Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 56. С. 79–101

УДК 517.938

© *В. Н. Ушаков, А. В. Ушаков*

О НАВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВОРОНКИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ НА ЦЕЛЕВОЕ МНОЖЕСТВО В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве. Изучается задача о конструировании интегральной воронки системы на заданном промежутке времени, сечение которой, отвечающее последнему моменту времени из промежутка, совпадает с заданным целевым множеством в фазовом пространстве. Поскольку точное выделение такой воронки возможно лишь в редких случаях, изучается вопрос о приближенном конструировании интегральной воронки.

Ключевые слова: управление, управляемая система, дифференциальное включение, целевое множество, фазовое пространство, аппроксимирующая система.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-07

Введение

В работе рассматривается управляемая нелинейная система в конечномерном пространстве на конечном промежутке времени. Изучается задача о выделении в пространстве позиций управляемой системы интегральной воронки системы, сечение которой, отвечающее последнему моменту времени из заданного промежутка, совпадает с целевым множеством — компактом в фазовом пространстве системы. Точное вычисление интегральной воронки возможно в относительно редких случаях и поэтому изучается вопрос о приближенном конструировании такой воронки. В работе предложен подход к конструированию системы множеств в фазовом пространстве, аппроксимирующей интегральную воронку. Приводятся достаточные условия на динамику управляемой системы, при которых аппроксимирующая система множеств обеспечивает (при достаточно большом числе аппроксимирующих множеств) высокую точность решения сформулированной краевой задачи.

Исследуемая в работе краевая задача является одной из многочисленных задач теории управления динамическими системами, посвященных изучению свойств множеств достижимости и пучков траекторий управляемых систем [1–8]. Работа ориентирована на приближенное решение краевой задачи для интегральных воронок. Предложенный в ней метод приближенного решения дополняет исследования [9–13] в этой области. Эффективность метода проиллюстрирована на двух конкретных задачах о наведении управляемой системы на целевое множество в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$.

Работа также примыкает к работам [14–17], посвященным исследованию множеств достижимости управляемых систем.

Авторы посвящают эту статью памяти профессора Евгения Леонидовича Тонкова. Старший из авторов статьи хорошо знал Евгения Леонидовича и высоко ценил его как человека и ученого. С глубоким уважением мы относимся к его памяти, к семье Евгения Леонидовича и желаем членам семьи всего самого хорошего.

§ 1. Постановка задачи о наведении

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta],\ t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad u \in P. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, u — управляющий вектор, $P \in comp(\mathbb{R}^p)$, где $comp(\mathbb{R}^k)$ — метрическое пространство компактов в $\mathbb{R}^k$ с хаусдорфовой метрикой.

Предполагается, что выполнены следующие условия.

A. Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{P}$, и для любого компакта $\mathbb{D} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такая постоянная $L = L(\mathbb{D}) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)\| \leqslant L|x_* - x^*| \tag{1.2}$$

(t, x_*) и (t, x^*) из $\mathbb{D}$, $u \in P$, а также функция $\omega^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ такова, что

$$\|f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)\| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \ (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } \mathbb{D}, \ u \in P. \tag{1.3}$$

B. Найдется такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что $\|f(t, x, u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|)$, $(t, x, u) \in \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$; здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Считаем, что наряду с системой (1.1) задано множество $\mathbb{X}^{(\vartheta)} \in comp(\mathbb{R}^m)$. Пусть заданы t_* и t^*, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$. Полагаем

$X(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости в $\mathbb{R}^m$ в момент t^* дифференциального включения (д.в.)

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) = co\{f(t, x, u) : u \in P\}, \quad x(t_*) = x_* \in \mathbb{R}^m, \quad t \in [t_*, t^*]; \tag{1.4}$$

$X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости в $\mathbb{R}^m$ в момент t^* д.в. (1.4) из стартового множества $X_* \subset \mathbb{R}^m$, отвечающего моменту t_*;

$\mathbb{X}(t_0, x^{(0)}) = \bigcup\limits_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X(t, t_0, x^{(0)})) \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ — интегральная воронка д.в. (1.4) с начальной точкой $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$;

$\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)}) = \bigcup\limits_{x^{(0)} \in \mathbb{X}^{(0)}} \mathbb{X}(t_0, x^{(0)})$ — интегральная воронка д.в. (1.4) со стартовым множеством $\mathbb{X}^{(0)}$, отвечающим моменту t_0.

Здесь $(t, X) = \{(t, x) : x \in X\}$, $X \subset \mathbb{R}^m$. Сформулируем задачу о наведении интегральной воронки $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$ д.в. (1.4) на целевое множество $\mathbb{X}^{(\vartheta)} \in comp(\mathbb{R}^m)$.

Задача 1 (о наведении). Требуется выделить такое множество $\mathbb{X}^{(0)} \in comp(\mathbb{R}^m)$, которое удовлетворяет равенству

$$\mathbb{X}(\vartheta, t_0, \mathbb{X}^{(0)}) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}. \tag{1.5}$$

Поскольку $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$ допускает эффективное аналитическое описание, приводящее к точному выделению интегральных воронок в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ лишь в редких задачах о наведении, то в работе сделан упор на приближенное построение множества $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$. Предлагается схема приближенного конструирования интегральной воронки $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$, удовлетворяющей (1.5). В этой схеме представлена пошаговая процедура приближенного конструирования $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$. Эта процедура развивается по шагам во времени. Важно при этом, что аппроксимирующая воронку $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$ система множеств в $\mathbb{R}^m$, отвечающая некоторому конечному разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, является мажорантой для $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$.

§ 2. Аппроксимирующая система множеств в $\mathbb{R}^m$

При реализации системы множеств в $\mathbb{R}^m$, аппроксимирующей интегральную воронку $\mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$, будем стартовать от целевого множества $\mathbb{X}^{(\vartheta)}$, отвечающего моменту ϑ (в прямом времени t).

Для этого обратим время $t \in [t_0, \vartheta]$: перейдем к обратному времени $\tau = t_0 + \vartheta - t \in \in [t_0, \vartheta]$, превратив таким образом конечный момент ϑ в начальный момент t_0 отрезка $[t_0, \vartheta]$. Прием, заключающийся в обращении времени (то есть в переходе от времени t к времени τ) использовался достаточно часто в задачах о сближении нелинейных управляемых систем с целевыми множествами в фазовом пространстве (см., например, [9–13]).

Управляемая система (1.1) примет в обратном времени τ вид

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, u), \quad \tau \in [t_0, \vartheta],\ z \in \mathbb{R}^m,\ u \in P, \tag{2.1}$$

и д.в. (1.4) примет вид

$$\frac{dz}{d\tau} = H(\tau, z) = -F(t_0 + \vartheta - \tau, z), \quad \tau \in [t_0, \vartheta],\ z \in \mathbb{R}^m. \tag{2.2}$$

Введем обозначения, связанные с обратным временем τ. Пусть $t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant \vartheta$, $z_* \in \mathbb{R}^m$, $Z_* \subset \mathbb{R}^m$.

$Z_u(\tau^*, \tau_*, z_*),\ u \in P$ — множество достижимости в $\mathbb{R}^m$ в момент τ^* системы (2.1) с начальной точкой $z(\tau_*) = z_*$;

$Z_u(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcup\limits_{z_* \in Z_*} Z_u(\tau^*, \tau_*, z_*)$ — множество достижимости в $\mathbb{R}^m$ в момент τ^* системы (2.1) со стартовым множеством $Z_* \subset \mathbb{R}^m$, отвечающим моменту τ_*;

$$Z(\tau^*, \tau_*, Z_*) = \bigcap_{u \in P} Z_u(\tau^*, \tau_*, Z_*) \tag{2.3}$$

В терминах обратного времени τ и многозначного отображения $(\tau^*, \tau_*, Z_*) \mapsto Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ $(t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant \vartheta,\ Z_* \subset \mathbb{R}^m)$ (2.3) определим замкнутое множество $Z \subset \mathbb{D}$ с временны́ми сечениями $Z(\tau) \subset \mathbb{D}(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau, z) \in \mathbb{D}\}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющими соотношениям

$$Z(t_0) \subset \mathbb{X}^{(\vartheta)}, \quad Z(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z(\tau_*)), \quad t_0 \leqslant \tau_* < \tau^* \leqslant \vartheta. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbb{D} = [t_0, \vartheta] \times \mathbb{D}^{(0)}$ ($\mathbb{D}^{(0)}$ — достаточно большой замкнутый шар $\mathbb{B}(0; \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}^m$) — цилиндр в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, содержащий в себе все компоненты конструкций, доставляющих приближенное решение задачи 1. Существование такого цилиндра $\mathbb{D}$ обусловлено компактностью целевого множества $\mathbb{X}^{(\vartheta)}$ в $\mathbb{R}^m$ и условиями **A**, **B**, наложенными на систему (1.1).

Множество Z назовем *трактом* системы (2.1). Замкнутое множество $Z^{(0)} \subset \mathbb{D}$, максимальное (по включению) среди всех множеств Z, удовлетворяющих (2.4), назовем *максимальным трактом* системы (2.1).

§ 3. Метод приближенного вычисления Z^0

Для приближенного вычисления максимального тракта Z^0 введем разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = \Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $i = \overline{0, N-1}$. Разбиению Γ сопоставим систему $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ временны́х сечений $Z^0(\tau_i) = \{z \in \mathbb{R}^m : (\tau_i, z) \in Z^0\}$ множества Z^0. Справедливы соотношения: $Z^0(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)},\ Z^0(\tau_i) \in comp(\mathbb{R}^m),\ \tau_i \in \Gamma$.

Вслед за $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ введем систему $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $Z^\Gamma(\tau_i) = Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^\Gamma(\tau_{i-1}))$, $i = \overline{1, N}$, $Z^\Gamma(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Так как, по определению множества Z^0, его временные сечения удовлетворяют соотношениям

$$Z^0(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}, \quad Z^0(\tau_i) \subset Z(\tau_i, \tau_{i-1}, Z^0(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.1}$$

то

$$Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i), \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.2}$$

Введем последовательность двоичных разбиений

$$\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}{}^{(n)} = \vartheta\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

промежутка $[t_0, \vartheta]$; $n(N) = 2^{n-1}$. Каждое последующее разбиение $\Gamma^{(n)}$ содержит предыдущие разбиения. Для упрощения обозначений полагаем $Z^{(n)}{}_{(}\tau_i^{(n)}) = Z^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{0, N(n)}$. Каждому разбиению $\Gamma^{(n)}$ по аналогии с разбиением Γ поставим в соответствие систему $\{Z^{(n)}(\tau_i{}^{(n)}) : \tau_i{}^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\} \subset \mathbb{R}^m$, согласно (3.1), (3.2):

$$Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}, \{Z^{(n)}(\tau_i{}^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)}, Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}), i = \overline{1, N(n)}\}.$$

Для двоичных моментов $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ (то есть для $\tau_* \in \bigcup\limits_n \Gamma^{(n)}$), справедливы включения

$$Z^0(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*), \quad Z^{(k)}(\tau_*) \subset Z^{(n)}(\tau_*) \text{ при } k, n \text{ из } \mathbb{N},\ n < k, \quad \tau_* \in \Gamma^{(n)}. \tag{3.3}$$

Пусть τ_* — двоичный момент из $[t_0, \vartheta]$. Принимая во внимание (3.3), полагаем, что последовательность $\{Z^{(n)}(\tau_*)\}$ сходится в хаусдорфовой метрике к компакту $Z^\Delta(\tau_*) = \bigcap\limits_n Z^{(n)}(\tau_*)$. Это означает, что для любой точки $z_* \in Z^\Delta(\tau_*)$ найдется последовательность $\{z_*^{(n)}\}$, $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к z_*, и любая сходящаяся последовательность $\{z_*^{(n)}\}$, $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$, $n \in \mathbb{N}$ имеет пределом некоторую точку $z_* \in Z^\Delta(\tau_*)$.

Распространим определение множества $Z^\Delta(\tau_*)$ с двоичных моментов $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ на весь промежуток $[t_0, \vartheta]$. Для этого полагаем $t_n(\tau_*) = \max\{\tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)} : \tau_i^{(n)} \leqslant \tau_*\}$. Пусть τ_* — недвоичный момент из $[t_0, \vartheta]$. Определим $Z^\Delta(\tau_*) = \{z_* \in \mathbb{R}^m : z_* = \lim\limits_{n \mapsto \infty} z_*^{(n)}\}$, где $\{(t_n(\tau_*), z_*^{(n)})\}$ сходится к (τ_*, z_*) и $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*)), n \in \mathbb{N}\}$. Вместе с тем определено множество

$$Z^\Delta = \bigcup_{\tau_* \in [t_0, \vartheta]} (\tau_*, Z^\Delta(\tau_*)) \subset \mathbb{D}. \tag{3.4}$$

Множество Z^Δ, определенное равенством (3.4) — компакт в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ и, так как оно получено из последовательности систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, с использованием предельных переходов, то будем писать

$$Z^\Delta = \lim_{n \mapsto \infty} \{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}.$$

Можно показать, что последовательности $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$, $n \in \mathbb{N}$ сходятся к Z^Δ в хаусдорфовой метрике:

$$\lim_{n \mapsto \infty} \max_{i \in \overline{0, N(n)}} d(Z^\Delta(\tau_i^{(n)}), Z^{(n)}(\tau_i^{(n)})) = 0.$$

Справедливо следующее утверждение

Л е м м а 3.1. *Множества* Z^0 *и* Z^Δ *совпадают.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала включение $Z^\Delta \subset Z^0$. Для этого покажем, что Z^Δ удовлетворяет соотношениям вида (2.4). В самом деле, справедливо $Z^\Delta(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$.

Покажем теперь, что

$$Z^\Delta(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z^\Delta(\tau_*)), (\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*; \tag{3.5}$$

здесь $\Delta^* = \{(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta], \tau^{(1)} \leqslant \tau^{(2)}\}$.

Пусть произвольно выбраны двоичные моменты τ_*, τ^*, $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$ и точка $z^* \in \in Z^\Delta(\tau^*)$. Так как $z^* \in Z^{(n)}(\tau^*) = Z(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, то $z_* \in Z_u(\tau^*, \tau_*, Z^{(n)}(\tau_*))$ при любых $u \in P$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, некоторая точка $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(\tau_*)$ является начальной для решения $z_u^{(n)}(\tau)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u), \quad \tau \in [\tau_*, \tau^*], \tag{3.6}$$

удовлетворяющего краевому условию $z_u^{(n)}(\tau^*) = z^*$.

Считаем, не нарушая общности рассуждений, что последовательность $\{z_u^{(n)}(\tau)\}$ равномерно сходится на $[\tau_*, \tau^*]$ к некоторой функции $z_u(\tau)$. Функция $z_u(\tau)$, $\tau \in [\tau_*, \tau^*]$, является решением уравнения (3.6) и удовлетворяет краевым условиям $z_u(\tau_*) = z_* = \lim\limits_{n \mapsto \infty} z_u^{(n)}(\tau_*) \in \in Z^\Delta(\tau_*)$, $z_u(\tau^*) = z^*$. Это означает, что

$$z^* \in Z_u(\tau^*, \tau_*, Z^\Delta(\tau_*)), \quad u \in P. \tag{3.7}$$

Так как точка z^* выбрана произвольно в $Z^\Delta(\tau^*)$, то из (3.7) (при двоичных τ_*, τ^*) следует (3.5).

Пусть теперь τ_*, τ^* — недвоичные моменты из Δ^*. Выберем произвольную точку $(\tau^*, z^*) \in Z^\Delta$. Пусть $\{(t_n(\tau^*), z_n^*)\}$ — последовательность из Z^Δ, сходящаяся к (τ^*, z^*). Рассмотрим последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$, сходящуюся к τ_*. Так как $t_n(\tau_*)$ и $t_n(\tau^*)$ — двоичные моменты из $\Gamma(n)$, то

$$Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*))), \quad n \in \mathbb{N},$$

и, значит, при любом $u \in P$ справедливо $Z^{(n)}(t_n(\tau^*)) \subset Z_u(t_n(\tau^*), t_n(\tau_*), Z^{(n)}(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что для некоторой точки $z_*^{(n)} \in Z^{(n)}(t_n(\tau_*))$ решение $z_u^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$ дифференциального уравнения $\dfrac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u)$, $z_u^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z_*^{(n)}$ удовлетворяет краевому условию $z_u^{(n)}(t_n(\tau^*)) = z_n^*$.

Сопоставим каждому $n \in \mathbb{N}$ такое решение $z_u^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), t_n(\tau^*)]$. Не нарушая общности рассуждений, считаем, что последовательность $\{z_u^{(n)}\}$ сходится равномерно на $[t_*, t^*]$ к некоторой функции $z_u(\tau)$ (здесь мы доопределили $z_u^{(n)}(\tau)$ на промежутке $[t_n(\tau^*), \tau^*]$ с помощью равенства $z_u^{(n)}(\tau) = z_n^*$, $n \in \mathbb{N}$). Вектор-функция $z_u(\tau), \tau \in [\tau_*, \tau^*]$ является решением уравнения (2.1) и удовлетворяет условиям $z_u(\tau_*) = z_* = \lim\limits_{n \mapsto \infty} z_*^{(n)} \in Z^\Delta(\tau_*)$, $z_u(\tau^*) = z^* = \lim\limits_{n \mapsto \infty} z_n^* \in Z^\Delta(\tau^*)$. Следовательно, $z^* \in Z_u(\tau^*, \tau_*, Z^\Delta(\tau_*))$, и, так как $z^* \in \in Z^\Delta(\tau^*)$ и $u \in P$ выбраны произвольно, то

$$Z^\Delta(\tau^*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, Z^\Delta(\tau_*)) \tag{3.8}$$

для недвоичных моментов τ_*, τ^*, $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$.

Аналогично доказывается (3.8) в случае, когда один из моментов τ_*, τ^* — двоичный, а другой — нет. Вместе с тем для всевозможных пар $(\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*$ установлено (3.5), откуда вытекает $Z^\Delta \subset Z^0$.

Докажем обратное включение $Z^0 \subset Z^\Delta$. В самом деле, для любого двоичного момента $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ справедливо
$$Z^0(\tau_*) \subset Z^\Delta(\tau_*). \tag{3.9}$$

Пусть теперь $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ — недвоичный момент и $(\tau_*, z_*) \in Z^0$. Рассмотрим последовательность $\{t_n(\tau_*)\}$ двоичных моментов из $\Gamma^{(n)}$, где $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$, $n \mapsto \infty$. Так как $Z^0(\tau_*) \subset Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, $n \in N$, то $z_* \in Z(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*)))$, $n \in \mathbb{N}$.

Выберем произвольно $u \in P$. Справедливо включение $z_* \in Z_u(\tau_*, t_n(\tau_*), Z^0(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$. Значит, существует такая последовательность $\{z(t_n(\tau_*))\}$ точек $z(t_n(\tau_*)) \in Z^0(t_n(\tau_*)) \subset Z^\Delta(t_n(\tau_*))$, $n \in \mathbb{N}$, которой отвечают решения $z_u^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_n(\tau_*), \tau_*]$, уравнения $\dfrac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u)$, $z_u^{(n)}(t_n(\tau_*)) = z(t_n(\tau_*))$, удовлетворяющие условию $z_u^{(n)}(\tau_*) = z_*$, $n \in \mathbb{N}$. Выполняется предельное соотношение $(\tau_*, z_*) = \lim\limits_{n\mapsto\infty}(t_n(\tau_*), z(t_n(\tau_*))$, где $(t_n(\tau_*), z(t_n(\tau_*))) \in Z^\Delta$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $(\tau_*, z_*) \in Z^\Delta$. Так как недвоичный момент $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$ и $(\tau_*, z_*) \in Z^0$ выбраны произвольно, то $Z^0(\tau_*) \in Z^\Delta(\tau_*)$ при недвоичных моментах $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$. Принимая во внимание то же включение при двоичных моментах $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, получаем, что справедливо (3.9) при всех $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, т.е. $Z^0 \subset Z^\Delta$. Из включений $Z^0 \subset Z^\Delta$ и $Z^\Delta \subset Z^0$ следует $Z^0 = Z^\Delta$. Лемма 3.1 доказана. □

В лемме 3.1 утверждается, что *максимальный тракт* Z^0 есть предел
$$Z^\Delta = \lim_{n\mapsto\infty}\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$$
«промежуточных» систем $\{Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)})\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Однако, чтобы в конкретных задачах управления вычислить приближенно Z^0, используя эти системы, необходимо уметь точно вычислять множества $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ согласно рекуррентным соотношениям
$$Z^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = \mathbb{X}^{(\vartheta)},\ \ Z^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = Z(\tau_i^{(n)}, \tau_{i-1}^{(n)},\ Z^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)})), \quad i = \overline{1, N(n)}.$$

Мы не имеем возможности точно вычислять множества $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ и, следовательно, не имеем возможности вычислять точно и множества $Z^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{1, N(n)}$. В связи с этим возникает необходимость в трансформации множеств вида $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ в такие множества, которые близки, например, в хаусдорфовой метрике, к множествам $Z(\tau^*, \tau_*, Z_*)$ и которые при этом можно было бы точно вычислять.

Задавшись целью определить такие вычислимые множества, мы сделаем шаг по направлению к этому: для двоичного разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$ введем аппроксимирующую систему $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) \subset \mathbb{R}^m$. При этом определим систему как мажоранту для множества Z^0.

Итак, считая, что задано двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$, сопоставим каждому полуинтервалу $[\tau_i, \tau_{i+1})$ разбиения Γ д.в.
$$\frac{dz}{d\tau} \in \widetilde{H}_u(\tau_i, z^{(i)}),\ z(\tau_i) = z^{(i)} \in \mathbb{R}^m,\ \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}),\ u \in P; \tag{3.10}$$
здесь $\widetilde{H}_u(\tau, z) = h(\tau, z, u) + \varphi(\Delta)\cdot\mathbb{B}^{(p)}(0; 1) = \{h(\tau, z, u) + \varphi(\Delta)b : b \in \mathbb{B}^{(p)}(0; 1)\}$, $\mathbb{B}^{(p)}(0; 1) = \{b \in \mathbb{R}^p : \|b\| \leqslant 1\}$, $\varphi(\delta) = \omega^*((1 + K)\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ (см. оценку (1.3), стр. 80), $K = \max(\|h(\tau, z, u)\| : (\tau, z, u) \in \mathbb{D} \times \mathbb{P}) < \infty$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Пусть $(\tau_i, z^{(i)})$ и $(\tau_i, Z^{(i)})$ — точка и множество из $\mathbb{D}$, $u \in P$.

Введем обозначения:

$z_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z^{(i)} + \Delta h(\tau_i, z^{(i)}, u) \in \mathbb{R}^m$;

$\widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = \{z_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) + \omega(\Delta)b : b \in \mathbb{B}^{(p)}(0; 1)\}$ — множество достижимости д.в. (3.10) в момент τ_{i+1} со стартовой точкой $z^{(i)}$, отвечающей моменту τ_i;

$\widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcup\limits_{z^{(i)} \in Z^{(i)}} \widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})$ — множество достижимости д.в. (3.10) в момент τ_{i+1} со стартовым множеством $Z^{(i)}$, отвечающим моменту τ_i;

$\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) = \bigcap\limits_{u \in P} \widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)})$;

здесь $\omega(\delta) = \delta \cdot \varphi(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$, $\sim$ — символ аппроксимации.

Пусть τ_i, τ_{i+1} из Γ, $(\tau_i, z^{(i)})$ и $(\tau_i, Z^{(i)})$ из $\mathbb{D}$, $u \in P$. Полагаем $z_u(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) = z_u(\tau_{i+1})$, где $z_u(\tau), \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ — решение уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, u), \quad z(\tau_i) = z^{(i)}, \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}].$$

Справедлива оценка

$$\|z_u(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) - z_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)})\| \leqslant \omega(\Delta). \tag{3.11}$$

Из (3.11) следует

$$z_u(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}) \in \widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, z^{(i)}). \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует включение

$$Z_u(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \widetilde{Z}_u^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}). \tag{3.13}$$

Из (3.13) получаем

$$Z(\tau_{i+1}, \tau_i, Z^{(i)}) \subset \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i . Z^{(i)}), \tag{3.14}$$

$$\tau_i,\ \tau_{i+1} \text{ из } \Gamma,\ (\tau_i, Z^{(i)}) \in D.$$

Введем A-систему (аппроксимирующую систему) $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) \subset \mathbb{R}^m$.

О п р е д е л е н и е 3.1. A-системой $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ множеств $\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ в $\mathbb{R}^m$, отвечающей двоичному разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$, назовем совокупность множеств

$$\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}, \quad \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) = \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i, \tau_{i-1}, \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1})), \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.15}$$

Соотношение (3.15) представляет собой рекуррентную пошаговую во времени τ процедуру. Сравним системы $\{Z^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ и $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающие разбиению Γ. Учитывая краевое условие $Z^\Gamma(\tau_0) = \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$ и включения (3.14), получаем

$$Z^\Gamma(\tau_i) \subset \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i), \tau_i \in \Gamma. \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.16) получаем

$$Z^0(\tau_i) \subset Z^\Gamma(\tau_i) \subset \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i), \quad \tau_i \in \Gamma, \quad i = \overline{0, N}.$$

Из этих включений следует, что A-система $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ мажорирует набор $\{Z^0(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ сечений $Z^0(\tau_i)$ максимального тракта Z^0 управляемой системы (2.1).

Обратимся снова к двоичным разбиениям $\Gamma^{(n)} = \{\tau_0^{(n)} = t_0, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_i^{(n)}, \ldots, \tau_{N(n)}^{(n)} = \vartheta\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для упрощения обозначений полагаем $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau) = \widetilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau), \tau \in [t_0, \vartheta]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда A-система $\{\widetilde{Z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ запишется в виде $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}), \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$. Введем в рассмотрение множество $\Omega^0 = \{(\tau_*, z_*) \in \mathbb{D} : (\tau_*, z_*) = \lim\limits_{n\mapsto\infty} (t_n(\tau_*), z_n)$, где $\{(t_n(\tau_*), z_n)\}$ — некоторая последовательность точек $(t_n(\tau_*), z_n) \in (t_n(\tau_*), \widetilde{Z}^{(n)}(t_n(\tau_*))), n \in \mathbb{N}\}$.

Справедливо равенство $\Omega^0(\tau_0^{(n)}) = \Omega^0(t_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$. Так как при любом $\tau_* \in \Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, справедливо включение

$$Z^{(n)}(\tau_*) \subset \widetilde{Z}^{(n)}(\tau_*), \tag{3.17}$$

то из равенства $Z^0 = \lim\limits_{n\mapsto\infty} \{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ и (3.17) следует включение

$$Z^0 \subset \Omega^0. \tag{3.18}$$

Кроме того, применяя к Ω^0 ту же схему, которая применялась к Z^Δ, получаем включение

$$\Omega^0(\tau_*) \subset Z(\tau^*, \tau_*, \Omega^0(\tau_*)), \quad (\tau_*, \tau^*) \in \Delta^*. \tag{3.19}$$

Учитывая $\Omega^0(\tau_0) = \Omega^0(t_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$ и (3.19), получаем, что замкнутое множество $\Omega^0 \subset \mathbb{D}$ есть тракт системы (2.1) и, значит,

$$\Omega^0 \subset Z^0. \tag{3.20}$$

Из (3.18), (3.20) вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 3.2. *Множества Z^0 и Ω^0 совпадают.*

Отсюда следует предельное соотношение:

$$Z^0 = \lim_{n\mapsto\infty} \{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}. \tag{3.21}$$

Соотношение (3.21) мы трактуем как теоретическую основу для использования A-систем $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$ $(\Delta(\Gamma)) \downarrow 0)$ для приближенного вычисления максимального тракта Z^0 в конкретных задачах о наведении на целевые множества. Сведем леммы (3.1), (3.2) в единое утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Множества Z^0, Z^Δ, Ω^0 совпадают.*

§ 4. О представлении Z^0 в виде интегральной воронки $W^0 = \mathbb{X}(t_0, \mathbb{X}^{(0)})$ д.в. $\dfrac{dx}{dt} = F(t, x)$.

Очевидно, что далеко не во всех конкретных задачах о наведении все сечения $Z^0(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, множества Z^0 непусты. В этом параграфе предполагается, что $Z^0(\tau) \neq \emptyset$, $\tau \in [\tau_0, \vartheta]$. Покажем при одном условии, дополнительном к условиям **A**, **B**, что решением задачи 1 является множество $\mathbb{X}^{(0)} = Z^0(\vartheta) \subset \mathbb{R}^m$. Для формулировки этого условия обратимся снова к разбиению $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ и к A-системе $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающей разбиению Γ.

Полагаем: $\widetilde{X}^\Gamma(t^*, t_*, z_*)$ $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, t_* и t^* из $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$, $z_* \in \mathbb{R}^m)$ — множество достижимости д.в. $\dfrac{dx}{dt} \in F(t_*, z_*)$, $x(t_*) = z_*, t \in [t_*, t^*]$;

$\widetilde{X}^\Gamma(t^*, t_*, Z_*) = \bigcup\limits_{z_* \in Z_*} \widetilde{X}^\Gamma(t^*, t_*, z_*)$;

$\widetilde{X}^\Gamma(t_j) = \widetilde{X}^\Gamma(t_j, t_{j-1}, \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$, $i + j = N$, $i = \overline{0, N-1}$,

Предполагаем, что выполняется следующее условие.

C. Существует такая функция $\sigma(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$ $(\delta^{-1} \cdot \sigma(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0)$, что

$$d(\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i), \widetilde{X}^\Gamma(t_j)) \leqslant \sigma(\Delta), \quad \tau_i + t_j = t_0 + \vartheta, \quad i + j = N. \tag{4.1}$$

Здесь $d(Z,X) = \max(\max\limits_{z\in Z}\min\limits_{x\in X}\|z-x\|,\ \max\limits_{x\in X}\min\limits_{z\in Z}\|z-x\|)$ — хаусдорфово расстояние между $Z\in comp(\mathbb{R}^m)$ и $X\in comp(\mathbb{R}^m)$.

Отметим, что условие **C** с входящей в него оценкой (4.1), не является слишком ограничительным для конкретных задач о наведении типа задачи 1. Введем также в рассмотрение замкнутое множество $W^0\subset\mathbb{D}$, связанное с трактом Z^0 соотношениями

$$W^0(t) = Z^0(\tau), \quad t+\tau = t_0+\vartheta, \quad t\in[t_0,\vartheta].$$

Т е о р е м а 4.1. *Множество W^0 есть интегральная воронка д.в.* $\dfrac{dx}{dt}\in F(t,x), t\in[t_0,\vartheta]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что W^0 удовлетворяет двум условиям:

a. Множество W^0 инвариантно относительно д.в. $\dfrac{dx}{dt}\in F(t,x)$, $t\in[t_0,\vartheta]$;

b. Множество Z^0 слабо инвариантно относительно д.в. $\dfrac{dz}{d\tau}\in H(\tau,z)$, $\tau\in[t_0,\vartheta]$.

Сначала докажем, что выполняется условие a. Зафиксируем произвольный промежуток $[t_*,t^*]$ из $[t_0,\vartheta]$, где t_*,t^* — моменты разбиения Г. Пусть (t_*,x_*) — произвольная точка из W^0. Покажем, что любое решение $x(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, д.в. $\dfrac{dx}{dt}\in F(t,x)$, $x(t_*)=x_*$, удовлетворяет включению $x(t)\in W^0(t)$, $t\in[t_*,t^*]$. Для этого наряду с движением $x(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, рассмотрим некоторое движение $y(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, $y(t_*)=y_*\in\mathbb{R}^m$, системы (1.1), порожденное некоторым управлением $u^*(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, постоянным на полуинтервалах $[t_j,t_{j+1})\subset[t_*,t^*]$ разбиения Г. При этом, вообще говоря, $x_*\neq y_*$, и кусочно-постоянное управление $u^*(t)$, $t\in[t_*,t^*]$, определим на полуинтервалах $[t_j,t_{j+1})$ как постоянное управление $u^{(e)}\in P$ на основе экстремального прицеливания на движение $x(t)$, $t\in[t_*,t^*]$.

Итак, выделим в промежутке $[t_*,t^*]$ некоторый промежуток $[t_j,t_{j+1}]$ разбиения Г и для упрощения обозначений полагаем $\eta_*=t_j$, $\eta^*=t_{j+1}$. Также обозначим $\rho(t)=\|x(t)-y(t)\|$, $t\in[t_*,t^*]$. Сначала выведем локальную оценку сверху рассогласования $\rho(\eta^*)^2$ через $\rho(\eta_*)^2$. Для движения $x(t)$, $t\in[\eta_*,\eta^*]$ справедливо включение $\dfrac{dx(t)}{dt}\in F(t,x(t)) = co\{f(t,x(t),u) : u\in P\}$ п.в. на $[\eta_*,\eta^*]$, откуда следует равенство $x(\eta^*) = x(\eta_*) + \displaystyle\int_{\eta_*}^{\eta^*} f^*(\eta)d\eta$, где $f^*(\eta) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i(\eta)f(\eta,x(\eta),u^{(i)}(\eta))$ п.в. на $[\eta_*,\eta^*]$, $u^{(i)}(\eta)\in P$, $\alpha_i(\eta)\geqslant 0$ при $i=\overline{1,m+1}$; $\sum\limits_{i=1}^{m+1}\alpha_i(\eta)=1$. Движение $y(t)$, $t\in[\eta_*,\eta^*]$ представимо в виде $y(\eta^*) = y(\eta_*)+\int\limits_{\eta_*}^{\eta^*} f(\eta,y(\eta),u^{(e)})\,d\eta$, где вектор $u^{(e)}\in P$ выбирается удовлетворяющим соотношению

$$\langle s_*, f(\eta_*,y(\eta_*),u^{(e)})\rangle = \max_{u\in P}\langle s_*, f(\eta_*,y(\eta_*),u)\rangle, \quad s_* = x(\eta_*)-y(\eta_*).$$

Из приведенных соотношений получаем

$$\begin{aligned}\rho(\eta^*)^2 &= \|(x(\eta_*)-y(\eta_*)) + \int_{\eta_*}^{\eta^*}(f^*(\eta)-f(\eta,y(\eta),u^{(e)}))\,d\eta\|^2 = \\ &= \|x(\eta_*)-y(\eta_*)\|^2 + 2\langle s_*, \int_{\eta_*}^{\eta^*}(f^*(\eta) - \\ &- f(\eta,y(\eta),u^{(e)}))\,d\eta\rangle + \|\int_{\eta_*}^{\eta^*}(f^*(\eta)-f(\eta,y(\eta),u^{(e)}))\,d\eta\|^2.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Приведем (4.2) к виду, удобному для последующих выкладок: $\rho(\eta^*)^2 =$

$$= \|s_*\|^2 + 2\int_{\eta_*}^{\eta^*}\langle s_*, f^*(\eta)-f(\eta,y(\eta),u^{(e)})\rangle\,d\eta + \|\int_{\eta_*}^{\eta^*}(f^*(\eta)-f(\eta,y(\eta),u^{(e)}))\,d\eta\|^2. \tag{4.3}$$

Проведение оценки сверху величины $\rho(\eta^*)^2$ начнем с оценки второго слагаемого в правой части равенства (4.3). Для этого сначала оценим величину

$$\langle s_*, f^*(\eta) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\rangle, \quad \eta \in [\eta_*, \eta^*]. \tag{4.4}$$

При оценке величины (4.4) используется свойство экстремального управления u^e, определенного согласно принципу экстремального прицеливания Н. Н. Красовского. При $\eta \in$ $\in [\eta_*, \eta^*]$ справедливо равенство

$$\langle s_*, f^*(\eta) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\rangle = \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i(\eta)\langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)}\rangle. \tag{4.5}$$

Также при $\eta \in [\eta_*, \eta^*]$ справедливы равенства

$$\begin{gathered}\langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta))\rangle = \\ = \langle s_*, f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\rangle + \langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\rangle, \\ \langle s_*, f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\rangle = \\ = \langle s_*, f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle + \langle s_*, f(\eta, y(\eta), u^{(e)}) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из равенств (4.5), (4.6) следует

$$\begin{gathered}\langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta, x(\eta), u^{(e)})\rangle = \langle s_*, f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta)) - \\ - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle + \langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - \\ - f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\rangle + \langle s_*, f(\eta, y(\eta), u^{(e)}) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Оценим сверху каждое из слагаемых правой части равенства (4.7). Справедлива оценка

$$\begin{gathered}\langle s_*, f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle = \\ = \langle s_*, f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\rangle + \\ + \langle s_*, f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle \leqslant L \cdot \|s_*\|^2,\end{gathered} \tag{4.8}$$

согласно условию **A**, наложенному на правую часть системы (1.1) (см. неравенство (1.2)), и выбору управления $u^{(e)} \in P$. Также, учитывая условие **A**, получаем при $\eta \in [\eta_*, \eta^*]$

$$\begin{gathered}\langle s_*, f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\rangle \leqslant \|s_*\| \cdot \|f(\eta, x(\eta), u^{(i)}(\eta)) - \\ - f(\eta_*, x(\eta_*), u^{(i)}(\eta))\| \leqslant \gamma^* \cdot \omega^*((\eta^* - \eta_*) + \|x(\eta) - x(\eta_*)\|) \leqslant \gamma^* \cdot \omega^*((\eta^* - \eta_*) + \\ + \int_{\eta_*}^{\eta^*} \|f^*(\eta)\|\, d\eta \leqslant \gamma^* \cdot \omega^*((1+K)\Delta);\end{gathered} \tag{4.9}$$

здесь $\eta^* - \eta_* = t_{j+1} - t_j = \Delta = \Delta(\Gamma)$, $K = \max\left(\|f(t,x,u)\| : (t,x,u) \in \mathbb{D} \times P\right) < \infty$, $\gamma^* = \max\limits_{z^{(1)}, z^{(2)} \text{ из } \mathbb{D}^{(0)}} \|z^{(1)} - z^{(2)}\| \leqslant \infty$.

Также при $\eta \in [\eta_*, \eta^*]$ справедлива оценка, аналогичная предыдущей оценке:

$$\begin{gathered}\langle s_*, f(\eta, y(\eta), u^{(e)}) - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\rangle \leqslant \|s_*\| \cdot \|f(\eta, y(\eta), u^{(e)}) - \\ - f(\eta_*, y(\eta_*), u^{(e)})\| \leqslant \gamma^* \cdot \omega^*((\eta^* - \eta_*) + \\ + \int_{\eta_*}^{\eta^*} \|f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\|\, d\eta) \leqslant \gamma^* \cdot \omega^*((1+K)\Delta).\end{gathered} \tag{4.10}$$

Принимая во внимание оценки (4.8), (4.9), (4.10), получаем при $\eta \in [\eta_*, \eta^*]$

$$\langle s_*, f^*(\eta) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)}) \rangle \leqslant L \cdot \|s_*\|^2 + 2\gamma^* \cdot \omega^*((1+K)\Delta). \tag{4.11}$$

Учитывая (4.11), получаем оценку сверху для второго слагаемого в правой части равенства (4.2).

$$\begin{aligned} &2\langle s_*, \int_{\eta_*}^{\eta^*} (f^*(\eta) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)}))\, d\eta \rangle \leqslant \\ &\leqslant 2L \cdot \Delta \|s_*\|^2 + 4\gamma^* \Delta \omega^*((1+K)\Delta), \quad \eta \in [\eta_*, \eta^*]. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Третье слагаемое в правой части равенства (4.2) стеснено оценкой

$$\begin{aligned} &\| \int_{\eta_*}^{\eta^*} (f^*(\eta) - f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\, d\eta \|^2 \leqslant \\ &\leqslant (\int_{\eta_*}^{\eta^*} (\|f^*(\eta)\| + \|f(\eta, y(\eta), u^{(e)})\|\, d\eta)^2 \leqslant 4K^2\Delta^2. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Из (4.2), учитывая оценки (4.12), (4.13), получаем

$$\rho(\eta_*)^2 \leqslant (1 + 2L\Delta)\rho(\eta_*)^2 + 4\gamma^* \Delta \omega^*((1+K)\Delta) + 4K^2\Delta^2. \tag{4.14}$$

Принимая во внимание принятое ранее обозначение $\omega(\delta) = \delta \cdot \omega^*((1+K)\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$, введем функцию $\chi(\delta) = 4\gamma^* \cdot \omega(\delta) + 4K^2\delta^2$, $\delta \in (0, \infty)$. Тогда (4.14) можно трансформировать в оценку

$$\rho(t_{j+1})^2 \leqslant e^{2L\Delta_j} \cdot \rho(t_j)^2 + \chi(\Delta_j), \quad j_* \leqslant j \leqslant j^* - 1, \tag{4.15}$$

где $t_{j_*} = t_*$, $t_{j^*} = t^*$. Из локальных оценок (4.15) выводим следующую оценку сверху

$$\rho(t^*)^2 \leqslant e^{2L\sum\limits_{j=j_*}^{j^*-1}\Delta_j} (\rho(t_*)^2 + \sum_{j=j_*}^{j^*-1} \chi(\Delta_j)). \tag{4.16}$$

Преобразуем сумму $\sum\limits_{j=j_*}^{j^*-1} \chi(\Delta_j)$ в (4.16) к более удобному для анализа виду:

$$\sum_{j=j_*}^{j^*-1} \chi(\Delta_j) = \sum_{j=j_*}^{j^*-1} (4\gamma^* \omega(\Delta_j) + 4K^2\Delta_j^2) = 4(t^* - t_*) \cdot (\gamma^* \omega^*((1+K)\Delta) + K^2\Delta). \tag{4.17}$$

Принимая во внимание оценку (4.17), получаем глобальную оценку величины $\rho(t^*)^2$ сверху:

$$\rho(t^*)^2 \leqslant e^{2L(t^* - t_*)} \cdot (\rho(t_*)^2 + 4(t^* - t_*)(\gamma^* \cdot \omega^*((1+K)\Delta)) + K^2\Delta)), \tag{4.18}$$

$t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, t_*, t^* — моменты из двоичного разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$.

Очевидно, что оценка (4.18), справедливая для моментов t_*, t^* из двоичного разбиения Γ, имеет место для любых двоичных моментов t_*, t^* из промежутка $[t_0, \vartheta]$. Рассмотрим последовательность двоичных разбиений $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, промежутка $[t_0, \vartheta]$, где $\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \mapsto \infty$, а также последовательность $\{y^{(n)}(t)\}$ на $[t_*, t^*]$ решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad y^{(n)}(t_*) = x_*,$$

порожденных на $[t_*, t^*]$ кусочно-постоянными управлениями $u^{*(n)}(t)$, постоянными на промежутках $[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})$ разбиений $\Gamma^{(n)}$. Эти управления $u^{*(n)}(t)$, отвечающие разбиениям $\Gamma^{(n)}$, определяются аналогично управлению $y^*(t)$, отвечающему разбиению Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$. Полагаем $\rho^{(n)}(t) = \|x(t) - y^{(n)}(t)\|$, $t \in [t_*, t^*]$, $n \in \mathbb{N}$. Функция $\rho^{(n)}(t)$ на $[t_*, t^*]$ стеснена оценкой, справедливой для двоичных моментов t из $[t_*, t^*]$:

$$\rho^{(n)}(t)^2 \leqslant e^{2L(t-t_*)}(\rho(t_*)^2 + 4(t - t_*) \cdot (\gamma^* \cdot \omega^*((1 + K)\Delta^{(n)}) + K^2\Delta^{(n)})), \tag{4.19}$$

вытекающей из оценок вида (4.18) для разбиений $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Из (4.19) следует, что на множестве $\mathcal{J}$ двоичных моментов t промежутка $[t_*, t^*]$ справедливо неравенство

$$\sup_{\tau \in \mathcal{J}} \rho^{(n)}(t) \leqslant \varepsilon^{(n)}, \text{ где } \lim_{n \mapsto \infty} \varepsilon^{(n)} = 0. \tag{4.20}$$

Учитывая (4.20), получаем включение

$$x(t) = \lim_{n \mapsto \infty} y^{(n)}(t) \in W^{(0)}(t), \quad t \in \mathcal{J}. \tag{4.21}$$

Из (4.21), замкнутости множества W^0 и непрерывности вектор-функции $x(t)$ на $[t_*, t^*]$ следует

$$x(t) \in W^0(t), \quad t \in [t_*, t^*]. \tag{4.22}$$

Поскольку (4.22) выполняется для любого решения $x(t)$, $x(t_*) = x_* \in W^0(t_*)$, д.в. $\dfrac{dx}{dt} \in F(t, x)$, то это означает, что W^0 инвариантно относительно этого д.в. Показано, что выполняется условие a.

Покажем, что выполняется условие b : для любой точки $z^{(0)} \in Z^0(\tau_0)$ найдется решение $z^0(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, д.в. $\dfrac{dz}{d\tau} \in H(\tau, z)$, $z^0(\tau_0) = z^{(0)}$, удовлетворяющее включению

$$z^0(\tau) \in Z^0(\tau), \quad \tau \in [t_0, \vartheta].$$

Предварительно опишем кратко шаги, приводящие к условию b. Выберем двоичное разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ и A-систему $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$. Далее, для произвольной точки $z^{(0)} \in Z^{(0)}(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$ опишем как конструировать по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, ломаную $\widetilde{z}^\Gamma(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющую включениям

$$\frac{dz}{d\tau} \in H(\tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i)), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

а также обладающую «хорошей» близостью к Z^0. Затем рассмотрим последовательность $\{\Gamma^{(n)}\}$ двоичных разбиений $\Gamma^{(n)}$, $\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \mapsto \infty$. Каждому $\Gamma^{(n)}$ сопоставим (сконструируем) такую ломаную $\widetilde{z}^{(n)}(\tau) = \widetilde{z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Из последовательности $\{\widetilde{z}^{(n)}(\tau)\}$ на $[t_0, \vartheta]$ выделим последовательность, сходящуюся равномерно на $[t_0, \vartheta]$ к некоторой вектор-функции $z(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Из «хорошей» близости точек $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ к $\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{1, N(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, сходимости систем $\{\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) : \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}\}$ к Z^0 при $n \mapsto \infty$ и замкнутости Z^0 следует, что непрерывная вектор-функция $z(\tau)$ удовлетворяет включению $(\tau, z(\tau)) \in Z^0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Также справедливо д.в. $\dfrac{dz(\tau)}{d\tau} \in H(\tau, z(\tau))$, $z(\tau_0) = z^{(0)}$, п.в. на $[t_0, \vartheta]$.

Детализируем изложенную схему. Разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ будем рассматривать также параллельно и в прямом времени $t : \Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ $(\tau_i + t_j = t_0 + \vartheta, i = \overline{1, N})$. Привлечем к рассмотрению также A-систему $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающую разбиению Γ. Опишем пошаговую процедуру конструирования ломаной $\widetilde{z}^\Gamma(\tau)$,

$\tau \in [t_0, \vartheta]$. Эту процедуру начнем в произвольно выбранной точке $z^{(0)} \in \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_0) = Z^0(\tau_0) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}$. Параллельно с последовательностью $\{\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), \tau_i \in \Gamma\}$ будем конструировать еще две вспомогательные последовательности $\{\widetilde{x}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$ и $\{\widetilde{y}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$ точек $\widetilde{x}^\Gamma(t_j) \in \widetilde{X}^\Gamma(t_j)$ и $\widetilde{y}^\Gamma(t_j) \in \widetilde{Z}^\Gamma(t_j)$.

Процедура построения точек $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i)$, $\widetilde{x}^\Gamma(t_j)$, $\widetilde{y}^\Gamma(t_j)$ последовательно по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ однотипна. Незначительное отличие есть лишь на начальном шаге $[\tau_0, \tau_1]$: на этом шаге точка $\widetilde{y}^\Gamma(t_N)$ полагается совпадающей с точкой $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_0) = z^{(0)}$. На других шагах $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ равенство $\widetilde{y}^\Gamma(t_j) = \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i)$ $(i + j = N)$ не обязательно.

В ходе конструирования ломаной $\widetilde{z}^\Gamma(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$ нас будет интересовать оценка сверху величины

$$\varepsilon^{(i)} = \|\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i) - \widetilde{x}^\Gamma(t_j)\|, \qquad \tau_i + t_j = t_0 + \vartheta,$$

через величину $\varepsilon^{(i-1)} = \|\widetilde{z}^\Gamma(\tau_{i-1}) - \widetilde{x}^\Gamma(t_{j+1})\|$, вычисленную на предыдущем шаге $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ разбиения Γ.

Итак, считая, что выбрана точка $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_0) = z^{(0)} \in \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_0)$, полагаем $\widetilde{y}^\Gamma(t_N) = \widetilde{z}^\Gamma(\tau_0)$ и находим в $\widetilde{X}^\Gamma(t_N)$ ближайшую точку $\widetilde{x}^\Gamma(t_N)$ к точке $\widetilde{y}^\Gamma(t_N)$ (см. рис. 1). Согласно условию **C**, справедливо неравенство

$$\varepsilon^{(0)} = \|\widetilde{z}^\Gamma(\tau_0) - \widetilde{x}^\Gamma(t_n)\| \leqslant \sigma(\Delta). \tag{4.23}$$

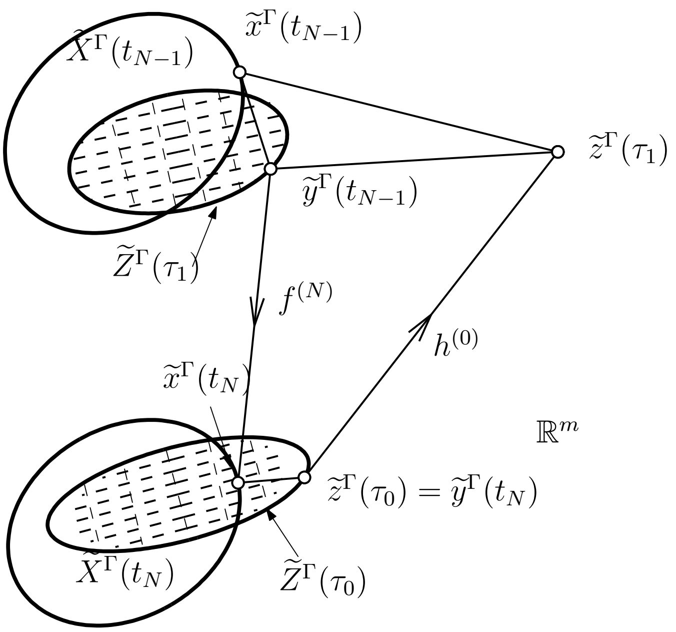

Рис. 1.

Предположим теперь, что, стартуя из точки $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_0)$ и принимая во внимание оценку (4.23) мы в нашей процедуре осуществили шаги $[\tau_0, \tau_1], [\tau_2, \tau_3], \ldots, [\tau_{i-2}, \tau_{i-1}], [\tau_{i-1}, \tau_i]$ и реализовали точку $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i)$ ломаной $\widetilde{z}^\Gamma(\tau)$, точку $\widetilde{y}^\Gamma(t_j) \in \widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ и точку $\widetilde{x}^\Gamma(t_j) \in \widetilde{X}^\Gamma(t_j)$ — ближайшую в $\widetilde{X}^\Gamma(t_j)$ к точке $\widetilde{y}^\Gamma(t_j)$ (см. рис. 2). Согласно условию **C**, справедлива оценка

$$\|\widetilde{x}^\Gamma(t_j) - \widetilde{y}^\Gamma(t_j)\| \leqslant \sigma(\Delta). \tag{4.24}$$

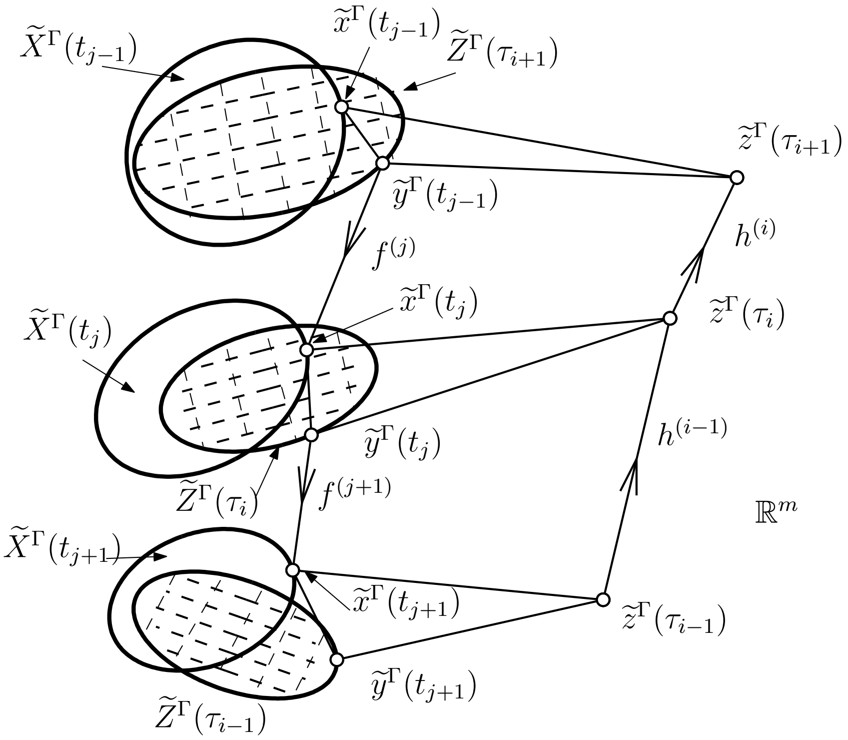

Рис. 2.

Для последующих оценок введем в параллель величине $\varepsilon^{(i)}$ величину

$$\rho^{(i)} = \|\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i) - \widetilde{y}^{\Gamma}(t_j)\|, \quad \tau_i + t_j = t_0 + \vartheta, \quad i = \overline{0, N}.$$

Опишем процедуру конструирования ломаной $\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$; для этого сначала опишем построение точки $\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_{i+1})$. Точка $\widetilde{x}^{\Gamma}(t_j)$ представима в виде $\widetilde{x}^{\Gamma}(t_j) = \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}) + \Delta f^{(j)}$, где $\widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}) \in \widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_{i+1})$, $f^{(j)} \in F(t_{j-1}, \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}))$. Вектор $f^{(j)}$ представим в виде

$$f^{(j)} = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k f(t_{j-1}, \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}), u^{(k)}), \quad \alpha_k \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k = 1, \quad u^{(k)} \in P, \quad k = \overline{1, m+1}.$$

Определим вектор

$$\begin{gathered} h^{(i)} = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k h(\tau_i, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i), u^{(k)}) \in H(\tau_i, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i)) = \\ = -F(t_0 + \vartheta - \tau_i, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i)) = -F(t_j, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i)), \quad i + j = N. \end{gathered}$$

Введем точку $\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}) = \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i) + \Delta h^{(i)}$. Оценим сверху величину $\varepsilon^{(i+1)}$, оценив предварительно величину $\rho^{(i+1)}$ через $\varepsilon^{(i)}$. Справедлива оценка

$$\begin{gathered} \rho^{(i+1)} = \|\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_{i+1}) - \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1})\| = \\ = \|(\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i) + \Delta h^{(i)}) - (\widetilde{x}^{\Gamma}(t_j) - \Delta f^{(j)})\| = \\ = \|(\widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i) - \widetilde{x}^{\Gamma}(t_j)) + \Delta(h^{(i)} + f^{(j)})\| \leqslant \varepsilon^{(i)} + \Delta\|h^{(i)} + f^{(j)}\|. \end{gathered} \tag{4.25}$$

Справедлива оценка

$$\begin{gathered} \|h^{(i)} + f^{(j)}\| \leqslant \|\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k (h(\tau_i, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i), u^{(k)}) + f(t_{j-1}, \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}), u^{(k)}))\| \leqslant \\ \leqslant \max_{k=\overline{1,m+1}} \|h(\tau_i, \widetilde{z}^{\Gamma}(\tau_i), u^{(k)}) + f(t_{j-1}, \widetilde{y}^{\Gamma}(t_{j-1}), u^{(k)})\|. \end{gathered} \tag{4.26}$$

Оценим теперь сверху величину $\|h(\tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) + f(t_{j-1}, \widetilde{y}^\Gamma(t_{j-1}), u)\|$, $u \in P$. Так как, по определению, выполняется равенство

$$h(\tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) = -f(t_0 + \vartheta - \tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) = -f(t_j, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u),$$

то справедливо

$$\begin{gathered} h(\tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) + f(t_{j-1}, \widetilde{y}^\Gamma(t_{j-1}), u) = f(t_{j-1}, \widetilde{y}^\Gamma(t_{j-1}), u) - \\ - f(t_j, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) = (f(t_j, \widetilde{x}^\Gamma(t_j), u) - f(t_j, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u)) + (f(t_{j-1}, \widetilde{x}^\Gamma(t_j) - \\ - \Delta f^{(j)}, u) - f(t_j, \widetilde{x}^\Gamma(t_j), u)). \end{gathered}$$

Справедлива оценка

$$\begin{gathered} \|h(\tau_i, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u) + f(t_{j-1}, \widetilde{y}^\Gamma(t_{j-1}), u\| \leqslant \|f(t_j, \widetilde{x}^\Gamma(t_j), u) - f(t_j, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_i), u)\| + \\ + \|f(t_{j-1}, \widetilde{x}^\Gamma(t_j) - \Delta f^{(j)}, u) - f(t_j, \widetilde{x}^\Gamma(t_j), u)\| \leqslant \\ \leqslant L \cdot \varepsilon^{(i)} + \omega^*(|t_{j-1} - t_j| + \Delta\|f^{(j)}\|) \leqslant L \cdot \varepsilon^{(i)} + \omega^*((1+K)\Delta). \end{gathered} \tag{4.27}$$

В этом неравенстве учтены $(t_{j-1}, f^{(j)}) \in \mathbb{D}$ и $K = \max(\|f(t,x,u)\| : (t,x,u) \in \mathbb{D} \times P)$. Принимая во внимание (4.24), (4.25), (4.26), (4.27) получаем оценку

$$\varepsilon^{(i+1)} \leqslant \rho^{(i+1)} + \|\widetilde{x}^\Gamma(t_j) - \widetilde{y}^\Gamma(t_j)\| \leqslant \rho^{(i+1)} + \sigma(\Delta) \leqslant \varepsilon^{(i)} + \Delta(L\varepsilon^{(i)} + \omega^*((1+K)\Delta)) + \sigma(\Delta).$$

Введем в рассмотрение функцию $\lambda(\delta) = \omega(\delta) + \sigma(\delta)$, $\sigma \in (0, \infty)$. Из предыдущей оценки следует локальная (на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$) оценка величины $\varepsilon^{(i+1)}$ через $\varepsilon^{(i)}$:

$$\varepsilon^{(i+1)} \leqslant e^{L\Delta_i}\varepsilon^{(i)} + \lambda(\Delta_i). \tag{4.28}$$

Из оценок вида (4.28) для величин $\varepsilon^{(i)}, \varepsilon^{(i-1)}, \ldots, \varepsilon^{(1)}$ получаем путем последовательной подстановки вместо них их оценок сверху:

$$\begin{gathered} \varepsilon^{(i+1)} \leqslant e^{L(\tau_{i+1} - t_0)} \cdot \varepsilon^{(0)} + e^{L(\tau_{i+1} - t_0)} \cdot (\tau_{i+1} - t_0) \cdot (\omega^*((1+K)\Delta) + \sigma^*(\Delta)), \\ i = \overline{0, N-1}; \end{gathered} \tag{4.29}$$

здесь обозначено $\sigma^*(\delta) = \delta^{-1} \cdot \sigma(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$. Оценку (4.29) запишем в виде

$$\varepsilon^{(i)} \leqslant e^{L(\tau_i - t_0)} \cdot (\tau_i - t_0) \cdot (\omega^*((1+K)\Delta) + \sigma^*(\Delta)), \quad i = \overline{1, N}. \tag{4.30}$$

Далее замечаем, что точки $\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i)$ в проведенных рассуждениях определялись равенствами

$$\widetilde{z}^\Gamma(\tau_i) = \widetilde{z}^\Gamma(\tau_{i-1}) + \Delta h^{(i-1)}, \tag{4.31}$$

где $h^{(i-1)} \in H(\tau_{i-1}, \widetilde{z}^\Gamma(\tau_{i-1}))$, $i = \overline{1, N}$.

Рассмотрим последовательность $\{\Gamma^{(n)}\}$ двоичных разбиений $\Gamma^{(n)}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ ($\Delta^{(n)} = \Delta(\Gamma^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \mapsto \infty$).

Каждому разбиению $\Gamma^{(n)}$ сопоставим, в соответствии с приведенным выше алгоритмом для разбиения Γ, последовательность $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = \widetilde{z}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{0, N(n)}$, где $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = z^{(0)} \in \widetilde{Z}^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = \mathbb{X}^{(\vartheta)}, \widetilde{y}^{(n)}(\tau_0^{(n)}) = \widetilde{y}^{\Gamma^{(n)}}(\tau_0^{(n)}) = \widetilde{z}^{(n)}(\tau_0^{(n)})$. Последовательность $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$ определяется соотношением вида (4.31):

$$\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) = \widetilde{z}^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}) + \Delta h^{(i-1)}(n), \text{ где } h^{(i-1)}(n) \in H(\tau_{i-1}^{(n)}, \widetilde{z}^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)})), \quad i = \overline{1, N(n)}.$$

Через точки $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{0, N(n)}$, отвечающие разбиению $\Gamma^{(n)}$, проведем, как через узлы, непрерывную ломаную $\widetilde{z}^{(n)}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$:

$$\widetilde{z}^{(n)}(\tau) = \widetilde{z}^{(n)}(\tau_{i-1}^{(n)}) + (\tau - \tau_{i-1}^{(n)})h^{(i-1)}(n), \quad \tau \in [\tau_{i-1}^{(n)}, \tau_i^{(n)}], \quad i = \overline{1, N(n)}.$$

Для разбиений $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, и отвечающих им узловых точек $\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})$, $i = \overline{1, N(n)}$, оценка (4.30) примет вид

$$\varepsilon^{(i)}(n) \leqslant e^{L(\tau_i^{(n)} - t_0)} \cdot (\tau_i^{(n)} - t_0) \cdot \lambda^*(\Delta^{(n)}), \;\; \tau_i^{(n)} \in \Gamma^{(n)}, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{4.32}$$

В (4.32) используются обозначения: $\varepsilon^{(i)}(n) = \|\widetilde{z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}) - \widetilde{x}^{\Gamma^{(n)}}(t_j^{(n)})\|$, $\tau_i^{(n)}$и $t_j^{(n)}$ из Γ, $\tau_i^{(n)} + t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta$, $i = \overline{1, N(n)}$; $\lambda^*(\delta) = \omega^*((1+K)\delta) + \sigma^*(\delta)$, $\delta \in (0, \infty)$.

Так как $\lambda^*(\Delta^{(n)}) \downarrow 0$ при $n \mapsto \infty$, то $\max\limits_{i \in \overline{0, N(n)}} \rho(z^{(n)}(\tau_i^{(n)}), \widetilde{X}^{(n)}(t_j^{(n)})) \mapsto 0$ при $n \mapsto \infty$; здесь $\rho(z, X)$ — расстояние от точки z до множества X в $\mathbb{R}^m$; $\widetilde{X}^{(n)}(t_j^{(n)}) = \widetilde{X}^{\Gamma^{(n)}}(t_j^{(n)})$, $\tau_i^{(n)} + t_j^{(n)} = t_0 + \vartheta$. Поскольку $\max\limits_{i = \overline{0, N(n)}} d(\widetilde{X}^{(n)}(t_j^{(n)}), \widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)})) \mapsto 0$ при $n \mapsto \infty$ и $\max\limits_{i = \overline{0, N(n)}} d(\widetilde{Z}^{(n)}(\tau_i^{(n)}), Z^{(0)}(\tau_i^{(n)})) \mapsto 0$ при $n \mapsto \infty$, то $\max\limits_{i = \overline{0, N(n)}} d(\widetilde{X}^{(n)}(t_j^{(n)}), Z^{(0)}(\tau_i^{(n)})) \mapsto 0$ при $n \mapsto \infty$ и, значит,

$$\max_{i = \overline{0, N(n)}} \rho(z^{(n)}(\tau_i^{(n)}), Z^{(0)}(\tau_i^{(n)})) \mapsto 0 \text{ при } n \mapsto \infty. \tag{4.33}$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что существует равномерный предел $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \widetilde{z}^{(n)}(\tau) = z(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$. Из (4.33), замкнутости множества Z^0 и непрерывности $z(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ следует $(\tau, z(\tau)) \in Z^0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$. Кроме того, из (4.31) следует, что вектор функция $z(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $z(\tau_0) = z^{(0)} \in Z^{(0)}(\tau_0)$, удовлетворяет включению $\dfrac{dz}{d\tau} \in H(\tau, z)$ п.в. на $[t_0, \vartheta]$. Вместе с тем мы показали, что выполнено условие b, т.е. множество Z^0 слабо инвариантно относительно д.в. (2.2). Теорема 4.1 доказана. □

§ 5. Примеры

На промежутке $[t_0, \vartheta] = [0, 2]$ рассматриваются две конкретные задачи 1 о наведении интегральной воронки нелинейной управляемой системы в $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \cdot (2 + \dfrac{1}{2}\sin t) + \alpha(x) \cdot \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|} \cdot u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot (2 + \dfrac{1}{2}\sin t) + \alpha(x) \cdot \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|} \cdot u_2, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0.01 \text{ при } \|x\| < 1, \\ \dfrac{0.01}{\|x\|} \text{ при } \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2) \in P = \{u^* = (u_1^*, u_2^*) : \|u^*\| \leqslant 0.5\}$

Рассматриваются два варианта целевого множества M в форме овалов Кассини:

a) $M = \{(x_1, x_2) : ((x_1 - a)^2 + x_2^2) \cdot ((x_1 + a)^2 + x_2^2) \leqslant b^4\}$, $a = 5$, $b = 5.5$;

b) $M = \{(x_1, x_2) : ((x_2 - a)^2 + x_1^2) \cdot ((x_1 + a)^2 + x_1^2) \leqslant b^4$, $a = 5$, $b = 5.5$.

Рассматриваемая здесь в двух вариантах задача 1 состоит в выделении в фазовом пространстве $\mathbb{R}^2$ системы (5.1) начального множества $\mathbb{X}^{(0)}$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{X}(2, 0, \mathbb{X}^{(0)}) = M; \tag{5.2}$$

здесь $\mathbb{X}(2,0,\mathbb{X}^{(0)})$ — множество достижимости в момент 2 системы (5.1), то есть временно́е сечение в $\mathbb{R}^2$ интегральной воронки $\mathbb{X}(0,\mathbb{X}^{(0)})$ системы (5.1), отвечающее моменту $\vartheta = 2$ и с начальным множеством $\mathbb{X}^{(0)}$.

Согласно теории, изложенной в параграфах 2—4, множество $\mathbb{X}^{(0)}$ в $\mathbb{R}^2$ вычисляется точно как конечное временно́е сечение $Z^0(\vartheta) = Z^0(2) \subset \mathbb{R}^2$ максимального тракта Z^0 системы (5.1), представленной в обратном времени $\tau \in [0,2]$ с начальным временны́м сечением $Z^0(\tau_0) = Z^{(0)} = M$.

Вычисление множества $\mathbb{X}^{(0)}$, удовлетворяющего равенству (5.2), осуществлялось приближенно путем приближенного вычисления Z^0, согласно алгоритмам приведенным в параграфах 2—4.

Приближенное вычисление максимального тракта Z^0 проведено в виде A-системы $\{\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i) : \tau_i \in \Gamma\}$, отвечающей разбиению $\Gamma = \{\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta = 2\}$ промежутка $[0,2]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = 0.005$ $(\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta,\ i = \overline{0,N})$.

В результате этих приближенных вычислений получаем аппроксимацию множества $\mathbb{X}^{(0)}$ — множество $\widetilde{Z}^\Gamma(2)$.

После этого осуществляется анализ точности полученного решения уравнения (5.2). Для этого конструируется приближенно в прямом времени $t \in [0,2]$ по шагам $[t_i, t_{i+1}]$ интегральная воронка $W^0 = \mathbb{X}(0,\mathbb{X}^{(0)})$ системы (5.1) с начальным множеством $\overset{a}{X}{}^\Gamma(\tau_0) = \widetilde{Z}^\Gamma(2)$ в виде системы множеств $\{\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$, отвечающей разбиению Γ:

$$\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j) = X^\Gamma(t_j, t_{j-1}, \overset{a}{X}{}^\Gamma(t_{j-1})) =$$
$$= \{x^\Gamma(t_j) = x^\Gamma(t_{j-1}) + \Delta_{j-1} f^{(j-1)} : x^\Gamma(t_{j-1}) \in \overset{a}{X}{}^\Gamma(t_{j-1}),\ f^{(j-1)} \in F(t_{j-1},\ x^\Gamma(t_{j-1}))\};$$

здесь $F(t,x) = co\{f(t,x,u) : u \in P\}$,
$$f(t,x,u) = \begin{pmatrix} -x_2 \cdot (2 + \dfrac{1}{2}\sin t) + \alpha(x) \cdot \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} \cdot u_1 \\ x_1 \cdot (2 + \dfrac{1}{2}\sin t) + \alpha(x) \cdot \dfrac{\|x\|}{1+\|x\|} \cdot u_2 \end{pmatrix}, \ \ (t,x,u) \in \mathbb{D} \times \mathbb{P}.$$

Хаусдорфово рассогласование $d(\overset{a}{X}{}^\Gamma(2), \widetilde{Z}^\Gamma(0))$ последнего множества $\overset{a}{X}{}^\Gamma(2)$ системы $\{\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j) : t_j \in \Gamma\}$ и целевого множества $\widetilde{Z}^\Gamma(0) = M$ задачи 1 показывает, насколько точно вычислено решение $\mathbb{X}^{(0)}$ задачи 1.

На представленных ниже графических результатах приближенных вычислений множеств Z^0 и W^0 на каждом рисунке изображены одновременно множества $\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j)$ $(\tau_i + t_j = t_0 + \vartheta = 2)$, где t_j принимает значения 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2. При этом границы $\partial\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ и $\partial\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j)$ множеств $\widetilde{Z}^\Gamma(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^\Gamma(t_j)$ отмечены конечными наборами точек в $\mathbb{R}^2$ соответственно синим и красным цветами.

Множество $\widetilde{Z}^\Gamma(0)$ и $\overset{a}{X}{}^\Gamma(2)$ в обоих вариантах a и b практически совпадают, что означает высокую точность приближенных вычислений, то есть высокую точность вычисленного приближенного решения $\overset{a}{X}{}^\Gamma(0)$ задачи 1 (уравнения (5.2)).

Вариант a.

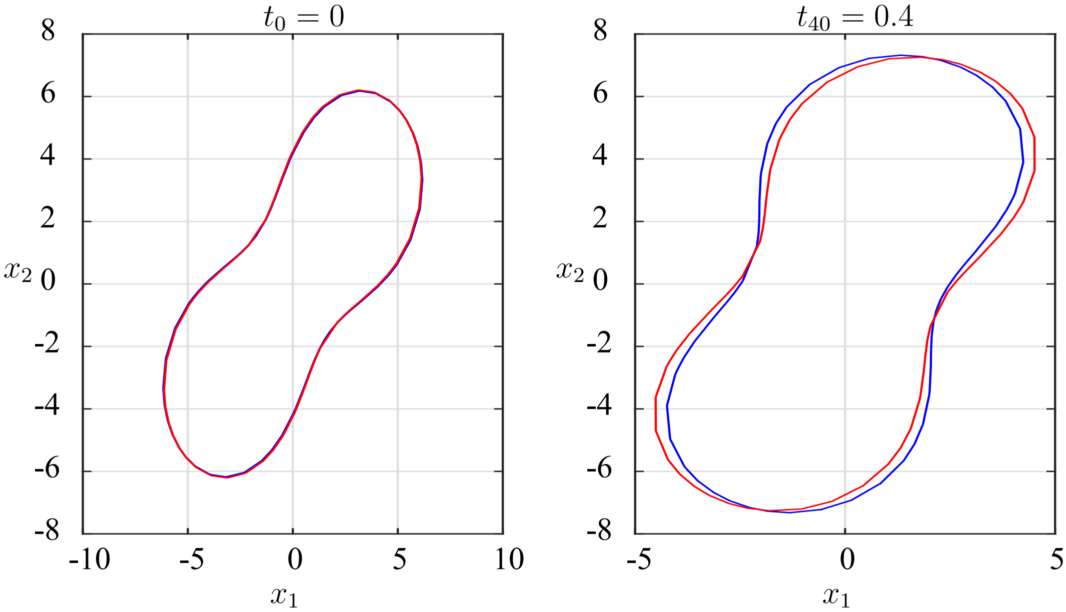

Рис. 3. Вариант a. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $(t_j + \tau_i = 2, j = \{0; 40\})$

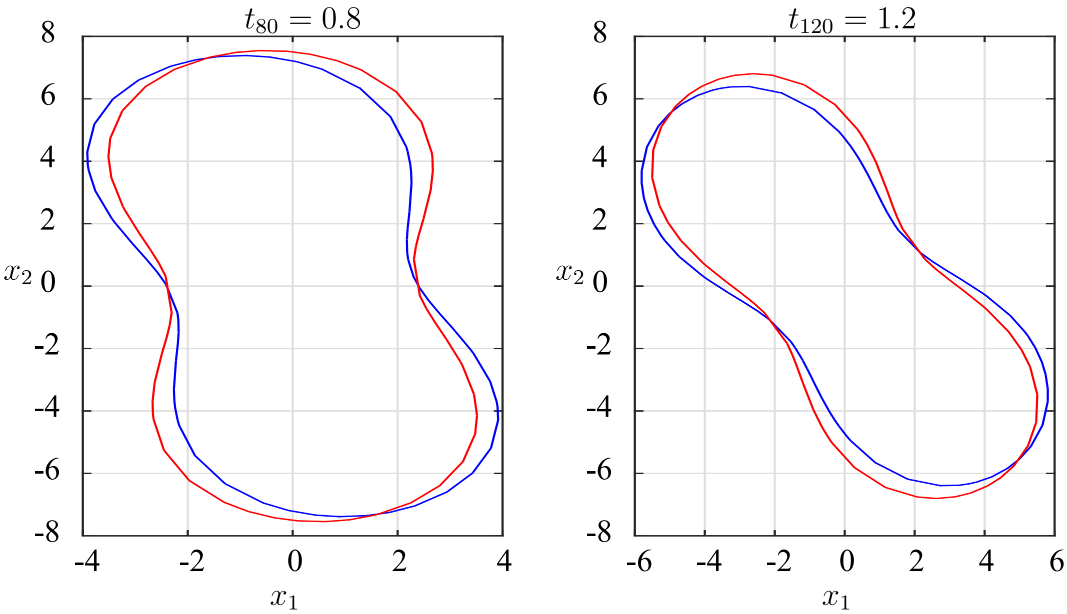

Рис. 4. Вариант a. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $(t_j + \tau_i = 2, j = \{80; 120\})$

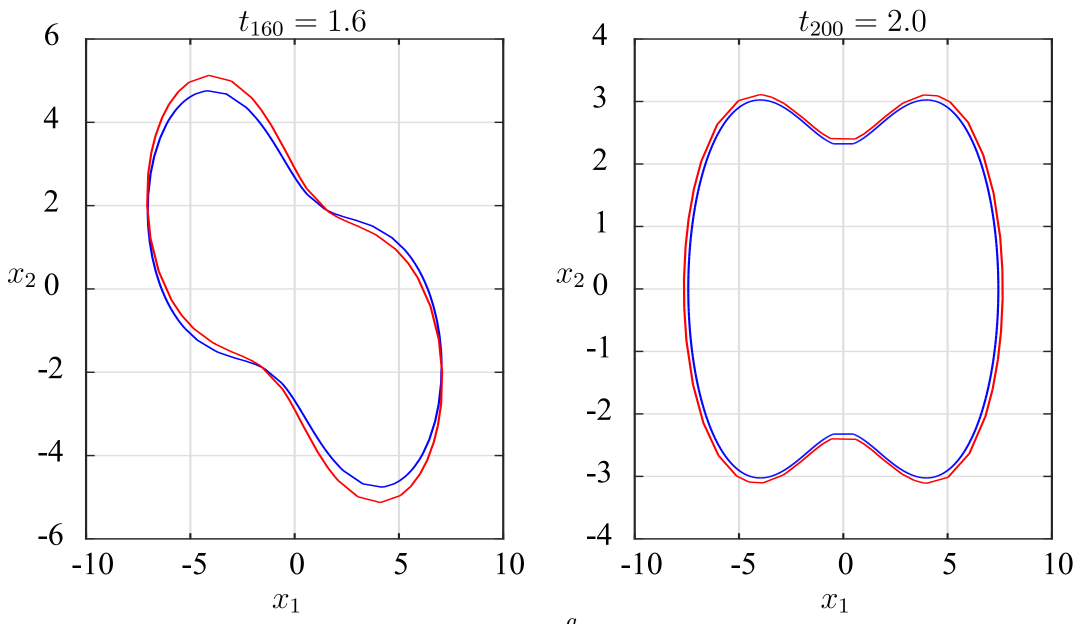

Рис. 5. Вариант a. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $(t_j + \tau_i = 2, j = \{160; 200\})$

Вариант b.

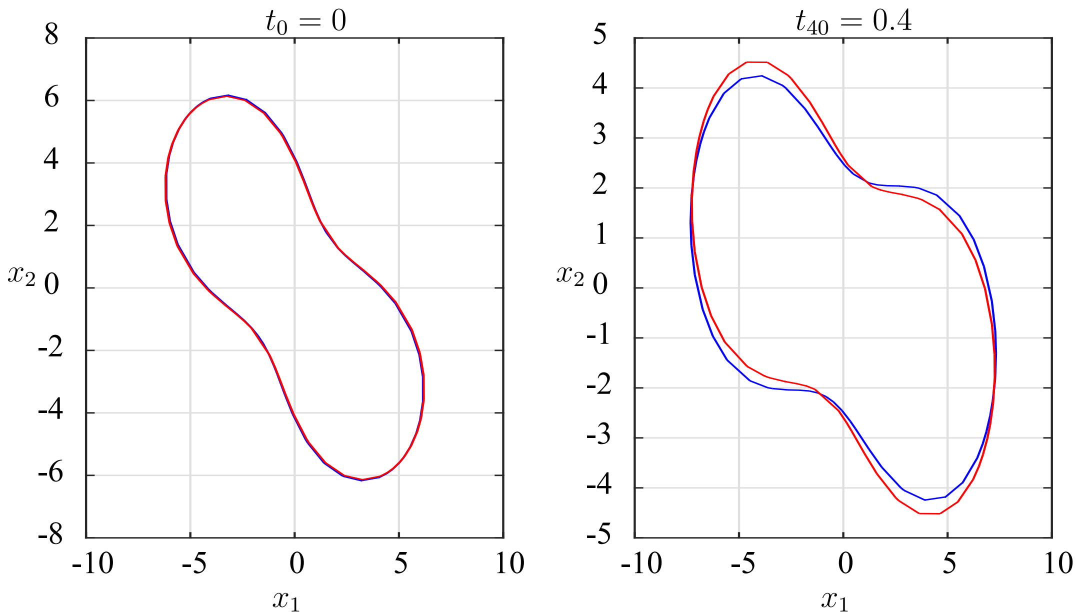

Рис. 6. Вариант b. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $(t_j + \tau_i = 2, j = \{0; 40\})$

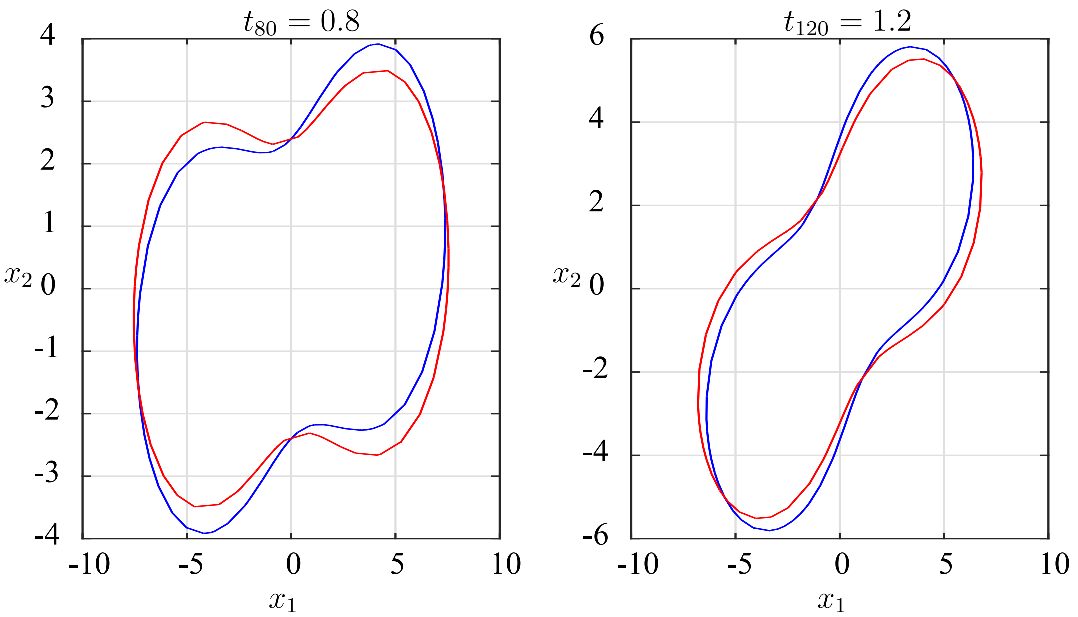

Рис. 7. Вариант b. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $\ (t_j + \tau_i = 2, j = \{80; 120\})$

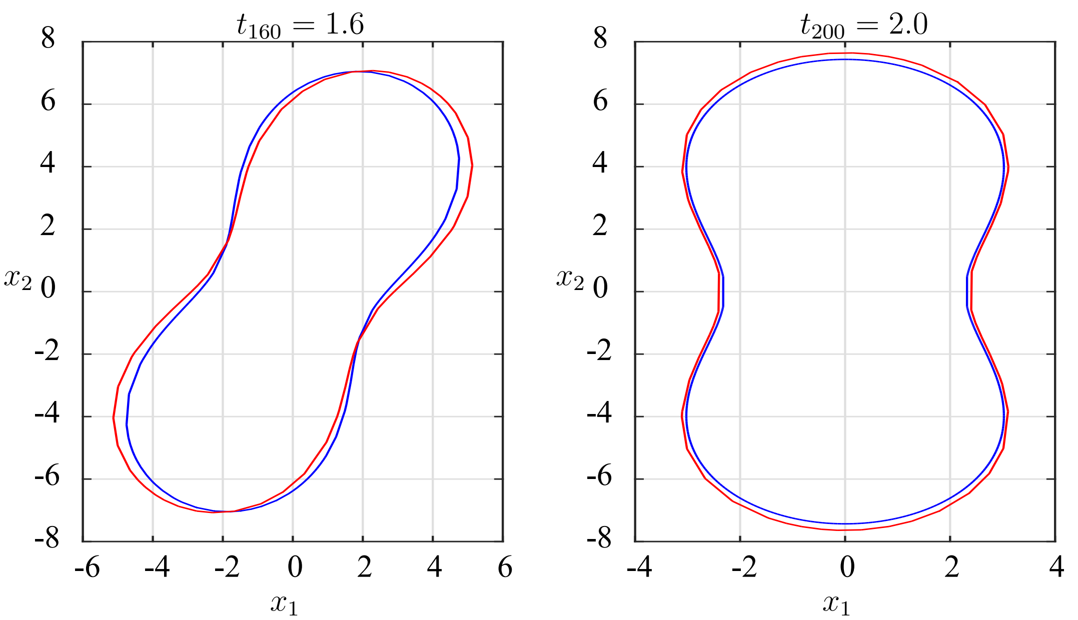

Рис. 8. Вариант b. Множества $\widetilde{Z}^{\Gamma}(\tau_i)$ и $\overset{a}{X}{}^{\Gamma}(t_j)$ $\ (t_j + \tau_i = 2, j = \{160; 200\})$

При выполнении исследований были использованы вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект 0827-2020-0010 «Развитие теории и методов управления и стабилизации динамических систем».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
2. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2009.
3. Куржанский А.Б., Месяц А.И. Управление эллипсоидальными траекториями. Теория и вычисления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 3. С. 404–414. https://doi.org/10.7868/S0044466914030120

4. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
6. Никольский М.С. Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. Т. 28. № 8. С. 1252–1254.
7. Гусев М.И., Зыков И.В. Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях // Труды ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 103–115. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115
8. Филиппова Т.Ф. Внешние оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью и комбинированной нелинейностью // Труды ИММ УрО РАН. Т. 23. № 1. 2017. С. 262–274. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-262-274
9. Ушаков А.В. Об одном варианте приближенного построения разрешающих управлений в задаче о сближении // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 4. С. 94–107. https://doi.org/10.20537/vm120408
10. Ушаков В.Н., Ухоботов В.И., Ушаков А.В., Паршиков Г.В. К решению задач о сближении управляемых систем // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 276–291. https://doi.org/10.1134/S0371968515040214
11. Ушаков В.Н., Ершов А.А. К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 543–564. https://doi.org/10.20537/vm160409
12. Хрипунов А.П. Построение областей достижимостей и стабильных мостов в нелинейных задачах управления: дис. . . . канд. физ.-матем. наук / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 1992, 400 с.
13. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. https://doi.org/10.4213/sm8761
14. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15. № 1. С. 67–78.
15. Панасюк А.И. Множества достижимости дифференциальных включений в замкнутой области определения // Математические заметки. 1991. Т. 50. Вып. 3. С. 113–121.
16. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Множества достижимости и притяжения линейных систем с ограниченным управлением: описание с помощью инвариантных эллипсоидов // Стохастическая оптимизация в информатике. 2008. Т. 4. С. 3–24.
17. Козлов А.А. Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236. https://doi.org/10.35634/vm200206

Поступила в редакцию 01.09.2020

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ушаков Андрей Владимирович, научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.;
научный сотрудник, лаборатория математической теории управления, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Цитирование: В. Н. Ушаков, А. В. Ушаков. О наведении интегральной воронки управляемой системы на целевое множество в фазовом пространстве // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 79–101.

V. N. Ushakov, A. V. Ushakov

On targeting an integral funnel of control system at a target set in the phase space

Keywords: control, control system, differential inclusion, target set, phase space, approximating system.

MSC2010: 37B65, 37E05

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-07

A control system in finite-dimensional Euclidean space is considered. On a given time interval, we investigate the problem of constructing an integral funnel for which a section corresponding to the last time moment of interval is equal to a target set in a phase space. Since the exact solution of such a funnel is possible only in rare cases, the question of the approximate construction of an integral funnel is being studied.
The research was performed using computing resources of the collective use center of IMM UB RAS "Supercomputer center of IMM UB RAS".

Funding. The research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of Russian Federation in the framework of state assignment no. 075-00232-20-01, project 0827-2020-0010 "Development of the theory and methods of control and stabilization of dynamical systems".

REFERENCES

1. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and observation under uncertainty), Moscow: Nauka, 1977.
2. Kurzhanski A.B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 2009.
3. Kurzhanski A.B., Mesyats A.I. Control of ellipsoidal trajectories: theory and numerical results, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, issue 3, pp. 418–428. https://doi.org/10.1134/S0965542514030117
4. Chernousko F.L., Melikyan A.A. *Igrovye zadachi upraleniya i poiska* (Game problems of control and search), Moscow: Nauka, 1978.
5. Chernousko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoianiya dinamicheskikh sistem* (Evaluation of phase state of dynamical systems), Moscow: Nauka, 1988.
6. Nikolskii M.S. A method of approximating an attainable set for a differential inclusion, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1988, vol. 28, issue 4, pp. 192–194. https://doi.org/10.1016/0041-5553(88)90130-9
7. Gusev M.I., Zykov I.V. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 114–125. https://doi.org/10.1134/S0081543818020116
8. Filippova T.F. External estimates for reachable sets of a control system with uncertainty and combined nonlinearity, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 32–43. https://doi.org/10.1134/S0081543818050036
9. Ushakov A.V. On one version of approximate permitting control calculation in a problem of approaching, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 4, pp. 94–107 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120408
10. Ushakov V.N., Ukhobotov V.I., Ushakov A.V., Parshikov G.V. On solving approach problems for control systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 263—278. https://doi.org/10.1134/S0081543815080210
11. Ushakov V.N., Ershov A.A. On the solution of control problems with fixed terminal time, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 543–564 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160409
12. Khripunov A.P. *Construction of attainability domains and stable bridges in nonlinear control problems*, Cand. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Yekaterinburg, 1992, 400 p. (In Russian).

13. Ershov A.A., Ushakov V.N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352. https://doi.org/10.1070/SM8761
14. Panasyuk A.I. Accessibility sets of differential inclusions in a closed domain, *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, vol. 50, issue 3, pp. 956–961. https://doi.org/10.1007/BF01156142
15. Lotov A.V. A numerical method for constructing sets of attainability for linear controlled systems with phase constraints, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1975, vol. 15, pp. 63–74. https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90135-4
16. Polyak B.T., Sherbakov P.S. Reachability and attraction domains for linear systems with bounded control: a characterization via invariant ellipsoids, *Stokhasticheskaya Optimizatsiya v Informatike*, 2008, vol. 4, pp. 3–23 (in Russian).
17. Kozlov A.A. The criterion of uniform global attainability of periodic systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 221–236 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm200206

Received 01.09.2020

Ushakov Vladimir Nikolaevich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Main Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ushakov Andrei Vladimirovich, Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Researcher, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Citation: V. N. Ushakov, A. V. Ushakov. On targeting an integral funnel of control system at a target set in the phase space, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 79–101.