Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 56. С. 5–19

УДК 517.929, 517.977

© *В. А. Зайцев, И. Г. Ким*

НАЗНАЧЕНИЕ СПЕКТРА В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ СОИЗМЕРИМЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В СОСТОЯНИИ ПОСРЕДСТВОМ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ

Рассматривается линейная система управления, заданная стационарным дифференциальным уравнением n-го порядка с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии. В системе на вход подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $n-p$ включительно, а выход представляет собой k-мерный вектор линейных комбинаций состояния и его производных до порядка не более $p-1$. Для этой системы исследуется задача управления спектром с помощью линейной статической обратной связи по выходу с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи произвольного размещения спектра посредством статической обратной связи по выходу. Получены следствия о стабилизации системы.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение, сосредоточенное запаздывание, распределенное запаздывание, соизмеримые запаздывания, управление спектром, стабилизация, статическая обратная связь по выходу.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-01

Введение

Задачам стабилизации и назначения спектра для систем с запаздыванием посвящено большое количество работ, обзор некоторых из них представлен в [1]. Для линейных систем с сосредоточенными запаздываниями рассмотрена задача частичного назначения спектра, где крайние правые (доминирующие) собственные значения системы назначаются произвольным желаемым образом в [2, 3] с использованием подхода, опирающегося на функцию Ламберта, в [4] на основе расширения теории Эрмита–Билера, с применением к построению пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора и пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) регулятора [5, 6]. В [7] экспоненциальная стабилизация систем с постоянным и переменным запаздыванием обеспечивается решением задачи частичного назначения спектра. Задача назначения полного бесконечного спектра для систем с сосредоточенным запаздыванием изучена в [8], в [9] с помощью алгебраического метода с алгоритмом минимизации спектральной абсциссы, в [10] с использованием метода аппроксимации Галёркина.

Для линейных систем с распределенным запаздыванием задача спектральной стабилизации изучается в [11, 12]. Для таких же систем изучается задача частичного назначения спектра в [13] с помощью исследования конформного отображения характеристического квазиполинома системы, в [14] с помощью минимизации спектральной абсциссы, в [15, 16] с помощью функции Ламберта и подхода теории бифуркции.

Для систем с распределенным и сосредоточенным запаздываниями задача полного назначения спектра исследуется в [17], где представлен итерационный алгоритм назначения полюсов и минимизации спектральной абсциссы; в [18, 19] получены критерии разрешимости задачи модального управления в условиях полной и неполной информации.

Данная работа продолжает исследования [20–23]. В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи произвольного назначения спектра посредством обратной связи по выходу для линейной управляемой системы, заданной дифференциальным уравнением n-го порядка с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии.

Работа посвящается памяти Евгения Леонидовича Тонкова.

§ 1. Основной результат

Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \colon x_i \in \mathbb{K}\}$ — линейное пространство вектор-столбцов над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство матриц размерности $m \times n$ над полем $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $I \in M_n$ — единичная матрица; $\overline{a}$ — комплексное сопряжение a; T — операция транспонирования матрицы или вектора; $*$ — операция эрмитова сопряжения вектора или матрицы, то есть $A^* = \overline{A}^T$; $\operatorname{Sp} H$ — след матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$; для матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$ обозначим $H^0 := I$; $J := \{\vartheta_{ij}\} \in M_n(\mathbb{R})$, где $\vartheta_{ij} = 1$ при $j = i + 1$ и $\vartheta_{ij} = 0$ при $j \neq i + 1$; $\operatorname{vec} \colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{mn}$ — отображение, которое «разворачивает» матрицу $H = \{h_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H = \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{m1}, \ldots, h_{mn}) \in \mathbb{K}^{mn}$.

Рассмотрим линейную стационарную управляемую систему, которая задана дифференциальным уравнением n-го порядка с соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии, на вход которой подается линейная комбинация из m сигналов и их производных до порядка $(n - p)$ включительно $(1 \leqslant p \leqslant n)$, а измерению доступны k различных линейных комбинаций состояния $x(t)$ и его производных до порядка $(p - 1)$ включительно:

$$
\begin{gathered}
x^{(n)}(t) + a_{10}x^{(n-1)}(t) + a_{11}x^{(n-1)}(t-h) + \ldots + a_{1s}x^{(n-1)}(t-sh) + \ldots \\
+ a_{n0}x(t) + a_{n1}x(t-h) + \ldots + a_{ns}x(t-sh) + \int_{-h}^{0} g_{11}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau + \\
+ \int_{-2h}^{-h} g_{12}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau + \ldots + \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{1s}(\tau)x^{(n-1)}(t+\tau)\,d\tau + \ldots \\
+ \int_{-h}^{0} g_{n1}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau + \int_{-2h}^{-h} g_{n2}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau + \ldots + \int_{-sh}^{-(s-1)h} g_{ns}(\tau)x(t+\tau)\,d\tau = \\
= b_{p1}u_1^{(n-p)}(t) + b_{p+1,1}u_1^{(n-p-1)}(t) + \ldots + b_{n1}u_1(t) + \ldots \\
\ldots + b_{pm}u_m^{(n-p)}(t) + \ldots + b_{nm}u_m(t), \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

$$
\begin{gathered}
y_1(t) = \overline{c}_{11}x(t) + \overline{c}_{21}x'(t) + \ldots + \overline{c}_{p1}x^{(p-1)}(t), \quad \ldots, \\
y_k(t) = \overline{c}_{1k}x(t) + \overline{c}_{2k}x'(t) + \ldots + \overline{c}_{pk}x^{(p-1)}(t),
\end{gathered} \tag{2}
$$

с начальными условиями $x^{(n-i)}(\tau) = \phi_i(\tau)$, $\tau \in [-sh, 0]$; здесь $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\phi_i \colon [-sh, 0] \to \mathbb{K}$ — непрерывные функции; $a_{ij}, b_{l\alpha}, c_{\nu\beta} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{0,s}$, $l = \overline{p,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\nu = \overline{1,p}$, $\beta = \overline{1,k}$; $g_{i\eta} \colon [-\eta h, -(\eta-1)h] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($i = \overline{1,n}$, $\eta = \overline{1,s}$); $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{K}^m$ — вектор управления, $y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{K}^k$ — выходной вектор; $p \in \{\overline{1,n}\}$; комплексное сопряжение к $c_{\nu\beta}$ используется для удобства обозначений (для единообразия с предыдущими работами).

Пусть управление в системе (1), (2) имеет вид линейной статической обратной связи по выходу с сосредоточенными и распределенными соизмеримыми запаздываниями

$$
u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t - \rho h) + \sum_{\varkappa=1}^{\theta} \int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h} R_\varkappa(\tau) y(t+\tau)\,d\tau, \tag{3}
$$

$y(t)=0,\ t<-sh$. Здесь $Q_\rho=\{q^\rho_{\alpha\beta}\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$ — постоянные матрицы ($\rho=\overline{0,\theta}$), $R_\varkappa(\tau)=\{r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\}\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $r^\varkappa_{\alpha\beta}:[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to\mathbb{K}$ — интегрируемые функции ($\varkappa=\overline{1,\theta}$), $\alpha=\overline{1,m}$, $\beta=\overline{1,k}$. Из (2) имеем $y_\beta(t)=\sum\limits_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t)$, $\beta=\overline{1,k}$. Таким образом, для всех $\alpha=\overline{1,m}$

$$u_\alpha(t)=\sum_{\beta=1}^{k}\Big[\sum_{\rho=0}^{\theta}q^\rho_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\rho h)\big)+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t+\tau)\big)d\tau\Big].$$

Замкнутая система (1), (2), (3) примет вид

$$\begin{aligned}x^{(n)}(t)&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{s}a_{ij}x^{(n-i)}(t-jh)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h}g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau\\&-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}\Bigg(\sum_{\beta=1}^{k}\Big[\sum_{\rho=0}^{\theta}q^\rho_{\alpha\beta}\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t-\rho h)\big)+\\&+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\big(\sum_{\nu=1}^{p}\overline{c}_{\nu\beta}x^{(\nu-1)}(t+\tau)\big)d\tau\Big]\Bigg)^{(n-l)}=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Обозначим через $\varphi(\lambda)$ характеристическую функцию замкнутой системы (4). Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)&=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s}a_{ij}e^{-\lambda jh}+\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h}g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big)\\&-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}\Bigg(\sum_{\nu=1}^{p}\Big[\sum_{\beta=1}^{k}\big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q^\rho_{\alpha\beta}\overline{c}_{\nu\beta}e^{-\lambda\rho h}\big)+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r^\varkappa_{\alpha\beta}(\tau)\overline{c}_{\nu\beta}e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big]\lambda^{n-l+\nu-1}\Bigg).\end{aligned}\tag{5}$$

Множество $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}:\psi(\lambda)=0\}$ образует спектр системы (4). Если спектр системы (4) лежит в левой полуплоскости, то система (4) экспоненциально устойчива. Спектр системы (4) однозначно определяется коэффициентами системы (4). Поэтому задача назначения спектра системы (4) может рассматриваться как задача управления коэффициентами характеристической функции (5) системы (4). Мы исследуем проблему назначения произвольного спектра, который только может иметь замкнутая система (4).

Определение 1. Для системы (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора* (3), если для любого числа $\ell\geqslant 0$, любых чисел $\gamma_{i\mu}\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $\mu=\overline{0,\ell}$, и любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi}\colon[-\xi h,-(\xi-1)h]\to\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $\xi=\overline{1,\ell}$, найдутся число $\theta\geqslant 0$, матрицы $Q_\rho\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho=\overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa\colon[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (5) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\left(\sum_{\mu=0}^{\ell}\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\mu h}+\sum_{\xi=1}^{\ell}\int_{-\xi h}^{-(\xi-1)h}\delta_{i\xi}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\right).$$

Для системы (1), (2), (3) без запаздываний задача назначения произвольного (конечного) спектра исследовалась в работах [20,24,25]. Задача назначения произвольного бесконечного спектра исследовалась в работе [23] для системы (1), (2), (3) с одним сосредоточенным и распределенным запаздыванием в состоянии ($s=1$) и одним сосредоточенным и распределенным запаздыванием в обратной связи по выходу ($\theta=1$), в работе [22] для системы

(1), (2), (3) с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями, без распределенных западываний. Для линейной стационарной управляемой системы, заданной системой дифференциальных уравнений размерности n, с несколькими входами и выходами, исследовались: задача назначения произвольного конечного спектра в работе [26] для системы с одним или несколькими несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями, в работе [27] для системы с одним или несколькими несоизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями; задача назначения произвольного бесконечного спектра в работе [28] для системы с несколькими соизмеримыми сосредоточенными запаздываниями, в работе [29] для системы с несколькими несоизмеримыми сосредоточенными запаздываниями. Задача назначения конечного спектра для билинейных систем с запаздываниями исследовалась в работах [30, 31].

По системе (1), (2) построим матрицы $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{n,k}(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pk} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad p \in \{1, \dots, n\}.$$

Приведем вспомогательное утверждение [23, Лемма 2].

Л е м м а 1. *Пусть* $F = \{f_{l\alpha}\} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $G = \{g_{\beta\nu}\} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ — *произвольные матрицы* ($l = \overline{1,n}$, $\alpha = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{1,k}$, $\nu = \overline{1,n}$) *и* $D_j = GJ^jF$ ($j \in \{\overline{0, n-1}\}$), $D_j = \{d^j_{\beta\alpha}\}$, $\beta = \overline{1,k}$, $\alpha = \overline{1,m}$. *Тогда* $d^j_{\beta\alpha} = \sum\limits_{l=j+1}^{n} g_{\beta,l-j} f_{l\alpha}$.

Т е о р е м а 1. *Задача назначения произвольного спектра для системы* (1), (2) *посредством регулятора* (3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы*

$$C^*B, \quad C^*JB, \quad , \dots, \quad C^*J^{n-1}B \tag{6}$$

линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим задачу назначения спектра для системы (1), (2) посредством регулятора (3). Пусть задана функция

$$\psi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \left(\sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} e^{-\lambda\mu h} + \sum_{\xi=1}^{\ell} \int_{-\xi h}^{-(\xi-1)h} \delta_{i\xi}(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau \right), \tag{7}$$

где $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $\delta_{i\xi}\colon [-\xi h, -(\xi-1)h] \to \mathbb{K}$ — интегрируемые функции. Требуется найти число $\theta \geqslant 0$, матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa\colon [-\varkappa h, -(\varkappa - 1)h] \to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa = \overline{1,\theta}$, так, чтобы характеристическая функция замкнутой системы (4) удовлетворяла равенству

$$\varphi(\lambda) = \psi(\lambda). \tag{8}$$

Запишем характеристическую функцию (5) замкнутой системы (4) в виде

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i} \Big(\sum_{j=0}^{s} a_{ij} e^{-\lambda jh} + \sum_{\eta=1}^{s} \int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h} g_{i\eta}(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau \Big) - \Delta, \tag{9}$$

где

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{\nu=1}^{p}b_{l\alpha}\overline{c}_{\nu\beta}\lambda^{n-l+\nu-1}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big). \tag{10}$$

Заменим в (10) последний индекс ν на $i=l-\nu+1$. Поскольку ν изменяется от 1 до p, следовательно, i изменяется от $l-p+1$ до l. Поэтому

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{i=l-p+1}^{l}b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big).$$

Если $i\in\{\overline{1,l-p}\}$, то $l+1-i\geqslant p+1$, следовательно, $c_{l+1-i,\beta}=0$. Поэтому

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=p}^{n}\sum_{i=1}^{l}b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big).$$

Если $i\in\{\overline{1,p-1}\}$, то $b_{l\alpha}=0$, поэтому

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{l}b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big).$$

Поменяем местами порядок суммирования $\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{l}$ на $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{l=i}^{n}$; получим

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=i}^{n}b_{l\alpha}\overline{c}_{l+1-i,\beta}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{\rho=0}^{\theta}q_{\alpha\beta}^{\rho}e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\Big). \tag{11}$$

Пусть $D_{i-1}=C^{*}J^{i-1}B$, $D_{i-1}=\{d_{\beta\alpha}^{i-1}\}$, $i\in\{\overline{1,n}\}$, $\beta=\overline{1,k}$, $\alpha=\overline{1,m}$. Применим лемму 1 к $G=C^{*}$, $F=B$; имеем $g_{\beta\nu}=\overline{c}_{\nu\beta}$, $f_{l\alpha}=b_{l\alpha}$. Таким образом, по лемме 1 для $j=i-1$ имеем

$$d_{\beta\alpha}^{i-1}=\sum_{l=i}^{n}\overline{c}_{l+1-i,\beta}b_{l\alpha}. \tag{12}$$

Для каждого $i\in\{\overline{1,n}\}$, рассмотрим матрицы $C^{*}J^{i-1}BQ_{\rho}$, $\rho=\overline{0,\theta}$, $C^{*}J^{i-1}BR_{\varkappa}(\tau)$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$. Найдем их следы. Учитывая (12), получим для всякого $\rho=\overline{0,\theta}$

$$\mathrm{Sp}\,(C^{*}J^{i-1}BQ_{\rho})=\mathrm{Sp}\,(D_{i-1}Q_{\rho})=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}d_{\beta\alpha}^{i-1}q_{\alpha\beta}^{\rho}=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=i}^{n}\overline{c}_{l+1-i,\beta}b_{l\alpha}q_{\alpha\beta}^{\rho}. \tag{13}$$

Аналогично, для всякого $\varkappa=\overline{1,\theta}$

$$\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\mathrm{Sp}\,(C^{*}J^{i-1}BR_{\varkappa}(\tau))e^{\lambda\tau}d\tau=\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{l=i}^{n}\overline{c}_{l+1-i,\beta}b_{l\alpha}r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{14}$$

Из (11), (13) и (14) следует, что

$$\begin{gathered}\Delta=\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{\rho=0}^{\theta}\mathrm{Sp}\,(C^{*}J^{i-1}BQ_{\rho})\lambda^{n-i}e^{-\lambda\rho h}+\\+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\mathrm{Sp}\,(C^{*}J^{i-1}BR_{\varkappa}(\tau))\lambda^{n-i}e^{\lambda\tau}d\tau\Bigg).\end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя (15) в (9), получим

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\Big(\sum_{j=0}^{s}a_{ij}e^{-\lambda jh}+\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h}g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}\,d\tau\Big)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{\rho=0}^{\theta}\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)\lambda^{n-i}e^{-\lambda\rho h}+ \tag{16}$$

$$+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau))\lambda^{n-i}e^{\lambda\tau}d\tau\Bigg).$$

Учитывая равенства (16), (8), (7), получаем, что для системы (1), (2) задача произвольного спектра посредством регулятора (3) разрешима тогда и только тогда, когда найдутся $\theta\geqslant 0$, матрицы $Q_\rho\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho=\overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa\colon[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, такие, что для всех $i=\overline{1,n}$ выполнены равенства

$$\sum_{\mu=0}^{\ell}\gamma_{i\mu}e^{-\lambda\mu h}=\sum_{j=0}^{s}a_{ij}e^{-\lambda jh}-\sum_{\rho=0}^{\theta}\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)e^{-\lambda\rho h}, \tag{17}$$

$$\sum_{\xi=1}^{\ell}\int_{-\xi h}^{-(\xi-1)h}\delta_{i\xi}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau=\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h}g_{i\eta}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau$$

$$-\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\mathrm{Sp}\,\big(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)\big)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{18}$$

Положим $\theta=\max\{s,\ell\}$, $\zeta=\min\{s,\ell\}$. Рассмотрим два случая: $\ell\leqslant s$ и $l>s$.

Если $l\leqslant s$, то $\theta=s$, $\zeta=\ell$, и равенства (17), (18) принимают вид

$$\sum_{\rho=0}^{\zeta}\gamma_{i\rho}e^{-\lambda\rho h}=\sum_{\rho=0}^{\zeta}\big(a_{i\rho}-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)\big)e^{-\lambda\rho h}+\sum_{\rho=\zeta+1}^{\theta}\big(a_{i\rho}-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)\big)e^{-\lambda\rho h}, \tag{19}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\zeta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\delta_{i\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau=\sum_{\varkappa=1}^{\zeta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\Big(g_{i\varkappa}(\tau)-\mathrm{Sp}\,\big(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)\big)\Big)e^{\lambda\tau}d\tau+$$

$$+\sum_{\varkappa=\zeta+1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\Big(g_{i\varkappa}(\tau)-\mathrm{Sp}\,\big(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)\big)\Big)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{20}$$

Если $\ell>s$, то $\theta=\ell$, $\zeta=s$, и равенства (17), (18) принимают вид

$$\sum_{\rho=0}^{\theta}\gamma_{i\rho}e^{-\lambda\rho h}=\sum_{\rho=0}^{\zeta}\big(a_{i\rho}-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)\big)e^{-\lambda\rho h}-\sum_{\rho=\zeta+1}^{\theta}\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho)e^{-\lambda\rho h}, \tag{21}$$

$$\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\delta_{i\varkappa}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau=\sum_{\varkappa=1}^{\zeta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\Big(g_{i\varkappa}(\tau)-\mathrm{Sp}\,\big(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)\big)\Big)e^{\lambda\tau}d\tau$$

$$-\sum_{\varkappa=\zeta+1}^{\ell}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}\mathrm{Sp}\,\big(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)\big)e^{\lambda\tau}d\tau. \tag{22}$$

Равенства (19), (20), (21), (22) имеют место для всех $i=\overline{1,n}$ тогда и только тогда, когда для всех $i=\overline{1,n}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}\gamma_{i\rho}&=a_{i\rho}-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho), &&\rho=\overline{0,\zeta},\\ 0&=a_{i\rho}-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho), &&\rho=\overline{\zeta+1,\theta},\quad \text{если}\quad \ell\leqslant s,\\ \gamma_{i\rho}&=-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BQ_\rho), &&\rho=\overline{\zeta+1,\theta},\quad \text{если}\quad \ell>s,\end{aligned} \tag{23}$$

и для всех $i=\overline{1,n}$ и почти всех $\tau\in[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}
\delta_{i\varkappa}(\tau)&=g_{i\varkappa}(\tau)-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)), \quad \varkappa=\overline{1,\zeta},\\
0&=g_{i\varkappa}(\tau)-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)), \quad \varkappa=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell\leqslant s,\\
\delta_{i\varkappa}(\tau)&=-\mathrm{Sp}\,(C^*J^{i-1}BR_\varkappa(\tau)), \qquad\qquad \varkappa=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell> s.
\end{aligned} \tag{24}$$

Каждая ρ-я система в (23) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матриц Q_ρ, $\rho=\overline{0,\theta}$. Каждая $\varkappa$-я система в (24) состоит из n уравнений с mk неизвестными элементами матриц $R_\varkappa(\tau)$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$. Перепишем системы (23), (24) в векторном виде. По определению отображения vec имеем $\mathrm{Sp}\,(XY)=(\mathrm{vec}\,X)^T\cdot(\mathrm{vec}\,Y^T)$ для любых $X\in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $Y\in M_{q,p}(\mathbb{K})$. Для всякого $i=\overline{1,n}$ применим это равенство в системе (23) к матрице $X=C^*J^{i-1}B$ и к матрицам $Y=Q_\rho$, $\rho=\overline{0,\theta}$, а в системе (24) к матрице $X=C^*J^{i-1}B$ и к $Y=R_\varkappa(\tau)$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$. Построим матрицу

$$P:=[\mathrm{vec}\,(C^*B),\mathrm{vec}\,(C^*JB),\ldots,\mathrm{vec}\,(C^*J^{n-1}B)]\in M_{mk,n}(\mathbb{K}). \tag{25}$$

Обозначим $v_\rho:=\mathrm{vec}\,(Q_\rho^T)\in\mathbb{K}^{mk}$, $\rho=\overline{0,\theta}$, $f_\varkappa(\tau):=\mathrm{vec}\,(R_\varkappa^T(\tau))\in\mathbb{K}^{mk}$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$,

$$\begin{aligned}
w_\rho&:=\mathrm{col}\,(a_{1\rho}-\gamma_{1\rho},\ldots,a_{n\rho}-\gamma_{n\rho})\in\mathbb{K}^n, \quad \rho=\overline{0,\zeta},\\
w_\rho&:=\mathrm{col}\,(a_{1\rho},\ldots,a_{n\rho})\in\mathbb{K}^n, \qquad \rho=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell\leqslant s,\\
w_\rho&:=\mathrm{col}\,(-\gamma_{1\rho},\ldots,-\gamma_{n\rho})\in\mathbb{K}^n, \qquad \rho=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell> s,\\
\sigma_\varkappa(\tau)&:=\mathrm{col}\,\big(g_{1\varkappa}(\tau)-\delta_{1\varkappa}(\tau),\ldots,g_{n\varkappa}(\tau)-\delta_{n\varkappa}(\tau)\big)\in\mathbb{K}^n, \quad \varkappa=\overline{1,\zeta},\\
\sigma_\varkappa(\tau)&:=\mathrm{col}\,\big(g_{1\varkappa}(\tau),\ldots,g_{n\varkappa}(\tau)\big)\in\mathbb{K}^n, \qquad \varkappa=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell\leqslant s,\\
\sigma_\varkappa(\tau)&:=\mathrm{col}\,\big(-\delta_{1\varkappa}(\tau),\ldots,-\delta_{n\varkappa}(\tau)\big)\in\mathbb{K}^n, \qquad \varkappa=\overline{\zeta+1,\theta}, \quad \text{если} \quad \ell> s.
\end{aligned}$$

Тогда системы (23), (24) можно записать в векторном виде

$$P^Tv_\rho=w_\rho, \quad \rho=\overline{0,\theta}, \tag{26}$$

$$P^Tf_\varkappa(\tau)=\sigma_\varkappa(\tau) \text{ п.в. } \tau\in[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h], \quad \varkappa=\overline{1,\theta}. \tag{27}$$

Для системы (1), (2) задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3) разрешима тогда и только тогда, когда системы (26), (27) разрешимы относительно v_ρ, $\rho=\overline{0,\theta}$, и $f_\varkappa(\tau)$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, для любых $\gamma_{i\mu}\in\mathbb{K}$ и для любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi}\colon[-\xi h,(\xi-1)h,0]\to\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $\mu=\overline{0,\ell}$, $\xi=\overline{1,\ell}$. Условие линейной независимости матриц (6) является необходимым и достаточным для разрешимости системы (26), (27). В частности, система (26), (27) имеет решение

$$v_\rho=P(P^TP)^{-1}w_\rho, \quad \rho=\overline{0,\theta}, \tag{28}$$

$$f_\varkappa(\tau)=P(P^TP)^{-1}\sigma_\varkappa(\tau), \quad \varkappa=\overline{1,\theta}. \tag{29}$$

Искомые матрицы Q_ρ, $\rho=\overline{0,\theta}$, и $R_\varkappa(\tau)$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, находятся из равенств

$$Q_\rho=(\mathrm{vec}^{-1}v_\rho)^T, \quad \rho=\overline{0,\theta}, \qquad R_\varkappa(\tau)=(\mathrm{vec}^{-1}f_\varkappa(\tau))^T, \quad \varkappa=\overline{1,\theta}. \qquad \square$$

§ 2. Следствия

Если характеристическая функция замкнутой системы (4) обращается в полином, то спектр системы (4) конечен. Говорят, что для системы (1), (2) *разрешима задача назначения произвольного конечного спектра посредством регулятора* (3), если для любых $\omega_i\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, найдутся число $\theta\geqslant 0$, матрицы $Q_\rho\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho=\overline{0,\theta}$, и интегрируемые функции $R_\varkappa\colon[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (4) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\omega_1\lambda^{n-1}+\ldots+\omega_n.$$

С л е д с т в и е 1. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (1)*,* (2) *посредством регулятора* (3) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (6) *линейно независимы.*

Следствие 1 вытекает из теоремы 1: рассматриваемая задача эквивалентна разрешимости системы (26), (27), где $\ell = 0$, $\gamma_{i0} = \omega_i$, $i = \overline{1,n}$: если матрицы (6) линейно независимы, то система (26), (27) разрешима для любых ω_i; если нет, то система (26), (27) разрешима не для любых ω_i, $i = \overline{1,n}$.

С л е д с т в и е 2. *Если матрицы* (6) *линейно независимы, то система* (1)*,* (2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (3)*.*

Следствие 2 вытекает из следствия 1, если взять, к примеру, числа ω_i, $i = \overline{1,n}$, такие что $\lambda^n + \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \lambda^{n-1} = (\lambda + 1)^n$.

Далее, рассмотрим систему (1), (2), которая содержит только сосредоточенные запаздывания и не содержит распределенные запаздывания:

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{s} a_{ij} x^{(n-i)}(t - jh) = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{l=p}^{n} b_{l\alpha} u_{\alpha}^{(n-l)}(t). \tag{30}$$

Пусть управление в системе (30), (2) также содержит только сосредоточенные запаздывания и не содержит распределенные запаздывания:

$$u(t) = \sum_{\rho=0}^{\theta} Q_\rho y(t - \rho h). \tag{31}$$

О п р е д е л е н и е 2. Для системы (30), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора* (31), если для любого числа $\ell \geqslant 0$ и любых чисел $\gamma_{i\mu} \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, $\mu = \overline{0,\ell}$, найдутся число $\theta \geqslant 0$ и матрицы $Q_\rho \in M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\rho = \overline{0,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (30), (2), (31) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{\ell} \gamma_{i\mu} \lambda^{n-i} e^{-\lambda\mu h}.$$

Т е о р е м а 2. *Задача назначения произвольного спектра для системы* (30)*,* (2) *посредством регулятора* (31) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (6) *линейно независимы.*

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с

$$\begin{gathered} g_{i\eta}(\tau) \equiv 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \eta = \overline{1,s}, \quad \tau \in [-\eta h, -(\eta - 1)h], \\ \delta_{i\xi}(\tau) \equiv 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad \xi = \overline{1,\ell}, \quad \tau \in [-\xi h, -(\xi - 1)h], \\ r_{\alpha\beta}^{\varkappa}(\tau) \equiv 0, \quad \alpha = \overline{1,m}, \quad \beta = \overline{1,k}, \quad \varkappa = \overline{1,\theta}, \quad \tau \in [-\varkappa h, -(\varkappa - 1)h]. \end{gathered}$$

С л е д с т в и е 3. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (30)*,* (2) *посредством регулятора* (31) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (6) *линейно независимы.*

С л е д с т в и е 4. *Если матрицы* (6) *линейно независимы, то система* (30)*,* (2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (31)*.*

Далее, рассмотрим систему (1), (2), которая содержит только распределенные запаздывания и не содержит сосредоточенные запаздывания:

$$x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_{i0}x^{(n-i)}(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\eta=1}^{s}\int_{-\eta h}^{-(\eta-1)h}g_{i\eta}(\tau)x^{(n-i)}(t+\tau)\,d\tau=\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{l=p}^{n}b_{l\alpha}u_{\alpha}^{(n-l)}(t). \quad (32)$$

Пусть управление в системе (32), (2) также содержит только распределенные запаздывания и не содержит сосредоточенные запаздывания:

$$u(t)=Q_0y(t)+\sum_{\varkappa=1}^{\theta}\int_{-\varkappa h}^{-(\varkappa-1)h}R_{\varkappa}(\tau)y(t+\tau)\,d\tau. \quad (33)$$

О п р е д е л е н и е 3. Для системы (32), (2) *разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора* (33), если для любых чисел $\gamma_{i0}\in\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, для любого числа $\ell\geqslant 0$ и любых интегрируемых функций $\delta_{i\xi}\colon[-\xi h,-(\xi-1)h]\to\mathbb{K}$, $i=\overline{1,n}$, $\xi=\overline{1,\ell}$, найдутся матрица $Q_0\in M_{m,k}(\mathbb{K})$, число $\theta\geqslant 0$ и интегрируемые функции $R_{\varkappa}\colon[-\varkappa h,-(\varkappa-1)h]\to M_{m,k}(\mathbb{K})$, $\varkappa=\overline{1,\theta}$, такие, что характеристическая функция замкнутой системы (32), (2), (33) удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{n-i}\left(\gamma_{i0}+\sum_{\xi=1}^{\ell}\int_{-\xi h}^{-(\xi-1)h}\delta_{i\xi}(\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\right).$$

Т е о р е м а 3. *Задача назначения произвольного спектра для системы* (32)*,* (2) *посредством регулятора* (33) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (6) *линейно независимы.*

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 1 с

$$\begin{aligned} a_{ij}&=0,\quad i=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,s},\\ \gamma_{i\mu}&=0,\quad i=\overline{1,n},\quad \mu=\overline{1,\ell},\\ q^{\rho}_{\alpha\beta}&=0,\quad \alpha=\overline{1,m},\quad \beta=\overline{1,k},\quad \rho=\overline{1,\theta}.\end{aligned}$$

С л е д с т в и е 5. *Задача назначения произвольного конечного спектра для системы* (32)*,* (2) *посредством регулятора* (33) *разрешима тогда и только тогда, когда матрицы* (6) *линейно независимы.*

С л е д с т в и е 6. *Если матрицы* (6) *линейно независимы, то система* (32)*,* (2) *экспоненциально стабилизируема посредством статической обратной связи по выходу* (33)*.*

§ 3. Пример

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x'''(t)-x''(t-h)+4x''(t-2h)+x'(t)-2x'(t-2h)-x(t)+x(t-h)+\\ +\int_{-h}^{0}x''(t+\tau)\sin\tau\,d\tau+\int_{-2h}^{-h}x''(t+\tau)\,d\tau-2\int_{-h}^{0}x'(t+\tau)\sin\tau\,d\tau+\\ +\int_{-2h}^{-h}x'(t+\tau)\sin 2\tau\,d\tau+\int_{-h}^{0}x(t+\tau)\cos\tau\,d\tau+\int_{-2h}^{-h}x(t+\tau)\sin\tau\,d\tau=\\ =u_1'(t)-u_2'(t)-u_2(t), \end{gathered} \quad (34)$$

$$y_1(t)=x'(t),\quad y_2(t)=-x(t)-x'(t), \quad (35)$$

$x \in \mathbb{R}$, $u = \mathrm{col}\,(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = \mathrm{col}\,(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Имеем $n = 3$, $k = 2$, $m = 2$, $p = 2$, $s = 2$;

$$a_{10} = 0,\ a_{11} = -1,\ a_{12} = 4,\ a_{20} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{22} = -2,\ a_{30} = -1,\ a_{31} = 1,\ a_{32} = 0;$$
$$g_{11}(\tau) = \sin\tau,\ g_{12}(\tau) = 1,\ g_{21}(\tau) = -2\sin\tau,\ g_{22}(\tau) = \sin 2\tau,\ g_{31}(\tau) = \cos\tau,\ g_{32}(\tau) = \sin\tau;$$
$$b_{21} = 1,\ b_{22} = -1,\ b_{31} = 0,\ b_{32} = -1; \qquad c_{11} = 0,\ c_{21} = 1,\ c_{12} = -1,\ c_{22} = -1.$$

По системе (34), (35) построим матрицы B, C: получим $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда

$$C^*B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^*JB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C^*J^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Построим матрицу (25):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имеем $\operatorname{rank} P = 3 = n$, следовательно, матрицы (36) линейно независимы. Таким образом, по теореме 1 для системы (1), (2) разрешима задача назначения произвольного спектра посредством регулятора (3). Построим такой регулятор. Пусть к примеру

$$\begin{gathered} \varphi(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\Big(2 + e^{-\lambda h} - \int_{-h}^{0} e^{\lambda\tau}(\sin\tau - \cos\tau)\,d\tau\Big) + \\ + \lambda\Big(1 + 2e^{-\lambda h} + \int_{-h}^{0} e^{\lambda\tau}(2\cos\tau - \sin 2\tau)\,d\tau\Big) + e^{-\lambda h}. \end{gathered} \tag{37}$$

Тогда $\ell = 1$;

$$\begin{gathered} \gamma_{10} = 2, \quad \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{20} = 1, \quad \gamma_{21} = 2, \quad \gamma_{30} = 0, \quad \gamma_{31} = 1, \\ \delta_{11}(\tau) = -\sin\tau + \cos\tau, \quad \delta_{21}(\tau) = -\sin 2\tau + 2\cos\tau, \quad \delta_{31}(\tau) = 0. \end{gathered}$$

Тогда $\theta = 2$, $\zeta = 1$. Далее находим

$$\begin{aligned} w_0 &= \mathrm{col}\,(a_{10} - \gamma_{10}, a_{20} - \gamma_{20}, a_{30} - \gamma_{30}) = (-2, 0, -1), \\ w_1 &= \mathrm{col}\,(a_{11} - \gamma_{11}, a_{21} - \gamma_{21}, a_{31} - \gamma_{31}) = (-2, -2, 0), \\ w_2 &= \mathrm{col}\,(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (4, -2, 0), \\ \sigma_1(\tau) &= \mathrm{col}\,\big(g_{11}(\tau) - \delta_{11}(\tau), g_{21}(\tau) - \delta_{21}(\tau), g_{31}(\tau) - \delta_{31}(\tau)\big) = \\ &= (2\sin\tau - \cos\tau, -2\sin\tau + \sin 2\tau - 2\cos\tau, \cos\tau), \\ \sigma_2(\tau) &= \mathrm{col}\,\big(g_{12}(\tau), g_{22}(\tau), g_{32}(\tau)\big) = (1, \sin 2\tau, \sin\tau). \end{aligned}$$

Вычисляя v_0, v_1, v_2, $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ по формулам (28), (29), получим

$$\begin{gathered} v_0 = \mathrm{col}\,(-3, -1, -1, -1), \quad v_1 = \mathrm{col}\,(0, 1, 1, 0), \quad v_2 = \mathrm{col}\,(6, 1, 1, 0); \\ f_1(\tau) = \mathrm{col}\,(4\sin\tau + 2\cos\tau - \sin 2\tau, \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau, \\ \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau, \cos\tau), \\ f_2(\tau) = \mathrm{col}\,(1 - \sin 2\tau + \sin\tau, -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau, -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau, \sin\tau). \end{gathered}$$

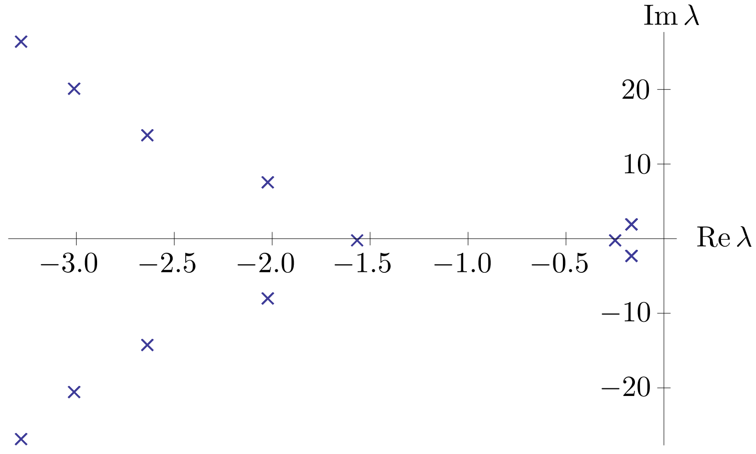

Рис. 1. Спектр замкнутой системы (39) при $h = 1$

Отсюда находим

$$Q_0 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$R_1(\tau) = \begin{bmatrix} 4\sin\tau + 2\cos\tau - \sin 2\tau & \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau \\ \sin\tau - \sin\tau\cos\tau + 2\cos\tau & \cos\tau \end{bmatrix},$$
$$R_2(\tau) = \begin{bmatrix} 1 - \sin 2\tau + \sin\tau & -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau \\ -\sin\tau\cos\tau + \sin\tau & \sin\tau \end{bmatrix}.$$

Регулятор (3)

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = Q_0 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + Q_1 \begin{bmatrix} y_1(t-h) \\ y_2(t-h) \end{bmatrix} + Q_2 \begin{bmatrix} y_1(t-2h) \\ y_2(t-2h) \end{bmatrix} + \\ + \int_{-h}^{0} R_1(\tau) y(t+\tau) d\tau + \int_{-2h}^{-h} R_2(\tau) y(t+\tau) d\tau \tag{38}$$

имеет компоненты

$$u_1(t) = -2x'(t) + x(t) - x'(t-h) - x(t-h) + 5x'(t-2h) - x(t-2h) + \\ + \int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(3\sin\tau - \sin\tau\cos\tau)\, d\tau + \int_{-h}^{0} x(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau - \sin\tau - 2\cos\tau)\, d\tau + \\ + \int_{-2h}^{-h} x'(t+\tau)(1 - \sin\tau\cos\tau)\, d\tau + \int_{-2h}^{-h} x(t+\tau)(\sin\tau\cos\tau - \sin\tau)\, d\tau,$$
$$u_2(t) = x(t) + x'(t-h) + x'(t-2h) + \int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(\sin\tau - \sin\tau\cos\tau + \cos\tau)\, d\tau - \\ - \int_{-h}^{0} x(t+\tau)\cos\tau\, d\tau - \int_{-2h}^{-h} x'(t+\tau)\sin\tau\cos\tau\, d\tau - \int_{-2h}^{-h} x(t+\tau)\sin\tau\, d\tau.$$

Система (34), (35) замкнутая регулятором (38) принимает вид

$$x'''(t) + 2x''(t) + x'(t) + x''(t-h) + 2x'(t-h) + x(t-h) + \\ - \int_{-h}^{0} x''(t+\tau)(\sin\tau - \cos\tau)\, d\tau + \int_{-h}^{0} x'(t+\tau)(2\cos\tau - \sin 2\tau)\, d\tau. \tag{39}$$

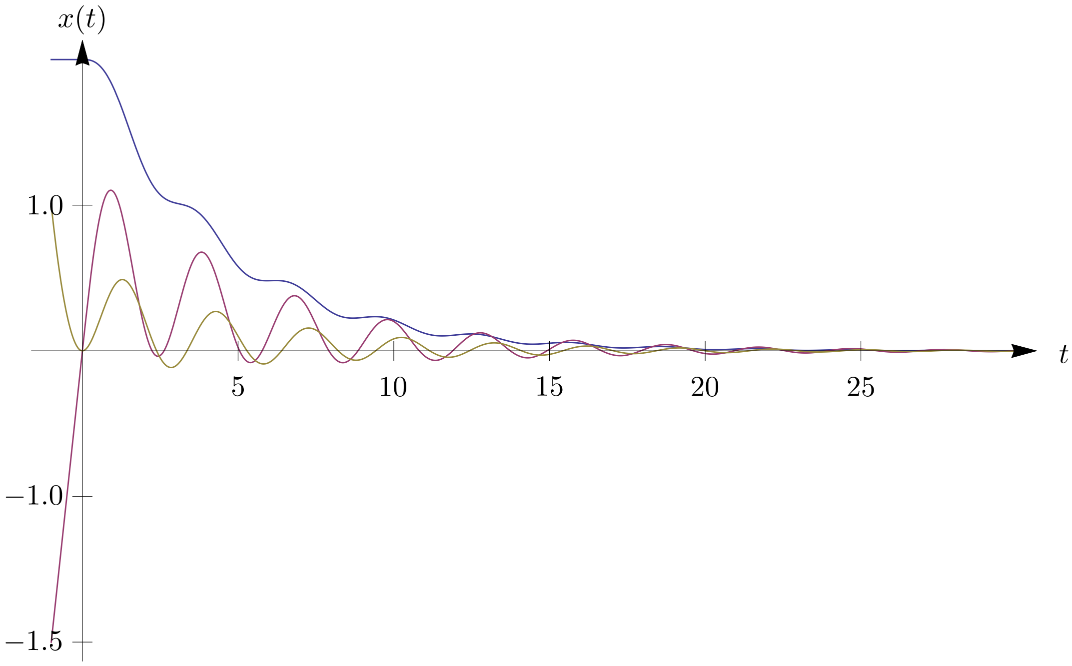

Рис. 2. Решения замкнутой системы (39) при различных начальных условиях

Характеристическая функция замкнутой системы (39) совпадает с (37). В частности, (при $h = 1$) система (39) экспоненциально устойчива. На рис. 1 изображен спектр системы (39) при $h = 1$. На рис. 2 изображены решения системы (39) при $h = 1$, при некоторых начальных условиях.

При выполнении исследований были использованы вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем» и РФФИ (проект 20-01-00293).

Поступила в редакцию 01.09.2020

Зайцев Василий Александрович, д. ф.-м. н., заведующий лабораторией математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: verba@udm.ru

Ким Инна Геральдовна, научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: kimingeral@gmail.com

Цитирование: В. А. Зайцев, И. Г. Ким. Назначение спектра в линейных системах с несколькими соизмеримыми сосредоточенными и распределенными запаздываниями в состоянии посредством статической обратной связи по выходу // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 5–19.

V. A. Zaitsev, I. G. Kim

Spectrum assignment in linear systems with several commensurate lumped and distributed delays in state by means of static output feedback

Keywords: linear differential equation, lumped delay, distributed delay, commensurate delays, spectrum assignment, stabilization, static output feedback.

MSC2010: 93B55, 93B52, 93D20, 93C15, 93C05, 34H15

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-01

A linear control system defined by a stationary differential equation of nth order with several commensurate lumped and distributed delays in state is considered. In the system, the input is a linear combination of m variables and their derivatives of order not more than $n-p$ and the output is a k-dimensional vector of linear combinations of the state and its derivatives of order not more than $p-1$. For this system, a spectrum assignment problem by linear static output feedback with commensurate lumped and distributed delays is studied. Necessary and sufficient conditions are obtained for solvability of the arbitrary spectrum assignment problem by static output feedback controller. Corollaries on stabilization of the system are obtained.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project 0827-2020-0010 “Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems” and by the Russian Foundation for Basic Research, project 20-01-00293.

REFERENCES

1. Pekař L., Gao Q. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results, *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 35457–35491. https://doi.org/10.1109/access.2018.2851453
2. Yi S., Nelson P.W., Ulsoy A.G. Eigenvalue assignment via the Lambert W function for control of time-delay systems, *Journal of Vibration and Control*, 2010, vol. 16, issue 7-8, pp. 961–982. http://doi.org/10.1177/1077546309341102
3. Yi S., Nelson P.W., Ulsoy A.G. Robust control and time-domain specifications for systems of delay differential equations via eigenvalue assignment, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2010, vol. 132, issue 3, 031003. https://doi.org/10.1115/1.4001339
4. Wang H., Liu J., Yang F., Zhang Y. Controller design for delay systems via eigenvalue assignment – on a new result in the distribution of quasi-polynomial roots, *International Journal of Control*, 2015, vol. 88, issue 12, pp. 2457–2476. https://doi.org/10.1080/00207179.2015.1048290
5. Wang H., Liu J., Zhang Y. New results on eigenvalue distribution and controller design for time delay systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, issue 6, pp. 2886–2901. https://doi.org/10.1109/TAC.2016.2637002
6. Zítek P., Fiser J., Vyhídal T. Dimensional analysis approach to dominant three-pole placement in delayed PID control loops, *Journal of Process Control*, 2013, vol. 23, issue 8, pp. 1063–1074. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2013.06.001
7. Cacace F., Germani A., Manes C. Exponential stabilization of linear systems with time-varying delayed state feedback via partial spectrum assignment, *Systems & Control Letters*, 2014, vol. 69. pp. 47–52. http://doi.org/10.1016/j.sysconle.2014.04.007
8. Metel'skii A.V. Modal controllability of a delay differential system by an incomplete output, *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 11, pp. 1483–1493. https://doi.org/10.1134/S0012266118110095
9. Semenič N., Sarjaš A., Chowdhury A., Svečko R. Quasipolynomial approach to simultaneous robust control of time-delay systems, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, vol. 2014, article 930697. https://doi.org/10.1155/2014/930697

10. Kandala S.S., Uchida T.K., C.P. Vyasarayani C.P. Pole placement for time-delayed systems using Galerkin approximations, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2019, vol. 141, issue 5, 051012. https://doi.org/10.1115/1.4042465
11. Fiagbedzi Y.A., Pearson A.E. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems, *Automatica*, 1987, vol. 23, issue 3, pp. 311–326. https://doi.org/10.1016/0005-1098(87)90005-7
12. Dolgii Yu.F. Stabilization of linear autonomous systems of differential equations with distributed delay, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, issue 10, pp. 1813–1825. https://doi.org/10.1134/S0005117907100098
13. Zítek P., Vyhlídal T. State feedback control of time delay system: conformal mapping aided design, *IFAC Proceedings Volumes*, 2000, vol. 33, issue 23, pp. 157–162. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)36935-5
14. Michiels W., Vyhlídal T., Zítek P. Control design for time-delay systems based on quasi-direct pole placement, *Journal of Process Control*, 2010, vol. 20, issue 3, pp. 337–343. http://doi.org/10.1016/j.jprocont.2009.11.004
15. Wei F., Bachrathy D., Orosz G., Ulsoy A.G. Spectrum design using distributed delay, *International Journal of Dynamics and Control*, 2014, vol. 2, issue 2, pp. 234–246. https://doi.org/10.1007/s40435-014-0068-7
16. Wei F., Orosz G., Ulsoy A.G. Design of rightmost eigenvalues using distributed delay, *Proceedings of ASME 2014 Dynamic Systems and Control Conference*, 2014. https://doi.org/10.1115/DSCC2014-6149
17. Pekař L. On the optimal pole assignment for time-delay systems, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2013, vol. 7, issue 1, pp. 63–71.
18. Borkovskaya I.M., Marchenko V.M. Modal control of systems with distributed delays, *Automation and Remote Control*, 1993, vol. 54, no. 8, pp. 1211–1222. https://zbmath.org/?q=an:0841.93024
19. Marchenko V.M., Borkovskaya I.M. Modal control of a system with distributed delay under the condition of incomplete information, *Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1673–1680. https://zbmath.org/?q=an:0815.93065
20. Zaitsev V.A. Modal control of a linear differential equation with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 145–148. https://doi.org/10.1023/A:1025188512610
21. Zaitsev V., Kim I. Exponential stabilization of linear time-varying differential equations with uncertain coefficients by linear stationary feedback, *Mathematics*, 2020, vol. 8, issue 5, article 853. https://doi.org/10.3390/math8050853
22. Zaitsev V.A., Kim I.G. Arbitrary spectrum assignment by static output feedback for linear differential equations with state variable delays, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, issue 32, pp. 810–814. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.446
23. Zaitsev V.A., Kim I.G. Spectrum assignment and stabilization of linear differential equations with delay by static output feedback with delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 208–220. https://doi.org/10.35634/vm200205
24. Zaitsev V.A. Spectrum control in linear systems with incomplete feedback, *Differential Equations*, 2009, vol. 45, issue 9, pp. 1348–1357. https://doi.org/10.1134/S0012266109090109
25. Zaitsev V.A. Necessary and sufficient conditions in a spectrum control problem, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, issue 12, pp. 1789–1793. https://doi.org/10.1134/S0012266110120128
26. Zaitsev V.A., Kim I.G. Finite spectrum assignment problem in linear systems with state delay by static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 463–473 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160402
27. Kim I.G. Finite spectrum assignment in linear systems with several lumped and distributed delays by means of static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 367–384 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200302
28. Zaitsev V.A., Kim I.G. On arbitrary spectrum assignment in linear stationary systems with commensurate time delays in state variables by static output feedback, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 315–325 (in Russian).

https://doi.org/10.20537/vm170303

29. Kim I.G., Zaitsev V.A. Spectrum assignment by static output feedback for linear systems with time delays in states, *2018 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB)*, 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408365
30. Zaitsev V.A., Kim I.G. On finite spectrum assignment problem in bilinear systems with state delay, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 1, pp. 19–28. https://doi.org/10.20537/vm190102
31. Zaitsev V.A., Kim I.G., Khartovskii V.E. Finite spectrum assignment problem for bilinear systems with several delays, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 319–331. https://doi.org/10.20537/vm190303

Received 01.09.2020

Zaitsev Vasilii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: verba@udm.ru

Kim Inna Geraldovna, Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: kimingeral@gmail.com

Citation: V. A. Zaitsev, I. G. Kim. Spectrum assignment in linear systems with several commensurate lumped and distributed delays in state by means of static output feedback, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 5–19.