Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Н. А. Соловьева, Т. С. Тинюкова, Д. Л. Федоров

Математический анализ в примерах и задачах. Предел функции. Непрерывность

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2020

УДК 517(075)
ББК 22.161я73
С 60

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотр-к отдела теор. физики УдмФИЦ УрО РАН Ю. П. Чубурин

Соловьева Н.А., Тинюкова Т.С., Федоров Д.Л.

С60 Математический анализ в примерах и задачах. Предел функции. Непрерывность: учеб.-метод. пособие/ Соловьева Н.А., Тинюкова Т.С., Федоров Д.Л. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. – 66 с.

ISBN 978-5-4312-0850-8

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению одного из разделов математического анализа — теории пределов функции. Приводятся основные понятия и подробные решения типовых задач. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики. Пособие может быть использовано в работе со студентами нематематического профиля.

УДК 517(075)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-4312-0850-8

©Н. А. Соловьева, Т. С. Тинюкова, Д. Л. Федоров, 2020
©ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2020

Содержание

Предисловие

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт работы не только со студентами Института математики, информационных технологий и физики, но и со студентами Института истории и социологии, Института естественных наук, Института экономики и управления и др. Оно является продолжением пособия «Математический анализ в примерах и задачах. Предел числовой последовательности», написанного тем же коллективом авторов.

Включенный в пособие материал относится к разделам «Предел функции», «Непрерывность функции» дисциплины «Математический анализ». Изучаются данные разделы на первом курсе обучения и содержат базовые для студента-математика понятия, без которых невозможно дальнейшее качественное изучение курса. Большая часть пособия посвящена практическим заданиям, которые сопровождаются подробными решениями.

В результате освоения раздела формируются следующие компетенции:

- УК-1 — способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

- ОПК-1 — способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие содержит 13 разделов, десять из которых включают теоретическое сведения, примеры решения задач и задания, которые можно использовать на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов. Для контроля знаний студентов преподаватель проводит коллоквиум. В последнем разделе пособия «Материалы для проведения коллоквиума» приведен перечень вопросов и теоретические упражнения для подготовки к коллоквиуму.

1. Предел функции

Определение 1.1. Если каждому значению переменной $x \in X$ ставится в соответствие по известному закону f единственное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y = f(x)$. В этом случае множество X называется *областью определения*, а множество Y — *областью значений* данной функции.

Определение 1.2. *Окрестностью* радиуса ε (ε-*окрестностью*) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется множество $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Если $x_0 = \infty$ ($x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$), то под ε-окрестностью x_0 будем понимать множество $O_\varepsilon(\infty) = \{x\colon |x| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ ($O_\varepsilon(+\infty) = \{x\colon x > \frac{1}{\varepsilon}\}$, $O_\varepsilon(-\infty) = \{x\colon x < -\frac{1}{\varepsilon}\}$).

Определение 1.3. *Проколотой окрестностью* радиуса ε (ε-*окрестностью*) точки $x_0 \in \mathbb{R}$ называется множество

$$\mathring{O}_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x - x_0| < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение 1.4 (по Коши)**.** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Используют обозначение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение 1.5 (по Гейне)**.** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $\{x_n\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$, причем $x_n \neq x_0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A, т. е.

$$\forall \{x_n\}\colon \quad x_n \to x_0,\; x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \to A.$$

Определение 1.6 (на языке окрестностей)**.** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ в точке x_0, если для любой ε-окрестности $O_\varepsilon(A)$ точки A найдется проколотая δ-окрестность $\mathring{O}_\delta(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех значений $x \in \mathring{O}_\delta(x_0)$, выполняется условие $f(x) \in$ $\in O_\varepsilon(A)$.

Теорема 1.1. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Пример 1.1. Доказать по определению, что

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Решение. 1) Запишем определение предела функции по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon.$$

Будем искать $\delta \leqslant 1$, имеем

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\cdot|x+2| <$$
$$< \delta\cdot|(x-2)+4| \leqslant \delta\cdot(|x-2|+4) < \delta(\delta+4) \leqslant 5\delta = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon.$$

ε	10	1	0,1	0,01	0,001
δ	1	0,2	0,02	0,002	0,0002

2) Запишем определение предела функции по Гейне. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 2$ при $n \to \infty$, причем $x_n \neq 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда по арифметическим свойствам предела последовательности имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)^2 = \lim_{n\to\infty}(x_n\cdot x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 4.$$

Пример 1.2. Доказать, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Рассмотрим две последовательности

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \text{ и } y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0,\ x_n \neq 0,\ y_n \neq 0.$

Заметим, что

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin(\pi n) = 0,$$
$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = 1$. По определению предела функции по Гейне, это означает, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. График этой функции приведён на рис. 1.

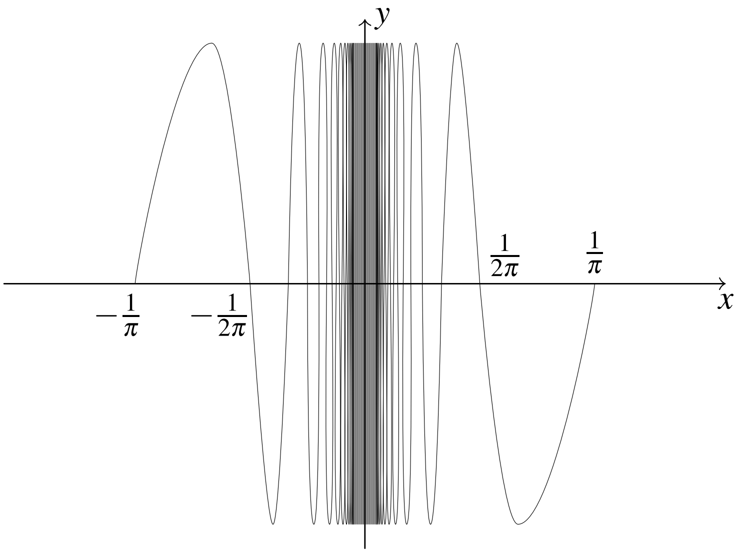

Рис. 1 График функции $y = \sin\frac{1}{x}$.

Определение 1.7 (по Коши)**.** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любого числа

$\varepsilon > 0$ найдется $\Delta > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta$ $(x > \Delta, x < -\Delta)$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Delta > 0 \;\; \forall x\colon x > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Delta > 0 \;\; \forall x\colon x < -\Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\Delta > 0 \;\; \forall x\colon |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 1.8 (по Гейне)**.** Число A называется *пределом* функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $(x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to \infty$ $(x_n \to +\infty, x_n \to +\infty)$ при $n \to \infty$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A.

Пример 1.3. Доказать по определению, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x-1}{2x+1} = 2. \tag{1.1}$$

Решение. Докажем (1.1), используя определение по Коши. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| > \Delta$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{4x-1}{2x+1} - 2\right| = \frac{3}{|2x+1|} < \varepsilon \text{ или } |2x+1| > \frac{3}{\varepsilon}.$$

Найдем значения x, для которых выполняется последнее неравенство. Так как $|2x+1| \geqslant |2x| - 1$, то достаточно решить неравенство $|2x| - 1 > \frac{3}{\varepsilon}$. Получаем $|x| > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right)$. Определим $\Delta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right)$, тогда для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \Delta$, выполняется

$$\left|\frac{4x-1}{2x+1} - 2\right| < \varepsilon.$$

Пример 1.4. Доказать по определению, что

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Решение. Воспользуемся определением 1.7:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta > 0 \ \ \forall x\colon x > \Delta \Rightarrow |e^{\frac{1}{x}} - 1| < \varepsilon.$$

Так как $e^{\frac{1}{x}} > 1$ при любом $x > 0$, то неравенство $|e^{\frac{1}{x}} - 1| < \varepsilon$ можно записать в виде $e^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon$. Отсюда $x > \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$. Положим $\Delta = \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}$, тогда для всех значений $x > \Delta$ выполняется $|e^{\frac{1}{x}} - 1| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

Определение 1.9 (по Коши)**.** Предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен ∞ $(+\infty, -\infty)$, если для любого числа $E > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$ $(f(x) > E, f(x) < -E)$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > E,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -E,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E.$$

Определение 1.10 (по Гейне)**.** Предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен ∞ $(+\infty, -\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, $x_n \neq x_0$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции стремится к ∞ $(+\infty, -\infty)$.

Пример 1.5. Доказать по определению, что

$$\lim_{x \to 3} \frac{5}{x - 3} = \infty. \tag{1.2}$$

Решение. По определению 1.9 равенство (1.2) означает

$$\forall E > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x\colon 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow \left|\frac{5}{x - 3}\right| > E.$$

Из последнего неравенства следует $|x - 3| < \frac{5}{E}$. Пусть $\delta = \frac{5}{E}$, тогда для любого x такого, что $0 < |x - 3| < \delta$, справедливо неравенство

$$\left|\frac{5}{x - 3}\right| > E.$$

Упражнения

Записать на языке «$\varepsilon - \delta$» следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2.$
2. $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 1.$
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq 3.$
4. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq -3$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1.$
6. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0.$
7. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq -4.$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq 2.$

Доказать по определению, что

9. $\lim\limits_{x\to 2}(3x-7) = -1.$
10. $\lim\limits_{x\to -3}(-4x+8) = 20.$
11. $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2.$
12. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x} = 1.$
13. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1) = 0.$
14. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2) = 6.$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+1}{x-2} = 2.$
16. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-2}{2x+3} = \dfrac{1}{2}.$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{3x-2} = \dfrac{1}{3}.$
18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+5}{x+2} = 3.$

Доказать, что следующие функции $f(x)$ не имеют предела при $x \to 0$.

19. $f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$
20. $f(x) = \sin\frac{1}{x}.$
21. $f(x) = x - \cos\frac{1}{x}.$
22. $f(x) = x + \sin\frac{1}{x}.$

23. Записать определения $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ по Коши и по Гейне.

2. Приемы вычисления пределов

В самом простом случае значение предела функции находится при помощи следующей теоремы.

Теорема 2.1 (арифметические свойства пределов функций). *Если существуют* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *то*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a\cdot b;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{a}{b}$, *если* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0.$

Пример 2.1.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{-1-1}{(-1)^2+1}=-1.$$

При вычислении пределов зачастую появляются выражения, значение которых не определено. Такие выражения называют *неопределенностями.* Основные виды неопределенностей:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\left(\frac{0}{0}\right),(0\cdot\infty),(\infty-\infty),(1^\infty),(0^\infty),\left(\infty^0\right).$$

Рассмотрим некоторые приемы раскрытия неопределенностей с помощью арифметических свойств предела функции.

Пример 2.2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2x)^2}{(x-2)^3-(x-1)^3}.$$

Решение. Применим формулы сокращенного умножения, в числителе и знаменателе получим алгебраические многочлены, которые при $x\to\infty$ стремятся к бесконечности, т. е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Затем вынесем за скобки в числителе и знаменателе старшие степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-2x)^2}{(x-2)^3-(x-1)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x+4x^2}{x^3-6x^2+12x-8-(x^3-3x^2+3x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4x+4x^2}{-3x^2+9x-7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4\right)}{x^2\left(-3+\frac{9}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}=-\frac{4}{3}.$$

Пример 2.3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2-x+10}{x^2+2x-8}.$$

Решение. Подставляя в выражение $x=2$, получаем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы избавиться от этой неопределенности, разложим числитель и знаменатель на множители.

По теореме Безу многочлен x^3-4x^2-x+10 делится на $x-2$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-4x^2\quad -x+10 & x-2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2\qquad\qquad\quad} & x^2-2x-5 \\
-2x^2\quad -x\qquad & \\
\underline{-2x^2+4x\qquad} & \\
-5x+10 & \\
\underline{-5x+10} & \\
0 &
\end{array}
$$

Квадратный трехчлен можно разложить по формуле ax^2+bx+ $+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни соответствующего квадратного уравнения. Имеем $x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$.

Тогда

$$
\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2-x+10}{x^2+2x-8}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-2x-5)}{(x-2)(x+4)}=
$$
$$
=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-5}{x+4}=-\frac{5}{6}.
$$

Пример 2.4. Вычислить предел

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}.
$$

Решение. Имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное к числителю выражение $\sqrt{x+9}+3$. Получим

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=
$$
$$
=\lim_{x\to 0}\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=
$$
$$
=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.
$$

Пример 2.5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{2x+6}-2}.$$

Решение. Чтобы избавиться от неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, разложим числитель на множители и умножим числитель и знаменатель на неполный квадрат суммы $\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{2x+6}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4)}{(\sqrt[3]{2x+6}-2)(\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4)}{(2x+6)-8}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4)}{2x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(\sqrt[3]{(2x+6)^2}+2\sqrt[3]{2x+6}+4)}{2}=-\frac{12}{2}=-6.$$

Пример 2.6. Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2-1}).$$

Решение. В данном примере неопределенность $(\infty-\infty)$. Для того, чтобы избавиться от этой неопределенности, умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2-1}$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2-1})=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2-1})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2-1})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-(2x^2-1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-x^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = \left(\frac{-\infty}{3}\right) = -\infty.$$

Пример 2.7. Вычислить предел

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

Решение. Рассмотрим отдельно случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. При $x \to +\infty$ имеем неопределенность $(\infty - \infty)$. Умножим и разделим на выражение $\sqrt{x^2+1} + x$. Тогда

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0.$$

При $x \to -\infty$ получим

$$\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = (\infty + \infty) = +\infty.$$

Упражнения

Найти пределы

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{3x^2 + 1}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 7}{x^2 + 3}$.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x - 2)^3 - (x + 3)^3}{(2x - 1)^2 + (x - 1)^2}$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x + 1)^3 + (3x + 1)^3}{(2x + 3)^3 - (x - 7)^3}$.

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$.

6. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$.

7. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$.

8. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{x^3 - 1000}{x^3 - 20x^2 + 100x}$.

9. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 9x^2 + 6x + 16}{2x^2 - 6x - 8}$.

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 5x^2 - 8x + 12}{3x^2 - 6x + 3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right).$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right).$

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x^3-4x^2+3x}.$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x+x^2}-(1+x)}{3x^2+4x}.$

15. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}.$

16. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+9}-4}.$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}.$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$

19. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{3x+3}-3}.$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x+4}-2}{\sqrt{x+2}-2}.$

21. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}-\sqrt{x^2-3}\right).$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right).$

23. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right).$

24. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

25. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right).$

26. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right).$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right).$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2+6}-x\right).$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right).$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right).$

3. Односторонние пределы

Определение 3.1 (по Коши)**.** Число A называется *правым (левым) пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 или пределом функции $f(x)$ при x, стремящимся к x_0 справа (слева), если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, т. е.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x\colon x_0<x<x_0+\delta\ (x_0-\delta<x<x_0)$$
$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Обозначение $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A\quad\left(f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A\right).$

Определение 3.2 (по Гейне)**.** Число A называется *правым (левым) пределом* функции $f(x)$ в точке x_0 или пределом функции $f(x)$ при x, стремящимся к x_0 справа (слева), если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ такой, что x_n больше (меньше) x_0 соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A, т. е.

$$\forall \{x_n\}\colon x_n \to x_0,\ x_n > x_0\ (x_n < x_0) \Rightarrow\ f(x_n) \to A.$$

Правый и левый пределы функции называются односторонними пределами.

Пример 3.1. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ в точке $x = 0$.

Решение. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, элементы которой $x_n > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\operatorname{sign} x_n = 1$ и $\lim\limits_{x\to+0} \operatorname{sign} x = 1$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to-0} \operatorname{sign} x = -1$.

Определение 3.3 (по Коши)**.** Правый (левый) предел функции функции $f(x)$ в точке x_0 равен ∞, если для любого числа $E > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, справедливо неравенство $|f(x)| > E$.

$$\forall E > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall x\colon x_0 < x < x_0 + \delta\ (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x)| > E.$$

Определение 3.4 (по Гейне)**.** Правый (левый) предел функции функции $f(x)$ в точке x_0 равен ∞, если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ такой, что x_n больше (меньше) x_0 соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к ∞.

Теорема 3.1. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Пример 3.2. Вычислить односторонние пределы функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

в точке $x = 0$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Значит

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Значит $\lim\limits_{x\to 0-0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$.

Пример 3.3. При каком значении параметра a функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leqslant 1, \\ 3 - ax^2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

имеет предел в точке $x = 1$.

Решение. Вычислим односторонние пределы

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x + 1) = 2,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3 - ax^2) = 3 - a.$$

По теореме 3.1 предел $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$, т. е. $3 - a = 2$. Следовательно $a = 1$.

Упражнения

Записать на языке «$\varepsilon - \delta$» следующие утверждения:

1. $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -2$.
2. $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$.
5. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \neq 2$.
6. $\lim\limits_{x\to +0} f(x) \neq 1$.

Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0.

7. $f(x) = \dfrac{x-1}{|1-x|}$, $x_0 = 1$.

8. $f(x) = \dfrac{x^3-8}{|x-2|}$, $x_0 = 2$.

9. $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)^3}$, $x_0 = 3$.

10. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$, $x_0 = 2$.

11. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$

12. $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x-1}$, $x_0 = 1$.

13. $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$, $x_0 = 0$.

14. $f(x) = \dfrac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Пример 4.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{4}{3}.$$

Пример 4.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 8x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{32\sin^2 4x}{(4x)^2} = 32.$$

Пример 4.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(3+x)\right)}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}(3+x)\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Пример 4.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}=|y=x-\pi|=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{y^2}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos\frac{y}{2}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{4}}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{8}\sin^2\frac{y}{4}}{\frac{y^2}{16}}=\frac{1}{8}.$$

Пример 4.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-4x^2}{\cos 3x-\cos 5x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-4x^2}{\cos 3x-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-4)}{-2\sin\dfrac{3x+5x}{2}\sin\dfrac{3x-5x}{2}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-4)}{-2\sin 4x\sin(-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x-4)}{2\sin 4x\sin x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x-4}{8}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-4}{8}=$$
$$=1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Пример 4.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{2x}=\left|\begin{matrix}x=\sin t\\ t=\arcsin x\end{matrix}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{2\sin t}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{4x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{8x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{2x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{2x^2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{\pi(4x+3)}{2}}{2x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi(5-x)}{2}}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-2x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2}{\cos 7x-\cos 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{\cos 2x-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{3x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\arcsin 2x}$.

5. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенности $(1^\infty.)$

Пример 5.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{2x}=(1^\infty)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x\cdot\frac{4}{3}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{3}{2}x}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}.$$

Пример 5.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{2x}} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot 2} = \left(\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^2 = e^2.$$

Пример 5.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+1}{2}}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x+1}{2}}\right)^{-\frac{x+1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{x+1}\cdot 2x\right)} = e^{-4}.$$

Пример 5.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2+5}\right)^{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+5}\right)^{x^3} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x^2+5)}\right)^{-(x^2+5)\cdot\frac{x^3}{-(x^2+5)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(x^2+5)}\right)^{-(x^2+5)}\right)^{\frac{x^3}{-(x^2+5)}} = (e^{-\infty}) = 0.$$

Пример 5.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+x^5}{x^3-x^4}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+x^5}{x^3-x^4}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3(1+x^2)}{x^3(1-x)}\right)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} = (1^{\infty}) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x+x^2}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x+x^2}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{x+x^2}\cdot\frac{x+x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2}{1-x}\cdot\frac{1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Упражнения

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{7x}\right)^{3x}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{\pi}\right)^{\frac{1}{\pi x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)^{x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{2x}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{3+x^2}\right)^{2x^4}$.
8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x^2-2}\right)^{x^3}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^4+x^2}{x^2-x^3}\right)^{-\frac{1}{3x}}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^5+x^3}{x^3+x^4}\right)^{\frac{1}{x}}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+x^2}{x^2+3x^5}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+x}{x+3x^4}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

6. Асимптотическое сравнение функций

Рассмотрим поведение функции $f(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0, где $x_0\in\mathbb{R}$, $x_0=\infty$, $x_0=-\infty$, $x_0=+\infty$. Для исследования асимптотического поведения данной функции проводят ее сравнение с другой, более простой и лучше изученной функцией.

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки x_0 и являются бесконечно малыми (бесконечно большими) в точке x_0.

Определение 6.1. Функция $f(x)$ называется *ограниченной по отношению* к функции $g(x)$ при x стремящемся к x_0 (или говорят, что $f(x)$ есть *O-большое* от функции $g(x)$ при $x\to x_0$), если существует проколотая окрестность $\mathring{O}(x_0)$ и постоянная $C>0$ такие, что для любых $x\in\mathring{O}(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$. В этом случае пишут $f(x)=\underline{O}(g(x))$ при $x\to x_0$.

Утверждение 6.1. *$f(x) = \underline{O}(g(x))$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi(x)$ и окрестность $\mathring{O}(x_0)$ такие, что $\varphi(x)$ ограничена в $\mathring{O}(x_0)$ и выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)g(x)$ для всех $x \in \mathring{O}(x_0)$.*

Пример 6.1. Доказать равенство $x \sin\sqrt{x} = \underline{O}(x^{3/2}),\ x \to 0$.

Решение. По утверждению 6.1 достаточно в окрестности точки 0 найти ограниченную функцию $\varphi(x)$ такую, чтобы выполнялось равенство $x \sin\sqrt{x} = \varphi(x)x^{3/2}$.

Рассмотрим функцию

$$|\varphi(x)| = \left|\frac{x\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right| \leqslant 1.$$

Следовательно, $x \sin\sqrt{x} = \underline{O}(x^{3/2}),\ x \to 0$.

Определение 6.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = \underline{O}(g(x))$ и $g(x) = \underline{O}(f(x))$ при $x \to x_0$, то они называются функциями *одного порядка.* В этом случае пишут $f(x) \asymp g(x)$ при $x \to x_0$.

Определение 6.3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если в некоторой окрестности $\mathring{O}(x_0)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 1$ и выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)g(x)$. В этом случае пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Определение 6.4. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой по отношению* к функции $g(x)$ при x стремящемся к x_0 (или говорят, что $f(x)$ есть *о-малое* относительно функции $g(x)$ при $x \to x_0$), если существует проколотая окрестность $\mathring{O}(x_0)$ и функция $\varphi(x)$ такая, что $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ и выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)g(x)$. В этом случае пишут $f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \to x_0$.

Эти определения можно переформулировать следующим образом:

1. $f(x) = \underline{O}(g(x)),\ x \to x_0 \Leftrightarrow \exists C > 0\ \forall x \in \mathring{O}(x_0) \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C.$

2. $f(x) \asymp g(x),\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0.$

3. $f(x) \sim g(x),\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

4. $f(x) = \bar{o}(g(x)),\ x \to x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Пример 6.2. Даны функции $f(x) = 3x^2 - 4x$ и $g(x) = x^2$. Доказать, что $f(x) = \underline{O}(g(x)),\ x \to +\infty$.

Решение. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 - 4x}{x^2} = 3 - \frac{4}{x} < 3$$

при $x > 0$, т. е. отношение функций ограничено в любой окрестности $+\infty$. Следовательно, $f(x) = \underline{O}(g(x)),\ x \to +\infty$.

Пример 6.3. Показать, что функции $f(x) = x^2 - 5x$ и $g(x) = 5x^2 - 3x$ являются бесконечно малыми одного порядка в точке $x = 0$.

Решение. Функции $f(x), g(x)$ бесконечно малые в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

Рассмотрим предел отношения этих функций:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x}{5x^2 - 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-5)}{x(5x-3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x-5}{5x-3} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $x^2 - 5x \asymp 5x^2 - 3x,\ x \to 0$.

Пример 6.4. Являются ли функции $f(x) = (1 + x)^2 - 1$ и $g(x) = 2x$ эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 0$?

Решение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Вычислим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2}{2x} = 1.$$

Следовательно, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$ по определению.

Пример 6.5. Показать, что функции $f(x) = -2(\sqrt{3-x} - 1)$ и $g(x) = x - 2$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 2$.

Решение. Сначала покажем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малые при $x \to 2$, для этого вычислим пределы $\lim\limits_{x\to2} g(x) = \lim\limits_{x\to2}(x-2) = 0$ и $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -2\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{3-x}-1) = 0$. Далее вычислим предел отношения

$$\lim_{x\to2}\frac{-2\left(\sqrt{3-x}-1\right)}{x-2} = \lim_{x\to2}\frac{-2(2-x)}{(x-2)(\sqrt{3-x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{3-x}+1} = 1.$$

По определению $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 2$.

Пример 6.6. Эквиваленты ли бесконечно большие функции $f(x) = (1+x)^2$ и $g(x) = x^2$ при $x \to \infty$?

Решение. Вычислим предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2}{x^2} = 1,$$

следовательно, $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$.

Пример 6.7. Эквиваленты ли бесконечно большие функции $f(x) = \sqrt{1+2x}-1$ и $g(x) = 2\sqrt{x}$ при $x \to +\infty$?

Решение. Вычислим предел, умножая числитель и знаменатель дроби на сопряженное к числителю выражение,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+2x}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1,$$

следовательно, $f(x) \not\sim g(x)$ при $x \to +\infty$.

Пример 6.8. Верно ли равенство $x^2 = \bar{o}(x)$ при а) $x \to 0$; б) $x \to +\infty$.

Решение. а) Рассмотрим предел

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to0} x = 0,$$

следовательно, равенство $x^2 = \bar{o}(x)$ верно при $x \to 0$.

б) Если рассмотреть аналогичный предел при $x \to +\infty$, то получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$$

т. е. при $x \to +\infty$ равенство $x^2 = \bar{o}(x)$ не верно.

Пример 6.9. Пусть $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, n \geqslant k$. Показать, что $\bar{o}(x^n) + \bar{o}(x^k) = \bar{o}(x^k)$ при $x \to 0$.

Решение. Пусть $f(x) = \bar{o}(x^n)$. Тогда, по определению, $f(x) = \varphi(x) \cdot x^n$, где $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0$. Аналогично, $g(x) = \bar{o}(x^k)$ означает, что $g(x) = \psi(x) \cdot x^k$, где $\lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 0$.

Рассмотрим сумму этих функций

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) \cdot x^n + \psi(x) \cdot x^k = x^k(\varphi(x) \cdot x^{n-k} + \psi(x)).$$

Выражение в скобках стремится к 0 при $x \to 0$. Следовательно, $f(x) + g(x) = \bar{o}(x^k)$ при $x \to 0$.

Пример 6.10. Доказать, что $\sin x^6 = \bar{o}(x^3),\ x \to 0$.

Решение. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^6}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x^6}{x^6} \cdot x^3 \right) = 0.$$

Пример 6.11. Доказать, что $x^4 + 2 = \bar{o}(x^5),\ x \to +\infty$.

Решение. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 2}{x^5} = 0.$$

Упражнения

1. Верно ли равенство $x = \bar{o}(x^2)$ при а) $x \to 0$; б) $x \to +\infty$.

2. Верно ли равенство $\ln(1 + e^x) = \bar{o}(1)$ при а) $x \to -\infty$; б) $x \to +\infty$.

3. Показать, что $C\bar{o}(x^n) = \bar{o}(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $C \neq 0$ — постоянная при а) $x \to 0$; б) $x \to +\infty$.

4. Показать, что $\bar{o}(x^n)\bar{o}(x^k) = \bar{o}(x^{n+k}), n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, при а) $x \to 0$; б) $x \to +\infty$.

Доказать следующие равенства при $x \to 0$

5. $x\sin(\frac{1}{x}) = \underline{O}(|x|)$.
6. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \underline{O}(1)$.
7. $\sin 3x \asymp \sin x$.
8. $\sin 5x \asymp (x + x^3)$.
9. $\dfrac{x}{2} \sim \sqrt{1+x} - 1$.
10. $\dfrac{x}{3} \sim \sqrt[3]{1+x} - 1$.
11. $3x^4 - 5x^3 = \bar{o}(x^{1/2})$.
12. $2x^3 - x^2 = \bar{o}(x^{1/3})$.

Доказать следующие равенства при $x \to +\infty$

13. $\frac{x+1}{1+x^2} = \underline{O}(\frac{1}{x})$.
14. $\frac{2x-1}{x+x^2} = \underline{O}(\frac{1}{x})$.
15. $2x^2 + 3x \asymp 3x^2 - 3$.
16. $-5x^4 + 3x^2 \asymp 3x^4 + 2x$.
17. $\sqrt[3]{1 - x + x^3} \sim x + 1$.
18. $\sqrt{x^2-1}(x+10) \sim x^2 + 5$.
19. $3x^4 - 5x^3 = \bar{o}(x^5)$.
20. $2x^3 - x^2 = \bar{o}(x^4)$.

Доказать следующие равенства при $x \to 0$.

21. $x\sin\frac{1}{x} = \underline{O}(|x|)$.
22. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \underline{O}(1)$.
23. $\sin 3x \asymp \sin x$.
24. $\sin 5x \asymp x + x^3$.
25. $3x^4 - 5x^3 = \bar{o}(x^{1/2})$.
26. $2x^3 - x^2 = \bar{o}(x^{1/3})$.

Доказать следующие равенства при $x \to +\infty$.

27. $\dfrac{x+1}{1+x^2} = \underline{O}\big(1/x\big)$.
28. $\dfrac{2x-1}{x+x^2} = \underline{O}\big(1/x\big)$.
29. $2x^2 + 3x \asymp 3x^2 - 3$.
30. $-5x^4 + 3x^2 \asymp 3x^4 + 2x$.
31. $3x^4 - 5x^3 = \bar{o}(x^5)$.
32. $2x^3 - x^2 = \bar{o}(x^4)$.

7. Вычисление пределов с помощью таблицы эквивалентных бесконечно малых

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$.

1) $\sin x \sim x$;
2) $\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$;
3) $\ln(1+x) \sim x$;
4) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$;
5) $e^x - 1 \sim x$;
6) $a^x - 1 \sim x\ln a$;
7) $\operatorname{tg} x \sim x$;
8) $\operatorname{arctg} x \sim x$;
9) $\arcsin x \sim x$.

Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки 0, то

1) $\sin f(x) \sim f(x)$; 2) $\cos f(x) - 1 \sim -\dfrac{f^2(x)}{2}$;

3) $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$; 4) $(1 + f(x))^\alpha - 1 \sim \alpha f(x)$;

5) $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$; 6) $a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \ln a$;

7) $\operatorname{tg} f(x) \sim f(x)$; 8) $\operatorname{arctg} f(x) \sim f(x)$;

9) $\arcsin f(x) \sim f(x)$.

Теорема 7.1. *Пусть $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \to x_0$ и существует*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

причем

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Пример 7.1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$.

Решение. Функция $\sin 4x$ при $x \to 0$ является бесконечно малой, а значит, $\sin 4x \sim 4x$ и

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x} = 4.$$

Пример 7.2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x^2}$.

Решение. Функция $\cos 3x - 1$ бесконечно малая при $x \to 0$, тогда $\cos 3x - 1 \sim -\dfrac{9x^2}{2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 3x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-9x^2/2}{x^2} = -\frac{9}{2}.$$

Пример 7.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{\arcsin x}}{(1+x)^4-1}$.

Решение. $2^{\arcsin x}-1\sim\arcsin x\cdot\ln 2\sim x\ln 2$, $(1+x)^4-1\sim 4x$ при $x\to 0$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2^{\arcsin x}}{(1+x)^4-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\ln 2}{4x}=-\frac{\ln 2}{4}.$$

Пример 7.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x^2)}{(e^{x^2}-1)^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x^2)}{(e^{x^2}-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+(\cos x^2-1))}{(e^{x^2}-1)^2}$. При $x\to 0$ верны соотношения

$$\ln(1+(\cos x^2-1))\sim\cos x^2-1\sim-\frac{x^4}{2},\quad e^{x^2}-1\sim x^2.$$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x^2)}{(e^{x^2}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4/2}{(x^2)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 7.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^4 3x)}{(e^{x^2+x^5}-1)^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^4 3x)}{(e^{x^2+x^5}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 3x}{(x^2+x^5)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3^4x^4}{(x^2+x^5)^2}=81.$$

Пример 7.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-2\operatorname{tg}^3x^4)^5-1}{\left(1+2\sin^2(6x^6)\right)^2-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-2\operatorname{tg}^3x^4)^5-1}{\left(1+2\sin^2(6x^6)\right)^2-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-10\operatorname{tg}^3x^4}{4\sin^2(6x^6)}=\lim_{x\to 0}\frac{-10x^{12}}{4\cdot 36x^{12}}=-\frac{5}{72}.$$

Пример 7.7. Вычислите $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{\sin 4\pi x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin 3\pi x}{\sin 4\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\sin(3\pi(x-1+1))}{\sin(4\pi(x-1+1))}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin(3\pi(x-1)+3\pi)}{\sin(4\pi(x-1)+4\pi)}=\lim_{x\to1}\frac{-\sin 3\pi(x-1)}{\sin 4\pi(x-1)}=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-3\pi(x-1)}{4\pi(x-1)}=-\frac{3}{4}.$$

Замечание. Обращаем внимание читателя на то, что замену функции на эквивалентное выражение можно выполнять только при условии, что эта функция является множителем числителя или знаменателя дроби, предел которой вычисляется. Например, при вычислении предела выражения

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}$$

замена функций $\sin 2x$ и $\operatorname{tg}2x$ на эквивалентную при $x\to0$ функцию $2x$ будет ошибкой, т. к. $\sin 2x$ и $\operatorname{tg}2x$ не являются множителями числителя. Правильное решение будет следующее

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x\left(1-\frac{1}{\cos 2x}\right)}{x^3}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x(\cos 2x-1)}{x^3\cos 2x}=\frac{(2x)(-2x^2)}{x^3\cos 2x}=-4.$$

Упражнения

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^2-1}{(1-3x)^5-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\arcsin(1-x)}{1-x}$.
4. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\ln(4-x)}{x^2-9}$.
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-x}{\operatorname{arctg}3x+x}$.
6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x+3x}{\arcsin 3x+x}$.
7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\operatorname{tg}3x}{\arcsin x^3}$.
8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\big(\operatorname{tg}x-\sin 2x\big)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-9}{\sin\pi x}$. 10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{8-2^x}{\operatorname{tg}\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(x/e)}{e-x}$. 12. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\ln(-x/3)}{\sin(x+3)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 5x}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos^2 x)}{\ln\cos 2x}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos 2x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x\sin x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{\ln(e+\sin x)}-\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}}{1-\sqrt{1-x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt[5]{\arcsin x+1}}{\ln(1+\operatorname{arctg}5x)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin x}-\sqrt[5]{1+\operatorname{arctg}x}}{\ln\cos 5x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-7^x}{\sin x-\sin 2x}$. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2^x-9^x)}{\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^x}{2-x}$. 22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3^x-x^3}{\sin(3-x)}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}+x^2-1}{\ln\cos 2x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\ln\cos x^2-\sqrt[3]{1+\sin^2 x}}{\ln\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27-2x}-\sqrt[4]{16-\sin x}-e^{2x}}{\ln(1+e^x-\cos x)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}+\sqrt[5]{x-32}+\sqrt[6]{1+\operatorname{arctg}x}}{\ln(3^x+\sin x)}$.

8. Предел показательно-степенной функции

При вычислении предела показательно–степенной функции $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ сначала находим предел основания $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ и предел показателя степени $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$. Если выражение A^B не является неопределенностью, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

Пример 8.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{2x+3}\right)^{x^2}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{2x+3} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

тогда

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+x}{2x+3}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0.$$

Пример 8.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{1+x}\right)^{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{1+x}\right)^{x^2} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Пример 8.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1+x}{2x+3}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1+x}{2x+3}} = 0^{1/2} = 0.$$

Пример 8.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+x}{2x+3}\right)^{x}$.

Решение. Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{2x+3}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1+x}{2x+3}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty.$$

Следовательно, исходный предел не существует.

Если при вычислении предела показательно–степенной функции $f(x)^{g(x)}$ надо раскрыть неопределенность (например, 1^∞, 0^0, ∞^0), преобразовываем функцию следующим образом

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

В силу непрерывности показательной функции получаем

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}. \tag{8.1}$$

Пример 8.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+2x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+2x+\sin x)}{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+\sin x)}{\operatorname{tg} x}}.$$

Воспользуемся асимптотическими равенствами

$$\ln(1+2x+\sin x) \sim 2x+\sin x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad x\to 0$$

и первым замечательным пределом при вычислении

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+\sin x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right) = 3.$$

Таким образом, получим $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e^3$.

Пример 8.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}} =$$
$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}}.$$

При $x\to 0$ справедливы следующие выкладки

$$\ln(\cos 2x) = \ln(1+\cos 2x-1) \sim \cos 2x - 1 \sim -\frac{(2x)^2}{2} = -2x^2,$$

тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2}=-2.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

Пример 8.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}=(1^\infty)=\lim_{x\to 0}e^{\operatorname{ctg}^2 x\ln(\cos x)}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\ln(\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

В силу верных при $x\to 0$ асимптотических равенств

$$\ln(\cos x)\sim\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2},\quad \operatorname{tg}x\sim x,$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{tg}^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

Откуда $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}=e^{-\frac{1}{2}}$.

Пример 8.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\left(2-\dfrac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 5}\left(2-\frac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}=(1^\infty)=\lim_{x\to 5}e^{\ln\left(2-\frac{x}{5}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}}}=$$
$$=\lim_{x\to 5}e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{5}\ln\left(2-\frac{x}{5}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 5}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-5)+5\pi}{5}\ln\left(1+1-\frac{x}{5}\right)}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 5}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-5)}{5}\left(1-\frac{x}{5}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 5}\frac{(1-x/5)}{\operatorname{tg}((x-5)\pi/5)}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 5}\frac{(1-x/5)}{(x-5)\pi/5}}=e^{-1/\pi}.$$

Упражнения

Вычислить пределы

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+4x}{1-x}\right)^{x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-3}{1+2x}\right)^{x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{5+4x}\right)^{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3x-5}\right)^{x^6}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1+x}{5+2x}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x^3-1}\right)^{\frac{2+x}{3-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3x}{3+4x}\right)^{-x}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+5x}{3+4x}\right)^{-x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\ln^{-2}(1+x)}$.

11. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{(\ln(1-x^2))^{-1}}$.

12. $\lim\limits_{x\to0}(\cos x^2)^{(\sqrt{1-x^4}-1)^{-1}}$.

13. $\lim\limits_{x\to2}\left(2-\dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

14. $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{8-x}{4}\right)^{\operatorname{tg}^{-1}\frac{\pi x}{4}}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{2x}+\sin\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

17. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{1/x}$.

18. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+5^x}{3}\right)^{\ln^{-1}(1-\sin x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

22. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x\ln(1+2x)}{1-x\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

9. Определение непрерывной функции

Определение 9.1. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некотором интервале $(a,\ b)$, содержащем точку x_0. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если предел функции в этой точке равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{9.1}$$

Используя различные определения предела функции в точке, раскроем определение 9.1 и сформулируем его подробнее.

Определение 9.2 (по Гейне)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой числовой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ будет сходиться к $f(x_0)$, то есть

$$\forall \{x_n\} \subset (a,\ b)\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Определение 9.3 (по Коши)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, чтобы при условии $|x - x_0| < \delta$ выполнялось неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a,\ b)\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Последнее определение целесообразно также сформулировать через понятие окрестности. Пусть $y_0 = f(x_0)$.

Определение 9.4 (на языке окрестностей)**.** Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности $O_\varepsilon(y_0)$ точки y_0 найдётся такая окрестность $O_\delta(x_0)$ точки x_0, чтобы для любой точки $x \in O_\delta(x_0)$ выполнялось условие $f(x) \in O_\varepsilon(y_0)$.

Введём обозначения для приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и приращения функции $\Delta y = y - y_0$ в точке x_0.

Определение 9.5 (на языке приращений)**.** Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если приращение функции в точке x_0 стремится к нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0.$$

Несмотря на разнообразие введённых определений, можно чётко сформулировать общую идею, отражающую все пять определений: непрерывность функции в точке означает малое изменение значения функции при условии, что значение аргумента мало отличается от рассматриваемой точки. Важнейшей особенностью непрерывной функции является возможность вычислить её предел в точке при помощи простого равенства (9.1).

Пример 9.1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

является непрерывной в точке $x_0 = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$.

Определение 9.6. Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева (справа)* в точке $x_0 \in (a,\ b)$, если левый (правый) предел функции в точке x_0 совпадает со значением функции в этой точке:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0), \quad \big(f(x_0 + 0) = f(x_0)\big).$$

Свойство непрерывности слева или справа называется односторонней непрерывностью функции.

Теорема 9.1. *Для того чтобы функция была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна одновременно слева и справа в этой точке, то есть выполнялись равенства*

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \tag{9.2}$$

Пример 9.2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ln 2, & x \leqslant 1, \\ \dfrac{2^x - 2}{x - 1}, & x > 1. \end{cases}$$

Найдём левый и правый пределы функции в точке $x_0 = 1$. Функция $y = 2x \ln 2$ непрерывна в этой точке как элементарная (см. п. 10), поэтому её предел в этой точке равен значению в точке:

$$f(1 - 0) = \lim_{x\to 1} 2x \ln 2 = 2 \ln 2 = f(1).$$

Вычислим правый предел, применяя технику замены эквивалентных бесконечно малых функций:

$$f(1 + 0) = \lim_{x\to 1} \frac{2^x - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(2^{x-1} - 1)}{x - 1} = 2 \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\ln 2}{x - 1} = 2 \ln 2.$$

Таким образом, $f(1 - 0) = f(1) = f(1 + 0)$. Поэтому по теореме 9.1 функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 1$.

Определение 9.7. Функция, которая не является непрерывной в точке x_0, называется *разрывной* в этой точке. Аналогично, если функция не является непрерывной слева (или справа) в точке x_0, то она называется разрывной слева (или справа) в точке x_0.

Из теоремы 9.1 следует, что функция является разрывной в точке тогда и только тогда, когда она разрывна слева или справа в этой точке.

Пример 9.3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}, & x < 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найдём её левый и правый пределы в точке 0:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = 2,$$
$$f(0+0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0 \text{ и } f(0) = 0.$$

Поскольку $f(0-0) \neq f(0)$, то $f(x)$ разрывна слева в точке 0. В то же время $f(0+0) = f(0)$, поэтому функция непрерывна справа в точке $x_0 = 0$.

Пример 9.4. Подобрать такое число α, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leqslant 0, \\ \cos^2 x, & x > 0 \end{cases}$$

была непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдём односторонние пределы функции в точке x_0:

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0} (x + \alpha) = \alpha,$$
$$f(0+0) = \lim_{x \to 0} \cos^2 x = \cos^2 0 = 1.$$

По теореме 9.1 условию задачи удовлетворяет единственное значение $\alpha = 1$.

Пример 9.5. Подобрать такие числа α и β, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1, \\ \alpha x + \beta, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

оказалась непрерывной в точках ± 1.

Решение. Найдём односторонние пределы функции в указанных точках:

$$\begin{aligned} f(-1-0) &= \lim_{x \to -1} (x^2 - 1) = (-1)^2 - 1 = 0, \\ f(-1+0) &= \lim_{x \to -1} (\alpha x + \beta) = -\alpha + \beta, \\ f(1-0) &= \lim_{x \to 1} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta, \\ f(1+0) &= \lim_{x \to 1} x^2 = 1. \end{aligned}$$

По теореме 9.1 левый и правый пределы в каждой из точек ± 1 должны быть равны. Следовательно, выполняются равенства

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, получаем ответ $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Упражнения

В заданиях 1–8 проверить одностороннюю непрерывность и непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x - \pi}, & x \neq \pi, \\ -1, & x = \pi, \end{cases} \quad x_0 = \pi.$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{2x} - 4}{\sin \pi x}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1.$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 \operatorname{arctg} x - \pi}{1 - x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ $x_0 = 1.$

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 - x}, & x < 0, \\ \arcsin 2x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0.$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}, & x < 2\pi, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{6}, & x \geqslant 2\pi, \end{cases}$ $x_0 = 2\pi.$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x + 3}{x - 1}, & x < 1, \\ -x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ $x_0 = 1.$

8. $f(x) = \begin{cases} x \ln 7, & x \leqslant 4, \\ \dfrac{7^{x-2} - 49}{x - 4}, & x > 4, \end{cases}$ $x_0 = 4.$

9. Подобрать значение параметра a так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x < 1, \\ ax, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

была непрерывной в точке 1.

10. Подобрать значение параметра a так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x \leqslant -1, \\ ax + 3, & x > -1 \end{cases}$$

была непрерывной при $x = -1$.

11. Подобрать значения параметров a и b так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & |x| \leqslant 1, \\ ax + b, & |x| > 1 \end{cases}$$

была непрерывной в точках ± 1 одновременно.

12. Можно ли подобрать значения параметра a так, чтобы функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ a - x, & |x| > 1 \end{cases}$$

была непрерывной в точках ± 1 одновременно?

13. Пусть $y = f(x)$ — корень заданного уравнения или больший из них, если корней несколько. Проверить одностороннюю непрерывность и непрерывность этой функции при $x = 0$.

а) $xy^2 + y + 1 = 0$; б) $y^2 + xy - 1 = 0$;
в) $y^2 + 2y + x = 0$; г) $y^2 + xy + x = 0$.

10. Свойства непрерывных функций

Прежде всего сформулируем свойство непрерывности элементарной функции. К *простейшим элементарным* функциям обычно относят следующие:

- степенная функция $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, определена для $x \in (0,\ +\infty)$;
- показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, определена для $x \in (-\infty,\ +\infty)$;
- логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, определена для $x \in (0,\ +\infty)$;
- тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для $x \in (-\infty,\ +\infty)$, функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена для всех $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

- обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ определены для $x \in [-1,\ 1]$; $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ определены для $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

Определение 10.1. *Элементарными* функциями называются все функции, которые можно получить из простейших при помощи применения конечного числа четырёх арифметических действий и(или) операций композиции.

Теорема 10.1. *Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.*

Теорема 10.1 лежит в основе вычисления пределов выражений, не содержащих неопределённостей (вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ или других).

Пример 10.1. Функция $y=\log_2^2 \sin x$ непрерывна в каждой точке множества определения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi n,\ \pi + 2\pi n)$, как композиция простейших элементарных функций. Например, в точке $\frac{\pi}{2}$ предел функции будет равен

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \log_2^2 \sin x = \log_2^2 \sin\frac{\pi}{2} = \log_2^2 1 = 0.$$

Перечислим далее другие важные свойства непрерывных функций.

Теорема 10.2 (арифметические свойства)**.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при условии $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.*

Теорема 10.3 (непрерывность композиции функций)**.** *Если функция $F(y)$ непрерывна в точке y_0, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $y_0 = f(x_0)$, то функция $F\big(f(x)\big)$ непрерывна в точке x_0.*

Определение 10.2. Функция $x=g(y)$ называется *обратной* к функции $y=f(x)$, если $g(y)$ определена на множестве значений $f(x)$ и выполняется равенство $g\big(f(x)\big) = x$ для всех x из области определения $f(x)$. Обратная функция обозначается $f^{-1}(y)$.

Теорема 10.4 (об обратной функции)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $(a,\ b)$ и строго монотонна на нём. Обозначим $m = \inf\limits_{(a,b)} f(x)$, $M = \sup\limits_{(a,b)} f(x)$. Тогда $f(x)$ имеет* *единственную обратную функцию, которая определена и непрерывна на $(m,\ M)$.*

Замечание. Если точные грани m или M достигаются в области определения функции $f(x)$, то эти точки входят в область определения обратной функции.

Пример 10.2. Показать, что функция $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ имеет непрерывную обратную на $[1,\ +\infty)$. Найти область определения обратной функции.

Решение. Покажем, что функция $f(x)$ убывает на $[1,\ +\infty)$. Пусть $x_{1,2}\geqslant 1$ и $x_1<x_2$. Тогда

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}=\frac{x_2+x_1^2x_2-x_1-x_1x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$
$$=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

Так как $x_2-x_1>0$ и $x_1x_2>1$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$. Следовательно, $f(x)$ действительно убывает на $[1,\ +\infty)$. Найдём нижнюю и верхнюю грани функции на этом промежутке:

$$\inf_{(1,+\infty)} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1/x^2+1}=0,$$
$$\sup_{(1,+\infty)} f(x)=f(1)=\frac{1}{2}.$$

По теореме об обратной функции $f^{-1}(y)$ определена и непрерывна на $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$.

Пример 10.3. Определить промежутки монотонности функции $y=$ $=\operatorname{arctg}|x|+e^{x^2}$ и доказать существование и непрерывность обратных функций на каждом из них.

Решение. Заметим, что функции $y=\operatorname{arctg}x$ и $y=e^{x^2}$ возрастают на $[0,\ +\infty)$. Поэтому их сумма также будет возрастающей функцией. Значит функция $f(x)$ имеет непрерывную обратную на $[0,\ +\infty)$. Обозначим её $f_1^{-1}(y)$. Так как $f(0)=1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, то $f_1^{-1}(y)$ определена на промежутке $[1,\ +\infty)$.

Так как $f(-x)=f(x)$, то $f(x)$ является чётной функцией. Поэтому $f(x)$ убывает на $(-\infty,\ 0]$. На этом промежутке также существует обратная функция $f_2^{-1}(y)$. Поскольку $f(0)=1$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, то $f_2^{-1}(y)$ также определена на промежутке $[1,\ +\infty)$.

Замечание. Из теоремы о непрерывности обратной функции следует утверждение о непрерывности функции, заданной параметрически: если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны на $(a,\ b)$, функция $x(t)$ строго монотонна и $m=\inf\limits_{(a,b)} x(t)$, $M=\sup\limits_{(a,b)} x(t)$, то равенства

$$x=x(t), \qquad y=y(t)$$

определяют единственную непрерывную на $(m,\ M)$ функцию $y=$ $=f(x)$.

Пример 10.4. Доказать, что равенства $x=t^3+t$, $y=t^3-t$ определяют единственную непрерывную функцию $y=f(x)$. Найти область определения этой функции и вычислить её значение при $x=2$.

Решение. Функция $x=t^3+t$ является возрастающей как сумма двух возрастающих функций. При этом

$$m=\lim_{t\to-\infty}(t^3+t)=-\infty, \quad M=\lim_{t\to+\infty}(t^3+t)=+\infty.$$

Поэтому функция $f(x)$ определена на $(-\infty,\ +\infty)$.

Чтобы найти $f(2)$, решим уравнение $t^3+t=2$. Легко видеть, что $t=1$ — его единственный корень. Следовательно, $f(2)=y(1)=0$.

Пример 10.5. Доказать, что функции

$$x=(2-t)(t-1)^2, \quad y=\arcsin t\cdot\arccos t$$

определяют единственную непрерывную функцию $y=f(x)$. Найти область определения этой функции, вычислить её значение при $x=2$.

Решение. Заметим, что функция $y(t)$ определена на $[-1,\ 1]$, следовательно функцию $x(t)$ также нужно рассматривать для $t\in[-1,\ 1]$. Нетрудно определить, что функции $2-t$ и $(t-1)^2$ убывают и неотрицательны на отрезке $[-1,\ 1]$. Поэтому их произведение также будет убывающей функцией. Чтобы найти область определения функции $f(x)$ вычислим значения $x(t)$ в точках ±1. Находим: $x(-1)=12$,

$x(1)=0$. Таким образом, функция $f(x)$ определена на $[0,\ 12]$. Определим значение параметра t, при котором $x=2$. Его нетрудно найти простым подбором: $t=0$. Тогда $f(2)=y(0)=0$.

Теорема 10.5 (о локальной ограниченности). *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности точки x_0.*

Теорема 10.6 (о сохранении знака). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$ (или $f(x_0)<0$). Тогда в некоторой окрестности точки x_0 значения функции $f(x)$ положительны (или отрицательны).*

Теорема 10.7 (о промежуточных значениях). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала $(a,\ b)$, в некоторых точках x_1 и x_2 этого интервала функция принимает значения A и B соответственно, причём $A<B$. Тогда для любого значения C, лежащего между A и B, найдётся точка $x_0\in(a,\ b)$ такая, что $f(x_0)=C$.*

Последняя теорема, в частности, служит основой для процедуры отделения корней уравнения. Идея этой процедуры заключается в подборе таких значений a и b, в которых функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Тогда по теореме 10.7 между точками a и b обязательно существует корень уравнения $f(x)=0$.

Пример 10.6. Рассмотрим уравнение $x^7-2x^5+7x^2-13=0$. Данное уравнение нельзя решить элементарными алгебраическими методами, но можно найти его корни приближённо с любой заданной точностью. Для этого и требуется отделить корни уравнения, то есть подобрать интервал по возможности наименьшей длины, содержащий корень уравнения. Мы подберём такой интервал длины 1. Обозначим левую часть уравнения через $f(x)$. Будем находить значения x в целых точках x начиная с нуля:

$$f(0)=-13,\quad f(1)=-7,\quad f(2)=79.$$

Так как $f(1)<0$, но $f(2)>0$, то решение уравнения $f(x)=0$ принадлежит интервалу $(1,\ 2)$.

Упражнения

1. Указать промежутки непрерывности функций.

а) $y = \frac{x+1}{x-3}$; б) $y = \frac{x^2+2}{x^2-4}$;

в) $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$; г) $y = \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$;

д) $y = \arcsin \frac{x}{x+1}$; е) $y = \arccos \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Доказать следующие утверждения.

а) функция $f^2(x)$ также непрерывна в точке x_0;

б) функция $\cos f(x)$ непрерывна в точке x_0;

в) функция $f(x^3)$ непрерывна в точке $\sqrt[3]{x_0}$;

г) функция $f(\operatorname{tg} x)$ непрерывна в точке $\operatorname{arctg} x_0$;

д) функция $f(f(x))$ непрерывна в точке x_0, если $f(x)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$;

е) функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x < x_0, \\ -f(x), & x \geqslant x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0)=0$;

ж) функция

$$F(x) = \begin{cases} f^2(x), & x \leqslant x_0, \\ f^3(x), & x > x_0 \end{cases}$$

непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0)=0$ или $f(x_0) = 1$.

3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Определить возможные значения $f(x_0)$, если известно, что функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x)\cos x, & x \leqslant x_0, \\ f(x)\sin x, & x > x_0 \end{cases}$$

также непрерывна в точке x_0.

4. Доказать существование и непрерывность обратной функции, найти её область определения.

   а) $y = \log_2(2^x + x - 3)$; б) $y = \sqrt{x-1} + x^2$;
   в) $y = \arccos x - x$; г) $y = x + \ln x$.

5. Доказать, что функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют параметрически единственную непрерывную функцию $y = f(x)$. Найти область определения этой функции. Найти значение $y_0 = f(x_0)$.

   а) $x = \operatorname{arctg} t + 2t^3 + e^t$, $y = \operatorname{tg} t + t$, $x_0 = 1$;

   б) $x = \operatorname{arcctg} t - t$, $y = \sin t + \cos t$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

   в) $x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

   г) $x = 2^t + t$, $y = t \log_2 t$, $x_0 = 3$;

   д) $x = \operatorname{arctg} \sqrt{t} + t^2$, $y = 2^{t^2 - t}$, $x_0 = \frac{\pi}{3} + 9$;

   е) $x = \sin \frac{\pi t}{2} - \cos \pi t$, $y = \sqrt{t - t^2}$, $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Для заданного уравнения подобрать интервал длины 1, содержащий его решение.

   а) $x^3 - 4x + 8 = 0$; б) $-2x^5 + 3x^2 + 7 = 0$;
   в) $2^x - 12x + 3 = 0$; г) $\log_2 x + x - 5 = 0$.

   Доказать утверждения 7–9.

7. Пусть $f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1}$ — многочлен нечётной степени. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на $(-\infty, +\infty)$.

8. Пусть $f(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x + a_{2n}$ — многочлен чётной степени, причём коэффициенты a_0 и a_{2n} имеют разные знаки. Тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы два корня на $(-\infty, +\infty)$.

9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $(a,\ b)$, в некоторой точке $x_1 \in (a,\ b)$ выполняется неравенство $f(x_1) < g(x_1)$, в некоторой точке $x_2 \in (a,\ b)$ выполняется неравенство $f(x_2) > g(x_2)$. Тогда между точками x_1 и x_2 существует хотя бы один корень уравнения $f(x) = g(x)$.

11. Классификация точек разрыва

Если условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 нарушается, то точка x_0 называется *точкой разрыва* этой функции. Таким образом, в точке разрыва равенство (9.1) не выполняется. В зависимости от причин, приводящих к отсутствию непрерывности, точку разрыва принято относить к одному из следующих типов.

Определение 11.1. Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва* функции $f(x)$, если существует предел функции в этой точке, но он не равен значению функции в точке (значение $f(x_0)$ может быть даже не определено).

Пример 11.1. Функция

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x}$$

не определена в точке 0, но при этом $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$. Следовательно, функция имеет устранимый разрыв в точке 0. Термин «устранимый разрыв» оправдывается тем, что определив значение $f(0) = 2$, мы получаем уже непрерывную функцию.

Определение 11.2. Точка x_0 называется точкой разрыва *первого рода* функции $f(x)$, если существуют левый и правый пределы функции в этой точке, но хотя бы один из них не совпадает со значением функции в этой точке (значение $f(x_0)$ может быть вообще не определено). Другими словами, нарушено какое-либо из равенств (9.2).

Пример 11.2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Найдём односторонние пределы функции в точке 0:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-0}(-x) = 0 = f(0),$$
$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0+0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Замечаем, что $f(0+0) \neq f(0)$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке 0. График функции изображён на рисунке 2.

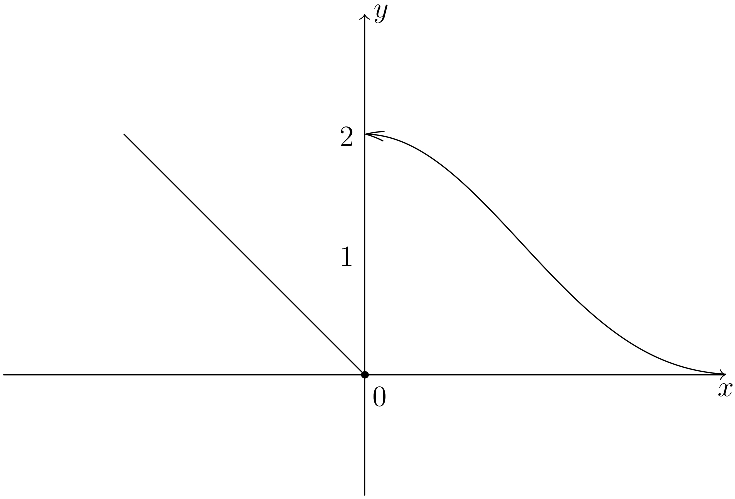

Рис. 2 График функции $y = f(x)$ из примера 11.2.

Определение 11.3. Точка x_0 называется точкой разрыва *второго рода* функции $f(x)$, если какой-либо из односторонних пределов функции в этой точке не существует (могут отсутствовать левый и правый предел одновременно, значение $f(x_0)$ может быть не определено). В частности, в точке разрыва второго рода функция может иметь бесконечные односторонние пределы.

Пример 11.3. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2}, & x < 0, \\ x + x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найдём левый предел функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x^2} = \left| \begin{matrix} \sin x \sim x \\ x \to 0 \end{matrix} \right| = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Поскольку $f(0-0)$ не существует (как конечное значение), то $f(x)$ имеет разрыв второго рода в точке 0. График функции приведён на рисунке 3. Отметим, что значение правого предела функции в этом примере хотя и существует, но не меняет существа дела.

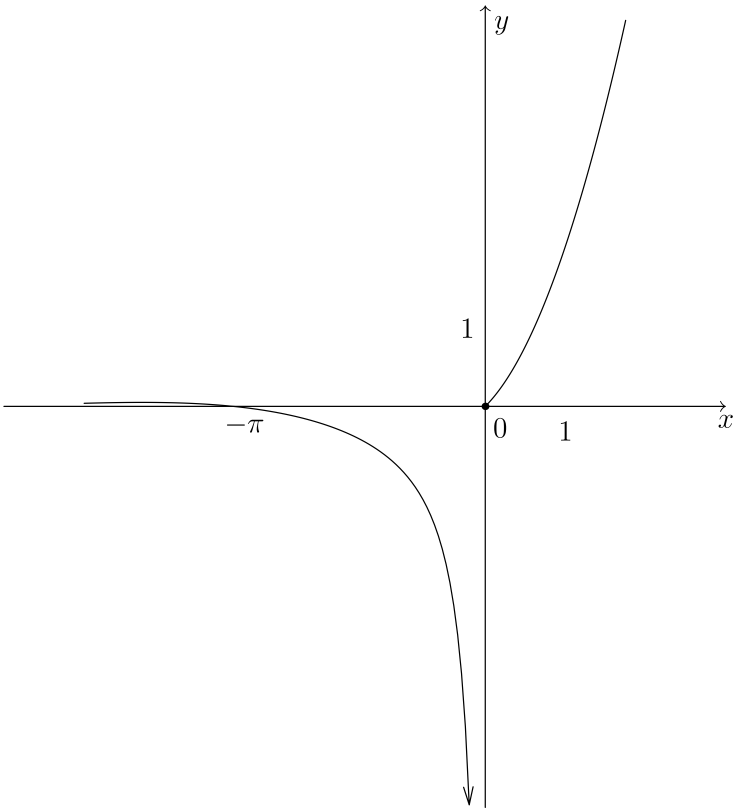

Рис. 3 График функции $y = f(x)$ из примера 11.3.

Функция называется *разрывной*, если она имеет хотя бы одну точку разрыва. Рассмотрим примеры разрывных функций, которые часто встречаются в различных разделах математики. Графики этих функций приведены на рисунках 4–6.

- *Знак числа.* Эта функция обозначается $\operatorname{sign} x$ и определяется равенством

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

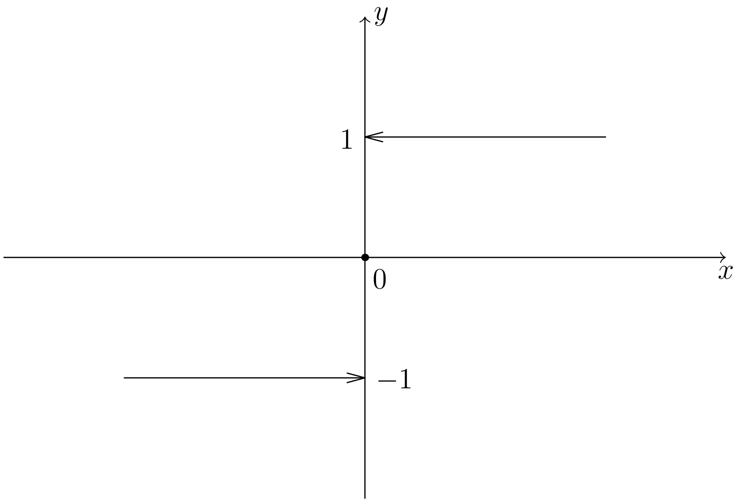

Рис. 4 График функции $\operatorname{sign} x$.

- *Целая часть числа.* Обычно обозначается $[x]$ и определяется как наибольшее целое, не превосходящее x. Это значит, что если $n \leqslant x < n+1$, где $n \in \mathbb{Z}$, то $[x] = n$. Например, $[2{,}3] = 2$, $[-2{,}3] = -3$, $[-2] = -2$.

- *Дробная часть числа.* Обозначается $\{x\}$ и определяется равенством $\{x\} = x - [x]$. Например, $\{-2\} = 0$, $\{2{,}3\} = 0{,}3$, $\{-2{,}3\} = 0{,}7$.

Функция $\operatorname{sign} x$ имеет разрыв первого рода в точке 0, поскольку $\operatorname{sign}(0-0) = -1$ и $\operatorname{sign}(0+0) = 1$. Функция $[x]$ имеет разрывы первого рода в каждой точке $n \in \mathbb{Z}$, потому что $[n-0] = n-1$ и $[n+0] = n$. Функция $\{x\}$ также имеет разрывы первого рода в целых точках, причём $\{n-0\} = 1$ и $\{n+0\} = 0$.

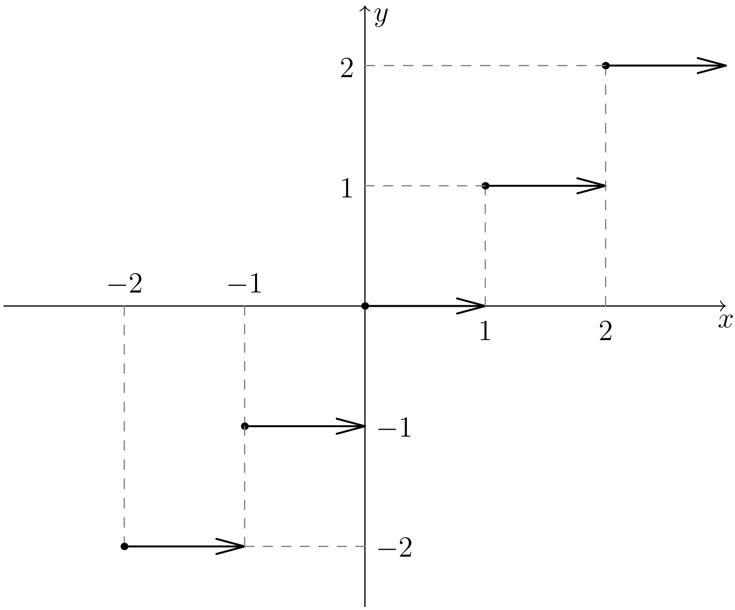

Рис. 5 График функции $[x]$.

Пример 11.4. Требуется найти точки разрыва функции $f(x) = \operatorname{sign}\sin\pi x$ и найти односторонние пределы в них.

Решение. Функция может иметь разрывы только в точках, в которых $\sin\pi x = 0$. Следовательно, это точки $x_n = n \in \mathbb{Z}$. Если $n = 2k$ — чётное, то функция $\sin\pi x$ возрастает в достаточно малой окрестности этой точки. Значит должно быть $f(x) > 0$ при $x > 2k$ и $f(x) < 0$ при $x < 2k$. Поэтому $f(2k+0) = 1$ и $f(2k-0) = -1$. Если же $n = 2k-1$ — нечётное, то функция $\sin\pi x$ будет убывать в малой окрестности этой точки. Тогда соответственно получаем $f(2k-1-0) = 1$, а $f(2k-1+0) = -1$.

Упражнения

В задачах 1–8 найти точки разрыва функции и определить их род.

1. $f(x) = \dfrac{2x - x^2 + 8}{x - 4}$.
2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 12x + 8}{x^2 - 5x + 6}$.
3. $f(x) = \dfrac{x + 3}{2x^2 + 7x + 3}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{7 + 6x - x^2}$.

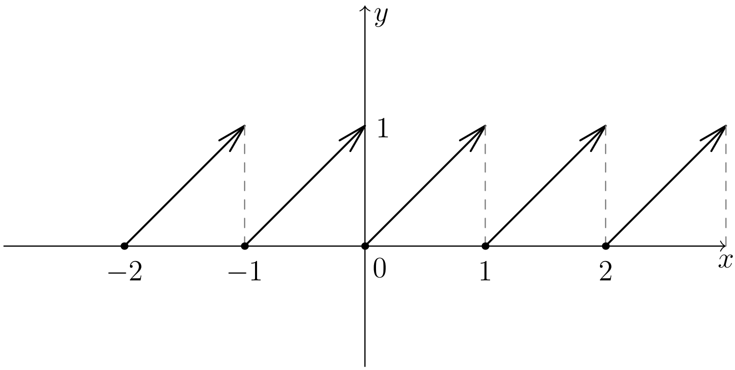

Рис. 6 График функции $\{x\}$.

5. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x^2-x}$.
6. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}\right)^{-1}$.
7. $f(x) = \ln|x^2+2x-3|$.
8. $f(x) = e^{1/x} - e^{1/(x-1)}$.

В задачах 9–16 найти точки разрыва функции и односторонние пределы в них. Указать тип точки разрыва. Нарисовать график функции.

9. $f(x) = \operatorname{sign} x^2$.
10. $f(x) = \operatorname{sign} \cos \frac{\pi x}{2}$.
11. $f(x) = \left[2 \sin \frac{\pi x}{2}\right]$.
12. $f(x) = [x^2]$.
13. $f(x) = [\sqrt{x}]$.
14. $f(x) = \left[\dfrac{x}{1-x}\right]$.
15. $f(x) = \{2x+1\}$.
16. $f(x) = \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$.

17. Пусть $y = f(x)$ — решение уравнения $\dfrac{xy+1}{y+1} = 2$. Найти точки разрыва этой функции и указать их род.

18. Пусть $y{=}f(x)$ — корень уравнения $\dfrac{xy^2-y-2}{x+y}{=}3$ или меньший из них, если уравнение имеет несколько корней. Найти точки разрыва этой функции и указать их род.

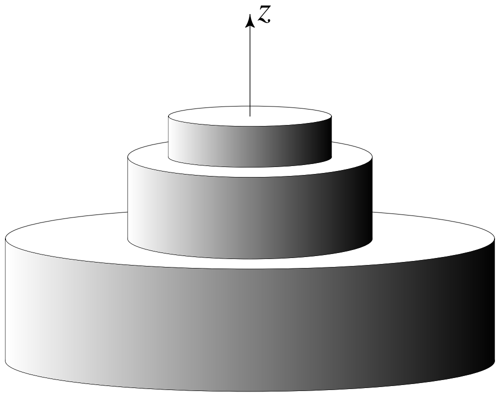

Рис. 7 К задаче 19 п. 11.

19. Тело Ω образовано тремя сложенными друг на друга цилиндрами, оси которых направлены вдоль оси Oz. Точка O — начало отсчёта, расположена в нижнем основании нижнего цилиндра. Высоты цилиндров равны 3, 2 и 1, а радиусы оснований — 12, 6 и 4 соответственно, считая от нижнего цилиндра (см. рис. 7). Пусть $S(z)$ — площадь сечения тела Ω плоскостью $z = \text{const}$, а $V(z)$ — объём тела, отсекаемого от Ω плоскостями $z = 0$ и $z = \text{const}$. Составить выражения для функций $S(z)$ и $V(z)$, указать точки разрыва функции. Построить графики функций $S(z)$ и $V(z)$.

20. Стоимость проезда в пригородном такси определяется пройденным расстоянием по таблице.

Стоимость проезда	
Пройденное расстояние	Стоимость 1 км пути
До 10 км	10 рублей
От 10 до 50 км	20 рублей
От 50 до 100 км	30 рублей
Свыше 100 км	50 рублей

Найти функцию зависимости стоимости проезда от пройденного пути. Указать точки разрыва функции. Построить её график.

12. Равномерно непрерывные функции

Определение 12.1. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве E, лежащем в области определения функции, если выполняется условие

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_{1,2} \in E\colon\ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Следует сравнить последнее утверждение с определением 9.3 непрерывности функции в точке по Коши. В определении 12.1 точки x_1 и x_2 могут свободно «перемещаться» вдоль числовой прямой, находясь в пределах множества E и не отрываясь друг от друга на расстояние большее или равное δ. С другой стороны, в определении 9.3 точка x_0 закреплена на числовой прямой, а точка x может удалиться от неё на расстояние менее, чем δ.

Пример 12.1. Докажем, что функция $y = x^2$ равномерно непрерывна на любом ограниченном интервале $(a,\ b)$. Пусть для определённости $x_1 < x_2$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = (x_2 - x_1)\,|x_1 + x_2| \leqslant \\ \leqslant (x_2 - x_1)\,(|x_1| + |x_2|) \leqslant 2M(x_2 - x_1),$$

где $M = \max\{|a|\,, |b|\}$. Если для произвольного $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, то условие $x_2 - x_1 < \delta$ приведёт к неравенству $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. По определению функция равномерно непрерывна.

Для удобства ссылок сформулируем также отрицание к определению 12.1.

Определение 12.2. Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве E, лежащем в области определения функции, если выполняется условие

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_{1,2} \in E\colon\ |x_1 - x_2| < \delta \text{ и } |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon.$$

Пример 12.2. Покажем теперь, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0,\ +\infty)$. Для произвольно малого $\delta > 0$ положим $x_1 = \frac{1}{\delta}$ и $x_2 = x_1 + \frac{\delta}{2}$. Тогда $|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ и

$$|f(x_1) - f(x_2)| = (x_2 - x_1)(x_1 + x_2) = \frac{\delta}{2} \cdot \left(\frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Таким образом, определение 12.2 подтверждается, если взять $\varepsilon = 1$.

Пример 12.3. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$ на промежутке $[0,\ +\infty)$. Пусть $x_1<x_2$ и $\Delta x=x_2-x_1<\delta=\varepsilon^2$. Тогда

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}=$$

$$=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1+\Delta x}}\leqslant\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x}}=\sqrt{\Delta x}<\varepsilon.$$

Таким образом, функция равномерно непрерывна.

Пример 12.4. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на бесконечном промежутке $E=(0,\ +\infty)$. Покажем, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на E. Если $\delta\leqslant 1$, то можно взять $x_1=\frac{\delta}{2}$ и $x_2=\delta$. Тогда $|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}<\delta$ и $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\delta}\geqslant 1$. Если же $\delta>1$, то достаточно положить $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=1$ и тогда получим $x_2-x_1=\frac{1}{2}<\delta$ и $f(x_1)-f(x_2)=1$. В любом случае можно взять $\varepsilon=1$ и тем самым подтвердить справедливость утверждения (12.2).

Важно отметить, что из равномерной непрерывности на множестве E следует непрерывность в каждой точке этого множества. При этом обратное утверждение неверно, что подтверждается примерами 12.2 и 12.4.

Определение 12.3. Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,\ b]$, если она непрерывна в каждой точке $x_0\in(a,\ b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Теорема 12.1 (Кантора)**.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она равномерно непрерывна на нём.*

Упражнения

В заданиях 1–6 доказать по определению равномерную непрерывность функции на указанном множестве E.

1. $y=2x+3$, $E=\mathbb{R}$.
2. $y=\sin x$, $E=\mathbb{R}$.
3. $y=2^x$, $E=(-\infty,\ 10]$.
4. $y=\log_2 x$, $E=[1,\ +\infty)$.
5. $y=\operatorname{arctg} x$, $E=\mathbb{R}$.
6. $y=\arcsin x$, $E=\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

В заданиях 7–10 доказать по определению, что функция не является равномерно непрерывной на множестве E.

7. $y = 2^x$, $E = (0,\ +\infty)$.
8. $y = \log_2 x$, $E = (0,\ 1)$.
9. $y = \sin x^2$, $E = (0,\ +\infty)$.
10. $y = x \cos x$, $E = (0,\ +\infty)$.

В заданиях 11–14 исследовать функцию на равномерную непрерывность на множествах E_1 и E_2.

11. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $E_1 = [-1,\ 1]$, $E_2 = \mathbb{R}$.

12. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $E_1 = \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $E_2 = \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

13. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $E_1 = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$, $E_2 = (-\infty,\ -a] \cup [a,\ +\infty)$, где $a > 0$.

14. $f(x) = \{x^2\}$, $E_1 = [0,\ 1) \cup (1,\ \sqrt{2})$, $E_2 = [2,\ \sqrt{5})$.

В заданиях 15–22 доказать утверждения.

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(a,\ b)$ и существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,\ b]$.

16. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E и $E_0 \subset E$. Тогда $f(x)$ также равномерно непрерывна на E_0.

17. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E. Тогда функция $|f(x)|$ также равномерно непрерывна на E.

18. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны на E. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ также равномерно непрерывны на E.

19. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ равномерно непрерывны на E. Тогда функции $\min\{f(x), g(x)\}$ и $\max\{f(x), g(x)\}$ также равномерно непрерывны на E.

20. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множествах E_1 и E_2, причём $\sup E_1 < \inf E_2$. Тогда $f(x)$ также равномерно непрерывна на множестве $E_1 \cup E_2$.

21. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезках $[a,\ b]$ и $[b,\ c]$. Тогда $f(x)$ также равномерно непрерывна на $[a,\ c]$.

22. Приведите пример функции $f(x)$, которая равномерно непрерывна на $[a,\ b)$ и $[b,\ c)$, но при этом не является непрерывной на $[a,\ c)$.

13. Материалы для проведения коллоквиума

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие функции. Определения предела функции по Коши и по Гейне, теорема об эквивалентности этих определений.

2. Критерий Коши существования предела функции.

3. Арифметические свойства предела функции. Теорема о пределе композиции функций.

4. Свойства предела функции, связанные с неравенствами.

5. Левый и правый пределы функции в точке. Связь предела функции с левым и правым пределами функции.

6. Первый замечательный предел.

7. Второй замечательный предел.

8. Эквивалентные функции в точке. Таблица эквивалентных функций. Применение эквивалентности для вычисления пределов.

9. Непрерывность функции в точке. Теорема о непрерывности суммы, разности, произведения и частного. Теорема о непрерывности композиции функций.

10. Теорема о локальном сохранении знака непрерывной функции. Непрерывность слева и справа. Связь односторонней непрерывности с непрерывностью в точке.

11. Понятие точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

12. Понятие обратной функции. Теорема о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции.

13. Элементарные функции. Непрерывность элементарных функций.

14. Теорема Больцано—Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке.

15. Первая теорема Вейерштрасса об ограниченности функции непрерывной на отрезке.

16. Вторая теорема Вейерштрасса о достижении точных граней непрерывной функции.

17. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора.

Теоретические упражнения

В этом пункте предлагаются задания средней и повышенной сложности, для решения которых требуется твёрдое понимание определений и теорем, рассмотренных в данном пособии. Эти упражнения могут быть использованы на коллоквиуме для проверки глубины освоения студентами полученных ими теоретических сведений.

1. Доказать утверждение. Пусть $f(x)$ — чётная функция и существует правый предел в нуле $f(0+0)$. Тогда левый предел функции в нуле также существует и $f(0-0) = f(0+0)$.

2. Доказать утверждение. Пусть $f(x)$ — нечётная функция и существует правый предел в нуле $f(0+0)$. Тогда левый предел функции в нуле также существует и $f(0-0) = -f(0+0)$.

3. Доказать утверждение. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и периодическая с периодом T. Тогда, если

существует предел этой функции в точке a, то предел в точке $a+T$ также существует и выполняется равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+T} f(x).$$

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. Следует ли отсюда, что обязательно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$? Если это утверждение верно, докажите его. Если утверждение неверно, приведите подходящий пример.

5. Приведите пример функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что $f(x)<g(x)$ в некотором интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$, $\delta>0$, но при этом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

6. Функцией Дирихле называется функция $D(x)$, определённая на всей числовой прямой равенством

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Здесь $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Докажите, что эта функция не имеет предела ни в одной точке числовой прямой.

7. Докажите, что функция $xD(x)$ имеет предел в точке 0 и не имеет предела в других точках прямой.

8. Подберите функцию $F(x) \neq \mathrm{const}$ таким образом, чтобы композиция $F\big(D(x)\big)$ была непрерывной на всей числовой прямой.

9. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причём $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Докажите, что тогда

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)}\right) = \infty.$$

10. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причём $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Следует ли отсюда, что

обязательно
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right)=0\,?$$
Если это утверждение верно, докажите его. Если утверждение неверно, приведите подходящий пример.

11. Число A называется *частичным пределом* функции $f(x)$ при $x\to a$, если выполняется одно из определений:

    (по Гейне) $\exists\{x_n\},\ x_n\neq a,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\colon\ \lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A.$

    (по Коши) $\forall\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in\mathring{O}_\delta(a)\colon\ |f(x)-A|<\varepsilon.$

    Докажите эквивалентность этих определений.

12. Докажите, что односторонние пределы функции являются её частичными пределами.

13. Докажите утверждение: если функция имеет предел в точке a, то она имеет единственный частичный предел в точке a, который совпадает со значением предела функции.

14. Найдите частичные пределы заданных функций в указанных точках a:

    а) $f(x)=\operatorname{sign}x,\ a=0;$ б) $f(x)=\left\{\frac{1}{x}\right\},\ a=0;$

    в) $f(x)=\cos\frac{1}{x},\ a=0;$ г) $f(x)=D(x),\ a=0,\ a=\sqrt{2};$

    д) $M(x)=\begin{cases} m, & x=\frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}, \qquad\qquad a=0, a=1;\end{cases}$

    е) $N(x)=\begin{cases} n, & x=\frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь,}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}, \qquad\qquad a=0, a=1.\end{cases}$

15. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и все её значения на этом отрезке являются рациональными числами. Докажите, что тогда $f(x)=\mathrm{const}$.

16. Пусть для каждого $\delta>0$ функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ и принимает в нём как положительные, так и отрицательные значения. Докажите, что тогда $f(a)=0$.

17. Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна на всей числовой прямой и является периодической с произвольным периодом. Докажите, что тогда функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

18. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, монотонна и ограничена на $[a,\ +\infty)$. Докажите, что тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,\ +\infty)$.

19. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на множестве E называется функция

$$\omega(\delta) = \sup_{x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|\,, \text{ где } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Докажите критерий равномерной непрерывности: для того, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывной на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$.

20. Найти модуль непрерывности функции на указанном множестве и проверить её равномерную непрерывность с помощью критерия непрерывности из задачи 19.

а) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; б) $f(x) = x^2$, $x \in [-a,\ a]$, $a > 0$;

в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\ +\infty)$; г) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Ответы к упражнениям

Ответы к п. 2. ***1.*** $8/13$; ***2.*** 2; ***3.*** -3; ***4.*** 5; ***5.*** $3/4$; ***6.*** $1/2$; ***7.*** 6; ***8.*** ∞; ***9.*** $-2,7$; ***10.*** ∞; ***11.*** -1; ***12.*** $1/4$; ***13.*** $-1/4$; ***14.*** $-3/8$; ***15.*** $4/3$; ***16.*** $4/3$; ***17.*** $1/3$; ***18.*** $2/3$; ***19.*** $9/5$; ***20.*** $2/3$; ***21.*** $1/2$ при $x \to +\infty$, $-1/2$ при $x \to -\infty$; ***22.*** 0; ***23.*** $\frac{a+b}{2}$, если $x \to +\infty$; ∞, если $x \to -\infty$; ***24.*** $1/2$, если $x \to +\infty$; $-\infty$, если $x \to -\infty$; ***25.*** $\pm 5/2$; ***26.*** ± 1; ***27.*** 0; ***28.*** 2; ***29.*** $4/3$; ***30.*** $2/3$.

Ответы к п. 3. ***7.*** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 1$; ***8.*** $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = 12$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -12$; ***9.*** $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = +\infty$; ***10.*** $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = +\infty$; ***11.*** $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -\pi/2$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = \pi/2$; ***12.*** $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \pi$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$; ***13.*** $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = 1$; ***14.*** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = 1$.

Ответы к п. 4. ***1.*** $0,5$; ***2.*** $0,5$; ***3.*** $0,75$; ***4.*** $0,5$; ***5.*** 2; ***6.*** 8; ***7.*** 18; ***8.*** -4; ***9.*** π; ***10.*** $\pi/2$; ***11.*** $2\sqrt{6}$; ***12.*** $1/8$; ***13.*** $-3/20$; ***14.*** 10; ***15.*** $2/3$; ***16.*** $1/4$.

Ответы к п. 5. ***1.*** $e^{6/7}$; ***2.*** $e^{3/5}$; ***3.*** $e^{3/2}$; ***4.*** e^{1/π^2}; ***5.*** e^{-7}; ***6.*** e^{-10}; ***7.*** 0; ***8.*** $+\infty$; ***9.*** $e^{-1/3}$; ***10.*** $1/e$; ***11.*** e; ***12.*** $1/e$.

Ответы к п. 7. ***1.*** $3/2$; ***2.*** $-4/15$; ***3.*** 1; ***4.*** $-1/6$; ***5.*** 1; ***6.*** 1; ***7.*** $-27/2$; ***8.*** -1; ***9.*** $9\ln 3/\pi$; ***10.*** $-8\ln 2/\pi$; ***11.*** $-e^{-1}$; ***12.*** $-1/3$; ***13.*** $4/25$; ***14.*** $-1/2$; ***15.*** $-5/6$; ***16.*** $1/2e$; ***17.*** $-17/50$; ***18.*** 0; ***19.*** $\ln(7/3)$; ***20.*** $(1/3)\ln(9/2)$; ***21.*** $4\ln 2 - 4$; ***22.*** $27 - 27\ln 3$; ***23.*** $-2/3$; ***24.*** $2/3$; ***25.*** $-1765/864$; ***26.*** $\frac{240\ln 2+43}{240\ln 3+240}$.

Ответы к п. 8. ***1.*** $+\infty$; ***2.*** $+\infty$; ***3.*** 0; ***4.*** 0; ***5.*** 0; ***6.*** $+\infty$; ***7.*** $+\infty$; ***8.*** 0; ***9.*** $e^{-9/2}$; ***10.*** $e^{-1/2}$; ***11.*** $e^{1/2}$; ***12.*** e; ***13.*** $e^{-1/\pi}$; ***14.*** $e^{-1/\pi}$; ***15.*** $e^{1/2}$; ***16.*** e^{-2}; ***17.*** $2\sqrt[3]{3}$; ***18.*** $5^{-1/3}$; ***19.*** 1; ***20.*** $\sqrt{e}$; ***21.*** e^{-1}; ***22.*** e^3.

Ответы к п. 9. ***1.*** Непрерывна; ***2.*** Непрерывна; ***3.*** Разрывна слева и справа; ***4.*** Разрывна слева и справа; ***5.*** Непрерывна; ***6.*** Разрывна слева; ***7.*** Непрерывна; ***8.*** Разрывна справа; ***9.*** $a=5$; ***10.*** $a=2$; ***11.*** $a=b=1$; ***12.*** Нет; ***13.*** Непрерывна справа, разрывна слева.

Ответы к п. 10. ***1.*** а) $(-\infty,\ 3) \cup (3,\ +\infty)$; б) $(-\infty,\ -2) \cup (-2,\ 2) \cup (2,\ +\infty)$; в) $(-\infty,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$; г) $(-\infty,\ 2) \cup (2,\ 4) \cup (4,\ +\infty)$; д) $\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$; е) $[0,\ +\infty)$. ***3.*** Если $x_0 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $f(x_0)$ — любое. Если $x_0 \neq \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $f(x_0) = 0$. ***4.*** а) $(-\infty,\ +\infty)$; б) $[1,\ +\infty)$; в) $[-1,\ \pi+1]$; г) $(-\infty,\ +\infty)$. ***5.*** а) $(-\infty,\ +\infty)$, $y_0=0$; б) $(-\infty,\ +\infty)$, $y_0=1$; в) $[0,\ 1)$, $y_0=\frac{1}{2}$; г) $(-\infty,\ +\infty)$, $y_0=0$; д) $[0,\ +\infty)$, $y_0=64$; е) $[-1,\ 2]$, $y_0=\frac{1}{2}$. ***6.*** а) $(-3,\ -2)$; б) $(1,\ 2)$; в) $(6,\ 7)$; г) $(3,\ 4)$.

Ответы к п. 11. ***1.*** 4 — точка устранимого разрыва; ***2.*** 2 — точка устранимого разрыва, 3 — точка разрыва второго рода; ***3.*** -3 — точка устранимого разрыва, $-\frac{1}{2}$ — точка разрыва второго рода; ***4.*** -1 — точка устранимого разрыва, 7 — точка разрыва второго рода; ***5.*** 0 и 1 — точки разрыва первого рода; ***6.*** 0 и 1 — точки устранимого разрыва, $\frac{1}{2}$ — точка разрыва второго рода; ***7.*** -3 и 1 — точки разрыва второго рода; ***8.*** 0 и 1 — точки разрыва второго рода; ***9.*** 0 — точка устранимого разрыва; ***10.*** $\{2n+1\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ — точки разрыва первого рода; ***11.*** $\{2n\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ — точки разрыва первого рода; ***12.*** $\{\pm\sqrt{n}\}$, где $n \in \mathbb{N}$ — точки разрыва первого рода; ***13.*** $\{n^2\}$, где $n \in \mathbb{N}$ — точки разрыва первого рода; ***14.*** $\{\frac{n}{n+1}\}$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\{\frac{n}{n-1}\}$, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ — точки разрыва первого рода; ***15.*** $\left\{\frac{n}{2}\right\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ — точки разрыва первого рода; ***16.*** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — точки разрыва первого рода, 0 — точка разрыва второго рода; ***17.*** 1 — точка устранимого разрыва, 2 — точка разрыва второго рода; ***18.*** 0 — точка разрыва второго рода, 1 — точка устранимого разрыва.

Ответы к п. 12. ***11.*** Равномерно непрерывна на E_1, не равномерно непрерывна на E_2; ***12.*** Равномерно непрерывна на E_1, не равномерно непрерывна на E_2; ***13.*** Не равномерно непрерывна на E_1, равномерно непрерывна на E_2; ***14.*** Не равномерно непрерывна на E_1, равномерно непрерывна на E_2.

Список литературы

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. — Москва, Лань 2016.
2. Вавилов В. В. Задачи по математике. Начала анализа: справ. пособие / В.В.Вавилов, И.И.Мельников, С.Н.Олехник, П.И.Пасиченко. — М.:Наука, 1990. — 608 с.
3. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для вузов, рек. МО РФ / И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2002. — 724 с.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов/ Б.П.Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558 с.
5. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.) / В.А.Зорич. — М.: МЦНМО, 2012. — 818 с.
6. Ильин В. А. Математический анализ. Ч. 1. 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.
7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1 / Л.Д.Кудрявцев. — М.: Издательство Юрайт, 2017.
8. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: учеб. пособие / Под ред. Л.Д.Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.
9. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин [и др.]. — Москва: Айрис Пресс, 2013. — 574 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. для вузов рек. МО РФ: в 3-х т. Т 1./ Г.М.Фихтенгольц. — 8-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 679 с.
11. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 / В.С.Шипачев, А.Н.Тихонов. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 248 с.

Учебное издание

Соловьева Надежда Александровна
Тинюкова Татьяна Сергеевна
Федоров Дмитрий Леонидович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 00.12.20. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,7. Уч.-изд. л. 2,9.
Тираж 50 экз. Заказ № 0000.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: (3412)500-295 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18