественного исследования можно найти в работах С. Н. Колесникова [18], Ю. Н. Федорова [19], Н. К. Мощука [20]. В частности, показано, что точка контакта совершает сложное ограниченное движение: она периодически движется по некоторой замкнутой кривой, которая вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной точки. При этом уход тела вращения на бесконечность возможен только при выполнении некоторого резонансного соотношения между частотами.

В данном разделе мы развиваем эти качественные соображения и дополняем их компьютерным анализом, приводим различные типы траекторий точки контакта в неподвижной и вращающейся системах координат. Приводим наиболее общую трехмерную бифуркационную диаграмму в пространстве первых интегралов и полный атлас ее сечений различными плоскостями, построенные с помощью компьютерных вычислений.

2.2.1. Качение твердого тела по плоскости

1. Уравнения движения и их интегралы. Пусть твердое тело во внешнем силовом поле катится по плоскости без проскальзывания. В этом случае уравнения движения удобно записывать в системе координат, жестко связанной с телом, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, а начало находится в центре масс. Все векторы в дальнейшем мы предполагаем спроектированными на эти оси.

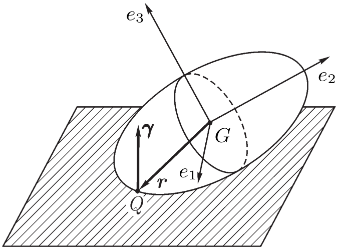


Рис. 14

Условие отсутствия проскальзывания (неголономная связь) имеет вид

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 0,$$

где $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}$ — скорость центра масс и угловая скорость тела, а $\boldsymbol{r}$ — вектор направленный из центра масс в точку контакта (см. рис. 14).

Обозначим проекции неподвижных ортов на подвижные оси через $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ (причем вектор $\boldsymbol{\gamma}$ — перпендикулярен к плоскости), а через (x, y) обозначим координаты проекции центра масс на плоскость в неподвижной системе координат. Предположим, что силовое поле является потенциальным, с потенциалом, зависящим лишь от ориентации тела $U = U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$. Полная система уравнений движения, описывающих данную систему, может быть представлена в форме

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial U}{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \frac{\partial U}{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (63)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (64)$$

Уравнение (63) описывает эволюцию вектора кинетического момента тела относительно точки контакта $\boldsymbol{M}$, а уравнение (64) — эволюцию единичных неподвижных ортов в связанной с телом системе координат.

Движение центра масс может быть получено в квадратурах из решений уравнений (63), (64) следующим образом:

$$\dot{y} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}).$$

Вектор кинетического момента относительно точки контакта $\boldsymbol{M}$ можно выразить через угловую скорость следующим образом:

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \quad (65)$$

где $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции тела. В свою очередь $\boldsymbol{r}$ может быть однозначно выражен (для всюду выпуклого тела) через нормаль к плоскости $\boldsymbol{\gamma}$ из уравнения

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla F(\boldsymbol{r})}{|\nabla F(\boldsymbol{r})|}, \tag{66}$$

здесь $F(\boldsymbol{r}) = 0$ — уравнение поверхности тела.

Рассмотрим теперь движение точки контакта на плоскости. Если обозначить положение точки контакта на плоскости в неподвижной системе координат как (X, Y), то уравнение движения для точки контакта могут быть представлены в форме

$$\dot{X} = (\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\alpha}), \qquad \dot{Y} = (\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\beta}),$$

где $\dot{\boldsymbol{r}}$ определяется из уравнений (63)–(66). Фактически $\dot{X}$ и $\dot{Y}$ являются проекциями скорости точки контакта в подвижной системе координат на неподвижные оси.

Система (63)–(64) в общем случае допускает семь независимых интегралов движения, шесть из которых — тривиальные геометрические интегралы:

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0.$$

Седьмым является интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = h = \mathrm{const}. \tag{67}$$

В общем случае других дополнительных интегралов данная система не имеет, а возможность ее интегрируемости в конкретных случаях связана с наличием дополнительных тензорных инвариантов (меры, полей симметрии, интегралов).

2. Качение тяжелого диска. Рассмотрим теперь подробно случай качения осесимметричного диска радиуса R в поле тяжести, которое, очевидно, также является осесимметричным, с потенциалом, зависящим только от $\boldsymbol{\gamma}$. Полагаем, кроме того, что диск динамически симметричен, т. е. $I_1 = I_2$. Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$U = -mg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma}) = mgR\sqrt{1-\gamma_3^2}.$$

Уравнение поверхности для диска имеет вид $F(\boldsymbol{r}) = r_1^2 + r_2^2 - R^2$. Подставляя его в уравнение (66) и разрешая его относительно $\boldsymbol{r}$, получим

$$r_1 = -\frac{R\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \qquad r_2 = -\frac{R\gamma_2}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \qquad r_3 = 0. \tag{68}$$

Так как потенциальная энергия зависит только от $\boldsymbol{\gamma}$, то в уравнениях движения (63)–(64) отделяется система шести уравнений

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + mg\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{69}$$

Выражая $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{r}$ из соотношений (65), (68), получим замкнутую систему для переменных $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$, которая во многом аналогична системе Эйлера – Пуассона в случае Лагранжа, однако существенно сложнее последней.

Уравнения (69) сохраняют геометрический интеграл $\boldsymbol{\gamma}^2$ и энергию (67), кроме того, они допускают стандартную (с постоянной плотностью) инвариантную меру. Таким образом, для интегрируемости этих уравнений (по Эйлеру – Якоби) недостает еще двух интегралов. Далее мы укажем путь получения этих интегралов.

Возможность отделения системы (69) от общей системы (63)–(64) связана с симметрией относительно вращений вокруг вертикальной оси определенной вектором $\boldsymbol{\gamma}$. Система (69) инвариантна относительно поля симметрий

$$\widehat{\boldsymbol{v}}_\psi = \alpha_1\frac{\partial}{\partial\beta_1} - \beta_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial\beta_2} - \beta_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial\beta_3} - \beta_3\frac{\partial}{\partial\alpha_3}, \tag{70}$$

которое коммутирует с векторным полем задачи. Можно показать, что переменные $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$ являются интегралами поля (70), то есть $\widehat{\boldsymbol{v}}_\psi(M_i) = 0$, $\widehat{\boldsymbol{v}}_\psi(\gamma_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Согласно общей теории Ли [21] переменные $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$ задают редуцированную систему. Для классических уравнений Эйлера–Пуассона соответствующая редукция есть приведение по Раусу относительно циклического угла прецессии.

Помимо поля симметрий (70) уравнения движения (63)–(64) именно для осесимметричного тела допускают еще одно поле симметрий:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{v}}_\varphi = M_1\frac{\partial}{\partial M_2} - M_2\frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial}{\partial \gamma_1} + \\ +\alpha_1\frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \beta_1\frac{\partial}{\partial \beta_2} - \beta_2\frac{\partial}{\partial \beta_1}, \end{aligned} \tag{71}$$

которое соответствует вращению вокруг оси симметрии диска.

Можно показать, что интегралами поля (71) являются проекции момента и нормали к плоскости диска на неподвижные оси координат:

$$\boldsymbol{N} = ((\boldsymbol{M},\boldsymbol{\alpha}),(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\beta}),(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}))\,, \qquad \boldsymbol{n} = (\alpha_3,\beta_3,\gamma_3).$$

Уравнения движения для них могут быть представлены в форме

$$\dot{\boldsymbol{N}} = m\dot{\widetilde{\boldsymbol{r}}}\times(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\times\widetilde{\boldsymbol{r}}) + mg\widetilde{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{n}, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{n}, \tag{72}$$

где символами $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \widetilde{\boldsymbol{r}}$ обозначены те же векторы, но в проекциях на неподвижные оси (то есть $\widetilde{\omega}_1 = (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha}),\ldots,\widetilde{r}_1 = (\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}),\ldots$). В явном виде компоненты вектора $\widetilde{\boldsymbol{r}}$ следующие:

$$\widetilde{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{R\alpha_3\gamma_3}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \frac{R\beta_3\gamma_3}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, -R\sqrt{1-\gamma_3^2}\right),$$

а вектор $\boldsymbol{N}$ выражается через $\boldsymbol{\omega}$ по формуле

$$N = I_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}} + (I_3 - I_1)(\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + m\widetilde{\boldsymbol{r}}\times(\widetilde{\boldsymbol{r}}\times\widetilde{\boldsymbol{r}}).$$

3. Приведение к интегрируемой одностепенной гамильтоновой системе. Выполним теперь понижение порядка по обоим полям симметрий (70) и (71). Для этого необходимо в качестве переменных редуцированной системы выбрать совместные интегралы этих полей. Как показано в [22], наиболее удобной алгебраической системой таких переменных является набор

$$\begin{gathered} \gamma_3, \quad K_1 = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 = N_3 - \gamma_3(\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}), \\ K_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_3+mR^2}}M_3 = \sqrt{\frac{I_1}{I_3+mR^2}}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}), \\ K_3 = \gamma_1M_2 - \gamma_2M_1 = N_1n_2 - N_2n_1. \end{gathered} \tag{73}$$

Уравнения движения в новых переменных приобретают вид

$$\begin{gathered}\dot{\gamma}_3 = \frac{K_3}{I_1 + mR^2}, \quad \dot{K}_1 = -\frac{I_3}{(I_1 + mR^2)\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} K_3 K_2, \\ \dot{K}_2 = -\frac{mR^2}{(I_1 + mR^2)\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} \frac{K_3 K_1}{1 - \gamma_3^2}, \\ \dot{K}_3 = -\frac{\gamma_3}{1 - \gamma_3^2}\left(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_1 + mR^2}\right) + \\ + \frac{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}}{I_1^2} K_1 K_2 + mgR\gamma_3\sqrt{1 - \gamma_3^2}.\end{gathered} \tag{74}$$

Уравнения (74) сохраняют инвариантную меру с плотностью $\rho = \dfrac{1}{1 - \gamma_3^2}$.

Разделив второе и третье уравнения на первое и перейдя к новой независимой переменной — углу нутации $\theta = \arccos \gamma_3$, получим систему линейных уравнений

$$\frac{dK_1}{d\theta} = \frac{I_3 \sin\theta}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\theta} = \frac{mR^2}{\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} \frac{K_1}{\sin\theta}.$$

Общее решение этих уравнений можно представить в форме [5]

$$\begin{gathered}K_1 = C_1 \frac{I_3 \sin^2\theta}{2\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} F(1 + \xi, 1 + \eta, 2, \frac{1 - \cos\theta}{2}) - \\ - C_2 \frac{I_3 \sin^2\theta}{2\sqrt{I_1(I_3 + mR^2)}} F(1 + \xi, 1 + \eta, 2, \frac{1 + \cos\theta}{2}), \\ K_2 = C_1 F(\xi, \eta, 1, \frac{1 - \cos\theta}{2}) + C_2 F(\xi, \eta, 1, \frac{1 + \cos\theta}{2}),\end{gathered} \tag{75}$$

где ξ и η — решения квадратного уравнения $x^2 - x + \dfrac{I_3 mR^2}{I_1(I_3 + mR^2)} = 0$, а $F(\xi, \eta, n, z)$ — обобщенная гипергеометрическая функция, представимая рядом

$$F(\xi, \eta, n, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\xi + k)\Gamma(\eta + k)\Gamma(n)}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)\Gamma(n + k)} \frac{z^k}{k!}.$$

Таким образом, соотношения (75) задают (неявно) интегралы движения, которыми в данном случае являются «постоянные» C_1 и C_2, выраженные через K_1, K_2, θ.

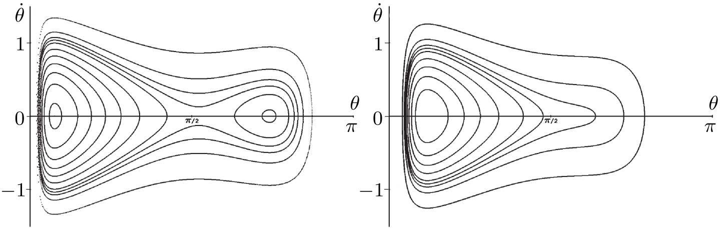


Рис. 15. Фазовые портреты системы (76) при различных значениях C_1 и C_2. Слева: случай существования трех периодических решений ($C_1 = 0.05, C_2 = 0.01$). Справа: случай существования одного периодического решения ($C_1 = 0.08, C_2 = = -0.02$)

Квадратура для угла нутации может быть получена из интеграла энергии, записанного в переменных K_1, K_2, K_3, θ:

$$\begin{gathered}\dot\theta^2 = 2\sin^2\theta(I_1 + mR^2)P(\theta),\\ P(\theta) = h - \frac{K_1^2}{2I_1\sin^2\theta} - \frac{1}{2}\frac{K_2^2}{I_1} - mgR\sin\theta.\end{gathered} \tag{76}$$

Здесь переменные K_1, K_2 предполагаются выраженными через постоянные интегралов и угол θ согласно формулам (75). В этом случае функция $P(\theta)$ (зависящая от констант интегралов) задает аналог гироскопической функции для волчка Лагранжа.

Таким образом, уравнение (76) при фиксированных значениях C_1 и C_2 задает одностепенную гамильтонову систему. Фазовые портреты этой системы на плоскости $\theta, \dot\theta$ приведены на рисунке 15. Все переменные γ_3, K_1, K_2, K_3 представляют собой периодические функции от времени с периодом T_θ и соответствующей частотой ω_θ.

4. Квадратуры для углов собственного вращения и прецессии Согласно общей теории Ли [21], если переменные редуцированной системы (73) являются заданными функциями времени, то все переменные исходной системы (69) (и соответственно (72)) могут быть получены с помощью одной квадратуры (при условии коммутации полей $\widehat{\boldsymbol{v}}_\psi$ (70) и $\widehat{\boldsymbol{v}}_\phi$ (71)).

Действительно, используя равенства $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ и, соответственно, $\operatorname{tg}\psi = -\dfrac{n_1}{n_2}$ для углов φ и ψ, находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\gamma_3}{1-\gamma_3^2}\frac{K_1}{I_1} + \frac{K_2}{\sqrt{I_1(I_3+mR^2)}}, \qquad \dot{\psi} = -\frac{K_1}{I_1(1-\gamma_3^2)}. \tag{77}$$

Таким образом, для каждого из углов зависимость от времени задается в виде интеграла от периодической функции с частотой ω_θ, следовательно, ее можно представить в форме (см., например, [20])

$$\varphi = \omega_\varphi t + \varphi_*(t), \qquad \psi = \omega_\psi t + \psi_*(t), \tag{78}$$

где $\varphi_*(t), \psi_*(t)$ — периодические функции с частотой ω_θ. Кроме того, из (77) и (78) также следует, что все частоты $\omega_\theta, \omega_\varphi, \omega_\psi$ зависят только от констант первых интегралов.

2.2.2. Движение точки контакта

Следуя работам [20, 23], представим уравнение для скорости точки контакта в форме

$$\dot{Z} = R\left(\frac{\gamma_3}{1-\gamma_3^2}\frac{K_1}{I_1} - \frac{K_2}{\sqrt{I_1(I_3+mR^2)}}\right)e^{i\psi}, \tag{79}$$

где $Z = X + iY$, а X, Y — координаты точки контакта в неподвижной системе координат.

Таким образом, координаты точки контакта определяются квадратурами от квазипериодических двухчастотных (с частотами $\omega_\psi, \omega_\theta$) функций времени.

2.2.3. Качественный анализ

Выполним качественный анализ динамики диска, который заключается в классификации возможных движений в зависимости от констант первых интегралов. Для единообразия мы рекомендуем ознакомиться с таким анализом случая Лагранжа по книге [24].

Сложность анализа связана с тем, что интегралы движения не выражаются в элементарных функциях (а лишь в специальных) и система не имеет естественного гамильтонова описания. Кроме того, помимо движения апексов тела (диска) необходимо классифицировать траектории точки контакта, которые получаются дополнительными квадратурами квазипериодических функций.

1. Бифуркационный анализ приведенной системы. Возможные типы движения оси симметрии тела полностью определяются видом гироскопической функции $P(\theta)$ и уровнем энергии. Критические значения интегралов движения C_1, C_2, h определяются уравнениями

$$P(\theta) = 0, \qquad \frac{dP(\theta)}{d\theta} = 0. \tag{80}$$

В трехмерном пространстве с координатами C_1, C_2, h уравнения (80) задают трехмерную поверхность, так называемую *поверхность регулярных прецессий* [24] (см. рис. 16). Это название связано с тем, что при данных значениях интегралов диск совершает движение с фиксированным углом $\theta = \mathrm{const}$, которое является аналогом прецессии для волчка Лагранжа.

Полный атлас сечений поверхности регулярных прецессий (бифуркационных диаграмм) плоскостями $C_1 + C_2 = \mathrm{const}$ и $C_1 - C_2 = \mathrm{const}$ приведен на рисунках 17 и 18 соответственно. На данных сечениях ветви, соответствующие неустойчивым решениям, изображены пунктиром. В случаях, когда $C_1 = 0$ или $C_2 = 0$, движение диска представляет собой падение, а плоскости, задаваемые этими равенствами, задают в пространстве интегралов C_1, C_2, h двумерное многообразие падений. Таким образом, почти для всех начальных условий диск не упадет при качении по плоскости. Другие замечательные движения соответствуют случаям $C_1 = C_2$ (качение диска), и $C_1 = -C_2$ (верчение диска вокруг своей оси, проходящей через диаметр, при котором наклон диска относительно вертикали остается постоянен).

2. Анализ движения точки контакта. Для анализа движения точки контакта разложим скорость (79) в ряд Фурье по времени, тогда из (78)

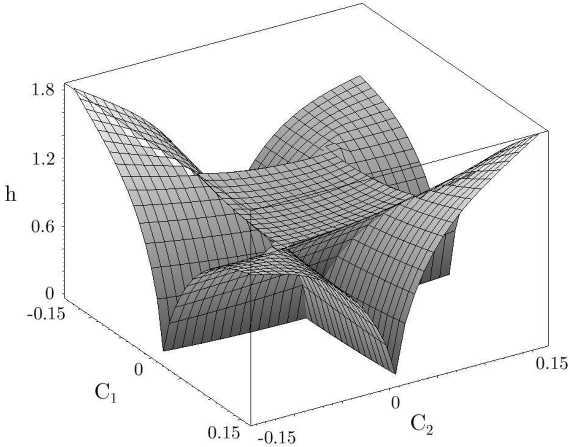


Рис. 16. Поверхность регулярных прецессий. Параметры системы $I_1 = 0.25, I_2 = 0.5, R = 1, m = 1, g = 1$

следует

$$\dot{Z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{i(\omega_\psi + n\omega_\theta)t}.$$

Интегрируя по времени, находим

$$Z(t) = Z_0 + e^{i\omega_\psi t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{v_n}{i(\omega_\psi + n\omega_\theta)} e^{in\omega_\theta t}.$$

Таким образом, при $\omega_\psi + n\omega_\theta \neq 0$, если перейти в систему координат, вращающуюся вокруг точки Z_0 с угловой скоростью ω_ψ, то точка контакта будет описывать некоторую замкнутую кривую (см. [20, 23]). Различные типы таких замкнутых кривых и соответствующие им траектории в неподвижном пространстве приведены на рисунке 19.

При резонансе $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$ наблюдается вековой уход точки контакта. Соотношение $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$ может выполняться как в случае существования одной, так и трех регулярных прецессий. Причем при одной и той же энергии одни начальные условия могут приводить к вековому уходу, а другие нет (см. рис. 19). Так как все частоты зависят только от значений первых интегралов, то соотношение $\omega_\psi + n\omega_\theta = 0$ задает в трехмерном пространстве интегралов некоторое двумерное многообразие, соответствующее инфинитным траекториям диска.

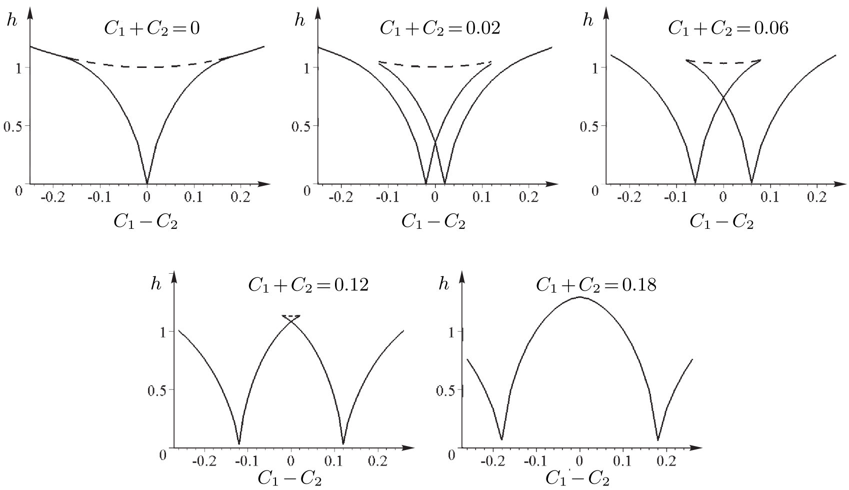


Рис. 17. Сечения поверхности регулярных прецессий, изображенной на рисунке 16, плоскостями $C_1 + C_2 = \mathrm{const}$

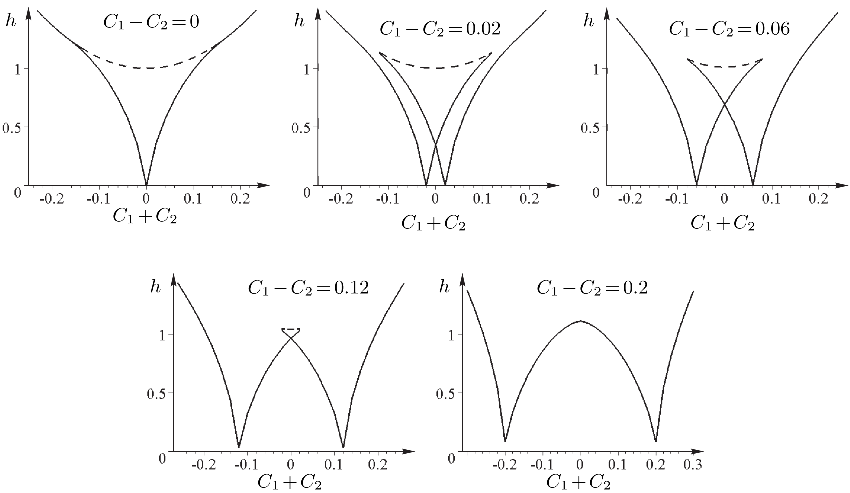


Рис. 18. Сечения поверхности регулярных прецессий, изображенной на рисунке 16, плоскостями $C_1 - C_2 = \mathrm{const}$

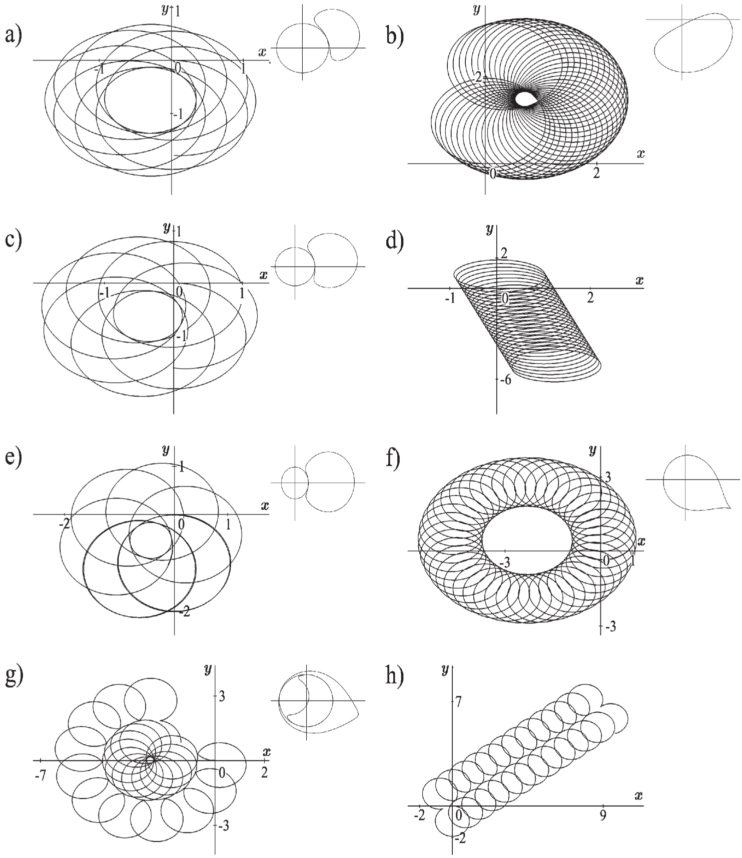


Рис. 19. Траектории точки контакта диска в абсолютном пространстве при различных значениях интеграла энергии. Замкнутые траектории во вращающейся с угловой скоростью ω_ψ системе координат (см. объяснения в тексте) приведены в правом верхнем углу каждого рисунка (за исключением инфинитных движений). a), b) $h = 0.86$; c), d) $h = 0.92217$, одно из движений становится резонансным ($\omega_\theta = \omega_\psi^{(2)}$) и наблюдается вековой уход (рис. d); e), f) $h = 0.961$, оба типа движения снова становятся ограниченными; g) $h = 1.1$, после того как две ОВД, соответствующие различным типам движения, сливаются; h) $h = 1.18169$, траектория соответствует резонансу $\omega_\psi = 2\omega_\theta$

2.3. Качение тела по поверхностям

В данном разделе рассматриваются задачи о качении твердого тела без проскальзывания по плоскости и сфере. Приводятся уравнения движения, которые, в отличие от качения по произвольной поверхности, имеют вид, близкий к уравнениям Эйлера – Пуассона. Для обоих случаев имеется шесть уравнений первого порядка от шести переменных, обладающих в потенциальном поле двумя интегралами движения — энергии и геометрическим (в случае уравнений Эйлера – Пуассона всегда существует также интеграл площадей, аналог которого при качении имеется лишь при дополнительных динамических и геометрических ограничениях).

Исследования задачи о движении твердого тела по плоскости восходят к С. А. Чаплыгину, П. Аппелю, Д. Кортевегу, которые показали сводимость уравнений движения к линейному дифференциальному уравнению второго порядка в случае, когда поверхность динамически симметричного тела является поверхностью вращения. Эти результаты частично обобщил П. Воронец, исследуя движение тела вращения и круглого диска с острым краем по поверхности сферы. В обоих случаях системы являются интегрируемыми по Эйлеру – Якоби и обладают дополнительными первыми интегралами и инвариантной мерой. Здесь мы рассматриваем также различные случаи, когда интегралы и инвариантную меру удается записать в виде конечного алгебраического выражения.

2.3.1. Уравнения движения твердого тела по плоскости и сфере без проскальзывания

Пусть твердое тело катится без проскальзывания (то есть скорость точки контакта Q равна нулю) по неподвижной поверхности, представляющей собой плоскость или сферу.

Уравнения движения состоят из векторного динамического уравнения изменения кинетического момента $\boldsymbol{M}$ относительно точки контакта Q (рис. 20), которое для произвольной формы тела и поверхности можно представить в форме

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{M}_Q, \tag{81}$$

где $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r} = GQ$, $\boldsymbol{M}_Q$ предполагаются спроецированными на главные центральные оси инерции в теле, здесь $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\boldsymbol{M}_Q$ — момент внешних сил относительно точки контакта, для случая поля тяжести $\boldsymbol{M}_Q = mg\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\gamma}$, G – центр масс.

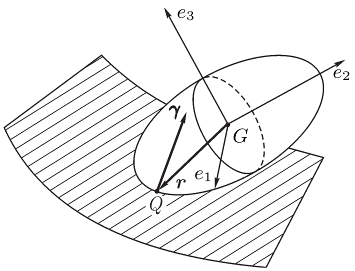


Рис. 20

Его необходимо дополнить векторным кинематическим уравнением типа Пуассона, которое для случая плоскости **a)** и сферы **b)** имеет несколько различный вид:

$$\textbf{a)}\ \ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{82}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор нормали к плоскости,

$$\textbf{b)}\ \ R_0(\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) = \dot{\boldsymbol{r}}, \tag{83}$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор нормали к сфере радиуса R_0 (см. рис. 26).

В уравнениях (81), (82), (83) предполагается, что радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ выражен через нормаль γ из уравнения

$$\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \tag{84}$$

задающего гауссово отображение, где $f(\boldsymbol{r}) = 0$ представляет собой уравнение поверхности тела в главной центральной системе координат, связанной с телом. Предполагается, что тело является всюду выпуклым (чтобы избежать ударов при движении), а уравнение (84) однозначно разрешимо $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\gamma)$. Такое разрешение в дальнейшем мы считаем заведомо выполненным.

Используя (84), кинематическое уравнение (83), описывающее динамику вектора $\boldsymbol{\gamma}$, для сферы можно представить в форме

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \bigl(1 + k(\mathbf{B} - k)^{-1}\bigr)\,\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad k = R_0^{-1}, \tag{85}$$

где $\mathbf{B} = \|b_{ij}\|$ — вырожденная матрица с компонентами

$$b_{ij} = -\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial r_j}\Big).$$

Связь между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\omega}$ задается уравнением

$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{M} - m\boldsymbol{r} \times (\mathbf{A}\boldsymbol{r} \times \mathbf{A}\boldsymbol{M})}{1 - m(\boldsymbol{r},\mathbf{A}\boldsymbol{r})}, \qquad (86)$$

где m — масса тела, $\mathbf{I}$ — центральный тензор инерции, $\mathbf{A} = (\mathbf{I} + m\boldsymbol{r}^2)^{-1}$.

Момент внешних сил в случае существования потенциала $U = U(\boldsymbol{\gamma})$, зависящего только от компонент вектора $\boldsymbol{\gamma}$, можно представить в виде:

a) для плоскости $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial}{\partial U}\boldsymbol{\gamma}$;

b) для сферы $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{\gamma} \times (1 + k(\mathbf{B}^{\mathrm{T}} - k)^{-1})\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}$, где $\mathbf{B}$ — матрица (85).

Уравнения (81) и (82),(83) всегда обладают интегралом энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1,$$

в случае поля тяжести $U(\boldsymbol{\gamma}) = -mg(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\gamma})$.

Для интегрирования этих уравнений по теореме Эйлера–Якоби (теория последнего множителя) необходимо указать еще два дополнительных независимых первых интеграла и инвариантную меру [27].

Напомним, что плотность инвариантной меры ρ общей системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля $\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0$.

Динамические и геометрические ограничения, приводящие к наличию первых интегралов и инвариантной меры, являются в некотором смысле независимыми. Могут встречаться комбинации параметров, при которых существует только мера или только дополнительный интеграл. Если система обладает двумя дополнительными интегралами и мерой, то является полностью интегрируемой.

2.3.2. Тело на плоскости

1. Качение тела вращения по плоскости. При условии, что как поверхность тела, так и центральный эллипсоид инерции являются соосными поверхностями вращения, уравнения (81), (82) обладают двумя дополнительными интегралами и инвариантной мерой. Потенциал U при этом предполагается произвольной функцией от $\gamma_3 = \cos\theta$, т. е. зависящей только от наклона оси вращения тела к вертикали. В частности, для поля тяжести центр масс необходимо должен находиться на оси вращения.

Уравнение поверхности (86) в случае тела вращения можно разрешить в явном виде

$$r_1 = f_1(\gamma_3)\gamma_1, \quad r_2 = f_1(\gamma_3)\gamma_2, \quad r_3 = f_2(\gamma_3), \tag{87}$$

где $f_i(\gamma_3)$, $i = 1{,}2$ — функции, которые подчинены одному дифференциальному уравнению, определяющему меридианальное сечение:

$$\frac{df_2}{d\gamma_3} = f_1 - \frac{1-\gamma_3^2}{\gamma_3}\frac{df_1}{d\gamma_3}.$$

Обозначив через $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_1, I_3)$, $(I_1 = I_2)$ — главный центральный тензор инерции, с помощью явных вычислений можно найти выражение для плотности инвариантной меры уравнений (81), (82), которая существует для произвольных функций $f_1(\gamma_3)$, $f_2(\gamma_3)$, задающих поверхность

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I_1I_3 + m(\boldsymbol{r},\mathbf{I}\boldsymbol{r})}} = \frac{1}{\sqrt{I_1I_3 + I_1mf_1^2(1-\gamma_3^2) + I_3mf_2^2}}. \tag{88}$$

Как несложно проверить, при перечисленных условиях уравнения движения обладают также полем симметрий $\boldsymbol{v}$, определяемым дифференциальным оператором

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = M_1\frac{\partial}{\partial M_2} - M_2\frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1\frac{\partial}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial}{\partial\gamma_1}. \tag{89}$$

Оно соответствует инвариантности системы относительно вращений вокруг оси динамической симметрии. С помощью этого поля можно понизить порядок системы, для чего необходимо выбрать приведенные (редуцированные) переменные, которые являются интегралами векторного поля (89), в которых уравнения имеют наиболее простой вид.

В качестве таких переменных выберем

$$
\begin{gathered}
K_1 = \frac{(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r})}{f_1} = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + \frac{f_2}{f_1}M_3,\\
K_2 = \frac{\omega_3}{\rho} = \rho\Big(mf_1f_2(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2) + (I_1 + mf_2^2)M_3\Big),\\
K_3 = \frac{M_2\gamma_1 - M_1\gamma_2}{\sqrt{(1-\gamma_3^2)(I_1 + m\boldsymbol{r}^2)}}.
\end{gathered} \tag{90}
$$

Уравнения движения в этих переменных, определяющие приведенную систему, имеют вид

$$
\begin{gathered}
\dot{\gamma}_3 = kK_3, \quad \dot{K}_1 = -kK_3\rho I_3\Big(1 - \Big(\frac{f_2}{f_1}\Big)'\Big)K_2,\\
\dot{K}_2 = -kK_3\rho m f_1\big(f_1 - f_2'\big)K_1,\\
\dot{K}_3 = -\frac{k}{I_1^2f_1^2(1-\gamma_3^2)^2}\bigg(f_2\big(f_1(1-\gamma_3^2) + \gamma_3 f_2\big)(mf_1^2K_1^2 + I_3K_2^2) +\\
+\gamma_3 f_1^2 I_1 K_1^2 + f_1\big(f_1(1-\gamma_3^2) + 2\gamma_3 f_2\big)\frac{K_1K_2}{\rho} +\\
+mf_1^2\rho f_2(1-\gamma_3^2)(\gamma_3 f_1 I_1 - f_2 I_3)K_1K_2\bigg) - \frac{\partial U(\gamma_3)}{\partial\gamma_3},
\end{gathered} \tag{91}
$$

где $k = \sqrt{\dfrac{1-\gamma_3^2}{I_1 + m\boldsymbol{r}^2}}$.

Несложно показать, что эти уравнения обладают инвариантной мерой с плотностью $\rho = k^{-1}$ и интегралом энергии

$$
\begin{gathered}
H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\gamma_3) = \frac{1}{2}K_3^2 + U(\gamma_3) +\\
+\frac{1}{2I_1(1-\gamma_3^2)}\Big(K_1^2 - \frac{I_3}{mf_1^2}K_2^2 + \frac{mf_2^2}{I_1}\Big(K_1 - \frac{K_2}{\rho m f_1 f_2}\Big)^2\Big).
\end{gathered} \tag{92}
$$

Для того, чтобы показать интегрируемость и существование линейных интегралов, разделим второе и третье уравнения системы (91) на $\dot{\gamma}_3$

и получим систему двух линейных неавтономных уравнений первого порядка

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = -\rho I_3\Big(1 - \Big(\frac{f_2}{f_1}\Big)'\Big)K_2, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = -m\rho f_1(f_1 - f_2')K_1. \tag{93}$$

Уравнения (93) не содержат потенциала, который входит лишь в выражение интеграла энергии (92). Из этого уравнения после решения линейной системы (93) определяется зависимость угла нутации от времени, которая в общем случае имеет периодический колебательный характер.

Вследствие того, что относительно γ_3 уравнения (93) представляют собой линейную систему, общее решение может быть получено в виде линейной суперпозиции

$$K_i = c_1 g_i^{(1)} + c_2 g_i^{(2)}, \quad i = 1, 2, \tag{94}$$

где $g_i^{(1)}(\gamma_3), g_i^{(2)}(\gamma_3)$ — фундаментальные решения (93). При обращении выражений (94) относительно c_i получим выражения для недостающих первых интегралов, которые в общем случае выражаются через вещественно-аналитические, но не алгебраические (например, гипергеометрические) функции. Тем не менее они всегда являются линейными по M_i (т. е. по обобщенным скоростям).

Рассмотрим некоторые известные ситуации, когда интегралы являются алгебраическими или выражаются через некоторые известные классы специальных функций.

2. Круглый диск со смещенным вдоль оси динамической симметрии центром масс. В этом случае для функций (87) имеем явные выражения

$$f_1 = \frac{R}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \qquad f_2 = a, \tag{95}$$

где R — радиус диска, a — смещение центра масс по оси динамической симметрии (рис. 21).

Любопытным фактом для этого случая является независимость меры (88) от фазовых переменных $\rho = \mathrm{const}$. Для переменных (90) получаются уравнения

$$\frac{dK_1}{d\theta} = \frac{\rho m R^2}{\sin\theta} K_2, \quad \frac{dK_2}{d\theta} = I_3 \rho (R \sin\theta + \frac{a}{R} \cos\theta) K_1,$$

где $\rho = (I_1 I_3 + I_1 m R^2 + I_3 m a^2)^{-1/2}$.

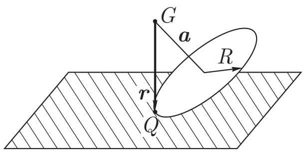


Рис. 21

Эти два линейных уравнения сводятся к одному линейному уравнению второго порядка для ω_3:

$$\frac{d^2\omega_3}{d\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{d\omega_3}{d\theta} + \rho^2 m R (R + a \operatorname{ctg}\theta) I_3 \omega_3 = 0. \tag{96}$$

При $a = 0$ с помощью замены $\cos\theta = 1 - - 2x$ уравнение ((96)) преобразуется к гипергеометрическому типу [28]

$$x(1-x)\frac{d^2\omega_3}{dx^2} + (1-2x)\frac{d\omega_3}{dx} - \rho^2 I_3 m R^2 \omega_3 = 0.$$

В работах [18,19] показано, что диск при почти всех начальных условиях не упадет на плоскость.

3. Динамически симметричный шар со смещенным центром масс. В этом случае

$$f_1 = R, \quad f_2 = R\gamma_3 + a, \tag{97}$$

где R — радиус шара, a — расстояние центра масс до геометрического центра. Мера ρ уже не является постоянной

$$\rho = \big(I_1 I_3 + I_1 m R^2 (1 - \gamma_3^2) + I_3 m (R\gamma_3 + a)^2\big)^{-1/2},$$

а уравнения для K_1, K_2 превращаются в тривиальные: $\dot{K}_1 = 0$, $\dot{K}_2 = 0$, то есть величины

$$\begin{gathered} K_1 = \omega_3 \rho^{-1} = \\ = \rho^{-1}\big(m R^2 \gamma_3 (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) + I_1 M_3 + m a R ((\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) + M_3 \gamma_3) + m a^2 M_3\big) = \text{const}, \\ K_2 = \frac{1}{R}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}) + \frac{a}{R} M_3 = \text{const}, \end{gathered} \tag{98}$$

являются интегралами движения.

Интеграл K_2 представляет собой интеграл Желле, который имеется также при произвольном законе трения в точке контакта [30]. Интеграл K_1 был найден Э. Раусом в 1884 году [31] и также был указан С. А. Чаплыгиным в работе [26]. Еще раз отметим, что оба интеграла линейны по скоростям, являются непосредственными обобщениями циклических интегралов, соответствующих прецессии ψ и собственному вращению φ, но, тем не менее, не имеют настолько же естественного динамического происхождения. Интеграл K_2 иногда называют интегралом Чаплыгина.

4. Переменные Андуайе – Деприи трехмерные точечные отображения в неголономной механике. Для построения трехмерного отображения мы используем переменные Андуайе – Деприи (L, G, H, l, g, h), которые систематически использовались в нашей книге [24] для компьютерного (и аналитического) исследования гамильтоновых уравнений Эйлера – Пуассона, Кирхгофа и пр.

Переход от переменных $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})$ к переменным Андуайе – Деприи происходит по известным формулам

$$M_1 = \sqrt{G^2 - L^2}\sin l, \quad M_2 = \sqrt{G^2 - L^2}\cos l, \quad M_3 = L,$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{H}{G}\sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G}\sqrt{1 - (\delta HG)^2}\cos g\right)\sin l + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin g\cos l,$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{H}{G}\sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2} + \frac{L}{G}\sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g\right)\cos l - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2}\sin g\sin l,$$

$$\gamma_3 = \left(\frac{H}{G}\right)\left(\frac{L}{G}\right) - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2}\cos g,$$

в которых можно выразить энергию $E = E(L, G, H, l, g)$.

В отличие от неголономной ситуации в классическом случае эти переменные канонические, и в силу того, что для уравнений типа Эйлера – Пуассона всегда имеется интеграл площадей, здесь можно ограничиться двумерными отображениями. Для описанных выше постановок задач уже не хватает двух интегралов движения, поэтому необходимо использовать трехмерные отображения, к тому же не обязательно обладающие инвариантной мерой (в отличие от гамильтоновой механики).

В уравнениях Эйлера–Пуассона величина $H = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})$ является постоянной, для уравнений (81), (82), (83) это уже не так. Фиксируя уровень энергии $E = E_0$ и выбирая секущую плоскость, например, в виде $g = g_0 = \mathrm{const}$, получаем трехмерное отображение, индуцируемое последовательными пересечениями фазовой траектории с выбранной секущей плоскостью. Мы выводим отображение в переменных $(L/G,H/G,l)$ из соображений его компактности в силу того, что $\left|\dfrac{L}{G}\right| \leqslant 1$, $\left|\dfrac{H}{G}\right| \leqslant 1$. Типичные примеры трехмерных отображений приведены на рисунках 22, 24, 25.

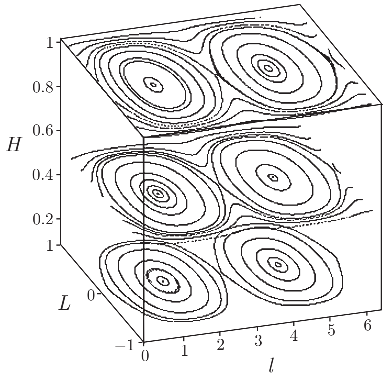


Рис. 22. Трехмерное отображение, описанное в пункте 5 для случая шара Чаплыгина. На рисунке видно, что все траектории ложатся на совместные поверхности уровня двух интегралов $H = \mathrm{const}$ и $\boldsymbol{M}^2 = \mathrm{const}$ ($I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 3$)

Очевидно, что наличие одного дополнительного интеграла приводит к тому, что траектории ложатся на двумерные инвариантные многообразия точечного отображения, а двух дополнительных интегралов — к тому, что трехмерное пространство расслоено на инвариантные кривые (см. рис. 22).

В общем случае, когда отсутствуют как интегралы, так и мера, возможно сложное поведение траекторий, при котором хаотические движения чередуются с асимптотическими притягивающими свойствами, типичными для диссипативных систем. Отметим также, что переменные L, G, H, l, g, h в отличие от $(\boldsymbol{M}, \gamma)$ являются более удобными для анализа трехмерного отображения вследствие того, что в них разделены линейная и угловые компоненты, а также вследствие прозрачного геометрического смысла (см. [24]).

5. Качение уравновешенного динамически несимметричного шара (шар Чаплыгина [9]). Уравнения движения динамически несимметричного шара с центром масс, совпадающим с геометрическим центром, можно записать в форме

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ &\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \qquad D = ma^2, \end{aligned} \tag{99}$$

где $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции, $U = U(\boldsymbol{\gamma})$ — потенциальная энергия. Уравнения (99) всегда имеют меру с плотностью ρ и первые интегралы вида

$$\begin{aligned} &\rho = \frac{1}{\sqrt{1 - D(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + D\mathbf{E})^{-1}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|, \\ &H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \quad F_2 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \tag{100}$$

При $U = 0$ появляется еще интеграл $F_3 = \boldsymbol{M}^2$ и задача становится интегрируемой (С. А. Чаплыгин, 1903 г. [9]), соответствующее трехмерное отображение приведено на рисунке 22.

6. Качение динамически несимметричного неуравновешенного шара по плоскости (волчок Чаплыгина [29]). В этом случае уравнения (81), (82) удобно записать в форме

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}), \\ \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \tag{101}$$
$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{a}$ — вектор, соединяющий центр масс с геометрическим центром, $\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{a}$ (см. рис. 23), $\mathbf{I} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$.

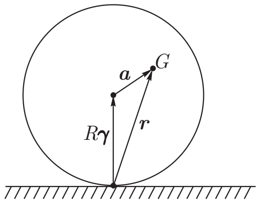


Рис. 23

Система (101) интегрируема лишь в двух следующих частных случаях:

– центр масс шара совпадает с геометрическим центром ($\boldsymbol{a} = 0$). В данном случае динамически несимметричный шар называется шаром Чаплыгина (см. п. 5);

– тензор инерции шара является сфероидом, а его центр масс смещен вдоль ортогональной к плоскости симметрии компоненты ($I_1 = I_2$, $a_1 = a_2$). Такое тело принято называть сферой Рауса.

В случае $\boldsymbol{a} \neq 0$ интеграл $F_3 = \boldsymbol{M}^2$ системы (99) допускает непосредственное обобщение, которое может быть записано в виде

$$F = \boldsymbol{M}^2 - m\boldsymbol{r}^2(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{M}^2 - 2m\boldsymbol{r}^2 H, \tag{102}$$

где $H = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega})$ — интеграл энергии. Этот интеграл, хотя и является достаточно простым, видимо, ранее не был известен. Заметим только, что при дополнительном требовании динамической симметрии были найдены интеграл Желле и интегралы Чаплыгина (см. п. 3). Интеграл (102) может рассматриваться как их обобщение на динамически несимметричную ситуацию.

При $\boldsymbol{a} \neq 0$, видимо, отсутствует мера, что иллюстрируется рисунками 24, 25, на которых показаны асимптотические траектории точечного отображения, лежащие на двумерной поверхности интеграла (102).

7. Произвольное тело с шаровым центральным эллипсоидом инерции. $I_1 = I_2 = I_3 = \mu$, $\mu = \mathrm{const}$.

У этой задачи в общем случае отсутствуют оба дополнительных интеграла, тем не менее для нее всегда существует инвариантная мера.

Здесь удобнее рассматривать уравнения в переменных $\boldsymbol{\omega}$,γ. Они имеют вид

$$\begin{gathered}(\mu + m\boldsymbol{r}^2)\dot{\boldsymbol{\omega}} = m(\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}) - m\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ \dot{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}.\end{gathered} \tag{103}$$

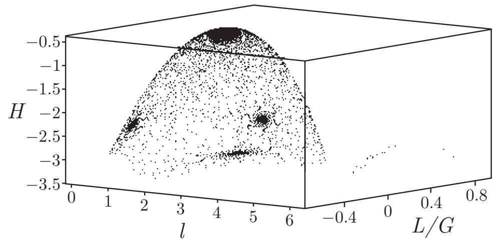


Рис. 24. Одна из траекторий в задаче о качении неуравновешенного шара по плоскости. Из рисунка видно, что все точки ложатся на некоторую поверхность, сгущения точек соответствуют асимптотическому приближению траектории к периодическим решениям. Траектория выходит из вершины и приближается к трем точкам снизу поверхности

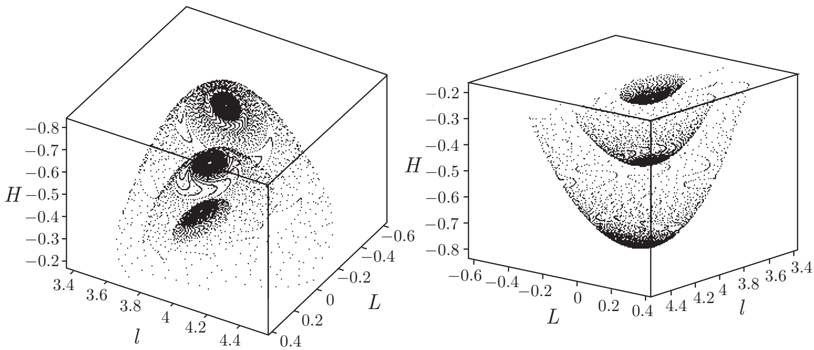


Рис. 25. Три траектории в задаче о качении неуравновешенного шара по плоскости. Хорошо видно, что точки ложатся на двумерные поверхности (соответствующие уровню интеграла (102)). Сгущение точек соответствует асимптотическому приближению к некоторому периодическому решению

Уравнения (103) обладают инвариантным соотношением $(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{r}) = 0$, которое используется для упрощения некоторых выкладок.

Плотность инвариантной меры для этих уравнений может быть представлена в форме

$$\rho = (\mu + \boldsymbol{r}^2)^{3/2}.$$

2.3.3. Тело на сфере

Рассмотрим теперь систематическим образом аналогичные случаю плоскости ситуации, возникающие при качении тела по сфере. Прежде всего заметим, что кинематическое уравнение (83) можно переписать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \mp k\dot{\boldsymbol{r}}, \qquad k = 1/R_0,$$

где знак «минус» берется для внутреннего обката (рис. 26 a), а «плюс» — для внешнего (рис. 26 b).

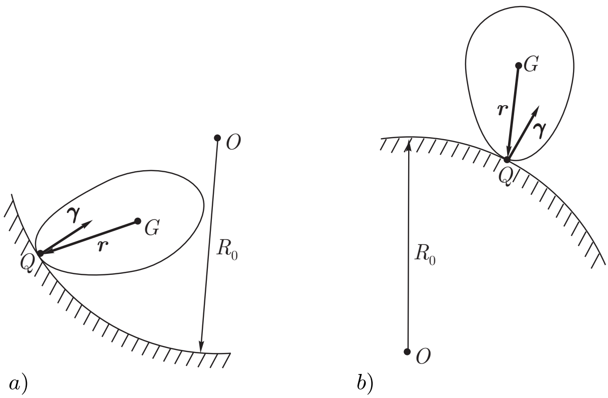


Рис. 26

1. Качение тела вращения. Аналогично задавая тело вращения формулами (87), можно установить явный вид плотности инвариантной меры

$$\rho(\gamma_3) = \rho_0(1 - kf_1)^3(1 - kf_2'),$$
$$\rho_0 = \big(I_1 I_3 + m(\boldsymbol{r}, \mathbf{I}\boldsymbol{r})\big)^{-1/2} = \big(I_1 I_3 + mI_1 f_1^2(1-\gamma_3^2) + mI_3 f_2^2 \gamma_3^2\big)^{-1/2}$$

и наличие поля симметрий $\boldsymbol{v}$ с оператором (89).

Приведенная система (93) в переменных типа (90)

$$K_1 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r})(1 - kf_1)f_1^{-1}, \quad K_2 = \omega_3 \rho_0^{-1} \qquad (104)$$

имеет вид

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dK_1}{d\gamma_3} = -\left[I_3\left(1-\left(\frac{f_2}{f_1}\right)'\right) + kf_1(I_1-I_3)\big(1-kf_2'\big)\right]K_2\,,$$

$$\frac{1-kf_1}{\rho_0}\frac{dK_2}{d\gamma_3} = -mf_1\big(f_1-f_2'-kf_1f_2'\big)K_1 + \qquad (105)$$

$$+mk\rho_0 I_1 f_1^2\left(\gamma_3 f_2' + \sqrt{1-\gamma_3^2}\Big(f_1\sqrt{1-\gamma_3^2}\Big)'\right)K_2\,.$$

После интегрирования уравнений системы (105) зависимость от времени угла нутации $\theta = \arccos(\gamma_3)$ определяется из квадратуры для интеграла энергии

$$H = \frac{1}{2}\frac{I_1+m\boldsymbol{r}^2}{1-\gamma_3^2}\dot{\gamma}_3^2 +$$

$$+\frac{1}{2I_1(1-\gamma_3^2)}\Big(\frac{K_1^2}{(1-kf_1)^2} - \frac{I_3}{mf_1^2}K_2^2 + \frac{mf_2^2}{I_1}\Big(\frac{K_1}{1-kf_1} - \frac{K_2}{m\rho f_1 f_2}\Big)^2\Big) + U(\gamma_3).$$

Для задачи о качении тела вращения на сфере можно, по аналогии со случаем плоскости, указать приведенную систему в переменных (90) и соответствующую пуассонову структуру.

Аналогично качению по плоскости рассмотрим несколько частных случаев.

2. Круглый диск со смещенным вдоль оси симметрии центром масс. В этом случае мера не является постоянной. Как и выше, f_1,f_2 задаются соотношениями (95), а плотность инвариантной меры имеет вид

$$\rho = \rho_0\left(1-\frac{kR}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}\right)^3, \quad \rho_0 = \Big(I_1I_3 + m\big(I_1R^2 + I_3a^2\big)\Big)^{-1/2} = \mathrm{const},$$

где R — радиус диска, a — смещение центра масс.

Уравнение второго порядка имеет вид

$$\frac{d^2\omega_3}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\left(1+\frac{kR}{\sin\theta - kR}\right)\omega_3 -$$

$$-\frac{\rho_0^2 mRI_3}{1-\dfrac{kR}{\sin\theta}}\left(R + a\operatorname{ctg}\theta + \frac{kR^2(I_1-I_3)}{I_3\sin\theta}\right)\omega_3 = 0,$$

где $\gamma_3 = \cos\theta$.

Это уравнение в частном случае $I_3 = 2I_1$, $a = 0$ (однородный уравновешенный диск) было получено П. Воронцом [32], для $a = 0$ оно было исследовано в [33] методами качественного анализа. В частности, была исследована устойчивость стационарных движений и вероятность падения диска на сферу, которая оказалась равной нулю.

3. Шар со смещенным центром. Функции f_1,f_2 также задаются соотношениями (97), для меры ρ имеем такую же форму, как на плоскости:

$$\rho = \Bigl(I_1I_3 + I_1mR^2(1-\gamma_3^2) + I_3m(R\gamma_3 + a)^2\Bigr)^{-1/2}.$$

В переменных (104) уравнения (105) имеют вид

$$\frac{1}{\rho}K_1' = -kR(I_1 - I_3)(1-kR)K_2, \quad \frac{1}{\rho}K_2' = \frac{kmR^3}{1-kR}K_1.$$

С их помощью находим два линейных по K_1,K_2 неалгебраических интеграла вида

$$F_2 = \Bigl(\sqrt{m(I_3 - I_1)}\,K_2 + \frac{mR}{1-kR}\,K_1\Bigr)e^{\lambda\tau},$$

$$F_3 = \Bigl(\sqrt{m(I_3 - I_1)}\,K_2 - \frac{mR}{1-kR}\,K_1\Bigr)e^{-\lambda\tau},$$

где $\lambda^2 = mk^2R^4(I_3 - I_1)$, $\tau = \int \rho_0(\gamma_3)\,d\gamma_3$, а также квадратичный алгебраический интеграл (зависимый с F_2, F_3)

$$F = F_2F_3 = \frac{mR^2}{(1-kR)^2}K_1^2 + (I_1 - I_3)K_2^2.$$

Интегралы F_2, F_3 являются новыми и обобщают интегралы Рауса и Желле (98). Для шарового тензора инерции $I_3 = I_1$ имеем

$$K_1 = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r}) = M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\Bigl(\gamma_3 + \frac{a}{R}\Bigr) = \mathrm{const},$$
$$(1-kR)K_2 - kmR^3K_1\int\rho(\gamma_3)\,d\gamma_3 = \mathrm{const},$$

то есть K_1 совпадает с классическим интегралом Желле.

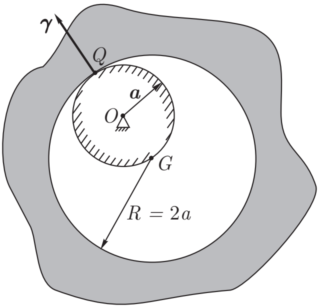


Рис. 27

4. Динамически несимметричный уравновешенный шар на сфере. Кратко укажем на один интегрируемый случай, связанный с качением динамически несимметрического уравновешенного шара по сфере — аналог движения шара Чаплыгина на плоскости (см. (99), (100)). Такая система описывается уравнениями

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = k\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{M} = (\mathbf{I} + D)\boldsymbol{\omega} - D\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma}),\end{gathered} \tag{106}$$

где $k = \dfrac{R}{R-a}$, a — радиус шара, m — его масса, $D = ma^2$, R — радиус неподвижной сферы (см. рис. 27). (Для плоскости $R \to \infty$ и $k = 1$.)

Уравнения (106) всегда обладают интегралами

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}), \quad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad F_2 = \boldsymbol{M}^2$$

и инвариантной мерой с плотностью ρ (100). Для полной интегрируемости не хватает еще одного интеграла (типа интеграла площадей при $k = 1$).

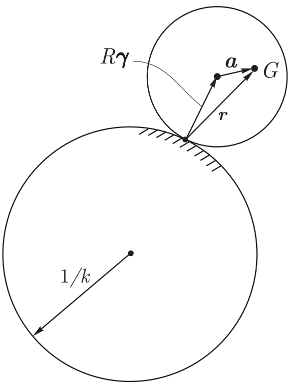


Рис. 28

Он существует лишь при дополнительном условии $a = 2R$, найденном А. В. Борисовым в [34], которое соответствует внутреннему обкату неподвижного шара динамически несимметричной уравновешенной сферой (см. рис. 28).

Этот интеграл имеет вид $F = (\boldsymbol{M},\overline{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma})$, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{E} - 2(\operatorname{tr}(\mathbf{I} + D))^{-1}(\mathbf{I} + D)$.

С помощью преобразования $\widetilde{\boldsymbol{M}} = \overline{\mathbf{A}}\boldsymbol{M}$, $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}$ при условии $a = 2R$ уравнения (106) переводятся в уравнения, описывающие движение шара Чаплыгина по горизонтальной плоскости.

2.4. Качение шара по поверхности. Новые интегралы и иерархия динамики

В этом разделе рассматривается задача о качении полностью динамически симметричного шара (центральный тензор инерции является шаровым $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$) по произвольной поверхности без проскальзывания. Как показал Э. Раус в своем знаменитом трактате [31], в случае поверхности вращения даже при наличии осесимметричных потенциальных полей задача является интегрируемой. Здесь мы приводим более полный анализ решения Рауса для тела вращения, а также указываем новые интегралы для качения шара по несимметричным поверхностям второго порядка.

2.4.1. Уравнение движения шара по поверхности

В отличие от традиционного в динамике твердого тела подхода, при котором используется жестко связанная с телом система координат, при изучении движения однородного шара удобнее записывать уравнения движения в неподвижной системе координат. В этой системе уравнения изменения импульса и момента импульса относительно центра масс шара с учетом реакции и внешних сил имеют вид

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}, \qquad (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})^{\cdot} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{N} + \boldsymbol{M_F}, \tag{107}$$

а условие отсутствия проскальзывания (скорость точки контакта равна нулю, неголономная связь) имеет вид

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{108}$$

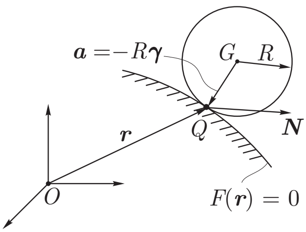


Рис. 29. Качение шара по поверхности (G — центр масс, Q — точка контакта с поверхностью)

Здесь m — масса шара, $\boldsymbol{v}$ — скорость его центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{I} = \mu\mathbf{E}$ (шаровой) центральный тензор инерции, $\boldsymbol{a}$ — вектор из центра масс в точку контакта, R — радиус шара, $\boldsymbol{N}$ — реакция в точке контакта (см. рис. 29), $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M_F}$ — внешняя сила и момент сил относительно точки контакта соответственно.

Исключая из этих уравнений реакцию $\boldsymbol{N}$ и добавляя кинематическое уравнение равенства скоростей точки контакта на поверхности и на шаре, получаем систему шести уравнений, описывающую динамику вектора кинетического момента относительно точки контакта $\boldsymbol{M}$ и вектора нормали к поверхности $\boldsymbol{\gamma} = -R^{-1}\boldsymbol{a}$ (рис. 29):

$$\dot{\boldsymbol{M}} = D\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{M}_F, \quad \dot{\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times R\boldsymbol{\gamma}, \tag{109}$$

где $D = mR^2$. Здесь векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор точки контакта) необходимо выразить из соотношений

$$\boldsymbol{M} = \mu\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\nabla F(\boldsymbol{r})}{|\nabla F(\boldsymbol{r})|}, \tag{110}$$

$F(\boldsymbol{r}) = 0$ — уравнение, задающее неподвижную поверхность, по которой катится шар (последнее уравнение в (110) задает гауссовское отображение). В дальнейшем мы, следуя Раусу, будем задавать в явном виде уравнение поверхности, по которой движется *центр масс шара*, определяемой радиус-вектором $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma}$. Данная поверхность является эквидистантной к поверхности, по которой движется точка контакта.

В случае потенциальных сил момент $\boldsymbol{M}_F$ выражается через потенциал $U(\boldsymbol{r}') = U(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma})$, зависящий от положения центра масс шара, по формуле $\boldsymbol{M}_F = R\boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'}$.

1. Интегралы движения. Уравнения (109) в случае потенциального поля с потенциалом $U(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma})$ обладают интегралами энергии и геометрическим интегралом

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}) + U(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma}), \qquad F_1 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

Кроме этих двух интегралов в случае произвольной поверхности $F(\boldsymbol{r}) = 0$ система (109) не обладает ни мерой, ни двумя дополнительными интегралами, необходимыми для интегрируемости по теории последнего множителя (теории Эйлера–Якоби). Ее поведение является хаотическим. Как показано далее, в некоторых случаях может существовать мера и лишь один дополнительный интеграл. При этом хаос является «более слабым». Как заметил Раус, для поверхности вращения имеется два дополнительных интеграла, система интегрируема, а ее поведение является регулярным. При этом приведенная система является гамильтоновой после соответствующей замены времени.

2. Качение по поверхности второго порядка. Укажем частный случай уравнений (109), когда центр масс шара движется по поверхности второго порядка, задаваемой уравнением

$$\big(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma})\big) = 1, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3) \tag{111}$$

(в случае эллипсоида $b_i > 0$ и задают квадраты главных полуосей). Выражая из (111) радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ через нормаль к поверхности $\boldsymbol{\gamma}$ по формуле

$$\boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{B}\boldsymbol{\gamma}}{\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}},$$

получаем уравнения движения в переменных $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma}$:

$$\dot{\boldsymbol{M}} = -\frac{D}{\mu + D}(\boldsymbol{M}, \dot{\boldsymbol{\gamma}})\boldsymbol{\gamma}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{R\sqrt{(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{B}\boldsymbol{\gamma})}}{\mu + D}\boldsymbol{\gamma} \times \big(\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{B}^{-1}(\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{M})\big).$$

3. Шар на вращающейся поверхности. Рассмотрим также движение шара по поверхности, вращающейся в пространстве с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, частный случай этой задачи (плоскость, сфера) также были разобраны Раусом [31]. В этом случае вывод дословно повторяет предыдущий с заменой неголономного кинематического соотношения (108) следующим:

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{112}$$

что приводит к уравнениям

$$\begin{gathered} \dot{\boldsymbol{M}} = m\big(\dot{\boldsymbol{a}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}})\big) + \boldsymbol{M}_F \\ \dot{\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}, \end{gathered} \tag{113}$$

где $\boldsymbol{a} = -R\boldsymbol{\gamma}$.

Заметим, что в случае произвольной поверхности система шести уравнений (113) не замкнута, так как радиус-вектор точки на поверхности

$\boldsymbol{r}$ не выражается лишь через $\boldsymbol{\gamma}$, необходимо добавить также уравнение для угла поворота поверхности вокруг неподвижной оси. Тем не менее в случае, когда поверхность является осесимметричной, а ось симметрии совпадает с осью вращения, уравнения (113) становятся замкнутыми, что мы и используем в дальнейшем.

2.4.2. Движение шара по поверхности вращения

Рассмотрим прежде всего случаи интегрируемости уравнений (109), (113), связанные с вращательной симметрией поверхности, по которой катится шар. При этом мы будем использовать методику исследования, предложенную в [22] и связанную с анализом некоторой приведенной системы в новых переменных K_1, K_2, K_3, γ_3. Будем также предполагать, что поверхность вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, $\Omega \neq 0$. Частный случай $\Omega = 0$ обсуждался Раусом, который и получил большинство приводимых далее результатов.

Уравнение поверхности вращения в абсолютной системе координат может быть задано в форме

$$\begin{gathered} r_1 = (f(\gamma_3) - R)\gamma_1, \quad r_2 = (f(\gamma_3) - R)\gamma_2, \\ r_3 = \int \Big(f(\gamma_3) - \frac{1 - \gamma_3^2}{\gamma_3} f'(\gamma_3) \Big) d\gamma_3 - R\gamma_3, \end{gathered} \tag{114}$$

где $f(\gamma_3)$ — некоторая функция, задающая параметризацию поверхности. Выбор параметризации (114) связан с наиболее простым видом приведенной системы.

В рассматриваемом случае уравнения (109), (113) допускают инвариантную меру с плотностью

$$\rho = \big(f(\gamma_3)\big)^3 g(\gamma_3), \quad \text{где} \quad g(\gamma_3) = f(\gamma_3) - \frac{1 - \gamma_3^2}{\gamma_3} f'(\gamma_3). \tag{115}$$

Кроме инвариантной меры уравнения допускают также простое поле симметрий вида

$$\hat{\boldsymbol{v}} = M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1},$$

соответствующее вращательной симметрии.

В книге [11] неоднократно используется тот факт, что при наличии симметрии для получения наиболее простой формы приведенной системы необходимо выбрать наиболее приемлемые интегралы поля симметрий, которые в данном случае имеют вид

$$K_1 = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})f(\gamma_3), \quad K_2 = \mu\omega_3 = \frac{\mu M_3 + D(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})\gamma_3}{\mu + D},$$
$$K_3 = \frac{M_1\gamma_2 - M_2\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma_3^2}}, \quad \gamma_3.$$

Приведенная система в выбранных переменных записывается в форме

$$\begin{gathered}
\dot{\gamma}_3 = kK_3, \quad \dot{K}_1 = kK_3\Big(\frac{f'}{\gamma_3}K_2 + \Big(1-\frac{f}{R}\Big)g\mu\Omega\Big),\\
\dot{K}_2 = kK_3\frac{D}{\mu+D}\Big(\frac{1}{f}K_1 - \gamma_3\Big(1-\frac{g}{R}\Big)\mu\Omega\Big),\\
\dot{K}_3 = -k\frac{(\mu+D)g}{\mu^2(1-\gamma_3^2)f^2}\Big(\frac{\gamma_3K_1 - fK_2}{f(1-\gamma_3^2)}\big((\mu+D\gamma_3^2)K_1 - \gamma_3 f(\mu+D)K_2\big)+\\
+\Big(1-\frac{g}{R}\Big)\big((\mu+2D\gamma_3^2)K_1 - \gamma_3 f(\mu+2D)K_2\big)\Big)\mu\Omega,
\end{gathered} \tag{116}$$

где $k = \dfrac{R\sqrt{1-\gamma_3^2}}{(\mu+D)g(\gamma_3)}$. Несложно показать, что система (116) обладает инвариантной мерой с плотностью $\rho = k^{-1}$.

Явное интегрирование системы (116) может быть выполнено следующим образом. Разделим второе и третье уравнения системы (116) на $\dot{\gamma}_3$ и получим неавтономную систему двух линейных уравнений с независимой переменной γ_3:

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = \frac{f'}{\gamma_3}K_2 + \Big(1-\frac{f}{R}\Big)g\mu\Omega, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = \frac{D}{\mu+D}\Big(\frac{1}{f}K_1 - \gamma_3\Big(1-\frac{g}{R}\Big)\mu\Omega\Big). \tag{117}$$

Система линейных уравнений (117) всегда обладает двумя линейными по K_1, K_2 интегралами, коэффициенты которых функции от γ_3, в общем случае не могут быть получены в явном (алгебраическом) виде. Разделив последнее уравнение системы (116) на γ_3 и подставив в него известное решение системы (117), находим явную квадратуру для $K_3(\gamma_3)$. С помощью первого уравнения из (116) теперь можно получить выражение для $\gamma_3(t)$.

В случае $\Omega = 0$ система (116) допускает интеграл энергии

$$H = (\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1^2}{\Lambda f^2} + \frac{(\mu + D)(\gamma_3 K_1 - f K_2)^2}{\mu^2 f^2 (1 - \gamma_3^2)} + \frac{K_3^2}{\mu + D}\right) \qquad (118)$$

и квадратура для $\gamma_3(t)$ может быть получена непосредственно подстановкой в (118) $K_3 = k^{-1}\dot{\gamma}_3$.

В качестве частных примеров, проясняющих поведение шара на поверхности вращения, разберем последовательно случаи, когда она является параболоидом, сферой, конусом и цилиндром. Эти задачи были разобраны Раусом в [31] при $\Omega = 0$. Мы здесь приведем их соответствующие обобщения при $\Omega \neq 0$.

1. Параболоид вращения. В данном случае центр масс шара движется по параболоиду вращения $z = c(x^2 + y^2)$, при этом в уравнениях (114) необходимо положить

$$f(\gamma_3) = -\frac{1}{2c\gamma_3}.$$

Плотность инвариантной меры (115) с точностью до несущественного множителя представляется в форме

$$\rho = \frac{1}{\gamma_3^6}.$$

Двумерная система (117) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{d\gamma_3} &= \frac{1}{2c\gamma_3^3}\left(K_2 - \frac{1 + 2cR\gamma_3}{2cR\gamma_3}\mu\Omega\right), \\ \frac{dK_2}{d\gamma_3} &= -\frac{D}{\mu + D}\left(2c\gamma_3 K_1 + \frac{(1 + 2cR\gamma_3^3)}{2cR\gamma_3^2}\mu\Omega\right). \end{aligned} \qquad (119)$$

Для переменной K_2 получается однородное линейное уравнение второго порядка с правой частью (при $\Omega \neq 0$)

$$K_2'' - \frac{1}{\gamma_3}K_2' + \frac{D}{\mu + D}\frac{1}{\gamma_3^2}K_2 = \frac{D(2 + cR\gamma_3)}{(\mu + D)cR\gamma_3^3}\mu\Omega.$$

Его общее решение может быть представлено в степенном виде γ_3^α, $\alpha =$ $=\mathrm{const}$:

$$K_2 = c_1\gamma_3^{1-\nu} - c_2\gamma_3^{1+\nu} + \mu\Omega\Big(1 + \frac{2D}{cR(\mu+4D)}\frac{1}{\gamma_3}\Big), \quad \nu^2 = \frac{\mu}{\mu+D}. \tag{120}$$

Для K_1 из (119) аналогично получаем

$$\begin{aligned}K_1 = \frac{\mu+D}{2cD}\Big(-(1-\nu)\gamma_3^{-1-\nu}c_1 + (1+\nu)\gamma_3^{-1+\nu}c_2\Big) - \\ - \frac{\mu\Omega}{2c}\Big(1 - \frac{\mu}{2cR(3\mu+4D)}\frac{1}{\gamma_3^3}\Big).\end{aligned} \tag{121}$$

Выражая из (120), (121) постоянные c_1, c_2, находим линейные по K_1, K_2 интегралы системы (117) в форме

$$\begin{aligned}F_2 &= \frac{D}{2\sqrt{\mu(\mu+D)}}\gamma_3^{\nu}\Big(2c\gamma_3K_1 + \frac{\mu+D}{D\gamma_3}K_2 + \\ &\quad + \mu\Omega\Big(\gamma_3 - \frac{(\mu+D)(1+\nu)}{D\gamma_3} - \frac{2+\nu}{2cR(2-\nu)\gamma_3^2}\Big)\Big),\\ F_3 &= \frac{D}{2\sqrt{\mu(\mu+D)}}\gamma_3^{-\nu}\Big(2c\gamma_3K_1 + \frac{\mu+D}{D\gamma_3}K_2 + \\ &\quad + \mu\Omega\Big(\gamma_3 - \frac{(\mu+D)(1-\nu)}{D\gamma_3} - \frac{2-\nu}{2cR(2+\nu)\gamma_3^2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Произведение F_2F_3 задает алгебраический квадратичный интеграл.

При $\Omega = 0$ уравнения допускают также интеграл энергии, который представляется в форме

$$H = \frac{2c^2\gamma_3^2}{\mu}K_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\mu+D}{\mu^2(1-\gamma_3^2)}\big(2c\gamma_3^2K_1 + K_2\big)^2 + \frac{1}{2}\frac{K_3^2}{\mu+D}.$$

2. Круговой конус. В этом случае вследствие вырожденности гауссова отображения $\boldsymbol{\gamma} = \dfrac{\nabla F}{|\nabla F|}$ в качестве позиционных переменных в уравнениях (113) необходимо использовать вектор $\boldsymbol{r}$ (радиус-вектор центра шара). Для конуса с углом раствора θ (рис. 30) имеем

$$\begin{gathered}\gamma_3 = \cos\theta = \mathrm{const}, \quad \gamma_1 = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\frac{r_1}{r_3}, \quad \gamma_2 = \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\frac{r_2}{r_3},\\ r_3 = k\sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \qquad k = \operatorname{tg}\theta.\end{gathered} \tag{122}$$

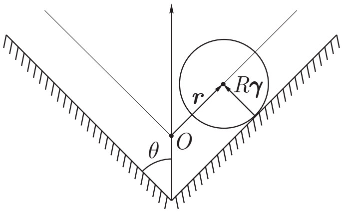


Рис. 30

Явное выражение для меры уравнений (109), (113), в которых $\boldsymbol{\gamma}$ выражено через $\boldsymbol{r}$ по формулам (122), имеет вид:

$$\rho = \frac{\left(\dfrac{k^2}{1-k^2}R_0 + r_3\right)^3}{r_3^2},$$

Для приведенной системы выберем переменные

$$\sigma_1 = \omega_3 + \frac{D\Omega}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{\mu+D}}\frac{r_3}{R},$$
$$\sigma_2 = \Bigl(r_3 + \frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}R\Bigr)\Bigl(\Bigl(\boldsymbol{M} - \frac{k^2\mu^2}{\mu+D}\boldsymbol{\Omega}\Bigr),\boldsymbol{\gamma}\Bigr).$$

В них получаются уравнения

$$\frac{d\sigma_1}{dr_3} = 0, \quad \frac{d\sigma_2}{dr_3} = \sqrt{1+k^2}\sigma_1 + \frac{\mu\Omega}{\mu+D}\Bigl(\frac{r_3}{R} - k^2\Bigr),$$

которые позволяют получить первые интегралы в явном виде:

$$F_2 = \sigma_1, \quad F_3 = \sqrt{1+k^2}r_3\sigma_1 - \sigma_2 + \frac{\mu\Omega}{\mu+D}\Bigl(\frac{r_3^2}{2R} - k^2 r_3\Bigr).$$

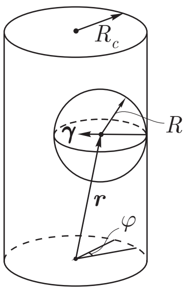


Рис. 31

3. Круговой цилиндр. Движение шара в цилиндре является наиболее известной задачей, на которой обычно иллюстрируют нереалистичность некоторых выводов, полученных с помощью неголономной механики. Оказывается, что движущийся внутри вертикального цилиндра однородный шар под действием силы тяжести в среднем не смещается вниз. Влияние вязкого трения на неголономную постановку, приводящую к направленному вертикальному дрейфу при различных моделях трения, проанализировано в [35, 36], где получено также явное решение.

Для цилиндра

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(-\frac{r_1}{R_c}, -\frac{r_2}{R_c}, 0\right), \tag{123}$$

где R_c — радиус цилиндра (рис. 31), в переменных $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{r})$ или $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r})$ плотность инвариантной меры является постоянной. Выпишем выражение для кинетической энергии

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2(\mu + D)} \left\{(M_1^2 + M_2^2) + \frac{D}{\mu}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\gamma})^2 + M_3^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})^2 + (\mu + D)(\omega_3^2 + (\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)^2)\right).$$

Приведенная система в переменных $\sigma_1 = \omega_3$, $\sigma_2 = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})$ имеет вид

$$\sigma_1' = \omega_3' = 0, \qquad \sigma_2' = \frac{R\omega_3 - R_c\Omega}{(R_c - R)R}.$$

Таким образом, имеются два интеграла

$$\omega_3 = \text{const}, \qquad (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma}) - \frac{R\omega_3 - R_c\Omega}{R_c - R}\frac{r_3}{R} = \text{const}.$$

Второй интеграл с помощью вектора $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \left(\omega_1, \omega_2, \dfrac{R\omega_3 - R_c\Omega}{R_c - R}\right)$ можно записать в виде

$$(\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{r}) = \text{const},$$

а кинетическую энергию —

$$2H = \mu\left((\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\gamma}) + \widetilde{\omega}_3\frac{r_3}{R}\right)^2 + (\mu + mR^2)\widetilde{\omega}_3^2 + (\mu + mR^2)\frac{\dot{r}_3^2}{R^2}.$$

Отсюда легко получить решение для переменной r_3, отвечающей за вертикальное смещение шара:

$$r_3 = -\frac{(\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\gamma})}{\widetilde{\omega}_3} \pm \sqrt{\frac{2H - (\mu + mR^2)\widetilde{\omega}_3^2}{\mu\widetilde{\omega}_3^2}}\sin\left(\widetilde{\omega}_3\sqrt{\frac{\mu}{\mu + mR^2}}(t - t_0)\right),$$

где t_0 — константа, зависящая от начальных условий. Видно, что среднее смещение шара равно нулю даже при наличии поля тяжести.

4. Шар на вращающейся сфере. Пусть сфера вращается вокруг некоторой оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, причем R_s — радиус сферы, R — радиус шара, $\boldsymbol{a} = -R\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{r} = R_s\boldsymbol{\gamma}$ (рис. 32). Уравнения движения в потенциальном поле с потенциалом $V(\boldsymbol{\gamma})$ могут быть представлены в виде

$$D_1\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{DR}{R_s + R}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma} + \frac{R_sR}{R_s + R}(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\gamma})(R\boldsymbol{\omega} + R_s\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\gamma}},$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{(R\boldsymbol{\omega} + R_s\boldsymbol{\Omega})\times\boldsymbol{\gamma}}{R_s + R}, \tag{124}$$

где $D = mR^2$, $D_1 = \mu + D$, μ — момент инерции шара.

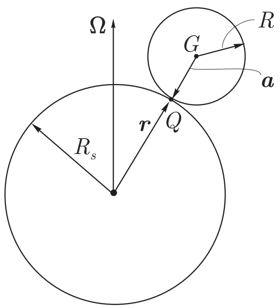


Рис. 32

Внешнее и внутреннее обкатывание задается знаком R. Первое уравнение (124) с помощью вектора кинетического момента $\boldsymbol{M} = D_1\boldsymbol{\omega} - D\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})$ можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{R_sR}{R_s+R}\left(R((\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma})) - R_s(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\Omega})\right) + \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\gamma}}.$$

После преобразования $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} + \dfrac{R_s}{R}\boldsymbol{\Omega}$ уравнения (124) переходят в следующие:

$$\begin{cases} D_1\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}} = \dfrac{DR}{R_s + R}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}},\boldsymbol{\gamma})(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\gamma}) + \boldsymbol{\gamma}\times\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dfrac{R}{R_s + R}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{\gamma}, \end{cases} \tag{125}$$

что соответствует первоначальной системе (124) при $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть последний случай. В переменных $(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma})$ уравнения (124) при $\boldsymbol{\Omega} = 0$ имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\gamma}\times\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\gamma}} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dfrac{R}{R_s + R}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\gamma}. \end{cases} \tag{126}$$

Они обладают интегралами

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}) + V(\boldsymbol{\gamma}), \quad F_1 = (\boldsymbol{M},\boldsymbol{\gamma}) = c, \quad F_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1.$$

После замены времени $t \to -\dfrac{R}{R_s + R}\tau$ второе уравнение (126) преобразуется в обычное уравнение Пуассона $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}$, а в потенциале появляется некоторый несущественный множитель. Это замечание позволяет перенести на систему (124) известные интегрируемые случаи. Например, при $V = \dfrac{1}{2}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$, $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ получается известная задача Неймана о движении точки по сфере в квадратичном потенциале.

5. Качение шара по свободной сфере. Рассмотрим для полноты качение шара по сфере, которая не является неподвижной, а свободно вращается вокруг своего центра. Записывая уравнения динамики, получим

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N}, \quad \mu\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{N}, \quad \mu_s\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{N},$$
$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}, \mu, \mu_s$ — угловые скорости и моменты инерции шара и сферы соответственно. Принимая во внимание соотношения $\boldsymbol{r} = R_s\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{a} = -R\boldsymbol{\gamma}$ для величин $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{R\boldsymbol{\omega} + R_s\boldsymbol{\Omega}}{R + R_s}$, $\boldsymbol{\gamma}$, находим

$$\begin{gathered}(1 + D)\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}} = D\boldsymbol{\gamma} \times (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \times \widetilde{\boldsymbol{\omega}}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\gamma},\\ D = \frac{mR^2}{\mu} + \frac{mR_s^2}{\mu_s}.\end{gathered} \tag{127}$$

Система (127) заменой времени $dt \to \alpha\, dt$, $\alpha = \mathrm{const}$ сводится к уравнениям (125) и вследствие этого интегрируема.

2.5. Задачи

2.1. Рассмотрите задачу о качении динамически несимметричного шара с гироскопом внутри по плоскости. Рассмотрите частный случай данной задачи, когда полный момент системы шар–гироскоп вертикален $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} = C\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{K}$ — постоянный вектор момента гироскопа).

Постройте бифуркационную диаграмму, а также траектории точки контакта с помощью программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос» для случаев

1) $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} = C\boldsymbol{\gamma}$,
2) $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \parallel \boldsymbol{\gamma}$,
3) $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K} \nparallel \boldsymbol{\gamma}$.

Указания к решению. При добавлении гироскопа уравнения (44) приводятся к виду

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}) \times \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$
$$\boldsymbol{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad D = ma^2,$$

где $\boldsymbol{K}$ — постоянный вектор момента гироскопа.

Интегралы движения получены в работе А. П. Маркеева [12]. Подробное исследование в случае $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K} = C\boldsymbol{\gamma}$ выполнено в [13]. Качественный анализ бифуркационных кривых приведен в [14]. Методические указания по построению бифуркационной диаграммы и траекторий точки контакта в программном комплексе «Компьютерная динамика: хаос» можно найти в учебно-методическом пособии [7] (п. 2.2).

2.2. На рисунках 17, 18 представлены сечения поверхности регулярных прецессий, представленной на рисунке 16, для случая качения диска по абсолютно шероховатой плоскости плоскостями $C_1+C_2 = \mathrm{const}$ и $C_1 - C_2 = \mathrm{const}$. Постройте графики гироскопической функции $P(\theta)$, соответствующие различным значениям интегралов C_1, C_2, h. По полученным графикам сделайте вывод об устойчивости или неустойчивости соответствующих решений (расположенных на различных ветвях бифуркационной диаграммы). В качестве примера можно использовать приведенные в работе [25] различные типы гирскопической функции для сечения поверхности регулярных прецессий плоскостью $C_1 + C_2 = 0.08$.

2.3. Определите уровень энергии h и постройте траектории точки контакта диска при качении по абсолютно шероховатой плоскости, соответствующей резонансу $\omega_\psi = 3\omega_\theta$. Используйте значения массо-геометрических параметров, приведенные на рисунке 16.

2.4. Покажите, что уравнения (91) обладают инвариантной мерой с плотностью $\rho = k^{-1}$ и интегралом энергии (92).

2.5. В задаче о качении неуравновешенного шара по плоскости, используя уравнения движения (101), покажите, что интеграл (102) сохраняется. Постройте траектории в пространстве (L, g, H) при различных уровнях интеграла (102), используя программный комплекс «Компьютерная динамика: хаос». Описание параметров задачи и описание величин, вводимых в программный комплекс, можно найти в [7].

2.6. Докажите, что система (116) обладает инвариантной мерой с плотностью $\rho = k^{-1}$.

2.7. Покажите, что в случае $\Omega = 0$ система (116) допускает интеграл энергии (118).

2.8. Рассмотрите задачу о качении однородного шара по горизонтальной абсолютно шероховатой плоскости, которая вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Постройте траектории точки контакта при различных начальных условиях.

Указания к решению: Уравнения движения в данном случае удобнее записать в виде (107), дополнив их условием отсутствия проскальзывания в точке контакта (неголономная связь) (112). Исключая силу реакции, несложно получить уравнение, описывающее эволюцию радиус-вектора точки контакта.

2.9. Рассмотрите задачу о качении однородного шара по наклонной абсолютно шероховатой плоскости, которая вращается вокруг своей нормали с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Постройте траектории точки контакта при различных начальных условиях. Смотрите указания к задаче 2.8, а также [37].

2.10. Рассмотрите задачу о качении однородного шара по внутренней поверхности абсолютно шероховатого цилиндра, который вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра. Постройте траектории точки контакта при различных начальных условиях.

Указания к решению: Уравнения движения в данном случае удобнее записать в виде (107), дополнив их условием отсутствия проскальзывания в точке контакта (неголономная связь) (112). Исключая силу реакции и используя производную по времени от уравнения связи (112), несложно получить уравнение, описывающее эволюцию радиус-вектора точки контакта. Это уравнение будет содержать вектор $\boldsymbol{\gamma}$, который является зависимым от радиус-вектора точки контакта (123) (см. также [36]).

2.11. В задаче о качении шара по сфере, которая свободно вращается вокруг своего центра, получите в явном виде уравнения движения (127) и сведите их к уравнениям (125).

Список рекомендуемой литературы

[1] Маркеев А. П. Теоретическая механика: учебник для высших учебных заведений. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 592 с.

[2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е .М. Теоретическая физика. Т.1. Механика. — М. : Физматлит, 2017. — 224 с.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С. Неголономные динамические системы. — Москва-Ижевск: ИКИ, 2002. — 328 с.

[4] Неймарк Ю .И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. — М.: Наука, 1967. — 519 с.

[5] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992. — 336 с.

[6] Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. — М.: Изд-во «Высшая школа», 1970. — 272 с.

[7] Килин А. А., Мамаев И. С., Казаков А. О. Исследование неголономных систем с использованием программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос»: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. — 67 с.

[8] Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 386 с.

[9] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, М. – Л.: ГИТТЛ, 1948, с. 76–101.

[10] Борисов А. В., Мамаев И. С., Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара. Математические заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–796.

[11] Борисов А. В., Мамаев И. С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во РХД, 1999. — 464 с.

[12] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Изв. АН СССР, механика твердого тела, 1985, № 1, с. 64–65.
[13] Kilin A. A. The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analisis, Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
[14] Москвин А. Ю. Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения. Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 345—356.
[15] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1897, т. 9, вып. 1, с. 10–16.
[16] Appel P. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de rédolution roulant par une arête circulaire sur up plan horizontal; cas parficulier du cerceau. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, vol. 14, pp. 1–6.
[17] Korteweg D. Extrait d'une lettre à M. Appel. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 1900, vol. 14, pp. 7–8.
[18] Колесников С. Н. О качении диска по горизонтальной плоскости. Вестник МГУ. Мат. мех., 1985, № 2, с. 55–60.
[19] Федоров Ю. Н. О качении диска по абсолютно шероховатой плоскости. Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1987, № 4, с. 67–75.
[20] Мощук Н. К. Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости. ПММ, 1988, т. 52, вып. 2, с. 203–210.
[21] Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995. — 432 с.
[22] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling of rigid body on a plane and sphere. Hierarchy of dynamic. Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 1, pp. 177–200.
[23] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.
[24] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. — Ижевск: Изд-во РХД, 2001. — 384 с.

[25] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. Dynamics of rolling disk. Regul. Chaotic Dyn., 2003, vol. 8, no. 2, pp. 201–212.

[26] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого твердого тела вращения на горизонтальной плоскости. Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 57–75.

[27] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики. Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–101.

[28] Аппель П. Теоретическая механика. В 2-х т. — М.: Физматгиз, 1960.

[29] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a rigid body on plane and sphere. hierarchy of dynamics. Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.

[30] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — М.: Наука, 1992. — 336 с.

[31] Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел, т. II. — М.: Наука, 1983. Пер. с англ.: Routh E. J. Dynamics of a System of Rigid Bodies. Dover Publications, New York.

[32] Woronetz P. Über die rollende Bewegung einer Kreisscheibe auf einer beliebigen Fläche unter der Wirkung von gegebenen Kräften. Mat. Annalen, 1909, Bd. 67, S. 268–280.

[33] Kholmskaya A. G. On a disk rolling within a sphere. Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, № 1, pp. 86–92.

[34] Борисов А. В., Федоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики. Вестник МГУ, сер. мат. мех., 1995, № 6, с. 102–105.

[35] Колесников С. Н. Некоторые задачи механики о качении твердых тел. Дисс. на соискание уч. ст. к. ф.-м. н. Москва: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1988. — 88 с.

[36] Ivanova T. B. Non-holonomic rolling of a ball on the surface of a rotating cylinder. Z. Angew. Math. Mech., 2020, accepted for publication.

[37] Borisov A. V., Ivanova T. B., Karavaev Y. L., Mamaev I. S., Theoretical and experimental investigations of the rolling of a ball on a rotating plane (turntable). Eur. J. Phys., 2018, vol. 39, no. 6, 065001, 13 pp.

Учебное издание

Килин Александр Александрович
Мамаев Иван Сергеевич
Иванова Татьяна Борисовна

МЕХАНИКА СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: + 7 (3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru