Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2020. Том 56. С. 122–137

УДК 519.6

© *А. Г. Ченцов*

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ С ТОПОЛОГИЕЙ ВОЛМЭНОВСКОГО ТИПА

Исследуются максимальные сцепленные системы (МСС) и ультрафильтры (у/ф) на широко понимаемом измеримом пространстве (имеется в виду непустое множество с оснащением в виде π-системы с «нулем» и «единицей»). При оснащении топологией волмэновского типа множество МСС превращается в суперкомпактное T_1-пространство. Исследуются условия, при которых данное пространство МСС является суперкомпактом, т. е. суперкомпактным T_2-пространством. Эти условия распространяются затем и на пространство у/ф при оснащении топологией волмэновского типа. Полученные достаточные условия согласуются с представлениями, получаемыми в вырожденных случаях битопологических пространств с топологиями волмэновского и стоуновского типов, но не исчерпываются этими представлениями.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, квазиокрестность, топология, ультрафильтр.

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-09

Введение

В статье рассматриваются вопросы, связанные с построением максимальных сцепленных систем (МСС) и изучением некоторых свойств топологического пространства (ТП), получаемого при оснащении множества МСС топологией волмэновского типа. При этом сами МСС определяются в виде максимальных сцепленных подсемейств π-системы [1, с. 14] (имеется в виду семейство, замкнутое относительно конечных пересечений) с «нулем» и «единицей» (пустое и объемлющее множества соответственно). Данное построение обобщает известную конструкцию суперрасширения [2, гл. VII, § 4], где рассматривались МСС на π-системе (на самом деле, решетке) замкнутых множеств в ТП. Это построение охватывает случаи, когда исходная π-система является топологией и алгеброй множеств, т. е. случаи МСС на ТП и на измеримом пространстве (ИП). С учетом этого непустое множество с оснащением в виде π-системы с «нулем» и «единицей» рассматриваем далее как широко понимаемое ИП. Традиционный в теории суперрасширений ТП вариант оснащения связан с топологией волмэновского типа (см. в этой связи построения, используемые в расширении Волмэна [3, гл. 3]); отметим работы [4–6], касающиеся важного свойства суперкомпактности ТП и их суперрасширений. В частности, отметим глубокий результат [6] о суперкомпактности метризуемых компактов, а также [2, предложение 4.16] о свойстве отделимости (в смысле аксиомы T_2) суперрасширения T_4-пространства. В настоящей работе исследуются некоторые аналоги последнего положения, касающиеся, однако, π-систем общего вида. Вопрос об отделимости пространства МСС с топологией волмэновского типа представляется важным, поскольку при его положительном решении мы получаем суперкомпакт (см. [7, 5.11].

Заметим, что схема [2, предложение 4.16] естественна в конструкциях на основе топологий волмэновского типа (см. в этой связи [3, 3.6.22]). В то же время в случае, когда рассматриваются МСС произвольной π-системы (с «нулем» и «единицей»), возникает потребность в коррекции этой схемы, а, точнее, в изменении условий, налагаемых на упомянутую π-систему. Это, в частности, требуется, когда последняя является топологией и множество МСС с топологией волмэновского типа является [8, раздел 8] суперкомпактом, а достаточное (для T_2-отделимости) условие, подобное T_4-отделимости в [2, предложение 4.16], в типичных случаях ТП нарушается. Соответствующая коррекция упомянутого условия делается в настоящей работе, что имеет ряд полезных следствий. В этих построениях важную роль играет понятие квазиокрестности произвольного множества π-системы.

§ 1. Общие понятия и обозначения

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ обозначает пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если a и b — объекты, то через $\{a;b\}$ обозначаем множество, содержащее $a,\ b$ и не содержащее никаких других элементов ($\{a;b\}$ — неупорядоченная пара объектов $a,\ b$). Каждому объекту x сопоставляем синглетон $\{x\} \triangleq \{x;x\}$, содержащий $x\colon x \in \{x\}$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) подмножеств H, а через $\mathrm{Fin}(H)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

этого семейства на множество B. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

(подсемейство $\mathcal{P}(\mathbb{M})$, двойственное к $\mathcal{M}$). Кроме того, если $\mathcal{T}$ — непустое семейство и S — множество, то полагаем

$$(\ [\mathcal{T}](S) \triangleq \{T \in \mathcal{T} | S \subset T\})\&(\ ]\mathcal{T}[(S) \triangleq \{T \in \mathcal{T} | T \subset S\}).$$

Введем, наконец, для всякого семейства $\mathcal{E}$ семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{E}$:

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) | \bigcap_{C \in \mathcal{K}} C \neq \varnothing\ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{C})\}.$$

Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство, то семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X}),\ \{\cap\}(\mathfrak{X}),\ \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$ понимаются в смысле [9, (2.4)] (имеются в виду семейства всех объединений, пересечений (для непустых подсемейств $\mathfrak{X}$), конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$).

Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$ и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))\ |\ (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I})\}; \tag{1.1}$$

элементы семейства (1.1) — суть π-системы [1, с. 14] подмножеств $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей» и только они. Полагаем, что

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] |\ \forall L \in \mathcal{I}\ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \exists \Lambda \in \mathcal{I}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\}; \tag{1.2}$$

элементы семейства (1.2) называем отделимыми π-системами. В виде

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] |\ A \cup B \in \mathcal{I}\ \ \forall A \in \mathcal{I}\ \forall B \in \mathcal{I}\}$$

имеем семейство всех решеток на $\mathbf{I}$. При этом, конечно,

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{A} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] |\ \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]), \tag{1.3}$$

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}, \tag{1.4}$$

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{F} \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] | \bigcap_{F \in \mathcal{F}'} F \in \mathcal{F} \ \forall \mathcal{F}' \in \mathcal{P}'(\mathcal{F})\} = \{\mathbf{C_I}[\tau] \colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}. \tag{1.5}$$

Элементы семейства (1.3) суть алгебры множеств с «единицей» $\mathbf{I}$; в (1.4) имеем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, а в (1.5) — семейство всех замкнутых топологий (см. [10, с. 98]) на $\mathbf{I}$. Если $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств; при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ имеем ТП. Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{J}] \triangleq \{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) | \mathbf{I} = \bigcup_{X \in \chi} X\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{J}))$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{J}$. Покрытие $\chi \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{J}]$ называем бинарным, если $\chi = \{X_1; X_2\}$ при некоторых $X_1 \in \mathcal{J}$ и $X_2 \in \mathcal{J}$.

Фиксируем до конца раздела семейство $\mathfrak{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$. В виде

$$\langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{I}) | \ I_1 \cap I_2 \neq \varnothing \ \forall I_1 \in \mathcal{I} \ \forall I_2 \in \mathcal{I}\} \tag{1.6}$$

имеем семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{I}$, среди которых выделяем максимальные: имеем в виде

$$\begin{gathered}\langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] | \ \forall \mathcal{J} \in \langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \ (\mathcal{I} \subset \mathcal{J}) \Longrightarrow (\mathcal{I} = \mathcal{J})\} = \\ = \{\mathcal{I} \in \langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] | \ \forall L \in \mathfrak{I} \ (L \cap I \neq \varnothing \ \forall I \in \mathcal{I}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{I})\}\end{gathered} \tag{1.7}$$

семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathfrak{I}$, именуемых ниже МСС на $\mathfrak{I}$. С учетом леммы Цорна получаем, что $\forall \mathcal{I} \in \langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \ \exists \mathcal{J} \in \langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] \colon \mathcal{I} \subset \mathcal{J}$. Это означает, что при $\mathfrak{I} \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing$ непременно $\langle \mathfrak{I} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] \neq \varnothing$.

Элементы топологии (краткая сводка). Следуем обозначениям [9, раздел 2]. Итак, через $(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ обозначаем соответственно семейства всех открытых и всех замкнутых баз топологий на $\mathbf{I}$. Аналогично, в виде $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ имеем [9, раздел 2] семейства всех открытых и всех замкнутых предбаз топологий из $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$. Тогда $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $\{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ в случае $\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Аналогично двойственные представления реализуются для замкнутых баз и предбаз; так, $\{\cap\}(\beta) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\mathrm{cl}{-}\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $\{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}{-}\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ в случае $\chi \in (\mathrm{p}{-}\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то через $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ обозначаем (см. [9, раздел 2]) соответственно семейства всех открытых и всех замкнутых баз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; так, в частности, $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \tau = \{\cup\}(\beta)\}$. Через $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ и $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}; \tau]$ обозначаем (см. [9, раздел 2]) семейства всех открытых и всех замкнутых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$ соответственно.

При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$ полагаем

$$N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau | x \in G\}, \qquad N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) | \ \exists G \in N^0_\tau(x) \colon G \subset H\},$$

получая семейство окрестностей [11, гл. I] точки x в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. При этом

$$\begin{gathered}\forall \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \quad \mathrm{cl}(A, \tau) \triangleq \{x \in \mathbf{I} | \ A \cap H \neq \varnothing \ \forall H \in N_\tau(x)\} = \\ = \{x \in \mathbf{I} | \ A \cap G \neq \varnothing \ \forall G \in N^0_\tau(x)\} \in \mathbf{C_I}[\tau]\end{gathered} \tag{1.8}$$

(введена операция замыкания в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$). Введем, наконец, семейство

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] | \ \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \\ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I}|\mathcal{S}] \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\}\end{gathered} \tag{1.9}$$

всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих это множество в суперкомпактное ТП (в определении (1.9) используются бинарные подпокрытия покрытий множествами некоторой предбазы). Если $\tau \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и при этом $(\mathbf{I},\tau)$ есть T_2-пространство (см. [3, 1.5]), то данное ТП $(\mathbf{I},\tau)$ называют суперкомпактом (см. [7, 5.11]).

§ 2. Битопологическое пространство максимальных сцепленных систем

Всюду в настоящем разделе фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Рассмотрим семейства $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E]$ и $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, определяемые посредством (1.6) и (1.7) соответственно; каждое из упомянутых семейств непусто (см. [8,9]). Ниже приведена сводка основных положений [8,9,12–15], относящихся к предмету исследования. Так, в частности, $\forall \mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ [\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E}$. Ясно, что $E \in \mathcal{E}\ \forall \mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$. Полагаем далее, что

$$\begin{gathered}(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathcal{E}\}\ \forall L \in \mathcal{L}) \\ \&\ (\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E] | \exists \Sigma \in \mathcal{E}\colon \Sigma \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{gathered} \tag{2.1}$$

Предбаза $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=} \{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|\Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ порождает [8, раздел 5] суперкомпактную топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{2.2}$$

которая и будет основным предметом нашего рассмотрения. В виде

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{2.3}$$

имеем суперкомпактное T_1-пространство. В то же время (открытая) предбаза $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \overset{\triangle}{=}$ $\overset{\triangle}{=} \{\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle^0[E|L]\colon L \in \mathcal{L}\} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ (см. (2.1)) порождает топологию

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{2.4}$$

превращающую $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ в нульмерное [3, 6.2] T_2-пространство. При этом [8, предложение 7.1] $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, а триплет

$$(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle)$$

рассматриваем как битопологическое пространство (БТП) (в связи с теорией и применениями БТП см. монографию [16]). При этом [8, раздел 8]

$$((\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]) \vee (\ \mathcal{L} \in (\mathrm{top})[E])) \Longrightarrow (\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{2.5}$$

Более подробное изложение конструкций, связанных с (2.1)–(2.5) см. в [8,9,12–15]. В следующем параграфе мы сосредоточимся на вопросе об условиях T_2-отделимости ТП (2.3), однако уже сейчас в этом отношении можно отметить следствие (2.5): в случаях, отмеченных в посылке упомянутой импликации, ТП (2.3) является отделимым (в смысле T_2) и, стало быть, суперкомпактом.

§ 3. Условия T_2-отделимости пространства максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа

Вопрос о T_2-отделимости представляется достаточно важным, т. к. он сводится к вопросу о том, когда (2.3) — суперкомпакт и, в частности, компакт, т. е. компактное T_2-пространство (учитываем (1.9) и лемму Александера; см. [3, 3.12.2]). В этой связи напомним [2, предложение 4.16], где подобный вопрос рассматривался в связи с построением суперрасширения (данный случай отвечает ситуации, когда $\mathcal{L} = \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau \in (\mathrm{top})[E]$). В свете (2.1), (2.2) представляется естественной следующая модификация условий [2, предложение 4.16]: мы вводим семейство

$$\pi_{\mathrm{str}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}$$
$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow\ (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) \colon \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing)\}; \tag{3.1}$$

π-системы из семейства (3.1) будем именовать сильно отделимыми. Будем называть квазиокрестностями L множества $\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L)$, где $L \in \mathcal{L}$. Условие, определяющее (3.1), состоит в том, чтобы попарно дизъюнктные множества из $\mathcal{L}$ обладали всякий раз непересекающимися квазиокрестностями.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если* $\tau \in (\mathrm{top})[E]$ *и при этом* (E, τ) *есть* T_4*-пространство* (см. [2, 2.7]), *то* $\mathbf{C}_E[\tau] \in \pi_{\mathrm{str}}[E]$.

Доказательство очевидно. Данное предложение логично связать с условиями [2, предложение 4.16] Также очевидным является свойство

$$(\mathrm{alg})[E] \subset \pi_{\mathrm{str}}[E] \tag{3.2}$$

(в самом деле, при $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ непременно $\mathcal{A} = \mathbf{C}_E[\mathcal{A}]$), так что основное условие в (3.1) является все же (см. (3.2)) более общим в сравнении с условиями предложения 3.1 (имеется в виду аксиома T_4). Вместе с тем, в силу (2.5) и T_2-отделимости топологии (2.4) имеем, что при $\mathcal{L} = \tau \in (\mathrm{top})[E]$ в виде (2.3) реализуется T_2-пространство; с другой стороны, свойство, определяющее (3.1), в этом случае типично может нарушаться, т. е. имеет место свойство $\tau \notin \pi_{\mathrm{str}}[E]$ (данная ситуация имеет место уже в случае обычной $|\cdot|$-топологии вещественной прямой). Поэтому данное свойство (см. (3.1)) представляется весьма ограничительным. В этой связи введем в рассмотрение следующее семейство:

$$\pi^0_{\mathrm{str}}[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L} \tag{3.3}$$
$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow\ (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2) \colon]\mathcal{L}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\})\}.$$

Легко видеть, что $\pi_{\mathrm{str}}[E] \subset \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. В (3.3) мы не требуем, однако, существования дизъюнктных квазиокрестностей для пар дизъюнктных множеств из $\mathcal{L}$. Идея условия, определяющего (3.3), иная: постулируется существование пары квазиокрестностей, в пересечении которых не содержится непустых множеств из π-системы $\mathcal{L}$.

Т е о р е м а 3.1. *Если* $\mathcal{L} \in \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$, *то* (2.3) *есть* T_2*-пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. Выберем произвольно $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \{\mathcal{U}\}$. В силу максимальности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ имеем что

$$(\mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing) \& (\mathcal{V} \setminus \mathcal{U} \neq \varnothing).$$

С учетом этого выберем и зафиксируем $V \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. Используя (1.6), (1.7) и то, что $V \in \mathcal{L}$, получаем тогда для некоторого множества $U \in \mathcal{U}$ свойство

$$U \cap V = \varnothing. \tag{3.4}$$

По выбору $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ имеем, в частности, что $U \in \mathcal{L},\ V \in \mathcal{L}$. Тогда в силу (3.3), (3.4) получаем для некоторых квазиокрестностей

$$(W_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](U)) \& (W_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](V))$$

следующее равенство

$$\mathcal{T} \stackrel{\triangle}{=}]\mathcal{L}[(W_1 \cap W_2) = \{\varnothing\}. \tag{3.5}$$

Из (2.1), (2.2) вытекают очевидные свойства

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_1] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle)\&(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_2] \in \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{3.6}$$

Кроме того, по выбору W_1, W_2 имеем с очевидностью, что

$$(\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_1])\&(\ \mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_2]).$$

Поэтому (см. (3.6)) на самом деле реализуются свойства

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_1] \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{U}))\&(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_2] \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{V})). \tag{3.7}$$

Покажем, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_2] = \varnothing$. В самом деле, допустим противное: пусть пересечение окрестностей (3.7) непусто. Выберем и зафиксируем

$$\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|W_2].$$

Тогда для некоторых множеств $M_1 \in \mathcal{M}$ и $M_2 \in \mathcal{M}$ имеем, что $M_1 \subset W_1$ и $M_2 \subset W_2$, откуда, в частности, следует, что $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{T}$ и согласно (3.5) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, что противоречит сцепленности $\mathcal{M}$. Данное противоречие доказывает требуемое свойство: окрестности (3.7) действительно не пересекаются. Поскольку $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ выбирались произвольно, установлено, что

$$\begin{gathered}\forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \{\mathcal{E}_1\} \\ \exists \mathbb{A} \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_1)\ \exists \mathbb{B} \in N^0_{\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle}(\mathcal{E}_2) \colon \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing.\end{gathered}$$

Тем самым требуемое свойство T_2-отделимости установлено. □

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Справедливо свойство* $(\mathrm{top})[E] \subset \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau \in (\mathrm{top})[E]$. Тогда, в частности, $\tau \in \pi[E]$. Выберем произвольно $\mathbb{G}_1 \in \tau$ и $\mathbb{G}_2 \in \tau$, для которых

$$\mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2 = \varnothing. \tag{3.8}$$

Тогда $\mathbb{F}_1 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\mathbb{G}_1, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$ и $\mathbb{F}_2 \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\mathbb{G}_2, \tau) \in \mathbf{C}_E[\tau]$. Поэтому по свойствам операции замыкания $\mathbb{F}_1 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_1)$ и $\mathbb{F}_2 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_2)$. Введем в рассмотрение

$$\mathcal{T} \stackrel{\triangle}{=}]\tau[(\mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2). \tag{3.9}$$

Ясно, что $\{\varnothing\} \subset \mathcal{T}$. Выберем произвольно $\Theta \in \mathcal{T}$. Тогда в силу (3.9) имеем, что

$$\Theta \in \tau \colon\ \Theta \subset \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2. \tag{3.10}$$

Покажем, что $\Theta = \varnothing$. В самом деле, допустим противное: пусть $\Theta \neq \varnothing$. Выберем произвольно $q \in \Theta$, получая в силу (3.10) свойство $\Theta \in N^0_\tau(q)$. Поскольку $q \in \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$ (см. (3.10)), имеем, в частности, согласно (1.8), что $\Theta \cap \mathbb{G}_1 \neq \varnothing$. Точнее, $\Theta \cap \mathbb{G}_1 \in \tau \setminus \{\varnothing\}$. Выберем с учетом этого $x_* \in \Theta \cap \mathbb{G}_1$, получая, в частности, $x_* \in \mathbb{F}_1 \cap \mathbb{F}_2$. Поскольку $\Theta \cap \mathbb{G}_1 \in N^0_\tau(x_*)$, имеем с учетом (1.8) свойство

$$\Theta \cap \mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2 = \Theta \cap (\mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2) = (\Theta \cap \mathbb{G}_1) \cap \mathbb{G}_2 \neq \varnothing.$$

Тем более $\mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2 \neq \varnothing$, что противоречит (3.8). Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\Theta = \varnothing$, т. е. $\Theta \in \{\varnothing\}$. Поскольку выбор Θ был произвольным, установлено, что $\mathcal{T} \subset \{\varnothing\}$ и, следовательно, $\mathcal{T} = \{\varnothing\}$. В итоге получаем, что (см. (3.9))

$$\exists F_1 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_1)\ \exists F_2 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_2)\colon\ ]\tau[(F_1 \cap F_2) = \{\varnothing\}. \tag{3.11}$$

Итак, установлена (см. (3.8), (3.11)) следующая импликация

$$(\mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists F_1 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_1)\ \exists F_2 \in [\mathbf{C}_E[\tau]](\mathbb{G}_2)\colon\ ]\tau[(F_1 \cap F_2) = \{\varnothing\}). \tag{3.12}$$

Поскольку выбор $\mathbb{G}_1$, $\mathbb{G}_2$ был произвольным, установлено (см. (3.3), (3.12)), что $\tau \in \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. Итак, $(\mathrm{top})[E] \subset \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. □

Итак, условие, используемое в (3.3), «покрывает» случаи, когда T_2-отделимость ТП (2.3) устанавливается из тех или иных соображений косвенного характера. В заключение параграфа отметим одно простое следствие:

$$\pi^0_{\mathrm{str}}[E] = \{\mathcal{L} \in \pi[E] |\ \forall L_1 \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\ \forall L_2 \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} \tag{3.13}$$
$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2)\colon\ ]\mathcal{L}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\})\}.$$

З а м е ч а н и е 1. Проверим (3.13), обозначая семейство в правой части доказываемого равенства (3.13) через $\mathfrak{L}$. Ясно, что

$$\pi^0_{\mathrm{str}}[E] \subset \mathfrak{L}. \tag{3.14}$$

Пусть теперь $\tilde{\mathcal{L}} \in \mathfrak{L}$. Тогда $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi[E]$; при этом $\forall L_1 \in \tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\varnothing\}\ \forall L_2 \in \tilde{\mathcal{L}} \setminus \{\varnothing\}$

$$(L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](L_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](L_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}) \tag{3.15}$$

Выберем произвольно $\mathbb{L}_1 \in \tilde{\mathcal{L}}$ и $\mathbb{L}_2 \in \tilde{\mathcal{L}}$ со свойством $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$. Тогда

$$((\mathbb{L}_1 \neq \varnothing) \& (\mathbb{L}_2 \neq \varnothing)) \vee ((\mathbb{L}_1 = \varnothing) \vee (\mathbb{L}_2 = \varnothing)). \tag{3.16}$$

Рассмотрим отдельно оба случая в (3.16). В силу (3.15) имеем очевидную импликацию

$$((\mathbb{L}_1 \neq \varnothing) \& ((\mathbb{L}_2 \neq \varnothing)) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}) \tag{3.17}$$

Пусть теперь $(\mathbb{L}_1 = \varnothing) \vee (\mathbb{L}_2 = \varnothing)$. Напомним, что $E = E \setminus \varnothing \in \mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]$ и $\varnothing = E \setminus E \in \mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]$. Тогда при $\mathbb{L}_1 = \varnothing$ имеем, что $\varnothing \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)$ и $E \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)$ таковы, что $]\tilde{\mathcal{L}}[(\varnothing \cap E) = \{\varnothing\}$. Стало быть, имеем импликацию

$$(\mathbb{L}_1 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}). \tag{3.18}$$

Аналогично, при $\mathbb{L}_2 = \varnothing$ получаем, что $E \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)$ и $\varnothing \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)$ таковы, что $]\tilde{\mathcal{L}}[(E \cap \varnothing) = \{\varnothing\}$. Это означает, что

$$(\mathbb{L}_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}). \tag{3.19}$$

Из (3.16)–(3.19) вытекает, что во всех возможных случаях

$$\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}.$$

Таким образом, получили следующую импликацию

$$(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_1)\ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\tilde{\mathcal{L}}]](\mathbb{L}_2)\colon\ ]\tilde{\mathcal{L}}[(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) = \{\varnothing\}).$$

Поскольку выбор $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ был произвольным, установлено (см. (3.3)), что $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. Итак, $\mathfrak{L} \subset \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. С учетом (3.14) получаем требуемое равенство $\mathfrak{L} = \pi^0_{\mathrm{str}}[E]$. □

§ 4. Один частный случай

В настоящем параграфе рассматривается один пример π-системы из множества (3.3), который не является ни алгеброй множеств, ни топологией, ни семейством замкнутых множеств какого-либо ТП. Для этого рассмотрения потребуются некоторые дополнительные обозначения.

Всюду в дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая; промежутки в $\mathbb{R}$ (всех типов) обозначаем только посредством квадратных скобок (см. [11], а также [17, § 1.3]). При этом в обозначениях для промежутков допускаются (как и в [17, § 1.3]) любые соотношения между концевыми точками; так, в частности, при $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$

$$]x, y[\stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | (x < \xi) \& (\xi < y)\}, \qquad [x, y] \stackrel{\triangle}{=} \{\xi \in \mathbb{R} | (x \leqslant \xi) \& (\xi \leqslant y)\} \tag{4.1}$$

(аналогичные соглашения принимаются в отношении полуинтервалов; допускается, что множества (4.1) и их аналоги в случае полуинтервалов могут совпадать с $\varnothing$).

Фиксируем до конца параграфа произвольные числа $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ со свойством $a < b$. Полагаем в настоящем параграфе, что $E =]a, b[$ (итак, рассматривается случай, когда множество E является невырожденным открытым интервалом числовой прямой). Кроме того, полагаем, что при $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в виде $\mathrm{pr}_1(z) \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \mathbb{R}$ реализуются первый и второй элементы упорядоченной пары z соответственно; итак $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$. В качестве z может, конечно, использоваться элемент множества $[a, b] \times [a, b]$. Полагаем до конца параграфа, что

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \{]\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b]\}; \tag{4.2}$$

с учетом соглашений относительно (4.1) получаем, что $\mathcal{L}$ (4.2) есть π-система: $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Итак, в виде $(E, \mathcal{L})$ получили вариант (широко понимаемого) ИП. Легко видеть, что (см. (4.2)) при $c \in E$

$$([c, b[= E \setminus]a, c[\in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]) \& (]a, c] = E \setminus]c, b[\in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]).$$

Тогда, как следствие, получаем с очевидностью, что

$$]a, d] \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](]c, d[) \ \ \forall c \in [a, b[\ \ \forall d \in E. \tag{4.3}$$

Кроме того, как легко видеть, имеет место свойство

$$[c, b[\in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](]c, d[) \ \ \forall c \in E \ \ \forall d \in]a, b]. \tag{4.4}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *При* $E =]a, b[$ *и* $\mathcal{L}$ (4.2) *непременно имеет место свойство*

$$\mathcal{L} \in \pi^0_{\mathrm{str}}[E]. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся равенством (3.13). Пусть $L' \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ и $L'' \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ таковы, что

$$L' \cap L'' = \varnothing. \tag{4.6}$$

С учетом (4.2) подберем $u \in [a, b], \ v \in [a, b], \ p \in [a, b]$ и $q \in [a, b]$, для которых

$$(L' =]u, v[) \& (L'' =]p, q[). \tag{4.7}$$

В силу непустоты L' и L'' имеем, что $u < v$ и $p < q$. Рассмотрим отдельно следующие возможные случаи: 1) $u < p$, 2) $p \leqslant u$.

1) В этом случае $v \leqslant p$. В самом деле, допустим противное: пусть $p < v$. Тогда $p \in L'$, и $]p, v[\neq \varnothing$. Для $\eta \stackrel{\triangle}{=} \inf(\{v; q\}) \in [a, b]$ имеем (при $p < v$) цепочку неравенств $p < \eta \leqslant q$.

Тогда по выбору p получаем, что $]p,\eta[\neq\varnothing$ и при этом $]p,\eta[\subset L'\cap L''$, что противоречит (4.6). Итак (при $u<p$) имеем требуемое неравенство $v\leqslant p$. С учетом (4.7) получаем, что $u\in[a,b[$ и $p\in E$. Поэтому (см. (4.3)) $]a,p]\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](]u,p[)$, где $L'\subset]u,p[$. Следовательно, имеем свойство

$$]a,p]\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L'). \tag{4.8}$$

С другой стороны, по выбору $p,\ q$ получаем, что $L''\subset[p,b[$, а потому

$$[p,b[\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L'') \tag{4.9}$$

(действительно, в нашем случае $p\in E,\ q\in]a,b]$; осталось учесть (4.4) и (4.7)). При этом

$$]a,p]\cap[p,b[\subset\{p\}.$$

Пусть $\mathcal{T}\triangleq]\mathcal{L}[(]a,p]\cap[p,b[)$. Выберем произвольно $T\in\mathcal{T}$, получая в силу (4.8) и (4.9), что $T\subset\{p\}$. Но в этом случае $T=\varnothing$ по определению $\mathcal{L}$ (см. (4.2)), т. к. непустые множества из $\mathcal{L}$ являются невырожденными открытыми интервалами вещественной прямой. Поскольку выбор T был произвольным, установлено, что $\mathcal{T}\subset\{\varnothing\}$ и, стало быть, $\mathcal{T}=\{\varnothing\}$. Итак, в силу (4.8) и (4.9) имеем в случае 1), что

$$\exists\Lambda_1\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L')\ \exists\Lambda_2\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L''):]\mathcal{L}[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=\{\varnothing\}. \tag{4.10}$$

Тем самым установлена (см. (4.10)) следующая импликация

$$(u<p)\Longrightarrow(\exists\Lambda_1\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L')\ \exists\Lambda_2\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L''):]\mathcal{L}[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=\{\varnothing\}). \tag{4.11}$$

2) Пусть $p\leqslant u$. Тогда $(p=u)\vee(p<u)$. Однако в силу (4.6), (4.7) и непустоты множеств L', L'' равенство $p=u$ невозможно (с учетом (4.7) и упомянутого свойства непустоты данное равенство приводит к противоречию с (4.6)). Следовательно, имеем неравенство $p<u$, а тогда требуемое обоснование импликации

$$(p\leqslant u)\Longrightarrow(\exists\Lambda_1\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L')\ \exists\Lambda_2\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L''):]\mathcal{L}[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=\{\varnothing\}). \tag{4.12}$$

повторяет рассуждение для случая 1) при очевидных переобозначениях. В итоге (см. (4.6), (4.11), (4.12)) получаем импликацию

$$(L'\cap L''=\varnothing)\Longrightarrow(\exists\Lambda_1\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L')\ \exists\Lambda_2\in[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L''):]\mathcal{L}[(\Lambda_1\cap\Lambda_2)=\{\varnothing\}).$$

Поскольку L' и L'' выбирались произвольно, установлено (см. (3.13)) свойство (4.5). $\square$

Из (2.2), теоремы 3.1 и предложения 4.1 следует, что в рассматриваемом случае широко понимаемого ИП $(E,\mathcal{L})$ (см. (4.2)) ТП (2.3) является суперкомпактом.

§ 5. Добавление 1: пространство ультрафильтров с топологией волмэновского типа

В настоящем параграфе отметим некоторые следствия теоремы 3.1, касающиеся пространства ультрафильтров (у/ф) в волмэновском оснащении (в связи с исследованием топологической структуры пространства у/ф отметим работы [18–20]). Однако сначала совсем кратко напомним нужные определения, относящиеся к у/ф (подробнее см. [8, 9, 12–15, 21]). Рассматриваем ниже, если не оговорено противное, общий случай ИП $(E,\mathcal{L})$: $E\neq\varnothing$ и $\mathcal{L}\in\pi[E]$. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L})\triangleq\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}'(\mathcal{L})|(\varnothing\notin\mathcal{F})\&(A\cap B\in\mathcal{F}\ \forall A\in\mathcal{F}\ \forall B\in\mathcal{F})\&(\ [\mathcal{L}](F)\subset\mathcal{F}\ \forall F\in\mathcal{F})\}$$

есть множество всех фильтров $(E, \mathcal{L})$, а

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) | \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{L})) \tag{5.1}$$

есть множество всех у/ф данного ИП. Полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) | \exists U \in \mathcal{U} \colon U \subset H\} \ \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

При этом $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$, а потому определена топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{5.2}$$

волмэновского типа, превращающая множество (5.1) в компактное T_1-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle). \tag{5.3}$$

При этом, что особенно важно для наших целей, (5.3) есть подпространство ТП (2.3), т. е. $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E])$ и при этом (см. [8, предложение 5.3])

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{5.4}$$

Напомним, что компактное T_2-пространство называется компактом. С учетом теоремы 3.1 получаем следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $\mathcal{L} \in \pi_{\mathrm{str}}^0[E]$, *то ТП* (5.3) *является компактом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{L} \in \pi_{\mathrm{str}}^0[E]$. Тогда по теореме 3.1 (2.3) есть T_2-пространство. Поскольку $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ является, как уже отмечалось, непустым подмножеством $\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$, согласно (5.4) в виде (5.3) реализуется T_2-пространство (см. [3, 2.1.6]), которое компактно (см. [21, теорема 5]). Итак, (5.3) — компакт. □

В связи с предложением 5.1 полезно отметить следующий частный случай. А именно: полагаем до конца настоящего параграфа, что $E =]a, b[$, где $a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, а $\mathcal{L} \in \pi[E]$ определяется посредством (4.2). Итак, рассматриваем невырожденный открытый интервал вещественной прямой с π-системой, составленной из открытых промежутков, содержащихся в упомянутом фиксированном интервале. Напомним, что (см. (4.1)) $\varnothing$ также рассматривается как открытый промежуток.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *В рассматриваемом случае* $(E, \mathcal{L})$ *ТП* (5.3) *является суперкомпактом:* (5.3) *есть* T_2*-пространство и при этом*

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{5.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 5.1 ТП (5.3) есть T_2-пространство. С другой стороны, при условии, что

$$\begin{gathered}\pi_*^\sharp[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[E] | \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{I} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{I} \ \forall \Sigma_3 \in \mathcal{I} \\ ((\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset) \& (\Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \emptyset) \& (\Sigma_1 \cap \Sigma_3 \neq \emptyset)) \Longrightarrow (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 \neq \emptyset)\},\end{gathered} \tag{5.6}$$

имеем свойство $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$ (в рассматриваемом сейчас случае $E =]a, b[$ и $\mathcal{L}$ (4.2)). Данное свойство устанавливается по аналогии с [22, предложение 4.2], а тогда (5.5) вытекает из [22, (3.2), (4.2)]. Итак, (5.5) есть суперкомпактное T_2-пространство, т. е. суперкомпакт. □

§ 6. Фундаментальные системы окрестностей

В настоящем параграфе совсем кратко обсуждается вопрос о представлении фундаментальных систем окрестностей (ФСО) точек в ТП (2.3). При этом относительно $(E, \mathcal{L})$ предполагается, как и в предыдущем параграфе, что E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$. В этих построениях также будут использоваться квазиокрестности. Как обычно, полагаем $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$; при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1, n} \triangleq \{t \in \mathbb{N} | t \leqslant n\}$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то через H^k обозначаем множество всех отображений (кортежей) $(h_i)_{i \in \overline{1,k}} \colon \overline{1, k} \longrightarrow H$. В качестве H может, конечно, использоваться семейство.

С учетом (2.1) получаем, что при $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E],\ n \in \mathbb{N},\ (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{E}^n$ и $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \in \prod\limits_{i=1}^{n} [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)$ определено множество

$$\bigcap_{i=1}^{n} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[E | \Lambda_i] \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]).$$

Условимся о следующем обозначении: если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$, то

$$\mathfrak{N}[\mathcal{E}] \triangleq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{(\Sigma_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathcal{E}^k} \{\bigcap_{i=1}^{k} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[E | \Lambda_i] \colon (\Lambda_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \prod_{i=1}^{k} [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)\}. \tag{6.1}$$

В связи с (6.1) отметим очевидное свойство: при $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E],\ \Sigma \in \mathcal{E}$ и $\Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma)$ непременно

$$\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[E | \Lambda]. \tag{6.2}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$, то семейство $\mathfrak{N}[\mathcal{E}]$ есть ФСО $\mathcal{E}$ в ТП* (2.3)*:*

$$(\mathfrak{N}[\mathcal{E}] \subset N_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E})) \& (\ \forall \mathbb{H} \in N_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E})\ \exists \mathbb{G} \in \mathfrak{N}[\mathcal{E}] \colon \mathbb{G} \subset \mathbb{H}). \tag{6.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$. Тогда в силу (2.2) и (6.2) имеем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[E | \Lambda] \in N^0_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E}) \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \forall \Lambda \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma). \tag{6.4}$$

При этом $[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. Из (6.4) вытекает, что при $k \in \mathbb{N}$, $(\Sigma_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathcal{E}^k$, $(\Lambda_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \prod\limits_{i=1}^{k} [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Sigma_i)$

$$\bigcap_{i=1}^{k} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0_{\mathrm{op}}[E | \Lambda_i] \in N^0_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E}). \tag{6.5}$$

Из (6.1) и (6.5) получаем первое положение в (6.3) (см. § 1). Рассмотрим доказательство второго.

Пусть $\Omega \in N_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E})$, а $\Omega_0 \in N^0_{\mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle}(\mathcal{E})$ обладает свойством $\Omega_0 \subset \Omega$. Тогда $\Omega_0 \in \in \mathbb{T}_0 \langle E | \mathcal{L} \rangle$ и $\mathcal{E} \in \Omega_0$. В силу (2.2) для некоторого семейства $\mu \in \mathcal{P}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]))$ имеет место равенство

$$\Omega_0 = \bigcup_{\mathbb{X} \in \mu} \mathbb{X}.$$

Тогда $\mathcal{E} \in \mathbb{M}$ для некоторого $\mathbb{M} \in \mu$; при этом $\mathbb{M} \subset \Omega_0$ и, кроме того, $\mathbb{M} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}])$. Тогда для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{M}_i)_{i \in \overline{1,\nu}} \in \hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E; \mathcal{L}]^\nu$ имеем равенство

$$\mathbb{M} = \bigcap_{i=1}^{\nu} \mathbb{M}_i. \tag{6.6}$$

По определению $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ (см. § 2) для некоторого кортежа $(M_i)_{i\in\overline{1,\nu}} \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]^\nu$ получаем представление

$$\mathbb{M}_j = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|M_j] \quad \forall j \in \overline{1,\nu}. \tag{6.7}$$

В свою очередь из (6.7) легко следует, что для некоторого кортежа

$$(\Xi_i)_{i\in\overline{1,\nu}} \in \mathcal{E}^\nu \tag{6.8}$$

реализуется свойство $\Xi_j \subset M_j \ \forall j \in \overline{1,\nu}$ (действительно, $\mathcal{E} \in \mathbb{M}$, а потому согласно (6.6) $\mathcal{E} \in \mathbb{M}_j$ при $j \in \overline{1,\nu}$). Ясно, что

$$(M_i)_{i\in\overline{1,\nu}} \in \prod_{i=1}^{\nu}[\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](\Xi_i). \tag{6.9}$$

Из (6.1), (6.8) и (6.9) получаем, что

$$\bigcap_{i=1}^{\nu}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|M_i] \in \mathfrak{N}[\mathcal{E}].$$

Тогда в силу (6.7) имеем, что пересечение всех множеств $\mathbb{M}_i,\ i \in \overline{1,\nu}$, содержится в $\mathfrak{N}[\mathcal{E}]$. С учетом (6.6) получаем, что $\mathbb{M} \in \mathfrak{N}[\mathcal{E}]$, причем (по выбору $\mathbb{M}$) $\mathbb{M} \subset \Omega$. Поскольку выбор Ω был произвольным, второе положение в (6.3) установлено. □

§ 7. Некоторые примеры

Заметим, что условие $\mathcal{L} \in \pi_{\mathrm{str}}[E]$ также доставляет ряд полезных примеров T_2-отделимости, не охватываемых «топологическим вариантом» [2, предложение 4.16] (об этом уже говорилось в § 3 (см. (3.3)). Отметим в этой связи, что в общем случае непустого множества E

$$\begin{gathered}\pi_{\mathrm{str}}[E] = \{\mathcal{L} \in \pi[E]|\ \forall L_1 \in \mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\setminus\{\varnothing\}\\ (L_1 \cap L_2 = \varnothing) \Longrightarrow (\exists \Lambda_1 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_1)\ \ \exists \Lambda_2 \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](L_2)\colon \Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing)\}.\end{gathered} \tag{7.1}$$

Сейчас вновь коснемся вариантов, когда множество E выражается в терминах чисел $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Пусть сначала $E = [a, b[$ и (см. соглашения в § 4)

$$\mathcal{L} \triangleq \{[\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)[\colon z \in [a,b] \times [a,b]\}. \tag{7.2}$$

Ясно, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (более того, $\mathcal{L}$ (7.2) есть полуалгебра множеств). В виде $(E,\mathcal{L})$ имеем пространство-стрелку. Легко видеть, что при $c \in]a,b[$

$$([a,c[\in \mathcal{L} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{L}])\&(\ [c,b[\in \mathcal{L} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]). \tag{7.3}$$

Как следствие (см. (7.3)) получаем очевидное свойство: при $c \in E$ и $d \in]a,b[$

$$[a,d[\in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]]([c,d[). \tag{7.4}$$

Кроме того, как легко видеть, при $c \in]a,b[$ и $d \in]a,b]$

$$[c,b[\in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]]([c,d[). \tag{7.5}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *При* $E = [a, b[$ *и* $\mathcal{L}$ (7.2) *справедливо свойство* $\mathcal{L} \in \pi_{\mathrm{str}}[E]$.

Доказательство использует (7.1), (7.4), (7.5) и в идейном отношении аналогично обоснованию предложения 4.1.

Отметим некоторые следствия предложения 7.1, касающиеся свойств у/ф. Заметим, что в дальнейшем определение (5.6) используется для произвольного непустого множества E. Подобно [22, предложение 4.2] устанавливается, что в рассматриваемом случае $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Сейчас заметим, что (при $E = [a, b[$ и $\mathcal{L}$ (7.2)) с учетом положений [22, § 4] легко проверяется равенство

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$$

и при этом $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E \rangle \in ((\mathbb{SC} - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (см. (5.2)). С другой стороны, согласно (5.4) и предложению 7.1 ТП (5.3) является T_2-пространством (см. теорему 3.1; учитываем также свойство $\pi_{\mathrm{str}}[E] \subset \pi_{\mathrm{str}}^0[E]$). В итоге в рассматриваемом сейчас случае $E = [a, b[$ и $\mathcal{L}$ (7.2) соотношение (5.3) определяет суперкомпакт, точками которого являются у/ф.

Совсем кратко рассмотрим случай пространства-стрелки, открытой слева. Итак, если не оговорено противное, полагаем до конца настоящего параграфа, что $E =]a, b]$ и

$$\mathcal{L} \stackrel{\triangle}{=} \{]\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)] \colon z \in [a, b] \times [a, b]\}; \tag{7.6}$$

ясно, что (в случае (7.6)) $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда при $c \in]a, b[$

$$( ]a, c] \in \mathcal{L} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{L}])\&( ]c, b] \in \mathcal{L} \cap \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]).$$

С учетом этого устанавливается, что при $c \in]a, b[$ и $d \in]a, b]$

$$]c, b] \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](]c, d]). \tag{7.7}$$

Кроме того, при $c \in [a, b[$ и $d \in]a, b[$

$$]a, d] \in [\mathbf{C}_E[\mathcal{L}]](]c, d]). \tag{7.8}$$

С учетом (7.1), (7.7) и (7.8) устанавливается следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 7.2. *При* $E =]a, b]$ *и* $\mathcal{L}$ (7.6) *имеет место свойство* $\mathcal{L} \in \pi_{\mathrm{str}}[E]$.

Доказательство легко следует из (7.7) и (7.8). Отметим, в заключение, что в случае (7.6) $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Это позволяет применять положения [22], связанные с отождествимостью у/ф и МСС.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18–01–00410).

Список литературы

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
2. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
5. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
6. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. No. 1. P. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
7. Архангельский А. В. Компактность // Общая топология — 2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 50. М.: ВИНИТИ, 1989. С. 5–128.

8. Ченцов А. Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257–272. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
9. Ченцов А. Г. Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 240–257. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
10. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004.
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
12. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365–388. https://doi.org/10.20537/vm170307
13. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. No. 2. P. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
14. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces // Ural Mathematical Journal. 2019. Vol. 5. No. 1. P. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004
15. Ченцов А. Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного Университета. 2018. Т. 52. С. 86–102. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
16. Dvalishvili B. P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Amsterdam: North–Holland, 2005.
17. Ченцов А. Г. Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009.
18. Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А. О точках одного бикомпактного расширения N // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17. https://doi.org/10.20537/vm100302
19. Грызлов А. А., Головастов Р. А. О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16. https://doi.org/10.20537/vm130102
20. Головастов Р. А. О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24. https://doi.org/10.20537/vm120303
21. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров широко понимаемых измеримых пространств // Доклады Академии наук. 2019. Т. 486. № 1. С. 24–29. https://doi.org/10.31857/S0869-5652486124-29
22. Ченцов А. Г. О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2019. Т. 54. С. 74–101. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-07

Поступила в редакцию 02.02.2020

Ченцов Александр Георгиевич, д. ф.-м. н., член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, 620108, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
профессор, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Цитирование: А. Г. Ченцов. Некоторые топологические свойства пространства максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2020. Т. 56. С. 122–137.

A. G. Chentsov
Some topological properties of the space of maximal linked systems with topology of Wallman type

Keywords: maximal linked system, quasineighborhood, topology, ultrafilter.

MSC2010: 93C83

DOI: 10.35634/2226-3594-2020-56-09

Maximal linked systems (MLS) and ultrafilters (u/f) on a widely understood measurable space (this is a nonempty set with equipment in the form of π-system with «zero» and «unit») are investigated. Under equipment with topology of Wallman type, the set of MLS is converted into a supercompact T_1-space. Conditions under which given space of MLS is a supercompactum (i. e., a supercompact T_2-space) are investigated. These conditions then apply to the space of u/f under equipment with topology of Wallman type. The obtained conditions are coordinated with representations obtained under degenerate cases of bitopological spaces with topologies of Wallman and Stone types, but they are not the last to be exhausted.

Funding. The research was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00410).

REFERENCES

1. Bulinskii A. V., Shiryaev A. N. *Teoriya sluchainykh protsessov* (Theory of random processes), Moscow: Fizmatlit, 2005.
2. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* (General topology. Base constructions), Moscow: Fizmatlit, 2006.
3. Engelking R. *General topology*, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
   Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow: Mir, 1986.
4. de Groot J. Superextensions and supercompactness, *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*, Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
5. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces*, Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977.
6. Strok M., Szymański A. Compact metric spaces have binary bases, *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. https://doi.org/10.4064/fm-89-1-81-91
7. Arkhangelskii A. V. Compactness, *General Topology II, Encyclopaedia Math. Sci.*, vol. 50, Berlin: Springer-Verlag, 1996, pp. 1–117.
8. Chentsov A. G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian).
   https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272
9. Chentsov A. G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian).
   https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257
10. Aleksandrov P. S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu* (Introduction to set theory and general topology), Moscow: Editorial URSS, 2004.
11. Burbaki N. *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury* (General topology. Basis structures), Moscow: Nauka, 1968.
12. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 3, pp. 365–388 (in Russian).
   https://doi.org/10.20537/vm170307
13. Chentsov A. G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems, *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100–121. https://doi.org/10.15826/umj.2017.2.012
14. Chentsov A. G. To a question on the supercompactness of ultrafilter spaces, *Ural Mathematical Journal*, 2019, vol. 5, no. 1, pp. 31–47. https://doi.org/10.15826/umj.2019.1.004

15. Chentsov A. G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-07
16. Dvalishvili B. P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*, Amsterdam: North-Holland, 2005.
17. Chentsov A. G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* (Elements of a finitely additive measure theory, I), Yekaterinburg: USTU–UPI, 2009.
18. Gryzlov A. A., Bastrykov E. S., Golovastov R. A. About points of compactification of N, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2010, issue 3, pp. 10–17 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm100302
19. Gryzlov A. A., Golovastov R. A. The Stone spaces of Boolean algebras, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2013, issue 1, pp. 11–16 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm130102
20. Golovastov R. A. About Stone space of one Boolean algebra, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2012, issue 3, pp. 19–24 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm120303
21. Chentsov A. G. Some properties of ultrafilters of widely understood measurable spaces, *Doklady Mathematics*, 2019, vol. 99, no. 3, pp. 255–259. https://doi.org/10.1134/S1064562419030025
22. Chentsov A. G. On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 54, pp. 74–101 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2019-54-07

Received 02.02.2020

Chentsov Aleksandr Georgievich, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, Russian Academy of Science, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620108, Russia;
Professor, Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Citation: A. G. Chentsov. Some topological properties of the space of maximal linked systems with topology of Wallman type, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2020, vol. 56, pp. 122–137.