



ISBN 978-5-9624-1734-9

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 510.6+512+519.7
ББК 22.12+22.14+22.18
С38

Редакционная коллегия:
академик РАН С. С. Гончаров,
д-р физ.-мат. наук Н. А. Перязев,
д-р физ.-мат. наук С. Ф. Винокуров,
д-р физ.-мат. наук В. И. Пантелеев

Синтаксис и семантика логических систем [Электронный ресурс] : материалы 6-й Междунар. школы-семинара. Монголия, Ханх, 11–16 авг. 2019 г. / [редкол.: С. С. Гончаров [и др.]] ; ФГБОУ ВО «ИГУ». – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Загл. с этикетки диска.

ISBN 978-5-9624-1734-9

Сборник содержит материалы 6-й Международной школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем», посвященной 90-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина и проходившей в Ханхе (Монголия) с 11 по 16 августа 2019 г.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической логики и дискретной математики.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Иркутский государственный университет»

664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. (3952) 24-34-53

Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124; тел. (3952) 52-18-53

Подписано к использованию 28.08.2019. Тираж 30 экз. Объем 4,1 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше

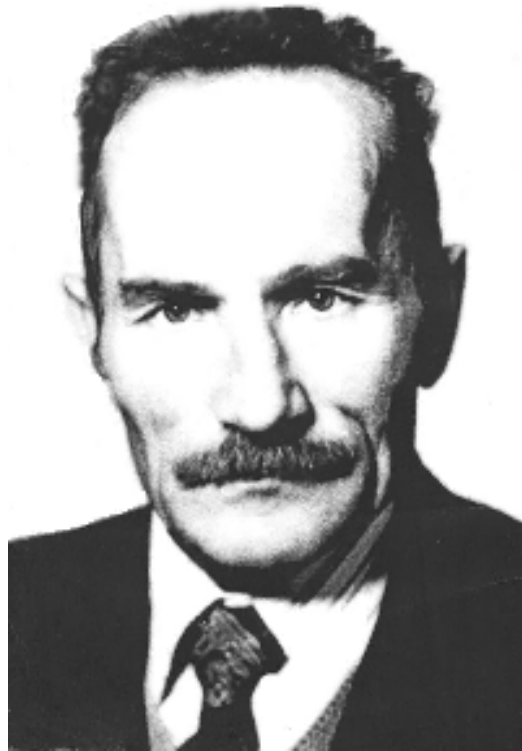
© ФГБОУ ВО «ИГУ», 2019

ISBN 978-5-9624-1734-9

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА
ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ISBN 978-5-9624-1734-9

СИНТАКСИС И СЕМАНТИКА ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ



Перед вами сборник материалов школы-семинара «Синтаксис и семантика логических систем», проходившей в пос. Ханх (Монголия) на побережье озера Хубсугул с 11 по 16 августа 2019 г. Это уже шестая школа-семинар. Первая и третья прошли в 2006 и 2010 гг. на западном берегу озера Байкал, вторая (2008 г.) — на турбазе под Владивостоком на побережье Японского моря, четвертая (2012 г.) и пятая (2017 г.) — на турбазах на восточном берегу Байкала.

Настоящая школа-семинар посвящена памяти основателя научной алгебрологической школы в Иркутске Али Ивановича Кокорина, 90 лет со дня рождения которого исполняется в ноябре 2019 г. Организаторами семинара являлись Иркутский государственный университет и Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН. Тематика сборника отражает широту научных интересов Али Ивановича и представляет те области исследований, в которых сегодня работают его ученики.

В.И. Пантелеев,
Н.А. Перязев

Содержание

Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе, состоящем из функции Вебба, при неисправностях типа 0 на выходах элементов.....	6
Алехина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А. О надежности схем в базисе, содержащем особенную функцию.....	9
Антонов К. В., Семенов А. А. Применение метаэвристических алгоритмов псевдобулевой оптимизации к поиску линеаризующих множеств в криптоанализе криптографических генераторов	13
Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К., Шишмакова К. А. О классах эквивалентности мультифункций, порожденных частичными ультраклонами ранга 2.....	19
Балюк А. С. О верхней оценке сложности трехзначных функций в классе поляризованных полиномов.....	21
Батзул Т., Ганхуяг Д. Новый критерий о критичности некоторых конечных некоммутативных колец	23
Викентьев А. А. О метриках многозначных логических высказываний и приложения метрик в базах знаний.....	28
Винокуров С. Ф., Францева А. С. Приближенный алгоритм нахождения сложности обратимых реализаций расширенных кронеке-ровых форм булевых функций	32
Гутерман А. Э. Линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты	37
Дулатова З. А., Лапшина Е. С., Ковыршина А. И., Штыков Н. Н. Концепция фундирования в формировании, развитии и оценке логических универсальных учебных действий	39
Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. О композициях циклических плотных порядков со структурами и их алгебрах бинарных формул	44

Зубков О. В. Представление полиномиально устойчивых функций суммами неповторных в элементарном базисе слагаемых	48
Казимиров А. С. О сложности мультиопераций ранга k в классе стандартных форм.....	53
Кириченко К. Д. Анализ адаптивных алгоритмов для повторяющихся матричных игр	56
Кочергин В. В., Михайлович А. В. Немонотонная сложность логических схем и близкие задачи	62
Мещанинов Д. Г. Классификация k -значных функций на основе аддитивных формул	68
Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Критерий ES_U -полноты множества мультифункций ранга 2	73
Перязев Н. А. Алгебры унарных мультиопераций конечного ранга.....	76
Смелянский Д. М. О полноте теорий второго порядка с аксиомами бесконечности.....	80
Тагласов Э. С., Пантелеев В. И. Критерий ES_I -полноты множества мультифункций ранга 2	83
Тодиков С. И. Алгоритм минимизация мультиопераций в классе ключевых стандартных форм.....	88
Яшин А. Д. Константа Сметанича и метод конечной канонической модели	93

УДК 510.64

Константа Сметанича и метод конечной канонической модели

Яшин Александр Данилович

Удмуртский государственный университет, e-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

Метод конечной канонической модели, разработанный К. Шютте, применяется к так называемой логике Сметанича, определяющей новую логическую константу в интуиционистской пропозициональной логике. Это позволяет одновременно доказать семантическую полноту в классе соответствующих моделей Крипке и финитную аппроксимируемость логики Сметанича.

Ключевые слова: интуиционистская пропозициональная логика, новая логическая константа по П. С. Новикову, семантическая полнота, финитная аппроксимируемость.

В неклассических логиках для доказательства семантической полноты исчислений с успехом применяется так называемый метод *канонических моделей*. Точками таких моделей обычно являются непротиворечивые множества (или пары множеств) формул данного языка. Получаемые при этом модели часто следует понимать в обобщённом смысле, они обычно велики (несчётны). Далее для уменьшения размера полученных моделей применяются варианты *метода фильтрации*, позволяющие получать конечные модели (*финитная аппроксимируемость*).

В работе [1] К. Шютте продемонстрировал метод *конечной канонической модели* для интуиционистского пропозиционального исчисления *Int*, позволивший «одним махом» обосновать как семантическую полноту исчисления, так и его финитную аппроксимируемость.

В работе [2] Я. С. Сметанич предложил пример исчисления, определяющего новую логическую константу в *Int* по П. С. Новикову. Семантика этой константы в классе конечных моделей Крипке известна автору под названием *крыша* (из личных бесед автора с А. А. Мучником).

Логика Сметанича *Sm* формулируется в пропозициональном языке с дополнительной константой φ (имеет тот же синтаксический статус, что и константы 0 «ложь» и 1 «истина») [3]:

$$Sm = Int + 1^\circ : \neg\neg\varphi + 2^\circ : \varphi \rightarrow (A \vee \neg A).$$

Это исчисление корректно в классе конечных моделей Крипке относительно интерпретации $a \Vdash \varphi \Leftrightarrow \max(a)$.

В данной работе предлагается доказательство теоремы о семантической полноте *Sm* и параллельно теоремы о финитной аппроксимируемости методом конечной канонической модели.

Фиксируем формулу A_0 , невыводимую в *Sm*. Через $Sub(A_0)$ обозначаем множество всех её подформул.

Введём множество формул

$$\Sigma(A_0) := \text{Sub}(A_0) \cup \{\varphi, \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \cup \{\neg A \mid A \in \text{Sub}(A_0)\}.$$

Множество $\Sigma(A_0)$ является конечным и замкнуто по подформульности.

В дальнейшем упоминание об A_0 будем опускать.

Упорядоченная пара подмножеств $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma$ называется *противоречивой* (относительно Sm), если $Sm \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$; в противном случае пара называется *непротиворечивой*. Примером непротиворечивой пары является пара $(\emptyset \mid \{A_0\})$.

Пара $(\Gamma \mid \Delta)$ называется *полной*, если $\Gamma \cup \Delta = \Sigma$.

Лемма 1. Пусть пара $(\Gamma \mid \Delta)$ непротиворечива и C — произвольная формула φ -языка. Тогда по крайней мере одна из пар $(\Gamma \cup \{C\} \mid \Delta)$, $(\Gamma \mid \Delta \cup \{C\})$ непротиворечива.

Следствие 1. Любая непротиворечивая пара может быть дополнена до полной непротиворечивой пары.

Полные непротиворечивые пары называем *типами*. Типы обозначаем буквами $\sigma, \tau, \dots$, при этом $\sigma = (\sigma^0 \mid \sigma^1)$. Иногда применяем наглядное изображение $\sigma = (\dots B, \dots C \dots \mid \dots D, \dots)$, акцентируя внимание на нужные формулы. Заметим, что множество всех типов непусто и конечно.

Частичный порядок на множестве типов определяется по включению левых компонент:

$$\sigma \leq \tau :\Leftrightarrow \sigma^0 \subseteq \tau^0.$$

Нетрудно убедиться, что это действительно частичный порядок.

Лемма 2 (общие свойства типов). Имеют место следующие свойства типов:

- (i) $A \wedge B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ и $B \in \sigma^0$;
- (ii) $A \wedge B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^1$;
- (iii) $A \vee B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ или $B \in \sigma^0$;
- (iv) $A \vee B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^1$;
- (v) $A \rightarrow B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^0$;
- (vi) $A \rightarrow B \in \sigma^1 \Rightarrow$ найдётся $\tau \geq \sigma : A \in \tau^0$ и $B \in \tau^1$;
- (vii) $\neg A \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^1$;
- (viii) $\neg A \in \sigma^1 \Rightarrow$ найдётся $\tau \geq \sigma : A \in \tau^0$.

Теперь приведём свойства типов, связанные с наличием константы φ .

Лемма 3. $\varphi \in \sigma^0 \Rightarrow \max_{\mathcal{M}}(\sigma)$.

Доказательство. Предполагаем посылку и, от противного, неверно $\max(\sigma)$. Найдётся $\tau > \sigma$, т. е. $\sigma^0 \subsetneq \tau^0$. Для некоторой формулы $B \in \Sigma$ имеем $B \in \sigma^1$ и $B \in \tau^0$. Что такое B ?

1. Пусть $B \in \text{Sub}(A_0)$. Тогда $\neg B \in \Sigma$.

Имеем $\neg B \notin \tau^0$ (иначе τ противоречив). Поэтому $\neg B \in \tau^1$. $\neg B \in \sigma^1$. Тип σ имеет вид

$$\sigma = (\varphi, \dots \mid B, \neg B, \dots)$$

и оказывается противоречивым в силу аксиомы 2°.

2. Имеем $B \neq \varphi$ (так как σ непротиворечив);

$B \neq \neg\varphi$ (так как τ непротиворечив);

$B \neq \neg\neg\varphi$, так как иначе $\sigma = (\varphi, \dots \mid \neg\neg\varphi, \dots)$, и σ оказывается противоречивым в силу $X \rightarrow \neg\neg X \in \text{Int}$.

3. Пусть $B \doteq \neg C$ для некоторой $C \in \text{Sub}(A_0)$. Изобразим типы $\sigma < \tau$:

$$\begin{array}{c} \tau = (\varphi, \neg C, \dots \mid \dots) \\ | \\ \sigma = (\varphi, \dots \mid \neg C, \dots) \end{array}$$

Если $C \in \sigma^0$, то $C \in \tau^0$, т. е. τ противоречив.

Если $C \in \sigma^1$, то σ противоречив по аксиоме 2°. □

Лемма 4. $\forall \sigma \exists \tau \geq \sigma : \varphi \in \tau^0$.

Доказательство. В силу аксиомы 1° $\neg\neg\varphi \in \sigma^0$ (напомним, что $\neg\neg\varphi \in \Sigma$). По общим свойствам типов сначала $\neg\varphi \in \sigma^1$, затем $\exists \tau \geq \sigma : \varphi \in \tau^0$.

Следствие 2. $\max(\sigma) \Rightarrow \varphi \in \sigma^0$.

Зададим на структуре $\mathcal{M}$ выделенный конус для интерпретации константы φ так:

$$\Phi := \{\sigma \in \mathcal{M} \mid \max(\sigma)\}.$$

Для переменных $p \in \text{Sub}(A_0)$ оценку на $\mathcal{M}$ зададим так:

$$\sigma \Vdash p :\Leftrightarrow p \in \sigma^0.$$

Лемма 5 (семантическая). Для любой формулы $A \in \Sigma$, для любой $\sigma \in \mathcal{M}$:

$$A \in \sigma^0 \Rightarrow \sigma \Vdash A;$$

$$A \in \sigma^1 \Rightarrow \sigma \not\Vdash A.$$

Доказательство. Доказательство. Оба утверждения доказываются одновременной индукцией по построению формулы A .

Для переменной $p \in \Sigma$ первое утверждение следует из определения оценки $\Vdash$ на $\mathcal{M}$, второе: из непротиворечивости типа и из $p \in \sigma^1$ получаем $p \notin \sigma^0$, далее по определению оценки $\Vdash$ получаем $\sigma \nVdash p$.

Для константы φ . Если $\varphi \in \sigma^0$, то по лемме 3 $\max(\sigma)$. По определению конуса Φ имеем $\sigma \in \Phi$, т. е. $\sigma \Vdash \varphi$.

Если $\varphi \in \sigma^1$, то в силу непротиворечивости типов $\varphi \notin \sigma^0$. По следствию 2 имеем неверно $\max(\sigma)$, т. е. $\sigma \notin \Phi$, поэтому $\sigma \nVdash \varphi$.

Для связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ шаги индукции проводятся обычным образом со ссылкой на общие свойства типов. $\square$

Теорема 1. *Если $St \nVdash A_0$, то построенная конечная каноническая φ -шкала является моделью логики St , опровергающей формулу A_0 .*

Список литературы

- [1] Шютте К. Полные системы модальной и интуиционистской логики // Р. Фейс. Модальная логика. М. : Наука, 1974. С. 324–421.
- [2] Сметанич Я. С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // ДАН СССР. 1961. Т. 139 № 2. С. 309–312.
- [3] Яшин А. Д. Логика Сметанича T^Φ и два определения новой интуиционистской связки // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 135–142.

The Smetanich constant and finite canonical model method

Yashin Alexandr Danilovich, (Izhevsk, Russia)

Udmurt State University, e-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

The method of finite canonical model described by K. Shchütte is applied to the Smetanich logic which determines a new logical constant in the intuitionistic propositional logic (in the sense of P. Novikov's approach). This method allows to prove semantical completeness and finite model property for Smetanich logic simultaneously.

Keywords: intuitionistic propositional logic, new logical constant in the P. Novikov sense, semantical completeness, finite model property.