

**ПЛЯШКЕВИЧ В. Л.**

**НЕЙРОПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ  
МЕХАНИЗМЫ ОСНОВНЫХ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ**

АКАДЕМИЗДАТ

ПЛЯШКЕВИЧ В. Л.

# НЕЙРОПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ



«Академиздат»

Издательство «Академиздат»  
Новосибирск  
2020

УДК 159.91 + 510.2910

ББК 10+19

**П40**

**Пляшкевич, Виктор Леонидович**

**П40** Пляшкевич В. Л. / Нейропсихологические механизмы основных математических действий — Новосибирск: Академиздат, 2020. — 168 с.

ISBN 978-5-6044600-4-7

В монографии показаны восемь Базисных Действий человека: «Приблизить», «Удалить», «Отдалить», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить», по правилам которых вырабатываются конкретные Действия человека реальными предметами с помощью руки. В соответствии Базисными правилами по сенсорно-двигательному принципу, формируются мозговые объекты — Образы-Алгоритмы или механизмы собственных Действий руки субъекта предметами, предназначенные для познания объектов физического мира (предметов). Четыре Базисных Действия: «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить» обладают счётными свойствами. При обучении математике они становятся основой математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» с формированием математических Образов-Алгоритмов. В них запечатлены счётные перемещения реальных предметов рукой ученика в поле зрения по четырём Базисным правилам. Образы-копии Образов-Алгоритмов становятся четырьмя вычислительными образами, которые участвуют в вычислении математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

УДК159.91 + 510.2910

ББК10+19

ISBN 978-5-6044600-4-7

© Пляшкевич, Виктор Леонидович, автор, 2020

© Издательство «Академиздат», 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ЧАСТЬ I. ФОРМИРОВАНИЕ ОБРАЗА-АЛГОРИТМА КАК МЕХАНИЗМА ДЕЙСТВИЯ РУКИ .....	12
ГЛАВА 1. Три исходных наблюдения. Представление об Образе-Алгоритме и Базисных Действиях человека .....	12
НАБЛЮДЕНИЕ 1. Базисные Действия .....	12
НАБЛЮДЕНИЕ 2. Образы-Алгоритмы.....	15
НАБЛЮДЕНИЕ 3. «Чистые» Действия руки ребенка в отношении предметов .....	17
Строгое понимание Действия руки .....	19
Образ-Алгоритм .....	22
Единичное Базисное Действие .....	28
ГЛАВА 2. Представление об уровнях Нейрореальности мозга .....	32
Три уровня Нейрореальности мозга .....	32
Уровень 1 Нейрореальности мозга.....	33
Уровни 2, 3 Нейрореальности мозга .....	33
Происхождение психических образов от образов-Алгоритмов.....	34
Механизмы Базисных Действий .....	35
ГЛАВА 3. Образы-Алгоритмы 1, 2, 3 этапов.....	36
Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 1-го этапа «Приблизить» и «Удалить».....	36
Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 2-го этапа «Соединить» и «Разделить» .....	43
Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 3-го этапа «Объединить» и «Разъединить» .....	46
ГЛАВА 4. Повторение «чужого» Действия руки .....	51
Повторение Действия руки другого человека .....	51
Как Действие руки матери становится собственным Действием руки ребенка .....	54
ГЛАВА 5. Формирование абстрактных образов и познание предметов .....	57
Происхождение абстрактных образов от Образа-Алгоритма. Образная Общеформа .....	57
Суперобщеформа .....	59
Формирование Образа-Алгоритма Простого Действия .....	59
Формирование Образа-Алгоритма Функции Предмета .....	61

ЧАСТЬ II. ВЫРАБАТЫВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ РУКИ ПРЕДМЕТАМИ СЧЕТА. ФОРМИРОВАНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗА-АЛГОРИТМА .....	65
ГЛАВА 1. Математические Действия и Образы-Алгоритмы.....	65
Предварительные замечания.....	65
Общие представления об Образной Математической Системе, числе, Математическом Образе-Алгоритме.....	68
Математическая Суперобщформа .....	71
ГЛАВА 2. Полное математическое Действие .....	75
Полное Математическое Действие и Система Вычисления Математического Действия .....	75
А. Приведение Математического Действия к натуральному виду .....	76
Б. Общее представление о Полном Мат.Действии .....	78
В. Вычисление Полных Математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» .....	80
1. Мат.Действие «Сложение».....	80
2. Мат.Действие «Вычитание» .....	86
3. Мат.Действие «Умножение» .....	90
4. Мат.Действие «Деление».....	95
Г. Вычисление Мат.Действий с многозначными числами при многократном обращении к Полным Математическим Действиям .....	101
ГЛАВА 3. Физическое явление и математическая формула физического явления.....	105
Выделение во внешнем мире физического явления. Формирование математической формулы для описания явления физического мира .....	105
Значение представления об Образе-Алгоритме для Полного познания фрагмента физического мира.....	114
Вычисление математических формул и выражений .....	116
Математическая формула (выражение) как единый паттерн абстрактных Действий руки предметом .....	118
Последовательность событий вычисления Математической формулы (выражения) в Образной математической Системе .....	122
ГЛАВА 4. Описание Математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Знак «Равенства» .....	124
1. Математические Действия «Сложение» и «Вычитание» .....	124
2. Математическое Действие «Умножение» .....	130

3. Математическое Действие «Деление» .....	137
4. Описание математического знака «Равенства» ( = ).....	140
5. Почему существует всего четыре основных Математических Действия: «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» .....	143
Краткое повторение и заключение .....	150
Литература .....	159
Summary.....	163

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе я пытаюсь ответить на вопрос о том, почему математика успешно работает для описания явлений физического мира. Этот вопрос интересует многих исследователей. Дж. Лакофф и Р. Нуньес сформулировали его следующим образом: *«Какие существуют основания для того, что физик Юджин Вигнер назвал “немыслимой эффективностью математики в естественных науках”?* За счет чего мы можем придавать смысл фактам, которые обнаруживают ученые, или создавать математические формулы, которые прекрасно описывают множество свойств физического мира и даже позволяют делать верные предсказания?» [21]. Для ответа я использую представление об Образе-Алгоритме как о двойном сенсорно-проприоцептивном Образе восприятия и механизме Действия руки, в том числе математического Действия на предметы (предметы счета) с помощью руки.

*«Наш анализ математических представлений критически зависит от ответа на вопрос, как показать математические представления, опирающиеся на повседневный опыт?»* Мой ответ на этот вопрос таков: именно математический Образ-Алгоритм является тем математическим представлением *«повседневного опыта»*, о котором говорит Дж. Лакофф.

Ключевыми в данной работе являются представления об Образе-Алгоритме и Базисных Действиях.

Выполнение значимого для выживания в физическом мире Действия в отношении предмета и активное восприятие собственного Действия — главный принцип и условие существования живого существа в физическом мире. Принцип «глаз — рука» или «глаз — передняя конечность» есть универсальный для всех живых существ способ обеспечить выживание путем направленного перемещения, питания и взаимодействия с предметами, необходимыми для существования, например, для создания укрытия. Это осуществляется с помощью пары глаз и первой, наиболее близко расположенной к глазам, пары конечностей. Большинство сложно организованных живых существ, осуществляя собственное Действие с помощью конечности, воспринимает его одновременно зрительно и проприоцептивно, при этом в его мозге (нервной системе) для данного Действия формируется сложный зрительный и проприоцептивный Образ восприятия, который становится механизмом данного Действия. Для Действия человека сенсорно-проприоцептивный Образ назван ОБРАЗ-ЗОМ-АЛГОРИТМОМ (О-А). Впервые он представлен в предыдущей работе [29]. О-А состоит из ОБРАЗА – зрительного Образа восприятия и АЛГОРИТМА – проприоцептивного Образа восприятия как мышечного

правила выполнения Действия. У человека сенсорно-проприоцептивный способ формирования механизма Действия руки в отношении предмета получил совершенное воплощение.

В процессе эволюционного развития наиболее эффективные, успешные действия руки человека на предметы были зафиксированы в высших отделах мозга человека в качестве основных, базовых правил, или Базисных Действий. Все Действия руки человека предметами являются действиями, приближающими предметы или удаляющими (отдаляющими) их друг от друга, соединяющими предметы в группу или разделяющими группу предметов, объединяющими или разъединяющими сложные предметы, а также Действиями, разрушающими или сохраняющими создаваемые, или созданные предметы. Можно выделить восемь Базисных Действий человека: «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

Именно по правилам Базисных Действий выполняются О-А при их формировании по сенсорно-проприоцептивному принципу (Принципу О-А). Сформированный при восприятии впервые выполненного Действия руки на предмет О-А есть двойной Образ восприятия, он становится простейшим психическим механизмом данного Действия и одновременно элементарным «знанием» субъекта об объекте Континуума — предмете, принадлежащем внешнему миру.

В данной работе показано, как Действие руки ученика на реальный предмет (предмет счета) в начале обучения математике становится нейропсихологическим механизмом вычисления Мат. Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление, как в соответствии с сенсорно-проприоцептивным принципом (принципом О-А) формируются математические О-А, от которых путем копирования ОБРАЗОВ (О-А) абстрагируются четыре психических Образа, становящихся механизмами вычисления математических Действий (Мат. Действий) «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

При анализе возможностей Образа-Алгоритма выявился тот удивительный факт, что четыре основных математических Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» вырабатываются по правилам первых четырех Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить». Таким образом, Базисные Действия являются основой не только О-А Действий руки на предметы, предназначенные для познания предметов и формирования «идеальных» психических образов, но и математических О-А, предназначенных для формирования четырех абстрактных образов — механизмов вычисления математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», которые являются основой всего здания математики.

Так, математический О-А (Мат.О-А) «Сложение» формируется по правилу Базисного Действия «Приблизить»; Мат.О-А «Вычитание» — «Удалить (Отдалить)»; Мат.О-А «Умножение» — «Соединить»; «Деление» — «Разделить».

В данной работе показано, каким образом содержание (смысл) Базисных Действий «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», эволюционно запечатленных в мозге в качестве врожденных «образцов» Действий руки, претворяется (преобразуется) в содержание Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», образующих Мат.формулу физического явления, верно описывающую какое-либо явление физического мира.

В каждом из Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», входящих в состав Мат.формулы (выражения), запечатлены содержания (смыслы) соответствующих Базисных Действий. Поэтому Мат.формулу (выражение) можно представить как целость, единство, как совокупное «действие» абстрактной «руки» на абстрактные «предметы».

При обучении ученика математике выработка Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» сначала происходит с помощью руки, манипулирующей реальными предметами (предметами счета) по правилам Базисных Действий. Использование учеником реальных предметов (предметов счета) является условием для выработки Мат.Действий и формирования Мат.О-А. При этом формируется Мат.О-А.

Базисные Действия, выработанные исторически в действиях человека рукой в отношении внешних объектов (предметов), запечатленные в высших отделах мозга в качестве базовых правил, становятся «предустановленными структурами» сродни кантовским «интуитивным суждениям», они, по сути, есть основы, или НАЧАЛА математики.

Почему работает математика? Запечатленные в мозговой сфере восемь Базисных Действий есть основные ПРАВИЛА (программы, архетипы) для всех конкретных Действий руки человека на предметы окружающего мира.

Физический мир дан человеку в объектах (предметами) и физических явлениях. Полное знание человека о целостном фрагменте физического мира дано ему в познании предмета и обусловленном предметами физическом явлении. Предметы познаются с помощью О-А, предназначенных для познания предметов. Физические явления познаются путем составления для них Мат.формул, включающих Мат.Действия. При изучении физических явлений отношения объектов, образующих явление, и отношения параметров «внутри» физического явления могут быть выражены в виде математической формулы с помощью математи-

ческих Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Мат.Действия, образующие формулу, исторически выработаны при восприятии Действий руки на предметы в практических актах: торговых операциях, строительстве, военном деле и т. д. В какой-то момент развития общества оказалось, что Мат.Действия могут быть использованы для описания физических явлений внешнего мира.

При обучении ученика математике Базисные Действия «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить» преобразуются в конкретные Действия руки на реальные предметы (предметы счета). При этом по сенсорно-проприоцептивному принципу (Принципу О-А) формируются Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». От Мат.О-А каждого типа («Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление») абстрагируются четыре Образа, которые становятся механизмами вычисления Мат.Действий ( $5 + 4$ ,  $9 - 4$  и т. д.) в мозговой сфере субъекта.

Дж. Лакофф и Р. Нуньес пишут: *«Большинство когнитивных механизмов, не являющихся специфически математическими, тем не менее, используются для понимания математических идей. К их числу относятся обычные когнитивные механизмы, стоящие за такими повседневными представлениями, как пространственные отношения, группировки, изменения, положения тела в пространстве, приближение к границе, основные действия с объектами (растяжения, повторяющиеся действия и т. д.)»* [21].

Преимуществом предлагаемого в данной работе подхода к проблеме эффективности математики является то, что повседневные представления, о которых говорит Дж. Лакофф, лежащие в основе математических понятий (перемещения, группировки, повторяющиеся действия и т. д.), представлены в виде воспринятых Системой Восприятия организованных перемещений предметов с помощью руки в соответствии с четырьмя Базисными Правилами. Для них формируется Образ восприятия, или сенсорно-проприоцептивный механизм Действия, или Мат.Образ-Алгоритм. В Мат.О-А как в принадлежащем психологической сфере объекте запечатлены математические счетные Действия руки, перемещающей объекты в пространстве поля зрения субъекта (ученика).

В работе объясняется, почему Базисными Действиями, пригодными для выработывания счетных действий руки на предметы, — Мат.Действиями «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» являются только четыре Базисных Действия «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», в то время как «Объединить» и «Разъединить» не способны обеспечить вычислительные манипуляции руки ученика предметами счета.

Мат.О-А и О-А Действий (манипуляций) руки предметами исходят от Базисных Действий, они имеют общий генезис (рис. 2,*a*), поэтому данная работа состоит из двух частей. Часть I включает фрагменты моей монографии «Базисные Действия Человека» [29], посвященной раскрытию представления об Образе-Алгоритме, его значению и его структуре. В части I изложены основные понятия об О-А, необходимые для понимания генезиса и значения математического Образа-Алгоритма, а также дается объяснение представлению об Образе-Алгоритме и Базисных Действиях, их роли, значения. Показана структура О-А, установлено, каким образом с помощью Образа-Алгоритма происходит познание предметов окружающего мира в их функциях.

В математической, Части II объясняется, почему математика работает при вычислении Мат.формул, верно представляющих физические явления, принадлежащие физическому миру (Континууму).

При желании читатель может сразу обратиться к математической Части II после ознакомления с Частью I в главах 1 и 5.

Автор выражает признательность и благодарность Вере Валентиновне Пляшкевич за помощь в подготовке данной работы.

# **ЧАСТЬ I. ФОРМИРОВАНИЕ ОБРАЗА-АЛГОРИТМА КАК МЕХАНИЗМА ДЕЙСТВИЯ РУКИ**

## **ГЛАВА 1. Три исходных наблюдения. Представление об Образе-Алгоритме и Базисных Действиях человека**

В основе данной работы лежат три наблюдения реальных Действий руки человека на предметы во внешнем мире.

### **НАБЛЮДЕНИЕ 1. Базисные Действия**

Наблюдая действия, которые человек выполняет при осуществлении разных форм деятельности с помощью руки, можно отметить как очевидный факт, что некоторые Действия руки на предметы (манипуляции предметами) повторяются в разных вариантах. Например, человек, так или иначе, приближает какой-либо предмет к другому предмету, соединяет их в общую кучку или разделяет кучку, отводя предметы (яблоки, орехи, камешки и т. д.) в стороны. Наблюдая действия руки, можно выделить восемь основных способов, используя которые человек манипулирует разнообразными предметами с помощью руки. Другими словами, все способы взаимодействия (контакта) человека с предметами с помощью руки представлены всего восемью типами основных действий. Разнообразные формы деятельности человека (колка дров, вождение автомобиля, работа у станка, рыбная ловля, путешествие по океану, строительство дома, прыжки с шестом и т. д.) состоят из некоторого числа единичных действий руки на предметы, каждый из которых представляет собой конкретный вариант одного из восьми основных действий. В разных конкретных формах деятельности мы видим, как человек выполняет манипуляции рукой, приближающие предметы к чему-либо или удаляющие их от чего-либо, манипуляции, соединяющие или разделяющие группы предметов, объединяющие или разъединяющие составные предметы, а также манипуляции, разрушающие или сохраняющие их.

Восемь основных типов действий руки на предмет можно обозначить как основные, или **БАЗИСНЫЕ, ДЕЙСТВИЯ** руки человека на

предметы: ПРИБЛИЗИТЬ, УДАЛИТЬ (ОТДАЛИТЬ), СОЕДИНИТЬ, РАЗДЕЛИТЬ, ОБЪЕДИНИТЬ, РАЗЪЕДИНИТЬ, РАЗРУШИТЬ, СОХРАНИТЬ (сокращенно: ПРИ, УДА, СОЕ, РАЗ, ОБЪ, РАЗЪ, РАЗР, СОХ или 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

По сути, бесчисленное множество конкретных единичных действий руки человека на реальные предметы в физическом мире, составляющие конкретные формы деятельности человека с помощью руки, представлены всего ВОСЕМЬЮ БАЗИСНЫМИ ДЕЙСТВИЯМИ. Каждая конкретная форма деятельности человека образована оригинальной комбинацией Действий руки предметами, выполненных по правилам всего восьми Базисных Действий, подобно тому, как четыре нуклеотида образуют все разнообразие молекул ДНК. Базисные Действия — это восемь правил, программ или архетипов для всех конкретных Действий руки человека на реальные предметы во внешнем мире. Эти виды действий отмечают многие исследователи. Г. Эббингауз в 1911 г. указал следующие действия (реакции): удержание и отталкивание, разрывание и составление [44].

Главной особенностью Базисных Действий является их очевидность. Могут сказать, что нужно доказать, используя, например, кластерный анализ и т. д., что указанные Действия есть именно Базисные Действия. Нужно сказать, что в литературе отсутствуют указания на то, какие Действия человека могут выступать в качестве основных, базовых действий.

Главным признаком Базисного Действия является перемещение руки с предметом в пространстве (в поле зрения) от точки к точке. Вращательное или волнообразное движение не является Базисным Действием, поскольку в нем не происходит поступательного единичного перемещения руки с предметом в поле зрения от точки к точке. По мнению Н. А. Бернштейна, *«движения в пространственном поле уровня всегда по своей сути переместительны»* [4]. Как показано ниже, формирование Образов-Алгоритмов, как механизмов Действия руки, происходит по правилам указанных восьми типов Базисных Действий. В работе [29], в которой выполнен подробный анализ Базисных Действий в их преобразованиях в конкретные Действия руки на предметы, не удалось установить, что какое-либо Базисное Действие было лишним или возникла необходимость в дополнительном типе Базисных Действий, кроме указанных восьми. Этот вывод совпадает с точкой зрения лингвиста А. Вежбицкой, которая изучала ключевые слова, аналогичные Базисным Действиям. Она пишет: *«Дело не в том, как “доказать”, является ли то или иное слово одним из ключевых слов культуры, а в том, чтобы, предприняв тщательное исследование какой-то части таких слов, быть в состоянии сказать о данной культуре что-то существенное и нетривиальное»* [6].

Выявление Базисных Действий отвечает критерию очевидности. Э. Гуссерль в основание познания кладет очевидность. Критерий очевидности он полагает «принципом всех принципов» [13].

Восемь Базисных Действий — это восемь основных «правил» или «программ», по которым выполняются все конкретные единичные Действия в составе разных форм деятельности человека. Каждый человек может убедиться в существовании Базисных Действий, наблюдая собственные действия руки на предметы или действия окружающих его людей. Например, такая форма деятельности, как колка дров топором, состоит из четырех Действий: 1) Действие, соответствующее Базисному Действию «Удалить» — поднять топор над поленом; 2) Действие, соответствующее Базисному Действию «Приблизить» — Опустить топор на полено; 3) «Соединить» — вонзить топор в полено; 4) «Разделить» — расколоть полено.

В более сложном случае, если перед человеком находится полностью разобранный автомобильный двигатель (сложносоставной предмет), то сборка двигателя из деталей есть целое Действие, соответствующее Базисному Действию «Объединить», при выполнении которого каждая деталь занимает свое место. В процессе объединения (сборки) двигателя человек выполняет в определенном порядке множество Действий, приближающих, удаляющих, соединяющих, разделяющих, объединяющих, разъединяющих, разрушающих и сохраняющих детали двигателя, так что каждая деталь занимает предназначенное ей место. Все двигатели есть однотипные предметы и собираются по одному правилу. Последовательность Действий, которые выполняет рукой рабочий при сборке (объединении) двигателя из деталей, можно назвать «базисной формулой» сборки двигателя.

Следует четко различать движение и действие. Движение основано на физиологических механизмах. Действие, в отличие от движения, в составе форм деятельности обеспечивает существование человека в физическом мире и социуме. По мнению Ж. Пиаже, *«действие никогда не является рядом механически соединенных движений, а всегда ориентировано в направлении удовлетворения потребности (например, соприкосновение с пищей)»* [28].

Итак, каждая конкретная форма деятельности человека в социуме составлена из некоторого числа единичных Действий руки человека в отношении конкретных предметов, при этом каждое Действие является вариантом одного из восьми Базисных Действий: «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

## НАБЛЮДЕНИЕ 2. Образы-Алгоритмы

Можно отметить, что психически здоровый человек не производит бессмысленных движений рукой (руками). Каждое «движение» человека имеет значение, смысл. Можно, упрощая, сказать, что осмысленное «движение» руки есть действие. Все перемещения руки здорового человека в отношении каких-либо предметов (кроме движений-жестов), имеющие свое предназначение во внешнем мире, которые принято не строго называть «движениями», суть действия руки на предметы.

Наблюдение 2 касается уже не «правил», по которым выполняются Действия, но непосредственно «способа» выработки Действия руки предметом. Наблюдая собственное Действие руки на какой-либо предмет, например, когда мы прикасаемся ложкой к чашке, мы зрительно воспринимаем как общую «картину» перемещения своей руки с ложкой, так и собственные мышечные ощущения от (своей) руки, выполняющей данное Действие. Перенесем это наблюдение на простую модель выполнения первого Действия человека рукой, когда ребенок впервые протягивает руку к предмету и прикасается к нему. Это простейшая модель собственного Действия руки человека. Очевидно, что, когда ребенок впервые выполняет движение, протягивания руки к игрушке под контролем зрения, он одновременно воспринимает собственные зрительные сигналы и проприоцептивные ощущения (сигналы) от руки как одно целое СВОЕ действие руки.

Действия своей руки человек выполняет под контролем сенсорных органов, в первую очередь зрения. Для каждого, впервые выполняемого, начатого и завершенного Действия руки каким-либо предметом в мозге субъекта (ребенка) формируется двойной образ восприятия Действия, как мозговой объект, в котором воспринятая зрительная сенсорная информация («картина»), выполнения Действия руки предметом в поле зрения, находится в единстве (сцеплении) с одновременно воспринятой сенсорной проприоцептивной информацией, исходящей от рецепторов мышц, сухожилий и суставов своей руки, выполняющей данное Действие (рис. 1).

Данный объект, образованный как единство двух образов восприятия: «внешнего» сенсорного Образа восприятия и «внутреннего» проприоцептивного Образа восприятия для впервые выполняемого ребенком Действия руки на предмет, становится мозговым «механизмом» данного Действия. В нем закодировано выполнение Действия руки на предмет во внешнем мире.

Итак, в едином СЕНСОРНО-ПРОПРИОЦЕПТИВНОМ мозговом объекте соединены в единое целое:

1) Образ восприятия, воспринятый субъектом во внешнем мире сенсорной (зрительной, слуховой и т. д.) «картины» выполнения собственного Действия в поле зрения с помощью СВОЕЙ руки;

2) Образ восприятия проприоцептивных сигналов от мышц СВОЕЙ действующей руки, образующих мышечно-суставную «программу» или алгоритм выполнения действия.

Двойной Образ восприятия есть собственно МЕХАНИЗМ Действия руки предметом (механизм манипуляции руки предметом). По сути, в едином сенсорно-проприоцептивном объекте ОБРАЗ + АЛГОРИТМ закодировано (запечатлено) единичное ДЕЙСТВИЕ руки предметом во внешнем мире. Можно, упрощая, сказать, что в нем закодировано «знание» о том, как действовать предметом с помощью руки. Это простейший «опыт» субъекта (ребенка) по отношению к объекту (предмету), принадлежащему внешнему миру. Такой Объект можно назвать ОБРАЗ-АЛГОРИТМОМ (О-А). Поскольку Образ-Алгоритм образован двумя «идеальными» Образами – Образами восприятия, принадлежащими сфере восприятия, он является простым «психическим» объектом.

Действие руки и формирование О-А должно происходить по определенным правилам. Такими правилами являются правила Базисных Действий. Каждый отдельно взятый О-А формируется по «правилу» какого-либо одного из восьми Базисных Действий. Например, О-А Действия руки, в котором соединяются в «кучку» несколько предметов (например, яблоки, орехи, камни и т. д.), выполняются по Базисному «правилу» «Соединить».

На основании наблюдений 1 и 2 можно сделать следующие выводы:

1. Для каждого впервые выполненного конкретного Действия руки реальным предметом во внешнем мире в мозге ребенка (человека) создается Образ-Алгоритм — единый сенсорно-проприоцептивный объект, отображающий Действие руки определенным предметом. Он становится механизмом выполнения (кодом) данного Действия, его объектом-носителем в сфере восприятия.

2. Каждый Образ-Алгоритм формируется по правилу одного из восьми Базисных Действий. Другими словами, действительную основу конкретного Действия руки человека предметом (манипуляции предметом) составляет одно из восьми Базисных Действий. Таким образом, Базисные Действия из «безличных» идеальных правил «манипуляции» виртуальными, невидимыми «предметами» преобразуются в механизмы выполнения конкретных Действий руки реальными предметами.

Практическая реализация Действия руки, закодированного (запечатленного) в О-А, в АЛГОРИТМЕ О-А осуществляется в практическом двигательном акте с помощью Двигательной системы, выполняющей Действия (манипуляции) приближения, удаления, соединения, разделе-

ния, объединения, разъединения, разрушения или сохранения предмета с помощью руки.

### НАБЛЮДЕНИЕ 3.

#### «Чистые» Действия руки ребенка в отношении предметов

Наблюдая за поведением детей в возрасте от 3–4 месяцев до 2–2,5 лет, т. е. до момента появления первых целенаправленных действий, можно убедиться в том, что в этот период происходит не «познание» предмета ребенком, но лишь выработка собственно ДЕЙСТВИЯ руки предметом или выполнение уже выработанного Действия. При этом для ребенка не имеет значения, каким именно предметом он манипулирует. Предмет для него лишь «повод» к манипуляции. В этот период происходит не познание предметов, но выработка «чистых» Действий руки как способов или приемов манипулирования рукой разными предметами без познания предметов в их функциях (Рис.1).

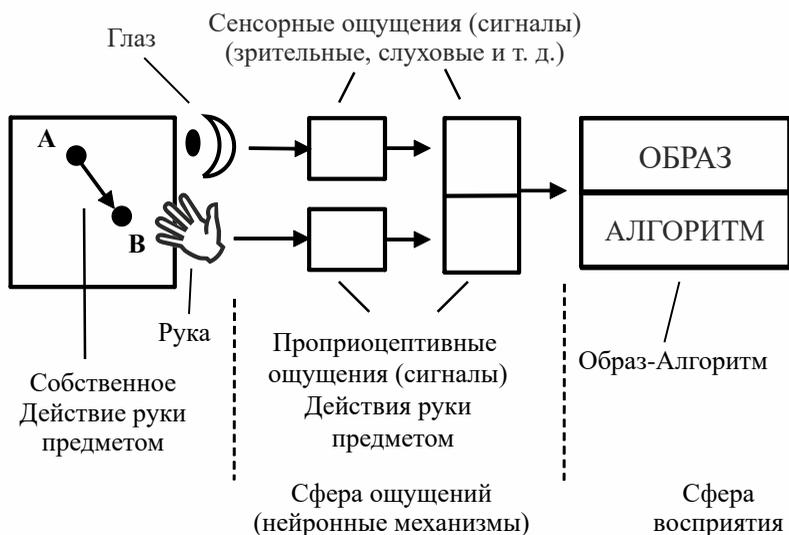


Рис. 1. Формирование Образа-Алгоритма

Внимание! Следует обратить особое внимание на тот факт, что субъект воспринимает сенсорно и проприоцептивно СОБСТВЕННЫЕ Действия СВОЕЙ руки.

Игрушки для ребенка данного возраста созданы таким образом, чтобы ими было удобно манипулировать рукой, они удобны для захвата их рукой (кольцо, погремушка и т. д.), составления их вместе, для сборки-разборки (пирамидка, машинка, домик из простых деталей). В этот начальный период онтогенеза ребенок только вырабатывает «чистые» Действия руки на предмет, при этом формируются Образы-Алгоритмы как механизмы «чистого» Действия руки предметом. Предметы для ребенка в это время являются лишь «средством» для вырабатывания Действий руки — приближающих, удаляющих, соединяющих, разделяющих и других способов оперирования предметами с помощью руки, но сами предметы ребенок «не видит». Его Система Восприятия не воспринимает предмет как самостоятельный объект в поле зрения. Наблюдая за ребенком, можно понять, что он видит руку вместе с предметом как одно целое, но не руку и предмет порознь. Ребенок «не видит» предмет отдельно от руки, он не познает предмет, но манипулирует им по «правилу» одного из Базисных Действий. Можно сказать, что Базисные Действия обладают интенцией, понуждая руку ребенка действовать по их правилам. Мы замечаем, что, взяв предмет, ребенок выполняет им какое-либо Действие, например, приближает его к чему-либо, вслед за этим он бросает его, после чего переходит к другому предмету. Игрушки (предметы) привлекают его внимание лишь как «объекты», с которыми можно выполнить Действия рукой. Конструктивно игрушки для детей этого возраста созданы именно для вырабатывания Действия руки (рис. 2).



*Рис. 2. Период Выработывания Действий (Период I)*

Возраст от 3–4 месяцев до 2–2,5 лет — это Период Выработки Действий. Тонкий знаток поведения детей М. Монтессори говорит об этом: *«Поэтому первая задача младенца состоит в том, чтобы подготовить руку к тому, чтобы она стала инструментом, которым можно работать»* [25, 26].

### Строгое понимание Действия руки

В данной работе Образ-Алгоритм утверждается как принадлежащий психологической сфере объект-носитель и механизм Действия руки человека предметом, сформированный в процессе восприятия собственного действия руки предметом (манипулирования, оперирования предметом). Главной особенностью О-А является то, что он формируется как двойной сенсорно-проприоцептивный Образ восприятия. Поэтому О-А — это психический объект, объект внутреннего мира субъекта, обладающий сенсорно-проприоцептивной структурой, вследствие чего появляется возможность анализировать его поведение во внутреннем мире субъекта. Вплоть до настоящего времени исследователи рассматривают Действие руки как сенсомоторный акт, как акт, в котором сначала нечто (например, предмет) воспринимается с помощью зрения, а затем в отношении него совершается ДВИЖЕНИЕ, завершающееся некоторым двигательным эффектом в отношении предмета. Такой двигательный акт привычно называют действием. Л. С. Выготский пишет: *«В психологии уже давно был установлен факт, что всякое восприятие имеет свое динамическое продолжение в движении»* [9].

В данной работе Действие рассматривается как выполняемое субъектом перемещение предмета (предметов) собственной рукой в поле зрения на дистанции вытянутой руки.

Мы будем использовать термин «Действие руки предметом (предметами)». В нём мы обозначаем Действие руки человека в отношении предмета (предметов), как манипуляцию рукой в поле зрения по перемещению предметов, выполненное по правилу одного из Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

Впервые вырабатываемое Действие запечатлевается в сфере восприятия как образный объект — двойной сенсорно-проприоцептивный Образ восприятия. До сих пор воспринятая субъектом проприоцептивная компонента его собственного Действия руки каким-либо предметом почти не замечалась исследователями действия, ему не придавалось принципиального, важного значения в организации Действия. Действие субъекта полагалось как двигательная активность под контролем глаза в отношении предмета, которым субъект не манипулирует в момент его

восприятия. Внимание исследователя сосредоточивалось на физиологических механизмах Действия как движения, действие понималось как обусловленное ими сложное движение. Иначе говоря, Действие объяснялось через физиологию движения.

Повторю, что О-А, как сложный Образ восприятия, принадлежит внутреннему миру субъекта, он обладает собственной структурой, поэтому его можно подвергнуть анализу не с позиции физиологии движений, опирающейся на функции структур нервной системы организма, но с позиции парадигмы восприятия и образной парадигмы, что принадлежит области психологии.

Образ-Алгоритм состоит из двух образов восприятия — ОБРАЗА и АЛГОРИТМА. ОБРАЗ О-А есть внешний Образ восприятия, воспринятый сенсорными органами, направленными на восприятие объектов внешнего мира (предмет); АЛГОРИТМ О-А есть проприоцептивный Образ восприятия, он образован сигналами от мышц, это «мышечное правило» или «программа» выполнения Действия. АЛГОРИТМ О-А связан с фундаментальной Двигательной системой организма, это придает О-А поразительную константность (неизменность, устойчивость). Сформированный однажды О-А сохраняется неизменным в течение жизни человека.

Исследованию связи восприятия, прежде всего зрения и движения руки у человека и животных, посвящено много работ. Уже на заре физиологии всеми исследователями было отмечено очевидное значение зрительного контроля при выполнении движений руки в системе «глаз — рука». Практически все исследователи отмечают глубокую взаимосвязь между сенсорным (преимущественно зрительным) восприятием и движением руки (конечности) [2, 11, 26, 35, 37]. Множество работ по теме «глаз — рука» посвящено исследованию времени двигательной реакции на стимул.

Отсутствие до настоящего времени представления об О-А можно объяснить тем, что, наблюдая Действие (манипуляцию) руки человека на предмет «со стороны» и описывая его, исследователи ограничиваются только «объективным» описанием Действия. Пытаясь понять его физиологические механизмы, они игнорируют тот факт, что субъект одновременно выполняет и воспринимает СОБСТВЕННОЕ Действие СВОЕЙ рукой во внешнем мире в сенсорной и проприоцептивной составляющих.

Некоторые исследователи подходят весьма близко к представлению о сенсорно-проприоцептивной структуре О-А. Так, М. Арбиб пишет: *«Воспринимается не столько объект из окружающей среды, сколько взаимосвязь между этим объектом и самим субъектом»* [2]. Д. Б. Эльконин утверждает: *«При формировании акта хватания связь*

*между зрительным восприятием и движением устанавливается мгновенно» [45].*

С. Неуес подразумевает существование сенсорных (как выглядит движение) и моторных (как чувствуется исполнение движения, т. е. проприоцептивные ощущения) репрезентаций движения, но при этом не предлагает «репрезентацию» как собственно МЕХАНИЗМ Действия [52].

Сенсорно-проприоцептивная структура О-А как механизма Действия руки на предмет, воплощенного в единство двух образов восприятия, позволяет полагать его элементарным психическим объектом (субъекта), наиболее близко предстоящим объектам физического мира. В О-А внешний объект (предмет) впервые воплощен в «психику» человека. Можно, упрощая, сказать, что в Образе-Алгоритме косный объект, принадлежащий физическому миру, захватывается Системой Восприятия субъекта и становится объектом его внутреннего мира. О-А, в силу его образной динамической природы, участвует в базовых психических процессах, обусловленных «идеальными» Образами.

Субъектный генезис О-А, его сенсорно-проприоцептивное происхождение, дает возможность использовать его для построения базовых моделей психизма человека, таких как формирование механизма выполнения функции при познании предмета, механизма произнесения СЛОВА, механизма собственно СЛОВА, формирования математических О-А для выполнения основных Действий математики «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» и т. д.

Все Действия руки на предметы выполняются в соответствии с восьмью Базисными Действиями: «Приблизить», «Удалить» (Отдалить), «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить», т. е. каждое Действие, из огромного числа конкретных Действий руки на предметы, выполняется по какому-либо одному Базисному «правилу».

При выполнении Действия человек всегда оперирует предметом. Предмет неотделим от Действия руки, он является главным объектом Действия. Именно объект (предмет), принадлежащий физическому миру, является объектом познания с помощью Действия руки, выполненного по одному из восьми правил Базисных Действий. Не существует Действия без предмета.

Перемещение предмета (предметов) в Действии с помощью руки происходит не хаотически, но перемещение предмета всегда происходит от одной точки поля зрения к другой точке по траектории, соответствующей какому-либо Базисному Действию. По мнению Н. А. Бернштейна, *«движения в пространственном поле всегда по своей сути переместительны» [4].*

Повторю, что О-А является кодом, механизмом и объектом-носителем данного Действия человека в психической сфере. Это минимальный психический объект, обусловленный непосредственной связью человека, его руки с объектом косного мира (предметом), а значит с внешним физическим миром в целом вследствие сенсорного (зрительного и т. д.) и проприоцептивного восприятия собственного Действия руки на предмет. Поэтому О-А можно полагать в качестве минимального «знания» человека о внешнем мире. Благодаря О-А косный объект физического мира (предмет) становится частью внутреннего мира манипулирующего им субъекта.

Способ введения объекта физического мира во внутренний мир субъекта в процессе зрительного (слухового и т. д.) и проприоцептивного восприятия можно назвать сенсорно-проприоцептивным принципом познания объектов внешнего мира или ПРИНЦИПОМ О-А. Принцип О-А, по сути, главный действенный принцип существования живого существа, обладающего развитой мышечной системой, в условиях Земли.

Формирование О-А — единственный способ, правило или принцип освоения внешнего физического мира, его объектов, проникновения человека в косный физический мир, в Континуум.

После рождения ребенка, в возрасте от 3 месяцев до 2,5 лет, в Периоде I (Период Выработки Действий) происходит формирование и накопление огромного числа О-А как механизмов «чистых» Действий руки на предметы, как СПОСОБОВ манипуляций рукой разными предметами, которые далее будут участвовать в познании реальных предметов. Поэтому О-А можно полагать действенными Началами для последующего познания мира, формирования Внутреннего мира, Речи, развития математических способностей и практической деятельности отдельно взятого человека.

### **Образ-Алгоритм**

Человек не производит бессмысленных «движений» рукой (руками). Каждое перемещение руки человека, пребывающего во внешнем мире, является не случайным «движением», но всегда есть ДЕЙСТВИЕ. Содержание («смысл») Действия состоит в обеспечении выживания человека в физическом мире и социуме. Когда в возрасте 3 месяцев ребенок впервые протягивает руку и под контролем зрения прикасается к предмету, он выполняет первое простейшее Действие руки на предмет. С этого первого Действия начинается выработка и быстрое увеличение числа Действий руки предметами (формирование О-А). Благодаря тому, что ребенок находится под полным

обеспечением со стороны взрослых членов социума (родителей), у него есть «запас времени» (около 2,5 лет) для того, чтобы выработать огромное количество О-А, как способов манипуляции руки доступными ему предметами. Вырабатывается сплошное «поле» способов, «чистых» Действий руки предметами, когда Действия незначительно отличаются друг от друга, например, манипуляция шариком гладким и шершавым. С появлением первого О-А — первого контакта руки с предметом и его сенсорно-двигательного восприятия субъектом, начинается становление человека как психического субъекта (рис. 1).

В процессе вырабатывания Действия руки на предмет и формирования О-А ОБРАЗ и АЛГОРИТМ формируются одновременно, в каждый момент времени взаимно обуславливая друг друга, поэтому О-А представляет собой интегрированное целое, единый Образ восприятия как психический Объект.

О-А обуславливает и кодирует ОДНО определенное собственное Действие руки ребенка предметом. О-А — это носитель информации о собственном Действии субъекта на предмет с помощью руки. Можно провести аналогию между О-А и тем, что Г. Мендель назвал наследственным «задатком» (ставшего впоследствии геном, «один ген — один фермент») или носителем информации об одном признаке растения [24]. Также можно сравнить О-А с пангеном Г. де Фриза, назвавшего так материальные единицы, каждая из которых обуславливает передачу одного признака [16].

Покажем подробно, как происходит формирование О-А.

При вырабатывании нового Действия с помощью своей руки в отношении какого-либо предмета Система Восприятия субъекта одновременно воспринимает два набора сенсорной информации от своей руки: 1) сигналы от рецепторов всех модальностей (зрение, слух и т. д.), ориентированных на восприятие объектов внешнего мира, вовлеченных в Действие. Они образуют сенсорный Образ восприятия или ОБРАЗ О-А; 2) сигналы от проприоцепторов мышц, сухожилий, суставов руки, участвующих в данном перемещении руки с предметом; они образуют мышечное «правило» выполнения Действия или АЛГОРИТМ О-А.

Если Действие выполняется впервые, то для зрительных и проприоцептивных сенсорных сигналов Система Восприятия формирует две сенсорные нейронные матрицы. В них запечатлены два разных паттерна первичных сенсорных «ощущений» Действия. Содержание каждой матрицы считывается Системой Восприятия и преобразуется в Образы восприятия — ОБРАЗ и АЛГОРИТМ.

Поскольку ОБРАЗ представлен Образами от рецепторов разных сенсорных модальностей, то содержание образов проецируется на особый идеальный ВНУТРЕННИЙ СЕНСОРНЫЙ ЭКРАН. На нем

субъект «видит», «слышит», тактильно ощущает, обоняет и т. д. Образ как единое целое. Каждая сенсорная модальность, видимая на Внутреннем сенсорном Экране в составе целого Образа, субъективно переживается как свет, цвет, звук, запах и т. д.

Сенсорный ОБРАЗ находится в единстве с проприоцептивным Образом, при этом последний («темное мышечное чувство» по И. М. Сеченову [37]) не отображается на Внутреннем сенсорном Экране. Последний предназначен для сенсорных модальностей, ориентированных на внешний мир. В таком единстве ОБРАЗ и АЛГОРИТМ образуют О-А, пребывают в нем «нераздельно» и «неслиянно», обуславливают друг друга, создают его как целый объект.

О-А обладает особой природой, он существует в Образной Сфере субъекта не как статичный, подобный фотографии объект, но как динамичная постоянно воспроизводящаяся сенсорно-проприоцептивная система, как снова и снова развертывающееся во времени («картина») Действие от его начала до завершения. Каждый временной ( $\Delta t$ ) момент развертывания О-А обусловлен моментами взаимно обуславливающих влияний ОБРАЗА и АЛГОРИТМА.

При формировании О-А нейронные механизмы, в которых запечатлены сенсорные паттерны, образованные рецепторными сигналами, обеспечивают возникновение образов восприятия в иерархически более высокой сфере восприятия. В настоящее время мы не знаем достоверно, каким образом происходит «преобразование» состояний нейронных сетей в образы О-А.

1. ОБРАЗ О-А — это созданный Системой Восприятия образ восприятия выполненного Действия руки в поле зрения, образованный сигналами рецепторов всех модальностей, предназначенных для восприятия объектов внешнего мира. Получение информации человеком в естественных условиях мультисенсорно, он воспринимает в единстве зрительные, слуховые, тактильные, обонятельные и другие сигналы. Любая сформулированная и оформленная единица информации, хранящаяся в «памяти» человека, не может быть амодальной. Современная когнитология отвергает идею амодальности знания, когда речь не идет об абстрактных понятиях, предлагая теорию воплощенного познания (*embodied cognition*) [21]. Согласно последней, любое знание человека о предметах и явлениях действительности опосредовано его телесным, сенсомоторным опытом восприятия окружающего мира. Высказывается предположение о том, что скоординированная работа тактильного и зрительного анализатора образует отдельный автономный анализатор [55].

2. АЛГОРИТМ О-А — это Образ восприятия, образованный проприоцептивными сигналами от рецепторов мышц, связок, суставов, а также от рецепторов ускорения и вестибулярных рецепторов, контролирующих изменения положения руки и тела по отношению к вектору гравитации. Проприоцептивные ощущения ощущаются менее отчетливо, чем сигналы от рецепторов, направленных на внешний мир. Согласно терминологии И. М. Сеченова, мышечное «темное» чувство — это смутно осознаваемые ощущения, исходящие от мышц (проприоцептивные ощущения в терминологии Ч. Шеррингтона) в процессе движений [37, 42].

В АЛГОРИТМЕ О-А в виде Образа как целостной проприоцептивной «картины» запечатлена последовательность («программа») выполнения всех фаз движений руки выполняемого Действия по отношению к СХЕМЕ ТЕЛА — представлению человека о собственном теле в поле гравитации [13, 51]. Предполагается, что основой Схемы Тела является ощущаемый субъектом, созданный проприоцептивными сигналами целый Образ восприятия, составленный на основе информации от «опорных точек», расположенных в костно-мышечном каркасе тела. АЛГОРИТМ О-А, как конкретный Образ восприятия, разворачивается в проекции на СХЕМУ ТЕЛА, которая, по сути, есть проприоцептивный суперОбраз восприятия костно-мышечной модели собственного тела субъекта в его статике и движении.

В психологической литературе схема тела полагается структурой, формирующейся в проприоцептивном пространстве. Схема тела — это образ собственного тела, который позволяет субъекту в любой момент времени осознать (представить) относительное положение и размер частей его тела при отсутствии внешней сенсорной стимуляции. Это внутренняя система отсчета, благодаря которой определяются взаимное расположение и размер частей тела в поле земного притяжения.

За счет связи АЛГОРИТМА О-А с фундаментальной Двигательной системой человека ОБРАЗ О-А, представленный «легкими» внешними сенсорными модальностями, получает мощную основу. Благодаря связи с Двигательной системой, сформированный однажды О-А сохраняется в образной сфере мозга неизменным в течение жизни человека. О-А становится тем НАЧАЛОМ, от которого происходят элементы базового психизма человека — О-А Простых Действий, О-А для познанных функций предметов, О-А произнесения Слова, Образы разного уровня абстрагирования и т. д.

О-А можно сравнить с деревом, его корнем является АЛГОРИТМ, погруженный в Двигательную систему как в почву, а ОБРАЗ является кроной, существующей в атмосфере, наполненной подвижными психическими Образами.

Повторю, что О-А есть временной объект, он существует в Образной Сфере как объект, в котором постоянно воспроизводятся от начала до конца ОБРАЗ и АЛГОРИТМ. При формировании О-А и его воспроизведении в практическом акте АЛГОРИТМ и ОБРАЗ развертываются последовательно во взаимно обуславливающем единстве, в каждый момент времени  $\Delta t$  текущая фаза АЛГОРИТМА соотносится с определенным моментом ОБРАЗА.

Повторю утверждение о том, что косный объект физического мира с помощью активного Действия руки субъекта (ребенка) на предмет в составе О-А (сформированного по сенсорно-проприоцептивному Принципу О-А) становится простейшим психическим объектом, частью внутреннего мира субъекта. Родившийся в «чуждый» ему Континуум ребенок вступает во взаимодействие (контакт) с объектами Континуума с помощью Действий руки на предмет в соответствии с правилами Базисных Действий, выработанных эволюционно поколениями людей в процессе взаимодействия с объектами Континуума (предметами). Таким образом, он начинает свое проникновение в Континуум, становится Его частью. Это можно сравнить с тем, как ребенок, родившись в семье, не сразу становится ее полноправным членом, он становится им тогда, когда начинает принимать активное участие в жизни семьи своими действиями.

Иначе говоря, при манипуляции предметом, принадлежащим Континууму, с началом формирования первых О-А ребенок (человек) перестает быть «чужим» в Континууме. С помощью сенсорно-проприоцептивного принципа О-А ребенок (человек), воспринимая предметы Континуума, формирует О-А как объекты своего внутреннего мира. Так, вступая в контакт с объектом (предметом) Континуума, он начинает свое проникновение в Континуум, приобретает «природу» Континуума, становится Его частью. После завершения формирования О-А в Образной Сфере он становится элементарным психическим Объектом, принадлежащим внутреннему миру ребенка.

Другими словами, до того момента, когда ребенок (человек) в возрасте 3–4 месяцев начинает впервые манипулировать предметами, выработывая Действие руки, он, родившись в Континууме, еще не принадлежит Ему, остается «чужим» для Него. Объекты Континуума, принадлежащие физическому миру, находятся вне связи с ребенком, ребенок еще не субъект. Как пишет А. Н. Леонтьев: *«Ближайший к человеку мир, который определяет его жизнь, — это мир предметов, созданных человеческой деятельностью. Этот мир непосредственно не дан человеку. Он стоит перед каждым отдельным человеком как задача и должен быть раскрыт ему в своем специфическом качестве»* [22].

После рождения в Периоде выработки Действия (Период I) объекты Континуума в составе О-А впервые «оживотворяются» в субъекте, приобретают качество «живого», становятся предметами, несмотря на то, что ребенок не видит их как отдельные от руки объекты. Термин «неизвестный объект» приобретает строгое значение, когда в нем отобразено положение человека по отношению к внешнему объекту, лишенное действенного контакта (взаимодействия, манипуляции) с ним с помощью руки. Вне Действия, т. е. без участия собственной двигательной системы ребенка (человека), воспринятый сенсорными органами (зрение, слух и т. д.), объект существует в нейронных сетях мозга как неустойчивый паттерн возбужденных нейронов, как кратковременный «образ» случайного ощущения.

По мнению К. Юнга, *«психика по большей части состоит из образов», «психическая сущность может стать содержанием сознания, то есть обрести представление, только тогда, когда она имеет свойства образа»* [47].

Сформированные О-А сохраняются неизменными в течение жизни. О-А это «краеугольный камень» всей конструкции человека, принадлежащего одновременно двум мирам — психическому «невидимому» и физиологическому «видимому». Поэтому мы полагаем О-А действенным НАЧАЛОМ человека.

При познании предметов в их функциях с помощью О-А в О-А Простых Действий и О-А Функций предметов (см. Глава 5) запечатлена информация о том, ЧТО именно, какой сенсорно воспринятый объект (предмет) познан в мире и КАК, с помощью каких проприоцептивно воспринятых действий он познан.

Мы знаем, что первый простейший О-А у человека формируется, когда ребенок впервые протягивает руку к предмету. Далее, при познании разных предметов формируются О-А единичных Функции познанных предметов. Например, при познании предмета молотка формируется О-А Функции «Вбивать гвоздь», включающий три О-А Простых Действий: *замахнуться («Удалить»); Приблизить молоток в шляпке гвоздя («Приблизить»); прикоснуться к шляпке гвоздя («Соединить»)*. Другой пример: для познанного сложного предмета — океана — формируется сложный О-А познанной Функции океана *«Переплыть океан на яхте»* (океан познается как пассивный предмет, который человек познает, переплывая на яхте), включающий огромное количество организованных в блоки О-А Простых Действий, с помощью которых человек сенсорно и проприоцептивно осуществил познание океана в данной функции.

Так от первого Действия, путем первого прикосновения рукой к предмету, до познания огромного океана работает сенсорно-

проприоцептивный Принцип О-А. Акт познания любого физического объекта или предмета в единичной функции предмета независимо от его величины запечатлевается в сфере восприятия субъекта в одном «формате» в соответствии с сенсорно-проприоцептивным Принципом О-А в виде целого психического объекта — О-А и становится единичным знанием (опытом) человека, способного с этого момента, при появлении потребности, произвольно, сознательно воспроизвести его в воспоминании или осуществить в практическом акте.

### **Единичное Базисное Действие**

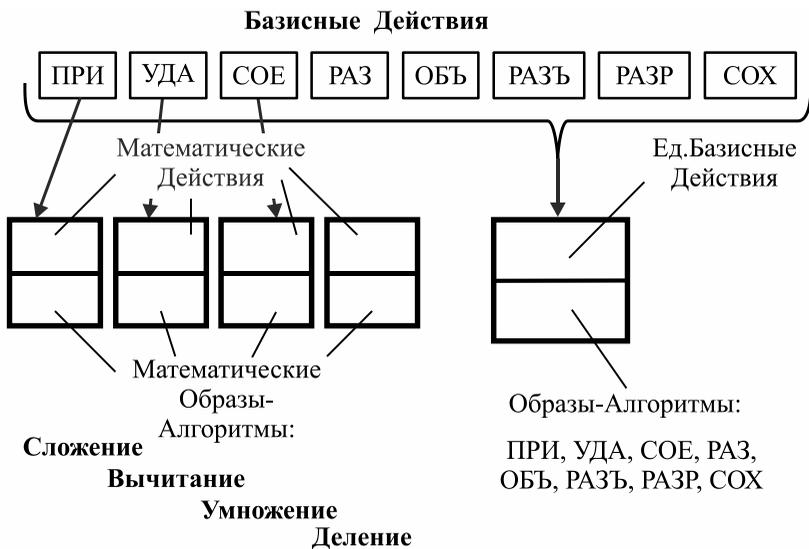
Мы знаем, что при восприятии Системой Восприятия сенсорной и проприоцептивной составляющих собственного Действия руки формируется О-А — механизм Действия руки субъекта предметом. Конкретные Действия руки предметом выполняются по «правилам» восьми Базисных Действий. Базисные Действия есть «врожденные» действия руки человека. Базисные Действия сформировались в процессе эволюции человека как правила в процессе оптимальных Действий руки с помощью предметов. Их можно сравнить с «архетипами» Действий, которые воплощаются в огромное число конкретных Действий руки во внешнем мире.

В Периоде I Базисное Действие «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить» и т. д., преобразованное в конкретное Действие руки предметом и выполненное ребёнком по Базисному правилу как единичное «чистое» конкретное Действие руки на предмет мы назовем **ЕДИНИЧНЫМ БАЗИСНЫМ ДЕЙСТВИЕМ** (Ед.Базисным Действием). Можно сказать, что в Периоде I при выработывании конкретного Действия руки предметом — Ед.Базисного Действия — происходит формирование О-А как механизма данного Действия руки. О-А — это мозговой механизм Ед.Базисного Действия. В Периоде I каждое Действие руки ребенка на какой-либо предмет является Ед.Базисным Действием. Понятие «Ед.Базисное Действие» относится только к Периоду I (Периоду Выработывания Действий).

В Периоде I, в возрасте от 3 месяцев до 2,5 лет Система Восприятия ребенка не способна воспринимать предмет и руку, манипулирующую предметом, как отдельные предметы. Система Восприятия воспринимает Действие следующим образом: 1) перемещение руки с предметом как перемещение единого объекта «рука + предмет»; 2) перемещение объекта «рука + предмет» относительно особой точки, которая становится **ТОЧКОЙ ОТСЧЕТА** в зависимости от характера действия — приближающего или удаляющего (отдаляющего), соединяющего, отдаляющего, объединяющего, разъединяющего. Действие,

составляющее Ед.Базисное Действие, определяется относительно некоторой установленной Точки Отсчета. Так, в Ед.Базисном Действии «Приблизить» Точкой Отсчета становится точка в пространстве, в поле зрения на дистанции вытянутой руки, к которой приближается объект «рука + предмет». В Ед.Базисном Действии «Соединить» Точкой Отсчета становится соединенная из некоторого числа приближающих перемещений объектов «рука + предмет» «кучка» предметов. Сложной Точкой Отсчета для Ед.Базисного Действия «Объединить» становится собранный из частей в результате приближающих и соединяющих перемещений деталей сложносоставной предмет, например, детская пирамидка или разборная машинка.

Итак, в Периоде I, в возрасте до 2,5 лет, по правилам восьми Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить» происходит выработка Ед.Базисных Действий и формирование их механизмов — О-А, предназначение которых состоит в познании предметов внешнего мира в функциях предметов. Познание предметов происходит в следующем Периоде II (рис. 3).



*Рис. 3. — Выработка Единичных Базисных Действий и Математических Действий Сложение, Вычитание, Умножение, Деление с помощью руки реальными предметами*

В возрасте 6–7 лет, когда ребенок начинает обучение математике по правилам четырех Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить». Вырабатываются математические Действия и формируются математические О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Они становятся основой для формирования четырех абстрактных Вычислительных Образов (математических Суперобщепформ), с помощью которых происходит вычисление математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

**Период I** включает три этапа: 1, 2, 3.

**Этап 1.** На 1-м этапе вырабатываются наиболее простые Ед.Базисные Действия и формируются О-А «Приблизить» и «Удалить».

А. Содержание Ед.Базисного Действия «Приблизить»: «Переместить предмет от какой-либо точки пространства в поле зрения на дистанции вытянутой руки **К** другой фиксированной в пространстве точке — ТОЧКЕ ОТСЧЕТА».

Б. Содержание Ед.Базисного Действия «Удалить»: «Переместить рукой предмет **ОТ** некоторой фиксированной в пространстве точки — ТОЧКИ ОТСЧЕТА в какую-либо точку пространства на дистанции вытянутой руки».

Ед.Базисные Действия и О-А «Приблизить» и «Удалить» есть простейшие и наиболее многочисленные перемещения объекта рука + предмет. Они входят в состав всех Ед. Базисных Действий: «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить». Поэтому О-А «Приблизить» и «Удалить» являются важнейшими, образующими О-А.

**Этап 2.** На 2-м этапе вырабатываются Ед.Базисные Действия и формируются О-А «Соединить» и «Разделить».

А. Содержание Ед.Базисного Действия «Соединить»: «Переместить или приблизить (свести) несколько предметов в общее место или ТОЧКУ ОТСЧЕТА с формированием СОСТАВНОГО ПРЕДМЕТА (или «кучки» предметов)» в поле зрения в пространстве на дистанции вытянутой руки. При этом не имеет значения, в каком месте Кучки окажется тот или иной предмет.

Б. Содержание Ед.Базисного Действия «Разделить»: «Переместить или развести составленные вместе (образующие «кучку») предметы из общего места или ТОЧКИ ОТСЧЕТА (Разделить СОСТАВНОЙ ПРЕДМЕТ или Кучку предметов)» в пространстве в разные места пространства на дистанции вытянутой руки.

**Этап 3.** На 3-м этапе вырабатываются наиболее сложные Ед.Базисные Действия (формируются О-А) «Объединить», «Разъединить», а также особые Ед.Базисные Действия «Разрушить» и «Сохранить».

А. Содержание Ед.Базисного Действия «Объединить»: «Объединить или сопоставить все части предмета, так чтобы в процессе перемещений составных частей предмета каждая часть (деталь) заняла определенное место, чтобы получился целый СЛОЖНОСОСТАВНОЙ ПРЕДМЕТ».

Б. Содержание Ед.Базисного Действия «Разъединить»: «Разъединить с помощью перемещений целый СЛОЖНОСОСТАВНОЙ ПРЕДМЕТ на составные части (детали), так чтобы из данных частей можно было вновь объединить (собрать) тот же сложносоставной предмет».

В. Содержание Ед.Базисного Действия «Разрушить»: «Разрушить тот Предмет, который создается в данном Действии».

Г. Содержание Ед.Базисного Действия «Сохранить»: «Сохранить тот Предмет, который был создан в предыдущем Действии», например, путем «отодвинуть в другое место».

Итак, в Периоде I происходит постепенное усложнение структуры Ед.Базисных Действий от простого «Приблизить» и «Удалить» до «Разрушить» и «Сохранить» (рис. 2).

*Определим термины:*

1) для восьми Базисных Действий, Ед.Базисных Действий и О-А «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить»используем сокращения «ПРИ», «УДА», «СОЕ», «РАЗ», «ОБЪ», «РАЗЪ», «РАЗР», «СОХ» или 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8;

2) для Действий руки на предмет используем термин «вырабатывать», для О-А — термин «формировать».

Важно учитывать, что в Периоде I, в течение ограниченного промежутка времени, ребенок должен выработать как можно большее количество Ед.Базисных Действий всех восьми Базисных Типов и сформировать О-А, с помощью которых в следующем Периоде будут познаваться предметы и создаваться психические абстрактные Образы.

В Периоде I формирование О-А составляет содержание всей двигательной активности ребенка. В этот Период Базисные Действия, исходящие от высших уровней Образной Сферы, обладающие интенциональной силой иницируют высокий уровень напряжения всех систем организма ребенка для формирования максимально возможного числа О-А всех степеней сложности.

## **ГЛАВА 2.**

### **Представление об уровнях Нейрореальности мозга**

В данной главе приводится несколько гипотетических положений, объясняющих происхождение Базисных Действий человека.

#### **Три уровня Нейрореальности мозга**

При рассмотрении Базисных Действий возникает необходимость ответить на вопрос, где расположены Механизмы Базисных Действий, какому уровню репрезентации мозга субъекта они принадлежат. Научная любознательность понуждает нас задать вопрос, ЧЕМУ принадлежат Базисные Действия, ОТКУДА они инициируют и КАК управляют выработыванием Ед.Базисных Действий и формированием О-А. Множество фактов указывает на то, что мозг человека представлен двумя основными частями: физической частью, основанной на молекулярных основах, и невидимой, психической частью. Нас не может удовлетворить представление о том, что в нейронных сетевых структурах, сформированных под влиянием Генома, запечатлено содержание идеальных психических Образов. Нейронные механизмы как физиологические механизмы обеспечивают выполнение движений, в том числе движения руки. Что касается О-А, то это «наднейронный» идеальный механизм Действия, обладающий «природой» психического Образа. Одно и то же Действие может быть выполнено с помощью разных движений. Например, Действие «Приблизить» молоток к гвоздю при забивании гвоздя в доску может быть выполнено с помощью разных движений, поэтому для Действия не существует единственного физиологического механизма.

Физиологической основой движений, составляющих Действие руки, являются нейронные и мышечные механизмы. Собственный аспект Действия проецируется на внешний мир, содержание (смысл) Действия руки предметами определено внешним миром. Образная природа О-А заставляет нас предположить, что высшие Механизмы Базисных Действий есть действенные образцовые матрицы для формирования О-А, принадлежащих высшим отделам невидимой сферы мозга.

Можно предположить, что мозг представлен тремя уровнями мозговой реальности или тремя — 1, 2, 3 уровнями Нейрореальности мозга:

— уровень 1 Нейрореальности мозга представлен нейронными механизмами;

— уровень 2 Нейрореальности представлен невидимыми «идеальными объектами» О-А и Образами всех степеней абстрактности; это ОБРАЗНАЯ СФЕРА МОЗГА;

— уровень 3 Нейрореальности мозга представлен управляющими психическими механизмами, использующими О-А и психические Образы в качестве структурных элементов («кирпичиков», «расходного материала») для построения психического акта (акт образного, вербального мышления, предложение Речи).

*Данная работа посвящена объяснению процессов, принадлежащих образной сфере мозга (уровню 2 Нейрореальности) человека.*

### **Уровень 1 Нейрореальности мозга**

Уровень 1 Нейрореальности — уровень физических объектов и функций объектов мозга — анатомических структур, нейронов, нейронных сетей и нейрофизиологических механизмов, допускающих их изучение с помощью приборов, работа которых основана на физических принципах. Это сфера ощущений. Речь идет о физиологическом субстрате мозга, основанном на макромолекулярных объектах.

### **Уровни 2, 3 Нейрореальности мозга**

Уровень 2 Нейрореальности — это сфера, главным объектом которой являются психические Образы. Это СФЕРА ОБРАЗОВ, или ОБРАЗНАЯ СФЕРА. Здесь и далее будем использовать термин «Образная Сфера». На этом невидимом уровне мозга человека «действующими лицами» являются психические Образы. Образы есть идеальные сущности мозга, их невозможно зарегистрировать с помощью приборов. Мы способны «видеть», «слышать» и т. д. Образы — объекты уровня 2 Нейрореальности нашим внутренним «зрением», «слухом» и т. д. В процессе внутреннего восприятия Образы представлены нам на особом субъективном Внутреннем сенсорном Экране [23, 39]. Собственно знание о существовании Образов дано человеку в опыте интроспективного наблюдения. Сфера существования Образов как объектов является той реальностью, о которой мы почти ничего не знаем. Описанию «жизни», динамики Образов, описанию событий, в которых они участвуют, посвящена данная работа.

Нейрон, нейронные сети, коннектом и т. д. являются физиологическим базисом для объектов невидимого мира, представленных Образами. Процессы, происходящие на уровне 2 Нейрореальности, находятся за «горизонтом» видимых событий, процесс их формирования и «природа» Образов нам неизвестны.

Можно предположить, что объекты — высшие Механизмы Базисных Действий и обусловленные ими Базисные Действия — принадлежат иерархически высшей части уровня 2 Нейрореальности [10, 38, 54].

Уровень 3 Нейрореальности мозга представлен управляющими психическими механизмами. Данные механизмы оперируют Образами-Алгоритмами как структурными элементами (своего рода «кирпичиками») для построения предложений речи, актов образного и вербального мышления. В данной работе мы используем только представления о 1 и 2 уровнях Нейрореальности.

### **Происхождение психических образов от образов-алгоритмов**

Исходным моментом происхождения психических образов является процесс их копирования (итерации) от ОБРАЗОВ образов-алгоритмов всех типов. В результате прямого копирования (итерации, отъединения, исхождения) копии от ОБРАЗА О-А появляется «чистый» идеальный образ первого уровня абстрагирования, не связанный с АЛГОРИТМОМ О-А. Данные образы первого уровня абстрагирования становятся основой для образов следующих уровней абстрагирования. В части II будет показано, что копии ОБРАЗОВ математических О-А становятся основой для абстрактного ОБРАЗА, который в свою очередь становится механизмом вычисления математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Одним из главных принципов поведения образов в образной сфере является принцип восходящего абстрагирования подобных образов. Строгость, неукоснительность этого принципа можно сравнить с законом. Это естественный, характерный для образной сферы процесс направленного «вверх» абстрактного преобразования образов. Он осуществляется в виде процесса восходящего абстрагирования, включающего два этапа: 1) возникающие в образной сфере подобные (похожие) образы объединяются по общему для них признаку подобия с образованием группы подобных образов; 2) от каждого образа группы подобных образов абстрагируется образ, содержанием которого становится общая, характерная для всех образов группы «картина», лишенная конкретных признаков и деталей каждого образа, входящего в состав группы. Так для подобных образов определенного уровня абстрагирования создается образ следующего уровня абстрагирования.

## Механизмы Базисных Действий

Мы должны, хотя бы в виде предположения, попытаться объяснить происхождение первых конкретных Действий руки человека в отношении предметов (Ед.Базисных Действий) и О-А, которые мы наблюдаем в Периоде Выработывания Действия с рождением каждого ребенка. Механизмы или объекты-носители восьми Базисных Действий принадлежат высшему уровню Образной Сферы (уровню 2 Нейрореальности), это есть восемь «идеальных» правил или программ выполнения Базисных Действий «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

Важнейшей функцией механизмов Базисных Действий является функция обеспечения существования О-А. Механизмы Базисных Действий поддерживают неизменным влияние на О-А всех типов Действия, которые формируются в течение жизни человека, и на математические О-А. Содержания (смыслы) Базисных Действий «напитывают» О-А всех типов. Тем самым для каждого О-А из числа сформированных О-А всех типов поддерживается и определяется Базисное ЗНАЧЕНИЕ О-А.

Иными словами, после того как О-А всех типов сформированы, они не становятся полностью независимыми объектами, но Базисный тип каждого О-А в течение жизни человека поддерживается неизменной связью с соответствующим ему Механизмом Базисного Действия. Тем самым высшие значения Базисных Действий пронизывают, «насыщают» все множество О-А всех типов.

## ГЛАВА 3. Образы-Алгоритмы 1, 2, 3 этапов

### Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 1-го этапа «Приблизить» и «Удалить»

СОДЕРЖАНИЕ (смысл) Базисного Действия «Приблизить»: «Переместить предмет от какой-либо точки пространства на дистанции вытянутой руки **К** другой фиксированной в пространстве **ТОЧКЕ ОТСЧЕТА**».

СОДЕРЖАНИЕ (смысл) Базисного Действия «Удалить»: «Переместить предмет рукой в любую точку пространства в поле зрения на дистанции вытянутой руки **ОТ** одной фиксированной в пространстве **ТОЧКИ ОТСЧЕТА**».

На 1-м этапе Периода I Базисные Действия «Приблизить» и «Удалить» инициируют выработку и придают содержание (смысл) конкретным действиям руки на предмет — Ед.Базисным Действиям «Приблизить» и «Удалить».

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием **ПРИБЛИЗИТЬ** является действие (манипуляция) руки ребенка, перемещающее какой-либо предмет **БЛИЖЕ** к самому ребенку (его телу) или **К** точке, расположенной **БЛИЖЕ** к ребенку (его телу) по сравнению с точкой пространства, **ОТ** которой предмет начал перемещаться, при этом Тело ребенка является Точкой Отсчета.

Ед.Базисным Действием **ПРИБЛИЗИТЬ** является также следующее, более сложное перемещение предмета рукой **ОТ** какой-либо точки, расположенной в пространстве на дистанции вытянутой руки, по направлению **К** определенной фиксированной **ТОЧКЕ ОТСЧЕТА**, расположенной в том же пространстве на дистанции вытянутой руки независимо от расположения тела человека.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием **УДАЛИТЬ** является действие (манипуляция) руки ребенка, перемещающее какой-либо предмет **ОТ** самого ребенка (его тела) или **ОТ** точки, расположенной в пространстве (на расстоянии вытянутой руки), **БЛИЖЕ** **К** ребенку (его телу) по направлению **К** точке, расположенной в том же пространстве **ДАЛЬШЕ** **ОТ** ребенка, при этом Тело ребенка является Точкой Отсчета.

Ед.Базисным Действием **УДАЛИТЬ** является также следующее более сложное перемещение рукой предмета **ОТ** какой-либо фиксированной **ТОЧКИ ОТСЧЕТА**, расположенной в пространстве на дистанции

вытянутой руки, по направлению К какой-либо точке, расположенной в том же пространстве независимо от расположения тела человека.

Ед.Базисные Действия «Приблизить» и «Удалить» — это всегда действие руки на ОДИН предмет (рис. 4).

Первыми Действиями руки становятся Действия руки на предметы «Приблизить» и «Удалить». После рождения ребенка в Континуум собственно пространство уровня 2 Нейрореальности (Сфера Образов) отсутствует, оно возникает с появлением первых О-А.

Можно полагать, что Базисное Действие «Приблизить» обладает условно конструктивным модусом действия. При выработывании Ед.Базисных Действий данного Базисного типа его приближающее К телу направление имеет условно конструктивное «усиливающее», «увеличивающее» значение «к себе».

Базисное Действие «Удалить» обладает условно деструктивным модусом действия. При выработывании Ед.Базисных Действий данного Базисного типа его удаляющее (отдаляющее) ОТ тела направление имеет условно деструктивное «ослабляющее», «умаляющее», «уменьшающее» значение «от себя». (Рис.4).

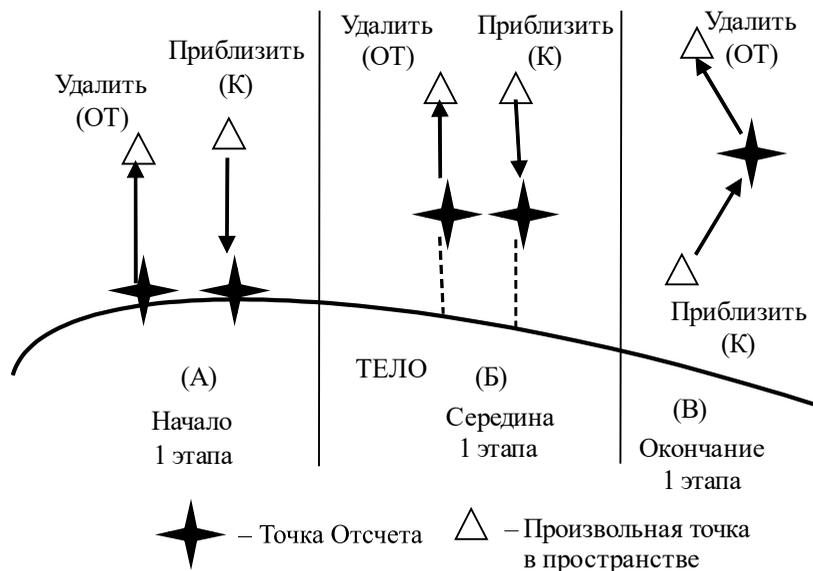


Рис. 4. Формирование Образов-Алгоритмов 1 этапа «Приблизить», «Удалить»

Обратимся к событиям 1-го этапа.

Заметить тот факт, что Система Восприятия ребенка впервые начала осуществлять свои функции, можно по реакции ребенка на появление в его Поле зрения какого-либо предмета (например, яркой игрушки): замирание, прекращение активности, затем слабое, едва заметное движение — намек на движение руки в направлении предмета. Это первое проявление интенции Базисных Действий и первый признак начала функционирования объединенной зрительно-проприоцептивной системы. Далее, в течение нескольких недель, движение руки становится все более и более отчетливым. Каждый день, развлекая ребенка яркой игрушкой, мать замечает все более уверенное движение руки ребенка по направлению от его тела к предмету. Сначала ребенок делает попытку протянуть руки, затем протягивает руку к предмету. Особенно хорошо это заметно, если предмет яркий, подвижный. С каждым днем ребенок все более уверенно протягивает руку к игрушке, но движение это поначалу не завершено: пальцы только соприкасаются с игрушкой, но еще не способны захватить ее.

Как происходят Действия человека? Они начинаются с Действий руки ребенка. Как возникают первые Действия руки ребенка по отношению к предметам? Первые Действия руки предметами «Приблизить» и «Удалить» появляются в возрасте 3–4 месяцев, они вырабатываются с помощью особых Действий-помощников или Действий-проводников. Действие-проводник — это врожденное, инстинктивное, безусловно-рефлекторное Действие, оно имеет для ребенка инстинктивный жизненный «смысл». Таким проводником становится квазидействие «Взять», при выполнении которого ребенок инстинктивно, «автоматически» протягивает руку навстречу новому предмету, попавшему в поле зрения, и захватывает его.

Участие Действий-проводников позволяет нам ответить на чрезвычайно важный вопрос, каким образом у ребенка впервые появляются первые собственные Действия руки в отношении предметов.

Механизмы Базисных Действий не способны прямо, непосредственно осуществить первые Действия «Приблизить» и «Удалить». Первые Действия «Удалить» и «Приблизить» начинают вырабатываться с помощью Действий-проводников, наполненных простейшим инстинктивным «смыслом» рефлекторных квазидействий «Захватить» (удалить или отдалить руку от тела к предмету) и «Поглотить» («Съесть») (приблизить руку с предметом ко рту). Итак, инстинктивная реакция на появление предмета в поле зрения, включающая последовательность движений: протянуть руку — прикоснуться к предмету — захватить его пальцами — удержать его в кисти, позволяющая зафик-

сировать предмет в руке, является особым, специальным квазидействием «Захватить». Оно включает движение, удаляющее руку от тела (протодействие «Удалить»), и рефлекторную сжимающую реакцию пальцев кисти руки в ответ на прикосновение к предмету.

Д. Б. Эльконин пишет: *«При формировании акта хватания связь между зрительным восприятием и движением устанавливается мгновенно. Р. Я. Абрамович (1946) наблюдала, что в период с 4 до 7 месяцев, увидев предмет на достигаемом расстоянии, ребенок сразу же протягивает к нему руки и пытается его достать. При этом хватательные движения рук проредывают быструю эволюцию от недифференцированного захватывания предмета всеми пальцами и прижимания его к ладони до захватывания посредством противопоставления большого пальца остальным»* [46].

Далее формируется специальное квазидействие «Взять», которое состоит из действий «Удалить (Отдалить)» + «Захватить» (рефлекторной реакции пальцев, сжимающей предмет) + действие «Приблизить», с помощью которого ребенок приближает предмет ко рту (к телу). Последнее действие можно описать как «Поглотить» или «Съесть». Значение инстинктивной реакции (квазидействия) «Взять» состоит в том, чтобы захватить предмет рукой, зафиксировать его, после чего привлечь к себе.

Постепенно мы замечаем, что Действие-проводник «Поглотить», «Съесть» (предмет) не всегда завершается приближением предмета ко рту, начиная с 5-месячного возраста многие приближенные рукой предметы ребенок уже не подносит ко рту, но прижимает к телу или просто подводит ближе к телу, т. е. с помощью Действия-проводника «Взять» вырабатываются Ед.Базисные Действия, не связанные с пищевым рефлексом. Некоторые такие квазидействия, когда ребенок берет предмет рукой и прижимает к себе, взрослые объясняют, как «Завладеть», «Не дам» или «Мое».

Все действия: «Поглотить» («Съесть» — приблизить ко рту), «Мое» («Завладеть — приблизить к себе») и часть действия «Взять» — являются инстинктивными действиями с ограниченной сферой их использования. Вместе с тем они становятся смысловыми проводниками приближающего действия руки на предмет, способствуя выработанию первых Ед.Базисных Действий «Приблизить». Их действие соответствует приведенному в начале данной главы определению Базисного Действия «Приблизить».

Описанный способ выработки Ед.Базисных Действий «Приблизить» и «Удалить» с помощью Действия-проводника «Взять» ха-

рактен только для начала 1-го этапа, когда вырабатываются первые Ед.Базисные Действия «Приблизить» и «Удалить».

Начиная 3–4 месяцев в связи с развитием Системы Восприятия Ед.Базисные Действия (О-А) начинают вырабатываться самостоятельно, без Действий-проводников, в результате повторений ребенком действия руки его матери, еще очень несовершенных.

Повторение ребёнком действий руки взрослого (матери) становится главным источником новых «своих» Действий руки ребенка. В возрасте 3–4 месяцев начинает функционировать особая «система повторения» Действий, названная РЕП-СИСТЕМОЙ (Реп-система; *repetitio* — повторение). В Периоде I, с появлением Реп-системы, с ее помощью в процессе повторения «чужих» Действий руки на предмет происходит вырабатывание Ед.Базисных Действий (формирование О-А), а далее, в возрасте 6–7 лет, происходит вырабатывание математических действий и формирование математических О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

На протяжении 1-го этапа происходит вырабатывание большого числа Ед.Базисных Действий (формируются О-А) «Приблизить» и «Удалить» в соответствии с разнообразием игрушек (предметов), их формой, весом, цветом, фактурой, с разнообразием траекторий перемещения предмета и предметных условий (сидя, лежа, в кровати, на полу и т. д.).

Сразу после того как О-А «Приблизить» и «Удалить» сформированы ребенок использует их практически в «игровой» ситуации в отношении тех же предметов.

Определим признаки перемещений объекта «рука + предмет» в поле зрения ребенка, которые позволяют его Системе Восприятия на 1-м этапе воспринимать (узнавать) перемещения собственной руки как Действия «Приблизить» и «Удалить» (см. рис. 3).

В Периоде I Система Восприятия воспринимает в поле зрения как Действие «Приблизить» или «Удалить» перемещение предмета рукой по отношению к особой, устанавливаемой Системой Восприятия ТОЧКЕ ОТСЧЕТА. В зависимости от конкретных условий, в которых выполняется Действие руки, Система Восприятия придает какой-либо точке пространства на дистанции вытянутой руки статус Точки Отсчета и далее по отношению к ней воспринимает перемещение объекта «рука + предмет» рукой (перемещение предмета с помощью руки) как Действие «Приблизить» или «Удалить».

В начале 1-го этапа естественной Точкой Отсчета для Системы Восприятия ребенка является его тело или «оболочка» тела, в середине 1-го этапа — какая-либо точка в пространстве, расположенная «ближе» к телу по сравнению с любой другой произвольной точкой. В это

время Точка Отсчета все еще как бы «привязана» к «оболочке» тела и воспринимается Системой Восприятия как продолжение тела. К концу 1-го этапа Точкой Отсчета становится любая точка, расположенная в пространстве в поле зрения перед ребенком на дистанции его вытянутой руки.

Очевидно, что тело (ребенка) становится первой естественной Точкой Отсчета для Системы Восприятия, по отношению к которой она первоначально воспринимает любое перемещение (движение) руки как действие «Приблизить» или «Удалить». Каждое движение руки ребенка по направлению К Точке Отсчета (т. е. К телу) Система Восприятия воспринимает как действие «Приблизить», ОТ Точки Отсчета (ОТ тела) — как действие «Удалить».

Прикосновение к коже при перемещении предмета К телу является для Системы Восприятия сигналом завершения Действия «Приблизить».

Ощущение момента отрыва руки от тела для Системы Восприятия является для Системы Восприятия сигналом о начале выполнения Действия «Удалить». Показано, что человек способен различать прикосновения своей рукой и прикосновения другого человека [49].

Каждый этап состоит из фаз: начало, середина и окончание этапа.

В начальной фазе 1-го этапа (см. рис. 4,а), в отрезок времени с момента рождения до 3-4 месяцев, Система Восприятия, с помощью которой ребенок воспринимает и повторяет «чужое» Действие, еще не работает.

Во второй половине 1-го этапа (6–7 месяцев) Система Восприятия начинает воспринимать первые Действия руки другого человека (матери), ребенок пытается повторить их, вырабатывая первые простейшие собственные Действия (О-А). В это время Точка Отсчета перемещается с оболочки тела в какую-либо точку пространства, при этом для Системы Восприятия Точка Отсчета все еще остается как бы «оболочкой» тела (см. рис. 4,б).

В фазе окончания 1-го этапа для Системы Восприятия «оболочка» тела уже не является Точкой Отсчета. В это время она способна сенсорно и проприоцептивно воспринимать собственные Действия «Приблизить» и «Удалить» (повторяющие «чужие» Действия руки), происходящие в пространстве на дистанции вытянутой руки по отношению к Точке Отсчета, которая может находиться в любом месте пространства (см. рис. 4,в).

Действия руки матери воспринимаются Системой Восприятия ребенка, повторяются снова и снова и завершаются выработкой успеш-

ного варианта Действия руки на предмет — Ед.Базисного Действия «Приблизить» «Удалить» и др. с формированием О-А.

С помощью системы повторений (Реп-системы) ребёнок повторяет «чужое» Действие руки, на 1-м этапе происходит выработка большого числа Ед.Базисных Действий «Приблизить» и «Удалить», которые можно определить словами: «Подтянуть», «Подтащить», «Притянуть», «Подтянуть», «Подгрести», «Придвинуть», «Подвести», «Пододвинуть» и т. д. или «Отбросить», «Раскидать», «Отвести», «Откинуть», «Оттолкнуть», «Отмести», «Отпихнуть», «Отодвинуть» и т. д.

Важно отметить, что на 1-м этапе ребенок выполняет Действие как однократное перемещение рукою предмета.

Базисное Действие «Приблизить» обладает условно конструктивным статусом, приближающие Действия руки воспринимаются как эмоционально положительные «усиливающие», «увеличивающие», «создающие». Базисное Действие «Удалить (Отдалить)» обладает условно деструктивным статусом, поэтому Действия руки, удаляющие что-либо ОТ тела или рта ребенка, воспринимаются как эмоционально отрицательные деструктивные — «уменьшающие», «ослабляющие», «уносящие еду».

Аналогично, условно, конструктивными Базисными Действиями являются «Соединить», «Объединить» и «Сохранить», а деструктивными — «Разделить», «Разъединить» и «Разрушить».

Вернемся к вопросу: что представляет собой Ед.Базисное Действие (О-А)? Это успешный завершённый вариант какого-либо конкретного собственного Действия руки ребенка, повторяющего манипуляцию руки матери каким-либо предметом и воспринимающего собственное повторяющее Действие руки на предмет.

Временная протяженность каждого этапа Периода I определена генетическим человеком, продолжительность каждого этапа занимает определенный отрезок времени онтогенеза. За отрезок времени от 3 до 7 месяцев Механизмам Базисных Действий «Приблизить» и «Удалить» необходимо выработать максимально возможное количество Ед.Базисных Действий (О-А), которые будут использоваться для выработки Ед.Базисных Действий (О-А) следующих 2-го и 3-го этапов.

О-А «Приблизить» и «Удалить» это механизмы наиболее простых и многочисленных Действий руки на предмет, они входят в состав сложных О-А «Соединить» и «Разделить» и наиболее сложных — «Объединить» и «Разъединить».

На 1-м этапе каждый только что сформированный О-А «Приблизить» и «Удалить» сразу принимает участие в повторении ребенком следующих, более сложных манипуляций руки его матери, происходит выработка более сложных Ед.Базисных Действий (О-А). Постепенно

в многочисленных ситуациях повторения Действия другого человека он осваивает манипуляции всеми доступными ему предметами.

Когда ребенок достигает возраста 6–7 лет, он при обучении математике использует О-А «Приблизить» и «Удалить», сформированные в Периоде I для формирования математических О-А «Сложение» и «Вычитание».

### **Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 2-го этапа «Соединить» и «Разделить»**

**СОДЕРЖАНИЕ** (смысл) Базисного Действия «Соединить»: «Переместить два и более предмета в одно место (точку пространства)».

**СОДЕРЖАНИЕ** (смысл) Базисного Действия «Разделить»: «Переместить два и более предмета из одного общего места (точки пространства) в поле зрения в разные места».

На 2-м этапе Периода I Базисные Действия «Соединить» и «Разделить» инициируют выработку и придают содержание (смысл) конкретным действиям руки на предмет Ед.Базисным Действиям «Соединить» и «Разделить».

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием «Соединить» является конкретное Действие (манипуляция) руки ребенка предметом, соединяющее вместе несколько предметов (два и более) в некоторой точке пространства (поле зрения) на дистанции вытянутой руки.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием «Разделить» является Действие (манипуляция) руки ребенка на предмет, разделяющее (разводящее в стороны) составленные вместе в некоторой точке пространства (в поле зрения) на дистанции вытянутой руки два и более предметов.

Ед.Базисные Действия «Соединить» и «Разделить» — это всегда действия руки (рук) двумя и более предметами (рис. 5).

Возрастной границей смены 1-го и 2-го этапов можно считать возраст примерно 8 месяцев.

Прежде чем перейти к описанию 2-го этапа, нужно определить, что следует полагать моментом смены 1-го и 2-го этапов.

Началом 2-го этапа можно считать тот момент, когда сторонний наблюдатель замечает, что ребенок не просто приближает один предмет к одной точке, а другой предмет к другой точке, но два и более предмета он «приближает» к одному месту, «сводит» предметы вместе. Так же, если два, три (несколько) составленных рядом предметов он разводит в разные места, например, на столе, на полу. Это момент начала 2-го этапа, когда Система Восприятия достигает такого уровня развития, при котором она оказывается способной воспринимать несколько перемещений объекта «рука + предмет».

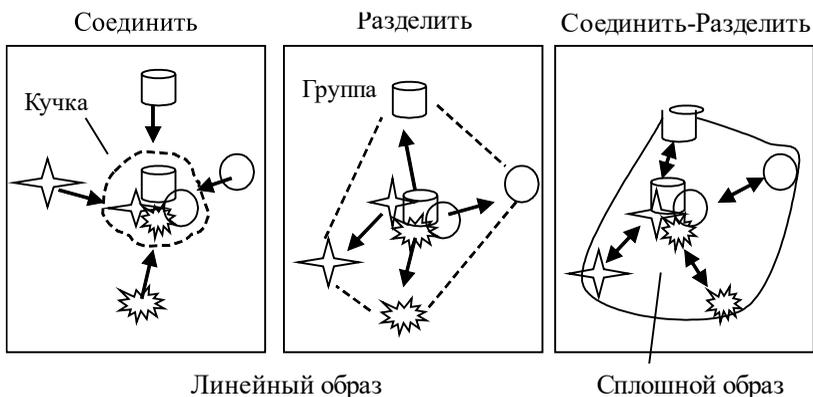


Рис. 5. Формирование образов-Алгоритмов 2 этапа — «Соединить», «Разделить»

На втором этапе ребенок манипулирует уже не одним, но двумя и более предметами, которые он воспринимает как один составной предмет.

Определимся с терминами.

1. Несколько предметов, расположенных на дистанции вытянутой руки, составленные вплотную друг к другу, плотно, тесно, близко, кучно, вместе образуют СОСТАВНОЙ ПРЕДМЕТ, который будем называть КУЧКОЙ предметов. Кучка составлена или СОЕДИНЕНА из двух и более предметов.

2. Несколько предметов, являющихся частями разделенной Кучки, расположенных в пространстве (в поле зрения) на дистанции вытянутой руки НЕ близко, НЕ тесно, НЕ вплотную, на некотором не слишком большом расстоянии друг от друга в поле зрения, вместе образуют СОСТАВНОЙ ПРЕДМЕТ, который будем называть ГРУППОЙ предметов.

Группой можно считать РАЗДЕЛЕННУЮ Кучку предметов. Составляющие Группу предметы, будучи соединенными, образуют Кучку предметов. Группа может образоваться, если предметы, составляющие Кучку, раздвинуть на некоторое расстояние друг от друга, и наоборот, Кучка образуется из соединенных вместе, исходно разделенных предметов, составляющих Группу.

Кучка и Группа образуются в результате неоднократных перемещений объекта «Рука + предмет».

Кучка образуется в результате Действия руки «Соединить». Действие «Соединить» обладает условно созидательным, конструктивным (увеличивающим, концентрирующим) потенциалом. Группа образуется в результате действия руки «Разделить». Действие «Разделить» обладает условно разрушительным, деструктивным (уменьшающим, рассеивающим) потенциалом.

В манипуляции руки ребенка, разделяющей какую-либо Кучку предметов, вырабатывается Ед.Базисного Действия 2-го этапа (формируется О-А) соответствующий Базисному правилу «Разделить».

В манипуляции руки, соединяющей в Кучку отдельные предметы, исходно составляющие Группу, вырабатывается Ед.Базисное Действие (формируется О-А), соответствующее Базисному правилу «Соединить».

В конце 2-го этапа оба типа Ед.Базисных Действий могут вырабатываться и выполняться как одно двуединое Действие «Соединить» — «Разделить» с одним и тем же набором предметов (см. рис. 5).

Минимальное число предметов, из которых состоит составной предмет, равно двум.

Э. Гуссерль пишет о составном предмете: «...рассматривает дело в отношении целого, разделенного или могущего быть разделенным на куски. Части не только обособлены, они — самостоятельны по отношению друг к другу и выступают в виде связанных друг с другом “кусков”» [15].

В начальной фазе 2-го этапа рука ребенка способна выполнить (т. е. воспроизвести Действия руки матери) наиболее простые, «грубые» манипуляции по соединению или разделению Кучки предметов, расположенных перед ним: «Рассыпать», «Раскидать», «Разбросать» — варианты Базисного Действия «Разделить», а также выполнить Действия «Подтянуть», «Подтащить», «Сгрести», «Стянуть», «Сдвинуть» и др., которые являются вариантами Базисного Действия «Соединить». В середине 2-го этапа ребенок способен выполнить более сложные действия «Растащить», «Отвести», «Растянуть», «Развести», «Вытряхнуть» (предметы из корзины) и др., а также «Стянуть», «Сгрести», «Подгрести», «Привести» и др.

В конце 2-го этапа ребенок выполняет более сложные, аккуратные действия по разделению Кучки: «Раздвинуть», «Развести», «Отодвинуть», «Вынуть» и «Выложить» (предметы из коробки, корзины), а также соединить предметы в Кучку: «Придвинуть», «Сдвинуть», «Составить», «Свести», «Подвести», «Принести», «Сложить» и «Вложить» (предметы в коробку, корзину).

Ед.Базисные Действия «Соединить»: «Свести», «Сдвинуть», «Стянуть», «Составить», «Стянуть» и т. д. обозначаются специальными словами, например, «Прибить», «Пригвоздить», «Слепить», «Склеить» и т. д.

Ед.Базисные Действия 2-го этапа «Соединить» и «Разделить» вырабатываются не одновременно, но первыми вырабатываются Ед.Базисные Действия, соответствующие Базисному Действию «Разделить». Можно, упрощая, сказать, что в начале 2-го этапа ребенку легче повторить действия руки матери, разделяющей предметы, т. е. ему легче разбросать, рассыпать Кучку предметов, чем собрать их вместе, что требует более тонкой сенсорно-моторной координации. Что касается первых Ед.Базисных Действий, соответствующих Базисному Действию «Соединить», то они вырабатываются ПОСЛЕ того, как многие Ед.Базисные Действия «Разделить» уже вполне выработаны.

### **Образы-Алгоритмы и Единичные Базисные Действия 3-го этапа «Объединить» и «Разъединить»**

**СЛОЖНОСОСТАВНЫМ ПРЕДМЕТОМ** мы называем предмет, состоящий из деталей (частей), где каждая деталь (часть) занимает определенное место. **ДЕЙСТВИЕ** «Объединить» или «Разъединить» выполняется по отношению к Сложносоставному предмету.

**СОДЕРЖАНИЕ** (смысл) Базисного Действия «Объединить»: «Переместить (сопоставить) все части предмета, так чтобы получился (объединился) целый предмет».

**СОДЕРЖАНИЕ** (смысл) Базисного Действия «Разъединить»: «Разъединить с помощью перемещений деталей целый, состоящий из деталей предмет на составляющие его части, так чтобы данные части можно было объединить в тот же предмет».

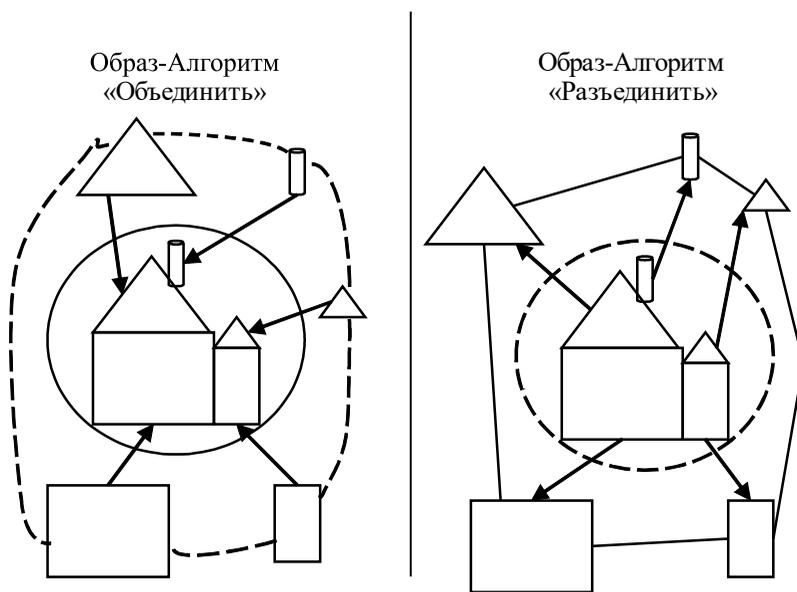
На 1-м этапе Периода I Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить» инициируют вырабатывание конкретных Действий руки пред-метом — Ед.Базисных Действий «Объединить» и «Разъединить».

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием «Объединить» является Действие (манипуляция) руки ребенка (человека), созидающее из частей (деталей) сложносоставной (объединенный) предмет, в котором каждый предмет занимает определенное место.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Ед.Базисным Действием «Разъединить» является действие (манипуляция) руки ребенка по разъединению на части (детали) сложносоставного предмета, каждая часть которого занимает определенное место (рис. 6).

Моментом перехода от 2-го этапа к 3-му следует считать тот момент, когда сторонний наблюдатель впервые замечает, что ребенок в возрасте

примерно 14 месяцев способен собрать из частей (деталей) какой-либо простой сложносоставной предмет, т. е. такой, в котором каждая деталь занимает определенное место, например, игрушечный домик, состоящий из кубика и пирамидки-крыши. Несмотря на простоту, это сложносоставной предмет, ребенок должен его собрать, т. е. объединить из двух частей (деталей), при этом крыша должна быть наверху. Наиболее известной игрушкой — сложносоставным предметом является детская пирамидка — предмет, удобный для выполнения Действия рукой «Объединить» или «Разъединить». На этой игрушке, созданной специально для выработки у детей Действий «Объединить» и «Разъединить», легче всего заметить появление нового Действия 3-го этапа.



*Рис. 6. Формирование Образа-Алгоритма 3 этапа «Объединить» и «Разъединить»*

С появлением у ребенка первой попытки не только прикоснуться пирамидкой-крышей к кубику или диском к штырьку пирамидки (действие «Соединить», которое относится ко 2-му этапу), но поставить пирамидку-крышу на предназначенное ей место сверху НА кубик или надеть, налезть диск на штырек детской пирамидки. Таким образом, с появлением нового Действия «Объединить», инициируемого в начале 3-го этапа прямым влиянием Базисного Действия «Объединить», мож-

но говорить о смене 2-го и 3-го этапов. С того момента, когда ребенку удалось впервые сделать попытку нанизать диск на штырек, можно видеть, как быстро ребенок начинает осваивать все более сложные манипуляции с этой игрушкой, собирая ее из одного, двух и более дисков. Также осваивать объединяющие Действия с другими сложносоставными предметами — игрушками, состоящими из деталей, например, с разборным домиком, машинкой или детским поездом.

Ед.Базисное Действие (О-А) «Объединить» или «Разъединить» 3-го этапа — это Действие руки, объединяющее или разъединяющее сложносоставной предмет. Забегая вперед, следует отметить, что Действие «Объединить» и «Разъединить» относится только к сложносоставному предмету, оно не становится математическим Действием руки на предмет, для него не формируется математический О-А (см. Часть II, Глава 4).

Следует учитывать, что, каким бы исходно ни был предмет — целым, состоящим из частей (деталей) или предметом, разобранным на составляющие его части (детали), это — и собранный, и разобранный — все тот же сложносоставной предмет, в отношении которого может быть выполнено Действие руки «Объединить» или «Разъединить».

Собранный из деталей сложносоставной предмет, если его разобрать, останется тем же, но разобранным на детали сложносоставным предметом. Если состоящую из деталей швейную машинку, стиральную машину или автомобиль разобрать на отдельные детали, то они останутся разобранными на части швейной, стиральной машиной или автомобилем. При этом сложносоставной предмет оценивается по отношению к его целому, «собранному» виду, поскольку только собранная машина способна шить, стирать бельё или ехать по дороге, поэтому целый предмет, объединенный с помощью Действия руки «Объединить», можно назвать **ОБРАЗУЮЩИМ СЛОЖНОСОСТАВНЫМ ПРЕДМЕТОМ**. От него, с помощью Действия руки «Разъединить», может быть образовано (получено) большое число разъединенных предметов-деталей, которые могут быть как неразделимыми, так и «вторичными» сложносоставными предметами, называемыми **ОБРАЗУЮЩИМИ** вторичными сложносоставными предметами, например, автомобиль, карбюратор, форсунка карбюратора, болт и т. п.

Что касается ребенка, то в Периоде I он еще не способен познать игрушечную машинку в ее функции «ехать по дороге» (это произойдет в Периоде II), поэтому для него это не машинка, но сложносоставной предмет, который он, повторяя Действия руки матери, должен разобрать и собрать с помощью своей руки, т. е. выработать Ед.Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить».

Ед.Базисное Действие «Объединить» есть конструктивное действие, собирающее целый сложносоставной предмет из деталей для выполнения в дальнейшем его функции.

Дезинтегрирующий сложносоставной предмет Ед.Базисное Действие «Разъединить» есть деструктивное Действие, которое лишает сложносоставной предмет возможности выполнять его функцию.

О-А «Объединить» и «Разъединить» являются наиболее сложными О-А, включающими О-А 1-го и 2-го этапов «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить».

Появление у ребенка способности собрать простейший сложносоставной предмет (например, домик, конструктивно состоящий из кубика и пирамидки-крыши) указывает на то, что Система Восприятия стала способна отследить все типы изменений и перемещений предметов в Поле зрения, необходимые для разъединения и объединения их в предмете как двумерном, так и объемном, состоящем из частей.

Наиболее подходящим словом для Базисного Действия «Объединить» можно считать слово «Собрать», а для Базисного Действия «Разъединить» — «Разобрать» с указанием, какой конкретно предмет собирается или разбирается.

С помощью Ед.Базисных Действий «Объединить» и «Разъединить» в следующем Периоде познания предметов (Период II) в целенаправленных актах познания предметов ребенок будет познавать сложносоставные предметы в их функциях (свойствах, качествах), например коробку с карандашами, стол с ящиками, шкаф с полками, постель, накрытый стол и т. д. Взрослый человек с их помощью познает конструкцию (устройство) сложносоставных предметов, таких как велосипед, часы, токарный станок, автомобиль, компьютер, дом, мост, завод, самолет или космический корабль. Сложносоставные предметы создаются людьми. Степень сложности созданного сложносоставного предмета может стать показателем уровня данной цивилизации.

Рассматривая Сложносоставной предмет, мы можем сказать, что конструктивно это наиболее сложный составной предмет, его важной особенностью является то, что это предмет, созданный человеком. В природе нет сложносоставных предметов, т. е. предметов, которые можно собрать и разобрать (разъединить на составляющие его части и вновь объединить), поскольку в природе нет процессов разъединения и объединения из частей одних и тех же предметов. Сложносоставной предмет — это сугубо человеческое произведение.

До сих пор мы говорили о двух отдельных Ед.Базисных Действиях 3-го этапа: «Объединить» и «Разъединить». Однако полноценное действие сложносоставным предметом включает оба действия, выполненные последовательно. Как правило, взрослые показывают ребенку,

каким образом выполнить Действия со сложносоставным предметом, собирая и, затем, разбирая его в одном акте в следующих друг за другом манипуляциях предметом, например, матрешку, коробку и крышку, коробку с карандашами и т. д. Во второй половине 3-го этапа Действия «Объединить» и «Разъединить» в отношении многих предметов ставятся одним сложным Ед.Базисным Действием «Объединить-Разъединить». Таким образом, в Периоде I для многих сложносоставных предметов вырабатываются не два разных, но одно сложное Действие руки, состоящее из двух отдельных альтернативных Ед.Базисных Действий «Объединить» и «Разъединить». Такое сложное двойное Ед.Базисное Действие 3-го этапа «Объединить-Разъединить» можно назвать ДВУЕДИНЫМ ЕД.БАЗИСНЫМ ДЕЙСТВИЕМ 3-го этапа.

В Периоде I в ОБРАЗЕ какого-либо О-А «Объединить» или «Разъединить» запечатлено множество Действий руки «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», которые участвуют в процессе сборки или разборки сложносоставного предмета в определенном порядке. Большинство Действий в составе ОБРАЗА О-А «Объединить» представлено простейшими Действиями «Приблизить» и «Удалить», как самостоятельными, так и вошедшими в состав Действий «Соединить» и «Разделить». В нем также могут присутствовать выработанные ранее Действия «Объединить» и «Разъединить». Так, Ед.Базисное Действие «Объединить» при сборке простейшего сложносоставного предмета — домика, состоящего из кубика и пирамидки-крыши, состоит из следующих Действий:

- 1) «Приблизить» пирамидку к кубику;
- 2) «Соединить» их в Кучку;
- 3) «Объединить» (собрать домик), поставив крышу-пирамидку на кубик.

Взрослый человек как отдельный индивидуум, так же, как и коллектив людей, взятый как целый «всечеловек», собирая или разбирая сложносоставной предмет, например, часы, автомобиль, турбину, мост, самолет, небоскреб, океанский корабль, выполняет своей рукой те Ед.Базисные Действия, большинство из которых он выработал когда-то в детстве, в Периоде I, еще до того, как начал произносить первые предложения Речи.

## ГЛАВА 4.

### Повторение «чужого» Действия руки

#### Повторение Действия руки другого человека

Мы рассмотрели, как в Периоде I, в возрасте от 3 месяцев до 2,5 лет, в процессе сенсорно-проприоцептивного восприятия своего Действия формируется О-А Действия руки ребёнка. Далее, в возрасте 6-7 лет, при обучении математике аналогично формируются математические О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Во всех случаях выработка своего Действия происходит при восприятии Действия руки другого человека, которое становится образцовым Действием или действием-шаблоном. Ребёнок, как правило, наблюдает Действие руки матери. При формировании математических О-А ученик повторяет Действие (манипуляцию) руки учителя предметами счета (косточки на счетах, палочки и т. д.). Возникает вопрос, каким образом воспринимаемое (наблюдаемое) «чужое» Действие руки предметом преобразуется в СВОЕ повторяющее Действие, которое далее воспринимается Системой Восприятия сенсорно и проприоцептивно, так что, в результате, происходит формирование О-А? Если ребенок повторяет «чужое» Действие своей рукой, то откуда появилось собственное Действие? Собственное Действие и соответствующие им О-А были выработано ребёнком ранее на предыдущих этапах. При восприятии, в данный момент, Действия другого человека Система Восприятия ребёнка воспринимая «чужое» Действие руки предметом выделяет (узнает) в нём характеристические ПРИЗНАКИ Действия (перемещения предметов рукой) и в соответствии с ними выбирает из «памяти», из набора ранее сформированных (своих) О-А, тот, который более всего подобен воспринятому «чужому» Действию руки. Далее она выполняет Действие с помощью своей руки, одновременно воспринимая свое Действие сенсорно и проприоцептивно. Успешное выполнение Действия после его коррекции в соответствии с конкретными обстоятельствами становится новым сформированным О-А.

Благодаря руке человек получает возможность оперировать предметами. Выработка собственного Действия рукой происходит путем повторения Действия руки «другого человека». Ребенок вырабатывает собственное Действие, повторяя Действие руки матери. Можно выделить два строгих условия, при которых происходит выработка собственного Действия руки ребенка предметом и формирование О-А:

1. Выработка и Ед.Базисных Действий (формирование) О-А происходит всегда при ПОВТОРЕНИИ ребенком Действия руки ДРУГОГО ЧЕЛОВЕКА. Во всех случаях необходим образец Действия или внешняя манипуляция-шаблон, которую ребенок воспринимает и начинает повторять.

2. Выработка Ед.Базисных Действий и формирование О-А происходит, когда ребенок воспринимает СОБСТВЕННОЕ повторяющееся Действие СВОЕЙ руки. Только при восприятии Действия СВОЕЙ руки возникают проприоцептивные сигналы от мышц и сухожилий конечности, вовлечённой в Действие предметом. При этом Система Восприятия ребенка воспринимает одновременно «внешнее» — сенсорное (зрительное и т. д.) и «внутреннее» (проприоцептивное) выполнение Действия своей руки предметом и формирует ОБРАЗ и АЛГОРИТМ О-А.

Для того чтобы ребенок начал выполнять собственное действие, повторяющее Действие руки другого человека, О-А своего Действия должен быть выбран его Системой Восприятия из набора ранее сформированных О-А, сохраняющихся в Образной Сфере.

Ребенок (человек) не обладает врожденной способностью выполнять Действие предметом при восприятии предмета. Он не способен сам, без восприятия образцового Действия другого человека, вырабатывать Действия своей руки в отношении предмета, в его геноме нет «гена», ответственного за выработку конкретных Действий руки при восприятии предмета.

Очевидно, что должен существовать специальный механизм или система, с помощью которой Система Восприятия ребенка воспринимает внешнюю манипуляцию «чужой» руки предметом как образец Действия и, далее, преобразует ее в собственное Действие (своей) руки.

Что касается Базисных Действий, то они не способны инициировать «сверху» выполнение разнообразных конкретных Действий руки (Ед.Базисных Действий) по отношению к конкретным предметам. Все собственные Действия — Ед.Базисные Действия (в Периоде I) и математические Действия (при обучении математике в возрасте 6-7 лет) должны быть выработаны с помощью особого механизма или системы повторения «чужих» Действий. Выше мы назвали такую систему повторений Реп-системой. Выработка у ребёнка Ед.Базисных Действий при повторении «чужого» Действия руки предметом происходит путем коррекции неудачных вариантов выбранных ранее сформированных О-А.

Наиболее удачный, оптимальный вариант Действия становится собственным Действием руки, т. е. О-А Действия руки.

Для Действия руки мы будем использовать термин «повторение». Термин «повторение» обозначает ситуацию, когда мать показывает, а ребенок повторяет Действия ее руки.

Итак, повторение ребенком в Периоде I Действий руки другого человека — единственный способ приобретения способности к собственному Действию руки предметом. Л. С. Выготский развивал гипотезу о «зоне ближайшего развития», в соответствии с которой психическое развитие ребенка определяется его возможностями сотрудничества с взрослыми. По мнению многих психологов, уже первое предметное действие ребенка осуществляется в условиях повторения его действий с взрослыми. Вместо прямого отношения «ребенок — предмет», на которое указывает Ж. Пиаже, такие авторы, как Л. С. Выготский, И. В. Шаповаленко, Л. Ф. Обухова, более правильным считают отношение «ребенок — взрослый — предмет» [9, 27].

По мнению Д. Б. Эльконина, носителями предметных действий являются взрослые люди: *«Основным является путь совместной деятельности с взрослыми, в которой взрослые постепенно передают ребенку общественно выработанные способы употребления предметов. В такой совместной деятельности взрослые организуют действия ребенка по образцу, а затем осуществляют функции поощрения и контроля за ходом осуществления и формирования этих действий»* [46].

Способность к повторению (воспроизведению, подражанию) жестов, Действий, форм локомоции является фундаментальной способностью человека. Благодаря этой способности происходит передача потомству утвержденных во взрослом сообществе движений, звуков и т. д.

Итак, в Периоде I ребенок для выработки собственных Ед.Базисных Действий и формирования О-А должен воспринимать в качестве образцовых Действия руки окружающих его людей, без участия взрослых он не способен самостоятельно выработать собственные Действия руки разными предметами. Он должен увидеть Действия руки других людей и повторить их. Для этого во всех культурах взрослые члены общества демонстрируют (показывают, обучают) детям Действия (манипуляции) разными предметами с помощью руки.

В ситуации повторения — выработки Ед.Базисного Действия (О-А) внимание ребенка сначала полностью сосредоточено на восприятии образцовых Действий руки взрослого, а затем, когда он с помощью Реп-системы начинает повторять своей рукой воспринятое «чужое» Действие, «ядром восприятия» для Системы Восприятия ребенка становится Действие его собственной руки, в котором он повторяет Действие руки взрослого. Для успешно повторенного (сенсорно-проприоцептивно воспринятого) Действия по перемещению предмета

(предметов) формируется О-А. Так формируется О-А Действия руки и математический О-А.

*Все собственные «чистые» Действия руки ребенка в Периоде Выработки Действия (Период I) должны быть восприняты от других людей и повторены своей рукой по правилам, соответствующим восьми Базисным Действиям.*

Таким образом из поколения в поколение происходит передача Действий руки предметом от взрослых членов социума детям. Передача Действий руки взрослого, соответствующих правилам восьми Базисных Действий происходит в возрасте до 2, 5 лет, когда ребёнок ещё не познаёт предметы, но лишь вырабатывает «чистые» Действия – Ед.Базисные Действия и формирует О-А Действий.

Определим термины. Действие руки, предъявляемое ребенку в качестве образцового Действия, которое ребенок видит (наблюдает) у других людей для того, чтобы его повторить, мы будем называть МАНИПУЛЯЦИЕЙ-ШАБЛОНОМ.

Собственное Действие руки ребенка, повторяющее действие руки «другого» человека, назовем МАНИПУЛЯЦИЕЙ-ПОВТОРЕНИЕМ. Именно Манипуляцию-Повторение сенсорно и проприоцептивно воспринимает Система Восприятия и для неё формирует новый О-А Действия руки.

### **Как Действие руки матери становится собственным Действием руки ребенка**

Покажем кратко, как Действия руки матери становятся собственными Действиями ребенка. Реп-система, принадлежащая ребенку, осуществляет последовательность событий с момента восприятия Манипуляции-Шаблона до момента формирования нового О-А.

Обратимся к примеру с детской пирамидкой, когда мать показывает ребенку, КАК правильно собирать на столе пирамидку, состоящую из разных дисков. Это Манипуляция-Шаблон «Собрать пирамидку из разных дисков». Манипуляцию-Шаблон можно представить как последовательность отдельных ШАГОВ, в каждом Шаге представлено отдельное Действие руки матери, которое можно называть ЕДИНИЧНЫМ ДЕЙСТВИЕМ ШАГА Манипуляции-Шаблона (сокр. Ед.Действие Шага). Когда мать показывает ребенку, как собирать пирамидку, манипуляции ее руки по собиранию пирамидки — это последовательность Действий ЕЕ руки на предмет (Ед.Действий Шага). Она показывает манипуляцию, состоящую из Шагов, для того чтобы ребенок по-

вторил манипуляцию своей рукой той же пирамидкой. Система Восприятия ребенка воспринимает Манипуляцию-Шаблон как последовательность Действий «чужой» руки.

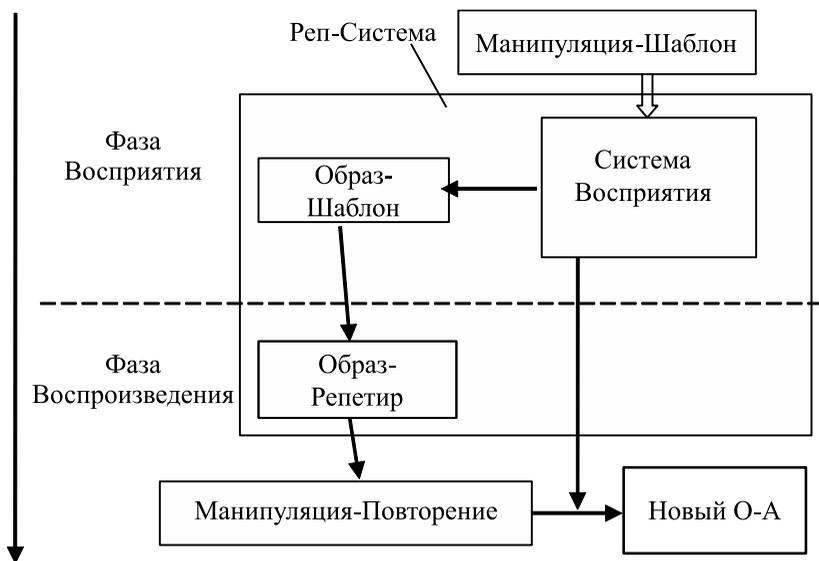
Каждое Ед.Действие Шага, которое выполняет рука матери, по сути, является выполнением принадлежащего матери Ед.Базисного Действия, который извлечен из памяти матери и стал Шагом Манипуляции-Шаблона «Собрать пирамидку из разных дисков».

Система Восприятия маленького ребенка чрезвычайно тонко воспринимает каждую особенность Шага, в каждом Шаге она различает особые характеристические «признаки» Действия, по которым определяет, к какому Базисному Типу относится данное Ед.Действие Шага руки матери в отношении предмета. После этого Система Восприятия выбирает из памяти ребенка тот конкретный О-А, ОБРАЗ которого наиболее близок (похож), подобен сенсорному Образу («картине») принятого Ед.Действия Шага. Последовательно воспринимая каждый Шаг Манипуляции-Шаблона, Система Восприятия находит сформированные ранее О-А, наиболее точно соответствующие Ед.Действию каждого Шага, и выстраивает их в той же последовательности, в которой восприняла их в Манипуляции-Шаблоне. Так в Образной Сфере ребенка происходит формирование копии Манипуляции-Шаблона, которую можно назвать ОБРАЗОМ-ШАБЛОНОМ. Это процесс трансляция кода или межличностного переноса Действия руки матери в собственный код Действия руки ребенка для данного предмета (рис.7).

Образ-Шаблон — это последовательность выбранных из памяти О-А Действий руки ребенка предметом, в ней представлена (закодирована) последовательность Действий руки матери в Манипуляции-Шаблоне. В рассматриваемом примере это Манипуляция-Шаблон «Собрать пирамидку из разных дисков». Другими словами, Образ-Шаблон есть представленная в виде последовательности О-А ребенка Манипуляция-Шаблон руки матери предметом.

Как только выполнение Манипуляции-Шаблона завершилось и Образ-Шаблон в образной Сфере ребёнка сформировался, Реп-система начинает Цикл Повторения Действия, в нём ребенок в собственной Манипуляции-Повторении пытается своей рукой повторить Манипуляцию-Шаблон в отношении того же предмета (в данном случае — пирамидки). Следует отметить, что Образ-Шаблон принадлежит сфере восприятия ребёнка. Для того, чтобы двигательная система ребёнка смогла выполнить с помощью его руки Действия, закодированные в О-А Образа-Шаблона в двигательной сфере формируется его копия — ОБРАЗ-РЕПЕТИР. Он становится составленным из О-А ПЛАНОМ выполнения Действий с помощью своей руки в МАНИПУЛЯЦИИ-ПОВТОРЕНИЕ.

Далее Двигательная система активирует О-А и АЛГОРИТМЫ О-А Образа-репетира, начинается процесс выполнения повторения Действия руки матери рукой самого ребенка. Поскольку О-А включённые в Образ-Репетир были выработаны ранее в других обстоятельствах для других предметов, их Действия неточно соответствуют данному конкретному предмету и условиям манипулирования. Поэтому при безуспешном манипулировании требуется коррекция Действий своей руки. Система Восприятия ребенка воспринимает собственное Действие руки ребенка и в случае неудачи корректирует его, после чего оптимальный вариант воспроизведения Манипуляции-Шаблона в Манипуляции-Повторение становится новым выработанным Ед.Базисным Действием и сформированным О-А. Так происходит формирование нового О-А (рис. 7).



*Рис. 7. Формирование нового Образа-Алгоритма с помощью Реп-системы*

Новый О-А вводится в систему памяти ребенка и начинает участвовать в формировании следующих более сложных О-А.

## **ГЛАВА 5.**

### **Формирование абстрактных образов и познание предметов**

#### **Происхождение абстрактных образов от Образа-Алгоритма. Образная Общеформа**

Все Образы, в том числе ОБРАЗ и АЛГОРИТМ, принадлежат Образной Сфере. О природе Образа как невидимого, идеального, «тонкого» объекта мы почти ничего не знаем.

Сформированный О-А есть двойной Образ восприятия. В отличие от объектов уровня 1 Нейрореальности каждый компонент О-А — ОБРАЗ и АЛГОРИТМ — приобретает в Образной Сфере особую динамичность свойственную Образам. Характерной является способность О-А отъединять от себя (итерировать, «изводить») «копию» ОБРАЗА О-А — «чистый» Образ, обладающий большей степенью свободы по сравнению с ОБРАЗОМ и АЛГОРИТМОМ, при этом он сохраняет особого рода неразрывную связь с О-А.

ОБРАЗ и АЛГОРИТМ, образующие О-А, непосредственно связанные с объектами внешнего мира по своей природе и происхождению есть Образы восприятия. После того, как О-А сформирован ОБРАЗ и АЛГОРИТМ утрачивают качества Образа восприятия и становятся простейшими психическими Образами. Образы, отъединенные от ОБРАЗОВ О-А, лишённые жесткой связи с АЛГОРИТМОМ О-А, это «чистые» Образы следующего уровня абстрагирования.

Рассмотрим это подробнее.

В О-А закодировано выработанное в реальных условиях конкретное Действие руки предметом. Сформированный однажды О-А есть фундаментальный Объект, принадлежащий Образной Сфере, он сохраняется неизменным в течение жизни человека. Множество О-А образует действенный фундамент, основу базового психизма человека, обусловленного объектами внешнего физического мира. Поэтому мы называем О-А **ДЕЙСТВЕННЫМ НАЧАЛОМ** человека. Сформированные в Периоде I О-А образуют своего рода фундамент или действенную «платформу» психизма субъекта, по сравнению с другими Образами в Образной Сфере они обладают ограниченными абстрактными качествами.

Благодаря образной природе О-А обладает способностью отъединять от составляющего его ОБРАЗА копию ОБРАЗА как «картину», в которой запечатлено содержание выполненного Действия руки во внешнем мире, не привязанную к АЛГОРИТМУ О-А. Образ-копия, изведенный от ОБРАЗА О-А назовем **ОБРАЗНОЙ ОБЩЕФОРМОЙ**

О-А. Каждый О-А создает Образную Общеформу О-А. Образная Общеформа, лишенная связи с АЛГОРИТМОМ (двигательной компонентой О-А), становится «чистым» Образом всей «картины» Действия руки на предмет во внешнем мире, воспринятым сенсорными органами, ориентированными на восприятие внешнего мира. Это Образ первого уровня абстрагирования от исходного О-А. Что касается АЛГОРИТМА О-А, то образующие его проприоцептивные сигналы связаны на Уровне 1 Нейрореальности с «массивной» Двигательной Системой организма (включающей костно-мышечный каркас тела). Сущность Двигательной Системы обусловлена влиянием гравитации, что разрешает АЛГОРИТМУ как Образу меньшее число «степеней свободы» (подвижность, динамику) по сравнению с ориентированным во внешний мир сенсорным, «легким» ОБРАЗОМ О-А.

Существование Образной Общеформы подтверждается тем, что взрослый человек произвольным усилием, обращаясь к какому-либо конкретному О-А, способен «увидеть» Образную Общеформу внутренним зрением в виде «картины» выполняемого Действия руки на какой-либо предмет. Каждый О-А обладает Образной Общеформой. Очевидно, что наиболее сложной Образной Общеформой обладают наиболее сложные О-А Базисного типа «Объединить» и «Разъединить».

Мы знаем, что ОБРАЗ и АЛГОРИТМ в составе О-А связаны в нем неразрывной взаимно обуславливающей связью. Их неразрывность обуславливает само существование О-А. Образная Общеформа, несмотря на ее природу «чистого» Образа и высокую степень автономии, сохраняет особую «тонкую» неразрывную связь с породившим ее ОБРАЗОМ О-А, а также О-А, это является условием существования Образной Общеформы.

Мы полагаем, что Образные Общеформы производные от О-А и Образы следующих уровней абстрагирования есть «легкие», подвижные идеальные объекты, способные к объединению по принципу подобия с помощью Силы Объединения подобных образов. Объединяясь по принципу подобия образы, в процессе восходящего абстрагирования, приобретают все более абстрактную форму, доступную нам в субъективном восприятии на нашем Внутреннем сенсорном Экране.

Мы полагаем, что чем дальше от уровня 1 Нейрореальности, тем более «тонкой» природой обладает Образ, тем более он динамичен, поэтому на высших уровнях абстрагирования присущая Образу подвижность становится его устойчивым состоянием. Образы всех уровней абстрагирования не существуют как полностью независимые объекты, они всегда связаны с удаленным его основанием — ОБРАЗОМ О-А — особой связью, обеспечивающей его существование, но не влияющей на его бытие.

## Суперобщформа

Образные Общеформы для сформированных в Периоде I О-А объединяются в группы по общему Базисному признаку. Далее происходит естественный процесс динамики трансформации образов, характерный для Образной Сферы, который можно назвать ПРОЦЕССОМ ВОСХОДЯЩЕГО АБСТРАГИРОВАНИЯ. Он состоит в том, что от Образных Общеформ, входящих в состав каждой объединенной группы, происходит абстрагирование общей для них абстрактной «картины» Действия. Например, от Образных Общеформ, образующих группу «Соединить» (в ОБРАЗАХ которых запечатлены «картины» конкретных соединяющих Действий руки на предметы в поле зрения во внешнем мире), происходит абстрагирование общей им «картины», в которой абстрактно представлено «соединяющее некоторые объекты» Действие, лишенное конкретных деталей реального Действия руки. Так для каждой группы формируется абстрактный Образ следующего, второго уровня абстрагирования, который назовем СУПЕРОБЩЕФОРМОЙ.

Всего, в соответствии с восемью Базисными Действиями, формируются восемь Суперобщформ. От них абстрагируется завершающая СВЕРХОБЩЕФОРМА. Это наиболее абстрактный объект в Образной Сфере, существующий в единственном числе.

### Формирование Образа-Алгоритма Простого Действия

В возрасте 2,5 лет выработка «чистого» Действия как способа манипулирования предметом, завершается, начинается Период II познания предметов в функциях (предметов). В это время в Образной Сфере ребёнка появляется мотивированная Потребность познания предметов, ребенок начинает с помощью О-А, познавать предметы. Он целенаправленно оперирует предметом, вырабатывая уже не манипуляцию предметом (способ Действия), как это было в Периоде I, но Действие конкретным предметом, познавая предмет в его функции (предназначении предмета), в определенных предметных условиях.

В это время Система Восприятия начинает различать в поле зрения предмет и руку, оперирующую предметом, как отдельные объекты в поле зрения. Для воспринятых в поле зрения предметов в Образной сфере субъекта формируются ОБРАЗЫ ПРЕДМЕТОВ (Образ предмета).

Для того чтобы начать познавать предметы, единичные «способы» манипулирования «Приблизить», «Удалить», «Соединить» и т. д., ранее запечатленные в О-А, начинают применяться по отношению к конкретным предметам. Вырабатываются единичные Действия в отноше-

нии к конкретным предметам по правилам Базисных Действий. При восприятии по сенсорно-проприоцептивному принципу выполняемого в поле зрения единичного Действия (О-А) по отношению к конкретному предмету формируется О-А ПРОСТОГО ДЕЙСТВИЯ.

О-А Простого Действия состоит из ОБРАЗА и АЛГОРИТМА. В ОБРАЗЕ О-А Простого Действия зрительно запечатлено выполнение в поле зрения единичного Действия на конкретный предмет в конкретных условиях. Можно сказать, что Простое Действие на предмет есть единичное конкретное Действие руки ребенка в соответствии с каким-либо из Базисных правил направленное на реальный предмет. Очевидно, что конкретное Действие рукой реальным предметом имеет ограниченное реальное содержание.

В О-А Простого Действия Образ предмета сцепляется с О-А «чистого» Действия. Так Образ предмета и единичный способ Действия (манипуляции) предметом образуют новый объект — О-А Простого Действия. Он становится механизмом единичного конкретного Действия руки ребенка на реальный предмет, выполняемого по одному из восьми правил Базисных Действий. Например, когда ребенок приближает рукой машинку к гаражу, то по правилу Базисного Действия «Приблизить» формируется О-А Простого Действия как механизм единичного Простого Действия «Придвинуть машинку к гаражу».

В начале Периода II (Периода Познания предметов) формируется множество О-А Простых Действий как «моделей» или образцовых Действий руки по отношению к данному предмету. Далее при познании какого-либо предмета О-А Простых Действий для данного предмета участвуют как элементарные Действия при выполнении Функции предметами. При познании предмета О-А Простых Действий образуют последовательность О-А Простых Действий, формирующих Функцию (Действие) предмета.

Итак, О-А Простых Действий есть механизмы единичных конкретных Действий руки на реальные предметы. С их помощью далее начинают познаваться предметы в функциях, включающих некоторое, часто огромное число единичных конкретных Действий человека. О-А Простых Действий образуют последовательность единичных Действий, составляющих функцию познаваемого впервые предмета.

Речь идет не только о Действии сугубо руки, но и о Простом Действии, включающем также двигательные «поведенческие» перемещения, в свою очередь включающие двигательную активность руки (рук) человека. Например, для того чтобы переместить предмет – соединить его с другим предметом на столе, ребенок подойти к столу, т. е. выполнить включенное в Простое Действие локомоторное перемещение к столу.

После того как Простое Действие предмета успешно выполнено, от ОБРАЗА О-А Простого Действия предмета отъединяется (итерируется) копия Образа или ОБЩЕФОРМА ПРОСТОГО ДЕЙСТВИЯ, которая становится абстрактным Образом уровня 1. Общеформа Простого Действия есть «чистый» Образ, лишенный прямой связи с О-А Простого Действия. Это самостоятельный Образ в Образной сфере субъекта, в нем запечатлена собственно «картина» выполнения данного конкретного Простого Действия в поле зрения. Далее Общеформа Простого Действия объединяется с подобными по Базисному правилу Общеформами О-А Простых Действий для других предметов, далее в процессе восходящего абстрагирования создаются абстрактные Образы Простых Действий 2 уровня абстрагирования.

Совокупность О-А Простых Действий образуют Первичный внутренний мир, состоящий из О-А Простых Действий субъекта.

### **Формирование Образа-Алгоритма Функции Предмета**

Познание предмета — это всегда процесс познания предмета в какой-либо одной из свойственных ему функций. Функцию предмета мы также называем его предназначением. Например, карандаш познается в активной функции проводить черту на бумаге, гора — в пассивной функции «на гору может взойти альпинист». Река познается в функциях (свойствах, качествах): нырять в реку, болтать в воде ногами, плыть по реке (вплавь, на лодке, на плоте, на доске), закидывать удочку, падать с высоты в виде водопада, вращать колесо мельницы, пускать волны и т. д. Под функцией предмета следует понимать формы его активности, в которых человек принимает участие с помощью собственных Действий, которые он воспринимает сенсорно и проприоцептивно. В этом состоит содержание функции предмета. Для того чтобы начался процесс познания предмета, должно быть выполнено важное условие: необходимо, чтобы человек ранее увидел, как выполняется данная функция предмета в Действии ДРУГОГО человека данным предметом. «Чужое» Действие данным предметом становится «образцом» функции, или Функцией-Шаблоном для ее повторения собственной рукой. Ребенок (и взрослый человек) не способен «придумать», «понять» возможную функцию предмета, не способен догадаться о предназначении данного предмета и начать им пользоваться. Понимание функции предмета, исходя из его формы (эффект «аффорданс»), является частным случаем познания Функции предмета [11]. Поэтому ребенок, а также взрослый человек, прежде чем начать познавать предметы, должен иметь также разнообразный опыт наблюдений выполнения функций разных предметов в деятельности другого чело-

века. Так, если ребёнок наблюдал, как другой человек забивает гвоздь молотком, то он, познавая предмет — молоток, познает его в функции «вбить гвоздь в доску». Эта функция состоит из последовательности трех Простых Действий: 1) Простое Действие «Замахнуться молотком» (О-А Простого Действия) по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)»; 2) Простое Действие «Приблизить молоток к гвоздю» (О-А Простого Действия) по правилу Базисного Действия «Приблизить»; 3) Простое Действие «Ударить молотком по шляпке гвоздя» — «Соединить». На этом простом примере видно, что функция познаваемого предмета — молотка состоит из последовательности трех выполнения О-А Простых Действий 1, 2, 3. Каждое Простое Действие функции молотка «забить гвоздь в доску» выполняется с помощью единичных О-А Простых Действий «Удалить (Отдалить)», «Приблизить», «Соединить».

Функция предмета может быть активной и пассивной. В данном примере, если одновременно с молотком познается доска в пассивной функции «быть способной к вбиванию в нее гвоздя», а также познаётся предмет — гвоздь в пассивной функции «быть вбитым в доску», то все три предмета: молоток, доска, гвоздь познаются с помощью последовательности одних и тех же трех Простых Действий: «Удалить», «Приблизить», «Соединить». Действенная формула познания молотка, доски и гвоздя: «УДА», «ПРИ», «СОЕ» или 2, 1, 3.

На данном примере показан принцип познания объектов физического мира и предметов в их активной и пассивной функции с помощью О-А и О-А Простых Действий. Так познаются как простейшие предметы, такие предметы как игла, топор, доска, кирпич и т. д., так и сложные предметы, такие как гора, шкаф, ландшафт, высотное здание, двигатель автомобиля, реактивный лайнер, океан, космические тела, электромагнитное поле и т. д. В данной работе, посвященной математическим Действиям, мы ограничимся данной информацией о познании предметов. Более подробную информацию можно получить в работах [32, 33].

Предназначение О-А и О-А Простых Действий состоит в обеспечении процесса познания объектов физического мира, которые во взаимодействии с человеком мы называем предметами. Благодаря познанию предметов человек существует в физическом мире, в социуме. При познании предмета Система Восприятия воспринимает выполнение образцовой функции выполненной другим человеком, при этом она воспринимает характеристические перемещения в каждом Простом Действии образцовой функции, определяет Базисный тип Простого Действия и находит в Первичном внутреннем мире О-А Простых Действий подобные О-А Простого Действия образцовой функции. Да-

лее она выстраивает их, формируя план, который начинает выполняться в собственном Действии своей руки. Это Действие есть ФУНКЦИЯ — ПОВТОРЕНИЕ. Система Восприятия воспринимает Функцию — Повторение сенсорно и проприоцептивно. Неточные Простые Действия подвергаются коррекции. Успешно выполненные собственные Простые Действия завершаются формированием О-А ФУНКЦИИ ПРЕДМЕТА. В общем случае О-А Функции предмета = О-А ПД 1 + О-А ПД 2 + О-А ПД 3 + О-А ПД 4 + О-А ПД 5 и т. д. (Сокращение: О-А Простого Действия — О-А ПД).

О-А Функции предмета это мозговой механизм выполнения конкретной Функции (предмета).

В ОБРАЗЕ О-А Функции предмета запечатлена сенсорно воспринятая Системой Восприятия «картина» выполнения Функции во внешнем мире, в АЛГОРИТМЕ запечатлен (двигательный «опыт»), проприоцептивная программа выполнения данного Действия (Функции). Речь идет не только о Функции сугубо руки на расстоянии вытянутой руки в поле зрения, но о Простых Действиях руки в составе Функции, смещенных с двигательным перемещением ребёнка (человека) в процессе выполнения Функции, которые входят в состав Простых Действий

После того как предмет познан, Функция предмета успешно выполнена с помощью руки и сформирован О-А Функции предмета, от ОБРАЗА О-А Функции предмета отъединяется (итерируется) ОБЩЕФОРМА ФУНКЦИИ предмета. Это психический Образ, содержащий сенсорно запечатленное выполнение Функции предмета во внешнем мире. Она лишена непосредственной прямой связи с АЛГОРИТМОМ и становится абстрактным «чистым» Образом уровня 1 абстрагирования. В Общеформе Функции предмета запечатлена собственно «картина» выполнения конкретной Функции предмета. Далее Общеформа Функции объединяется с подобными Общеформами Функций других познанных предметов, при этом формируется Первичный внутренний мир Функций предметов субъекта.

Например, при познании спортсменом-яхтсменом такого предмета, как океан в его пассивной функции «океан переплывают на яхте», в его Образной Сфере мозга формируется О-А Функции океана, в котором сенсорный ОБРАЗ путешествия на яхте через океан соединен с АЛГОРИТМОМ двигательного осуществления путешествия. После того, как путешествие завершено в Образной Сфере человека формируется О-А познанного в данной Функции океана. В О-А Функции предмета океана запечатлены знание и опыт спортсмена, КАК переплыть океан на яхте. О-А «переплыть океан на яхте» содержит огром-

ное количество О-А Простых Действий, объединенных в блоки и организованных по иерархическому принципу.

Так познаются все без исключения предметы. Для познания используется сформированные ранее О-А Простых Действий в отношении предметов, каждое из которых осуществляется по правилу одного из восьми Базисных Действий «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

## **ЧАСТЬ II.**

# **ВЫРАБАТЫВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ РУКИ ПРЕДМЕТАМИ СЧЕТА. ФОРМИРОВАНИЕ И ЗНАЧЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗА-АЛГОРИТМА**

## **ГЛАВА 1. Математические Действия и Образы-Алгоритмы**

### **Предварительные замечания**

В онтогенезе Период вырабатывания Действий (Период I) начинается в возрасте 3 месяцев и завершается в 2,5 года с появлением первых целенаправленных Действий ребенка. В следующем Периоде познания предметов (Период II) ребенок с помощью сформированных в Периоде I О-А сначала вырабатывает единичные Простые Действия и формирует О-А Простых Действий. После того как сформировано множество О-А Простых Действий ребенок с их помощью начинает познавать предметы в их функциях. Однако процесс освоения или познания «чистых» Действий руки у ребенка не закончился. В возрасте 6–7 лет ребенок с помощью выработанных в Периоде I О-А начинает обучаться первым Математическим Действиям «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Обратимся к процессу вырабатывания математических действий, которые неслучайно получили название **ДЕЙСТВИЙ**.

В социуме каждый ребенок в возрасте 6–7 лет должен научиться читать, писать и считать. Когда ребенок впервые идет в школу и знакомится с первыми математическими действиями, он начинает познавать новый вид Действий — математические Действия. Первое знакомство ребенка с математикой состоит в том, что, как и в Периоде I, он в начале обучения счету наблюдает Действия руки учителя какими-либо конкретными предметами и повторяет их своей рукой. В возрасте 6–7 лет Система Восприятия ребенка уже отчетливо воспринимает все предметы в поле зрения, участвующие в математическом Действии, их перемещении в процессе Действия.

Ребенок (человек) живет в мире окружающих его предметов. Предмет дан ребенку (человеку) прежде всего в его форме. Проявление предмета в его очевидной форме преобладает при восприятии предмета. В обычной обстановке ребенок (человек) видит не действие в отноше-

нии предмета, но предмет, воспринимается форма предмета. Поэтому при обучении первым математическим Действиям учитель специально обращает внимание ребенка не на форму предметов, но именно на ДЕЙСТВИЕ его руки, перемещающей предметы. Главным моментом обучения основам математики является необходимость смены вектора внимания ребенка с собственно формы, облика предмета на ДЕЙСТВИЕ (манипуляцию) предметом. Большинство людей, без указания на ДЕЙСТВИЕ руки, не «видит» Действий своей руки (рук) на предмет или предметы. Своей грубой сенсорной очевидностью, возможностью практического использования и контакта с ними предметы становятся главными объектами, на которые направлено естественное внимание человека, живущего в предметной среде.

Возможно, в истории человечества значимую роль сыграло появление особых людей, которые не просто видели, как к предмету прибавляется (добавляется) предмет, например, камень к камню, палка к палке при строительстве жилища, но впервые увидели сами и обратили внимание членов сообщества на ДЕЙСТВИЕ руки в отношении предмета. Так в исторической перспективе появилось представление о математическом Действии. Возможно, что вторым условием стало появление не просто человека, который впервые заметил ДЕЙСТВИЕ руки на предмет, но человека, обладающего способностью и возможностью передать понимание Действия другим членам сообщества, замороженным эзотерикой нового знания. В истории человечества во множестве объединений людей — сообществ, племен, народностей, где такой человек не появлялся, полноценная цифровая цивилизация не возникла, но возобладали лишь разнообразные временные формы предметной культуры.

Геометр, академик А. Д. Александров полагает, что основы геометрии зародились в Древнем Египте, где каждый раз после разлива Нила возникала необходимость заново вычислять площади полей.

Первое объяснение ребенку (человеку) смысла математического Действия происходит с помощью предметов. Ребенок наблюдает Действие руки учителя на реальные предметы (предметы счета) и повторяет Действия своей рукой теми же предметами, при этом он, его Система Восприятия воспринимает сенсорно (зрительно) и проприоцептивно свое Действие. Так формируются математические О-А (Мат. О-А) «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Использование реальных предметов (предметов счета) в начале обучения математике, как правило, придается мало значения, но именно манипуляции реальными целыми физическими предметами являются исходным моментом обучения математике. Это абсолютное условие выработки первых и потому основных математических Действий «Сложение»,

«Вычитание», «Умножение», «Деление». В качестве счетного материала используются предметы: счеты («костяшки счетов»), счетные палочки, кубики, шарики, пальцы рук, яблоки, камешки, орехи и т. д. Во всех случаях ребенок наблюдает и ПОВТОРЯЕТ Действие руки учителя на те же предметы.

Термин «математический» будем писать сокращенно «Мат», второе слово будем писать с заглавной буквы — Мат.Система, Мат.Действие, Мат.О-А, Мат.Общеформа и т. д.

Мы будем использовать термин «Действие руки предметом (предметами)». В нём мы обозначаем Действие руки человека в отношении предмета (предметов) как манипуляцию рукой в поле зрения по перемещению предметов, выполненное по правилу одного из четырёх Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить».

Повторение учеником, своей рукой, Действий руки на предметы другого человека (учителя) происходит так, как показано выше для вырабатывания Действий руки ребёнком в Периоде I. Повторение есть необходимое условие для вырабатывания Мат.Действий и формирования их механизмов — Мат.Образов-Алгоритмов (Мат.О-А). Манипуляция реальными предметами счета есть УСЛОВИЕ вырабатывания Мат.Действия и формирования Мат.О-А. В начале обучения математике формирование Мат.О-А происходит по сенсорно-проприоцептивному принципу О-А: сенсорный зрительный Образ восприятия выполнения-повторения учеником Мат.Действия во внешнем мире с участием реальных предметов воспринимается Системой Восприятия ученика в единстве с проприоцептивным Образом восприятия (сигналы от мышц, связок, сухожилий) при выполнении рукой данного Действия.

При обучении математике первыми, в соответствии с правилами Базисных Действий «Приблизить» и «Удалить (Отдалить)», вырабатываются Мат.Действия и формируются Мат.О-А «Сложение» и «Вычитание». Далее, в соответствии с правилами Базисных Действий «Соединить» и «Разделить» — Мат.О-А «Умножение» и «Деление».

По-видимому, в процессе исторического развития человека механизм формирования О-А Действия руки предметом предназначался только для познания окружающих предметов в их функциях, но в какой-то момент становления человеческой цивилизации О-А Действия руки «Приблизить», «Отдалить», «Соединить», «Разделить» стали использоваться также для вырабатывания Мат.Действий и формирования Мат.О-А. С этого момента появились Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», которые стали основой математики. Так появилась математика.

Для объяснения выработки Мат.Действий и формирования Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» мы используем понятия «перемещение» – перемещения отдельных объектов или групп объектов (предметов) в пространстве, однократные или повторяющиеся и т. д.

### **Общие представления об Образной Математической Системе, числе, Математическом Образе-Алгоритме**

Можно предположить, что в Образной Сфере субъекта математические вычислительные операции обеспечиваются особой системой, которую в данной работе будем называть ОБРАЗНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ (Образная Мат.Система). В состав Образной Мат. Системы входит также «математическая» часть Системы Восприятия.

Происхождение математики начинается с появления представления о числе. По мнению Э. Маха, *«прежде чем возникнет понятие о числе, должен существовать опыт, что в известном смысле равноценные объекты существуют множественно и неизменно»* [24].

При становлении математики первым шагом было появление представления о «естественном» или натуральном числе, отделенного от конкретных предметов. Представление о числе появилось из человеческой практики оперирования природными предметами, когда каждому последовательно увеличивающемуся каждый раз на «один» предмет количеству (набору, совокупности) выстроенных в ряд предметов в психологической сфере субъекта ставился в соответствие знак или число. Так в Образной Сфере субъекта появился алгоритм формирования числа. А. Д. Александров пишет: *«Но, в конце концов, сами целые числа строятся посредством алгоритма последовательного прибавления единицы: от  $n$  к  $n + 1$ »* [1]. В пользу этого положения в работе [50] приводятся данные, где показано, что за работу с символическими и несимволическими числами в мозге отвечают разные группы нейронов.

По-видимому, сначала знак указывал на конкретные предметы, от которых он произошел. Образу разных количеств конкретных предметов в психологической Образной Сфере субъекта соответствовал конкретный знак. После того как каждому знаку стали соответствовать несколько типов разных конкретных предметов (5 — палок, камней, яблок, ракушек и т. д.), Образы количеств конкретных предметов в последовательных рядах разных типов предметов сменились их обобщенным Образом. В Образной Мат.Системе появился ОБРАЗ ЧИСЛА. Символу числа (знаку) в Образе числа стали соответствовать не конкретные предметы, но абстрактные субъективные «условные единицы» или безличные абстрактные единичные объекты, лишённые при-

знаков реальных предметов. Другими словами, в Образной Сфере Образ числа это Образ абстрактных объектов, количество которых соответствует символу числа или знаку, например,  $5 \leftrightarrow (IIII)$ .

Числа в виде образов чисел не могут существовать в Образной Сфере человека «сами по себе», как статические объекты, они должны принимать участие в вычислительных операциях. С появлением образов чисел в Образной Сфере человека начинают формироваться особые нейропсихологические механизмы или системы реализации математических действий, осуществляющие выполнение вычисления Мат. Действий (например,  $5 + 3$ ,  $4 \times 3$  и т. д.), в которых участвуют образы чисел.

В самом начале обучения первым Мат. Действиям учитель показывает ученику простейшее Действие «Сложение», демонстрируя своей рукой манипуляцию приближения группы реальных предметов к другой группе. Это могут быть косточки на счетах, кубики, шарики, орехи, яблоки, кружочки, палочки и т. д. Ученик повторяет данное Действие руки учителя своей рукой. При этом его Система Восприятия одновременно зрительно воспринимает предметы, их перемещения в поле зрения и проприоцептивные сигналы от мышц своей руки, участвующей в выполнении данного Действия. Формируются зрительный Образ восприятия (ОБРАЗ) и проприоцептивный Образ восприятия (АЛГОРИТМ), вместе они образуют МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБРАЗ-АЛГОРИТМ (Мат.О-А) «Сложение». Так в соответствии сенсорно-проприоцептивным принципом О-А в начале обучения математике происходит формирование Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Система Восприятия ребенка в возрасте 6–7 лет отчетливо воспринимает во внешнем мире в поле зрения все перемещения предметов и собственно предметы как самостоятельные объекты. К этому моменту в Образной Сфере ребенка накоплено огромное количество ранее сформированных О-А Действий руки и О-А Простых Действий, которые включаются в повторение ребенком воспринятого Образа математического Действия руки учителя.

Покажем, в чем состоит отличие О-А «чистого» Действия руки и О-А Простого Действия от Мат.О-А. Главной особенностью О-А Действия руки и О-А Простых Действий всех Базисных типов (Приблизить, Удалить, Соединить и т. д.), формируемых в Периодах I и II, является то, что они вырабатываются как Действия руки, как «способы» будущего оперирования реальными предметами во внешнем мире при познании предметов в свойственных им функциях (свойствах, качествах), необходимых для выживания человека во внешнем мире. Например, карандаш в функции «рисовать», нож в функции «разрезать», топор в функции «раскалывать» и т. д. Можно сказать, что первым предназначением О-А

является их использование во внешнем мире для познания и практического использования предметов.

В начале обучения математике формирование Мат.О-А происходит по сенсорно-проприоцептивному правилу так же, как и для О-А Действий руки, О-А Простых Действий и О-А Функции предмета. Различие состоит в том, что Мат.О-А вырабатываются под влиянием сугубо «математической» Образной Мат.Системы. В Мат.О-А главное значение имеет ОБРАЗ Мат.О-А, в котором запечатлено содержание Мат.Действия), в то время как АЛГОРИТМЫ имеют второстепенное, образующее Мат.О-А значение.

А. Ю. Шварц пишет: *«Чувственное представление математического объекта должно пониматься не как «картинка» на бумаге или в сознании, а как «динамическая схема»: образ, сохраняющий информацию о пространственных характеристиках, и при этом определенным образом встроенный в практику по его использованию»* [40]. А также: *«Как будет непосредственно воспринят предложенный визуальный материал, детерминируется не объектом восприятия, а теми действиями, в которые будет автоматически включаться внешняя презентация математического объекта».*

Итак, в Мат.О-А главным является ОБРАЗ Мат. Действия, в котором запечатлено содержание (смысл) Мат.Действия. В ОБРАЗЕ Мат.О-А главным становится запечатленное перемещение объектов, оно может быть перемещением, приближающим, удаляющим (отдаляющим), соединяющим или разделяющим предметы. При этом АЛГОРИТМ в Мат.О-А благодаря связи с фундаментальной Двигательной системой обеспечивает существование и устойчивость, неизменность ОБРАЗА О-А и самого Мат.О-А.

В чем состоит значение реальных предметов для формирования Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление»?

Действие (манипуляция) реальными предметами является единственным условием и источником для вырабатывания Мат.Действий и формирования Мат.О-А. Действие руки реальным предметом и формирование Мат.О-А лежат в основе математики. Суть Мат.Действия и Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» состоит в том, что манипуляции реальными предметами с помощью руки выполняются по правилам Базисных Действий. При этом в вырабатывании Мат.Действий участвуют всего четыре Базисных Действия: Мат.Действие «Сложение» выполняется по правилу Базисного Действия «Приблизить»; Мат.Действие «Вычитание» — по правилу «Удалить (Отдалить)»; Мат.Действие «Умножение» — по правилу «Соединить»; Мат.Действие «Деление» — по правилу Базисного Действия «Разделить». В ОБРАЗАХ Мат.О-А запечатлены характерные для каждого типа Мат.Действий

формы перемещений реальных предметов в поле зрения (приближающее, удаляющее (отдаляющее), соединяющее и разделяющее перемещение) и Образы собственно предметов. В начале обучения, для того чтобы были сформированы Мат.О-А, ученику необходимы именно реальные предметы счета, оперирование которыми с помощью руки обеспечивает выполняемое Мат.Действие полноценной проприоцептивной информацией (проприоцептивными ощущениями) с формированием АЛГОРИТМА как мышечного «правила» выполнения математического Действия.

Манипуляции ученика с помощью руки в поле зрения на дистанции вытянутой руки целыми, реальными, «живыми» предметами счета, обладающими формой, весом, размером, текстурой являются главным источником проприоцептивных сигналов (ощущений) при выработке Мат.Действия.

Сформированный Мат.О-А благодаря связи АЛГОРИТМА (Мат.О-А) с Двигательной системой Мат.О-А утверждается в Образной Сфере субъекта как неизменный объект. Мат.О-А не изменяется в течение жизни человека. Множество Мат.О-А образуют фундамент, на котором утверждены четыре основных механизма Мат.Действий или Мат.Суперобщеформы «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» (см. об этом ниже). Это позволяет полагать, что Мат. О-А есть НАЧАЛА математического счетного опыта субъекта.

Несмотря на то, что Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» становятся механизмами перемещения реальных предметов (предметов счета), их предназначение, обусловленное Образной Мат. Системой (в Образной Сфере), состоит не в манипулировании рукой предметами счета, но в формировании ОБРАЗА Мат.О-А, в котором запечатлено зрительно воспринятое содержание Мат.Действия.

### **Математическая Суперобщеформа**

Ученик воспринимает и повторяет Действие руки учителя. В результате восприятия учеником собственного повторяющего Действия (манипуляции) руки предметами счета в ОБРАЗЕ каждого сформированного Мат.О-А запечатлены:

- 1) два исходных локуса в поле зрения, в которых расположены предметы счета, участвующие в Мат.Действии (например,  $3 + 6$ ), а также конечный локус как место в поле зрения, где расположены предметы, полученные в результате Мат.Действия;
- 2) реальные предметы, расположенные в локусах;

3) перемещение реальных предметов (предметов счета), характерное для данного Мат.Действия (например, для Мат.Действия «Сложение» — перемещение по правилу Базисного Действия «Приблизить»).

В начале обучения, после того как сформировано некоторое количество Мат.О-А каждого типа, происходит следующее: от каждого ОБРАЗА отъединяется (итерируется) копия ОБРАЗА (так, как это показано в Части I для Общеформ О-А, О-А Простого Действия), которая становится в Образной Сфере не связанным с АЛГОРИТМОМ (Мат.О-А), самостоятельным абстрактным Образом или МАТЕМАТИЧЕСКОЙ.ОБЩЕФОРМОЙ. Мат.Общеформа есть абстрактный Образ 1-го порядка.

Мат.Общеформы Мат.Действий одного типа объединяются, так образуются четыре группы Мат.Общеформ «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» (рис. 8). Если ОБРАЗ и АЛГОРИТМ Мат.О-А есть, по сути, ОБРАЗЫ ВОСПРИЯТИЯ, сформированные Системой Восприятия при восприятии перемещения реальных предметов счета в поле зрения, то Мат.Общеформы — это уже «чистые» ОБРАЗЫ, лишённые жёсткой связи с АЛГОРИТМОМ Мат.О-А.

Все Образы суть особые динамические Объекты, которые подчиняются «правилам поведения» Образов в Образной Сфере. Одним из них является правило или «закон восходящего абстрагирования», согласно которому от группы подобных Образов абстрагируется Образ, в котором воплощены наиболее общие признаки, характерные для всех подобных Образов данной группы. Этот процесс в данной работе получил название процесса восходящего абстрагирования Образов.

От каждой из четырех Групп Мат.Общеформ «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» в процессе восходящего абстрагирования абстрагируются объекты следующего, 2-го уровня абстрагирования. Это МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СУПЕРОБЩЕФОРМЫ (Мат.Суперобщеформа) (рис.8). Мат.Суперобщеформа есть главный математический объект в наших рассуждениях, это своего рода «движитель» Мат.Действия в Образной Мат.Системе.

В Образной Сфере для каждого типа Мат.Действия создается четыре единичных Образа — Мат.Суперобщеформы «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». В них отображены характерные для каждого Мат.Действия локусы, предметы и перемещения реальных предметов, выполненных по правилам четырех Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить». Другими словами, Мат.Суперобщеформа — это Образ второй степени абстрагирования после Мат.О-А.

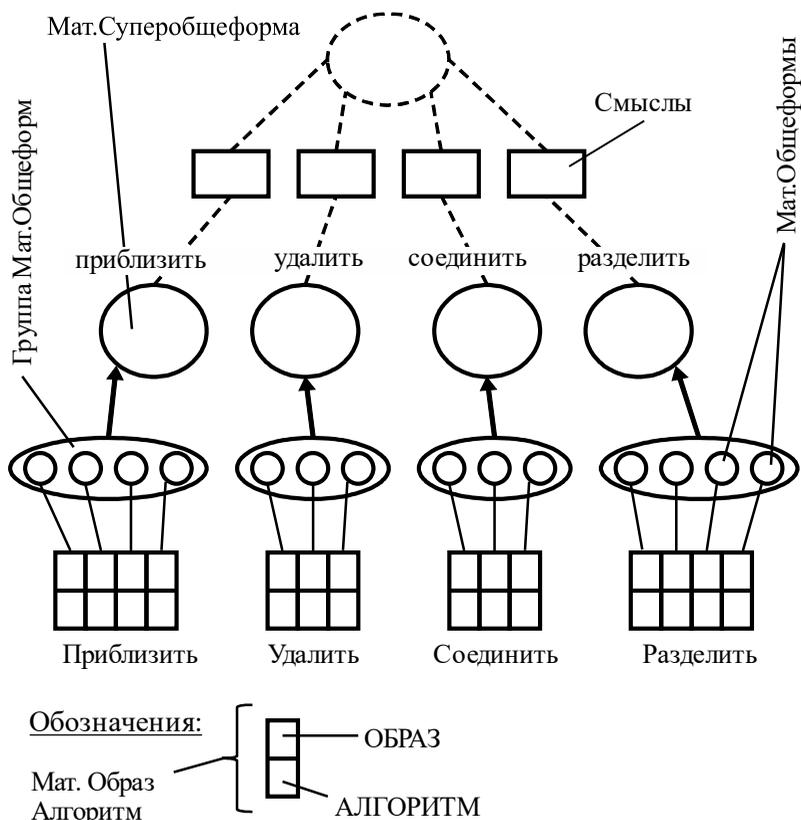


Рис. 8. Формирование Математических Суперобщформ

МАТ. СУПЕРОБЩЕФОРМА – ЭТО ОБРАЗ И СОБСТВЕННО МЕХАНИЗМ ВЫПОЛНЕНИЯ МАТ.ДЕЙСТВИЯ «СЛОЖЕНИЕ», «ВЫЧИТАНИЕ», «УМНОЖЕНИЕ», «ДЕЛЕНИЕ».

По сути, Мат.Суперобщформа как абстрактный объект (Образ), принадлежащий высшим отделам Образной Мат.Системы (Образной Сферы), представляет собой матрицу или ШАБЛОН для выполнения Мат.Действий данного типа: «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Мат.Суперобщформа осуществляет организацию (установление в позиции) и характеристическое перемещение единичных абстрактных объектов. Мат.Суперобщформа привлекается Системой Мат.Действия после преобразования чисел вычисляемого Мат.Действия. После преобразования чисел вычисляемого Мат.Действия и появления

Образов чисел 1, 2 происходит активация Мат.Суперобщеформы. Привлеченная в качестве шаблона для выполнения Мат. Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» с любыми числами она инициирует цепь событий: формирует Группы 1, 2 и активирует потенциально заложенные в ней ИСХОДНЫЕ ЛОКУСЫ 1, 2, устанавливает их в исходные позиции в пространстве. После этого она осуществляет характеристическое перемещение Группы по соответствующему данному Мат.Действию Базисному правилу «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить» и устанавливает Конечный Локус, содержащий количество единичных объектов, соответствующее результату данного Мат.Действия (см. подробно ниже).

Мат.Суперобщеформа есть Образ, который есть механизм выполнения характеристических Мат.перемещений предметов «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить». Он расположен в Образной Сфере и выполняет инструментальную функцию выполнения перемещений в Полном Мат.Действии, поэтому Мат.Суперобщеформа находится вне сферы сознания и произвольных волевых актов субъекта.

После того как Мат.Суперобщеформы сформированы, каждая из них обуславливает появление в сфере сознания субъекта особого «объекта» СМЫСЛА, в котором в максимально сжатом виде воплощено содержание Мат.Суперобщеформ и Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Смыслы Мат.Действий принадлежат сфере сознания субъекта. Субъект сознательно обращается к Смыслам. Смысл Мат.Действия представляет собой краткое содержание Мат.Суперобщеформ, это своего рода «квинтэссенция» содержания Мат.Суперобщеформ. По сути, Смысл — это «истина» или «идеал» Мат.Действия. Смыслы лишены образной природы, это особые, чрезвычайно «тонкие» субъективные образования в сфере сознания, их природа нам неизвестна. Именно их — СМЫСЛЫ (но не Мат.Суперобщеформы) — переживает, «ощущает» субъект (человек) как присутствие Мат.Действия в своем сознании, как доступность и возможность в произвольном акте осуществить требуемое в данный момент Мат.Действие. Интроспективное наблюдение показывает, что Смыслы четырех Мат.Действий (Мат.Суперобщеформ) постоянно, всегда присутствуют в сфере сознания человека, актуализируясь при произвольном запросе того или иного Смысла. В этот момент они становятся явными и доступными субъекту для произвольного волевого обращения к ним.

При восприятии субъектом записанного графически (а также в звуковой, тактильной форме) Мат.выражения (формулы), включающего Мат.Действия, при появлении в сфере сознания потребности (запроса) на вычисление происходит актуализация Смысла, после чего включается произвольный волевой акт вычисления данного Мат.Действия.

В Образной Сфере субъекта содержится фундаментальный — неизменный, основной набор Мат.О-А, сформированных в начале обучения Мат.Действиям. По сути, эти Мат.О-А есть **ДЕЙСТВЕННЫЕ НАЧАЛА** математических способностей субъекта.

Мат.Суперобщеформа, принадлежащая Образной Мат.Системе и являющаяся объектом высокой степени абстрагирования, сохраняет неизменной образующую и поддерживающую ее существование фундаментальную связь с породившими ее Мат.Общеформами, **ОБРАЗАМИ** Мат.О-А и собственно Мат.О-А. Благодаря взаимообразным неразрывным, устойчивым, гибким, динамическим связям в Образной Мат.Системе и Образной Сфере субъекта создается единая система Мат.объектов — Мат.О-А, Мат.Общеформ, Мат.Суперобщеформ. Мат.Суперобщеформами как «оперативным материалом» оперируют управляющие системы, принадлежащие Уровню 3 Нейрореальности, — Системы Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Поскольку в Образной Сфере субъекта Мат.Суперобщеформа является Образом, производным от Мат.Общеформ и **ОБРАЗОВ** Мат.О-А, имеющих зрительную сенсорную природу, человек может произвольным волевым усилием увидеть ее на Внутреннем сенсорном Экране как весьма неопределенную зрительную «картину» своей действующей руки, «складывающей», «вычитающей», «умножающей», «разделяющей» некую «группу» «предметов».

## **ГЛАВА 2. Полное математическое Действие**

### **Полное Математическое Действие и Система Вычисления Математического Действия**

В возрасте 6–7 лет ребенок, как правило, уже имеет понятие о числе, а его Образная Мат.Система способна создать Образ числа как Образ объекта, составленного из абстрактных объектов-единиц или единичных безличных абстрактных объектов, например, представить число 6 как  $\text{I I I I I I}$ . Для того чтобы начать выполнять вычисления Мат.Действий с числами, записанными в символической форме ( $4 + 9$ ;  $4 - 2$ ;  $8 \times 6$ ;  $12 : 4$  и т. д.), в начале обучения математике Образная Мат.Система:

- 1) формирует Мат.О-А и абстрактные механизмы Мат.Действий — Мат.Суперобщеформы;
- 2) формирует четыре системы, которые управляют выполнением вычисления Мат.Действий с помощью Мат.Суперобщеформ. Это Системы

вычисления Мат.Действий или СИСТЕМЫ МАТ.ДЕЙСТВИЯ (Система Мат.Действия) «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Система Мат.Действия каждого типа обеспечивает вычисление какого-либо Мат.Действия ( $4 + 9$ ;  $4 - 2$ ;  $8 \times 6$ ;  $12 : 4$  и т. д.) в процессе выполнения ПОЛНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ.

В состав Системы Мат.Действия входят:

- 1) система преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа»;
- 2) четыре Мат.Суперобщеформы «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Покажем, каким образом с помощью Системы Мат.Действия в процессе выполнения Полного Мат.Действия в Образной Мат.Системе субъекта происходит вычисление Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Оно начинается с момента появления записи Мат.Действия в числовом виде. Это может быть запись Мат.Действия (например,  $7 + 9$ ;  $25 - 8$ ;  $7 \times 8$ ;  $18 : 3$ ) на доске, бумаге. Вычисление начинается при условии, что Мат.Действие приведено к натуральному виду.

#### **А. Приведение Математического Действия к натуральному виду**

Система Мат.Действия производит вычисление Полного Мат.Действия только по отношению к натуральным числам. Поэтому, перед тем как начать вычисление Мат.Действия, субъект (человек-вычислитель) приводит Мат.Действие к «натуральному виду»: из большего числа вычитается меньшее, большее число делится на меньшее, так, как это происходит при манипулировании реальными предметами. В Мат.О-А и Мат.Суперобщеформах запечатлены манипуляции руки (рук) ученика именно реальными предметами (при этом каждый предмет воспринимается как целый предмет), поэтому при вычислении Полного Мат.Действия (в Образной Сфере) Мат.Суперобщеформа при перемещении единичных абстрактных объектов оперирует ими как образами — абстрактными эквивалентами реальных предметов.

Если Мат.Действие в пределах десятка имеет натуральный вид, то вычисление в Полном Мат.Действии начинается без промедления ( $2 + 8$ ;  $9 - 4$ ;  $14 \times 6$ ;  $9 : 3$ ).

Если в Мат.Действии большее число вычитается из меньшего или происходит деление меньшего числа на большее, то Действие приводится к натуральному виду.

В начале обучения ученика приведение к натуральному виду Мат.Действия вычитания большего числа из меньшего может произойти так, как показано Л. Е. Князевой в работе [20]: «Разберем алгебраический прием введения отрицательных чисел, он предполагает

использование некоторой конкретной задачи, при решении которой, исходя из одной формулы, рассматриваются случаи, когда вычитание на множестве положительных чисел невыполнимо. Поэтому возникает необходимость введения новых чисел — отрицательных.

Задача 1. В качестве примера взята задача из [3]:

«12. Глубина реки —  $a$  м; на дно реки поставлен шест, длина которого (от дна)  $b$  м. Найти расстояние от верхнего конца шеста до уровня воды.»

Составим формулу для решения задачи:  $b - a$ . Рассмотрим частные случаи:

а)  $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $b - a = 7 - 5 = 2$  (м) — верхний конец шеста на 2 м выше уровня воды (рис. 1);

б)  $a = 5$ ,  $b = 5$ ,  $b - a = 5 - 5 = 0$  (м) — верхний конец шеста на уровне воды. Нуль принимает новый смысл; это число, которое показывает определенное расстояние, т. е. это число, характеризующее величину;

в)  $a = 7$ ,  $b = 5$ ,  $b - a = 5 - 7$  — для учащихся запись не имеет смысла, но искомое расстояние существует и в этом случае. Как его найти? Обычно на этот вопрос учащиеся отвечают, что надо сделать вычитание  $7 - 5 = 2$  (м), или отвечают, что теперь конец шеста находится на 2 м ниже уровня воды. Учитель сообщает учащимся, что и в этом случае пользуемся формулой  $b - a$  и выполняем вычитание  $5 - 7$ , но оно совершенно противоположно действию  $7 - 5$ , и поэтому удобнее результату приписывать знак «-», т. е.  $5 - 7 = -2$ .

Так ученик в начале обучения приводит Мат. Действие  $5 - 7$  к натуральному виду  $7 - 5$  и добавляет знак «-».

Другой путь к введению правил сложения рациональных чисел реализован в работе [17]. При формулировке правил, авторы используют понятия модуля: «Чтобы сложить два числа с разными знаками, можно вычесть их модули и поставить знак числа с большим модулем». Так образуется натуральный вид Мат. Действия.

Как только Мат. Действие приобретает натуральный вид, Система Мат. Действия начинает осуществлять Полное Мат. Действие.

Аналогично при делении меньшего числа на большее с использованием знания десятичных дробей, например:  $5 : 25$ , ученик пишет 0, ... , добавляет ноль к 5, после чего Мат. Действие приобретает натуральный вид  $50 : 25$ . Как только это произошло, Система Мат. Действия начинает выполнять Полное Мат. Действие для Действия  $50 : 25$ .

При делении  $6 : 57$  Система Мат. Действия по порядку выполняет Полные Мат. Действия  $(60 : 57) + (300 : 57) + (150 : 57) \dots$  Ученик выполняет все операции преобразования Мат. Действия в натуральный вид.

## Б. Общее представление о Полном Мат.Действии

После того как числовая запись Мат.Действия представлена субъекту в графическом (слуховом, тактильном) виде на носителе (бумага, классная доска и т. д.), Система Восприятия, входящая в состав Системы Мат.Действия, воспринимает числа (знаки чисел) и знак Мат.Действия (+), (−), (×), (:). Воспринятые Образы обликов (знаков) чисел активируют Систему преобразования «Число ↔ Образ числа»; воспринятый знак Мат.Действия активирует соответствующую Мат.Суперобщформу «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Вычисление Полного Мат.Действия происходит в три этапа. Сначала Система Мат.Действия выполняет преобразование чисел из знаковой формы в Образы чисел, т. е. в безличные единичные абстрактные объекты (условные единицы), после этого она активирует соответствующую Мат.Суперобщформу как механизм выполнения характеристических перемещений абстрактных объектов по какому-либо из Базисных правил. В завершение Полного Мат.Действия она осуществляет обратное преобразование единичных абстрактных объектов в число (в знаковую форму) — результат вычисления Мат.Действия. Опишем кратко три этапа Полного Мат.Действия.

**Этап 1.** В начале выполнения вычисления Мат.Действия в Полном Мат.Действии каждое число Мат.Действия, написанного графически на доске или в тетради, теряет зрительную (слуховую, тактильную) очевидную форму символа (знака) и с помощью Системы преобразования «Число ↔ Образ числа» преобразуется в составленный из единичных абстрактных объектов Образ числа. Далее совокупность (набор) абстрактных объектов, из которых состоит Образ числа, с помощью Мат.Суперобщформы преобразуется в Образ Группы единичных абстрактных объектов. Следующее преобразование «рыхлого» набора абстрактных объектов, характерных для всех чисел, в «компактную» Группу объектов, необходимо для их участия в конкретном Полном Мат.Действии. Это этап прямого преобразования чисел (знаков) в Образы двух чисел, преобразование «вниз».

**Этап 2.** Этап перемещения абстрактных объектов. Это главный этап Полного Мат.Действия. После завершения прямого преобразования «Число → Образ числа» Система Мат.Действия обращается к Мат.Суперобщформе соответствующего типа. Привлеченная, активированная Мат.Суперобщформа содержит потенциальные «пустые» Исходные локусы 1, 2. Под влиянием Мат.Суперобщформы Образы чисел преобразуются в целые Образы — Группы, состоящие из еди-

ничных абстрактных объектов. После того как Группы сформированы, они вводятся в локусы Мат.Суперобщеформы. Это происходит в случае Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание». Если выполняются Мат.Действия «Умножение» и «Деление», то с помощью Групп формируются сложные локусы.

Далее происходят акты единичных перемещений абстрактных объектов. Для «увеличивающих» по сути Мат.Действий «Сложение» и «Умножение» это единичные перемещения по правилу Базисного Действия «Приблизить». В этом случае Точкой Отсчета, по отношению к которой оценивается тип Базисного Действия (см. рис. 3 – 5), становится «суммирующий» Конечный локус. Для «уменьшающих» по сути Мат.Действий «Вычитание» и «Деление» это единичные перемещения по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)». Для Мат.Действия «Вычитание» Точкой Отсчета (Реперной точкой) становится «уменьшаемый» локус 1, который для Мат.Действия «Вычитание» становится Конечным локусом. Что касается Мат.Действия «Деление», то для него Точкой Отсчета (Реперной точкой) становится Исходный локус 1 (делимое).

Мы видим, что психологический механизм выработки вычислений весьма сложен. Каждое Мат.Действие вырабатывается учеником как самостоятельный механизм, объяснение ученику, что «деление — это действие, обратное умножению», ничуть не помогает обучению Мат.Действию «Деление». Обучение ученика каждому Мат.Действию требует больших затрат времени и больших произвольных умственных усилий, поэтому для отработки психологического алгоритма выполнения Мат.Действий необходимы годы учебы и множество конкретных примеров.

**Этап 3.** Завершающий. Система Мат.Действия воспринимает в Конечном локусе совокупность абстрактных объектов как Группу-Результат, как результат Полного Мат.Действия. Далее вновь активируется Система преобразования «Число ↔ Образ», она осуществляет обратное преобразование, в нем Группа-Результат, составленная из единичных абстрактных объектов, преобразуется в числовую символическую форму, которая записывается учеником в графическом виде на бумаге, доске и т. д. или высказывается с помощью голоса как результат выполненного вычисления Мат.Действия (например,  $6 + 3 = 9$ ). Это этап обратного преобразования Образа числа в число (знак), преобразование «вверх».

## **В. Вычисление Полных Математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление»**

В данном разделе мы покажем подробно на примерах, каким образом с помощью Системы Мат.Действий происходит процесс вычисления Мат.Действий ( $7 + 9$ ;  $8 \times 5$  и т. д.) в процессе выполнения Полного Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Повторю, что сначала, для того чтобы начать вычисление, Мат.Действие приводится к натуральному виду. Это значит, что сложение, вычитание, умножение, деление приводятся к естественному виду, когда при вычитании происходит вычитание из большего числа меньшего, а делимое всегда больше делителя. Именно такой Образ выполнения манипуляций реальными предметами запечатлен в ОБРАЗЕ Мат.О-А. В последующих классах при обучении арифметике ученик научается вычитать из меньшего числа большее число и делить меньшее число на большее число с добавлением нуля, перемножать многозначные числа и т. д., выполняя несколько единичных Мат.Действий для получения результата. При этом на каждом этапе вычислительного процесса Мат.Действие приобретает натуральный вид, так оно может участвовать в Полном Мат.Действии.

### **1. Мат.Действие «Сложение»**

Система Мат.Действия выполняет Полное Мат.Действие «Сложение» с помощью Мат.Суперобцеформы «Сложение».

К возрасту 6-7 лет дети, как правило, имеют представление о числе.

Первой простой естественной манипуляцией сложения (складывания) предметов является манипуляция, в которой ученик рукой двигает (приближает) предмет (группу предметов) к другому предмету (группе предметов). В начале обучения при формировании Мат.О-А «Сложение» с помощью реальных предметов (предметов счета) ученик, повторяя Действие руки учителя, воспринимает собственное Действие руки (зрительно и проприоцептивно), в котором он однократно перемещает — приближает — предмет (группу предметов) к другому предмету (группе предметов). Данная манипуляция осуществляется как перемещение Группы предметов, выполняемое по правилу Базисного Действия «Приблизить». Ученик повторяет манипуляцию руки учителя, при этом Система Мат.Действия привлекает подобный (похожий) О-А «Приблизить», сформированный ранее в Периоде I (Период Выработки Действий руки). Процесс привлечения подобного О-А подробно описан в Части I, Главе 4.

Обратимся к монографии известного педагога-методиста А. С. Пчёлко «Методика преподавания арифметики в начальной школе: Пособие для учителей» [36], в которой подробно описана методика обучения математике в первом классе. Ниже приводятся фрагменты из его книги.

1. Прибавление по единице: «Прибавление по единице ведется сначала на счетах. Прибавляя на счетах шарики один за другим, учитель говорит, а дети повторяют: «Один да один будет два, два да один будет три» и т. д. Вслед за этим присчитывание по единице производится на других предметах, например, кубиках, шариках, палочках, спичках и т. д.». Мы видим, что автор однозначно признает необходимость предметов как обучающего (дидактического) материала.

2. Прибавление и отнимание по два, три, четыре...: «На этом случае сложения надо показать детям **ОСНОВНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРИЕМ**, характерный для первого десятка, который заключается в том, что **ПРИБАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ЕДИНИЦ СВОДИТСЯ К ПРИСЧИТЫВАНИЮ ПО ЕДИНИЦЕ**. Учитель откладывает на счетах 4 шарика (группа 1 – В. П.), а затем несколько поодаль 2 шарика (группа 2. – В. П.) и говорит: «Прибавим к четырем шарикам два шарика. Как это сделать? К четырем шарикам прибавим сначала один. Сколько получится?» Дети отвечают: «К четырем прибавить один получится пять шариков». «Теперь к пяти шарикам прибавим еще один шарик. Сколько получится?» Дети отвечают: «К пяти прибавить один получится шесть шариков». «Сколько шариков мы прибавили?» «Два шарика». «Значит, к четырем (группа 1. – В. П.) прибавить два (группа 2. – В. П.) получится шесть».

Также подробно изучаются вычислительные приемы прибавления  $2 + 2$ ,  $4 + 2$ ,  $6 + 2$ ,  $8 + 2$ . Упражнения на классных счетах сопровождаются сложением на кубиках, палочках, кружочках и прочем дидактическом (счетном) материале, который имеется у учащихся.

Важнейшим обстоятельством является то, что Мат. Действия «Сложение», «Вычитание» выполняются по отношению к **ГРУППАМ** предметов. Перемещаются — складываются, вычитаются — группы предметов как целые объекты. Присчитывание или отсчитывание единиц, которое автор монографии [36] называет основным вычислительным приемом, является первым, простейшим наглядным приемом вычисления, понятным ребенку в начале обучения, состоящем в перемещении не всей сразу группы предметов, но последовательно по одному предмету.

Автор пишет, что для сложения  $4 + 2$  формируются две группы, содержащие по четыре и два шарика, а затем к четырем шарикам присчитывается два раза по одному шарiku. Этот тактический прием при-

считывания по одному предмету позволяет ребенку освоить начала или простейший прием счета. Тем не менее уже в начале обучения Мат.Действию «Сложение» ребенок понимает, что складываются исходно две ГРУППЫ предметов, представленные в виде двух совокупностей предметов по четыре и два предмета (шарики на счетах, кубики и т. д.). Ученик прибавляет (складывает) предметы не по одному, но по Группам. Важнейшим движением в счете является перемещение групп. Автор подчеркивает значение Групп: «Нужно учить считать не только на перераспределении готовых групп, но и тех, которые создаются самим учеником (например, при сложении  $4 + 6$  ученик разбивает 6 на две группы по 2 и 4)» [36]. Также «надо иметь ясное представление о величине той совокупности, обозначением которой это число является» [36].

Формирование Мат.О-А «Сложение» происходит при восприятии повторяющего Действие руки учителя СВОЕГО Действия руки на предметы в поле зрения во внешнем мире. При выполнении учеником первых Мат.Действий «Сложение» с причислением по единице, когда он оперирует реальными предметами, он воспринимает зрительно и проприоцептивно выполняемое Действие его руки на предметы счета, при этом происходит формирование Мат.О-А. Формирование Мат.О-А происходит уже при первых «складывающих» предметы манипулирующих руки предметами, поскольку ребенок сразу начинает понимать суть перемещения.

Пусть исходно дано записанное в числовой форме Мат.Действие «Сложение»:  $3 + 6$ . Ученик повторяет Действие руки учителя. Сначала он устанавливает в разных местах поля зрения две исходные группы предметов: группу 1 (3 предмета) и группу 2 (6 предметов). Это реальные предметы или предметы счета — косточки на счетах, шарики, кубики, палочки, орехи и т. д.

Затем он придвигает (приближает) предметы счета из Группы 1 (число 3) по одному к Группе 2 (число 6). Его Система Восприятия воспринимает зрительный и проприоцептивный Образы восприятия данного Действия своей руки на предметы — Действия приближения к Группе 2 последовательно по одному каждого предмета, принадлежащего Группе 1. По сути, она воспринимает перемещение — причисление по одному реальному предмету как перемещение одного целого объекта — Группы 1. Таким образом в манипуляции реальными предметами формируется Мат.О-А «Сложение». Он формируется в соответствии с сенсорно-проприоцептивным Принципом О-А, общим для формирования О-А всех типов: О-А Действия руки, О-А Простых Действий и О-А Функций познаваемых предметов.

Повторю, что при выполнении первых Мат.Действий и формировании Мат.О-А «Сложение» причеситывание по единице выполняется только в начале обучения, как обучающий прием, когда к одной и той же Группе единица причеситывается несколько раз. Система Восприятия ученика, начиная с первых Мат.Действий, всегда воспринимает сложение как перемещение целой Группы по направлению К другой Группе (Группа 1 перемещается К Группе 2, которая становится Точкой Отсчета). Так, в начале обучения Действию «Сложение» на реальных предметах ученик всегда приближает (придвигает) сразу всю группу одних предметов к другой группе предметов. Например, придвигает сразу две ложки или три яблока к группе таких же предметов.

После того как в манипуляциях реальными предметами в разных примерах сформировано большое количество Мат.О-А «Сложение» и сформирована Мат.Суперобщформа «Сложение», ученик (его Система Мат.Действия) становится способен выполнить Полное Мат.Действие «Сложение» с числами.

При выполнении Полного Мат.Действия «Сложение» Система Мат.Действия на этапе 1 осуществляет преобразование «вниз» чисел 3, 6 с помощью Системы преобразования «Число ↔ Образ числа» и формирует Образы чисел. Далее, на этапе 2 она привлекает Мат.Суперобщформу «Сложение», она становится своего рода «движителем» Полного Мат.Действия: формирует Группы и исходные локусы и осуществляет перемещение Группы 1 (состоящей из абстрактных объектов) от Исходного локуса 1 по направлению К Исходному локусу 2, содержащему Группу 2.

Мат.Суперобщформа «Сложение» как механизм осуществляет собственно приближающее перемещение «Сложение» в процессе Полного Мат.Действия в виде перемещения одной группы объектов по направлению к другой группе объектов по правилу Базисного Действия «Приблизить».

При выполнении Мат.Действия «Сложение» происходит ОДНОКРАТНОЕ приближение одной Группы к другой Группе по правилу Базисного Действия «Приблизить» (заметим, что Мат. Действие «Умножение» — это многократное приближение одной Группы к другой).

Следует учитывать, что Действие причеситывания по единице (по одному единичному объекту) НЕ есть Действие «Соединить». В Части I показано, что Система Восприятия воспринимает манипуляцию руки как Действие «Приблизить», когда оно выполняется при однократном приближении руки с предметом к некоторой точке в поле зрения (см. рис. 3). В том случае, если приближение выполнено два и более раз и создается Кучка (предметов), она воспринимает его как Действие «Со-

единить». Однако в начале обучения Система Восприятия ученика воспринимает причисление предметов по единице как ОДНО, однократное Действие «Приблизить» в отношении целой Группы 1.

По мере того как ученик выполняет все новые и новые арифметические примеры на сложение с использованием реальных предметов, в его Образной Мат.Системе формируется большое количество Мат.О-А. К тому моменту обучения, когда сформировано большое число Мат.О-А и сформирована Мат.Суперобщформа, он уже не нуждается в реальных предметах, обучение на реальных предметах завершилось. Далее он обучается операциям с числами. Он вынужден обратиться к подручным реальным предметам (пальцы, камешки и т. д.), т. е. вновь обращается к Мат.О-А, когда возникают затруднения в счете. Так делают и дети, и взрослые.

При выполнении Полного Мат.Действия «Сложение» Система Восприятия (принадлежащая Системе Мат.Действия), воспринимает в процессе внутреннего восприятия приближающее перемещение Группы, происходящее уже не в поле зрения во внешнем мире, но в идеальной Образной Сфере. Покажем последовательность событий выполнения Полного Мат.Действия «Сложение», происходящих в Образной Мат.Системе начиная с момента появления записи Мат.Действия на доске, бумаге и т. д. (например,  $6 + 3$ ) в графическом виде до момента написания учеником результата данного Мат.Действия в виде числа.

### *ЭТАП 1. Подготовительный этап*

А. При появлении графической записи на бумаге, доске и т. д. выражения  $3 + 6$  Система Восприятия воспринимает выражение « $3 + 6$ », при этом активируется Система Мат.Действия «Сложение» (рис. 9).

Б. Далее Система Мат.Действия (Система преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа») выполняет преобразование чисел 3 и 6 из символической знаковой формы в Образы чисел — форму совокупности единичных абстрактных объектов для каждого числа:  $6 \rightarrow \text{I I I I I I}$ ,  $3 \rightarrow \text{I I I}$ . Это преобразование 1 подготовительного этапа (этапа подготовки перемещения Групп) — прямое преобразование каждого из двух чисел Мат.Действия в Образы чисел (преобразование «вниз»).

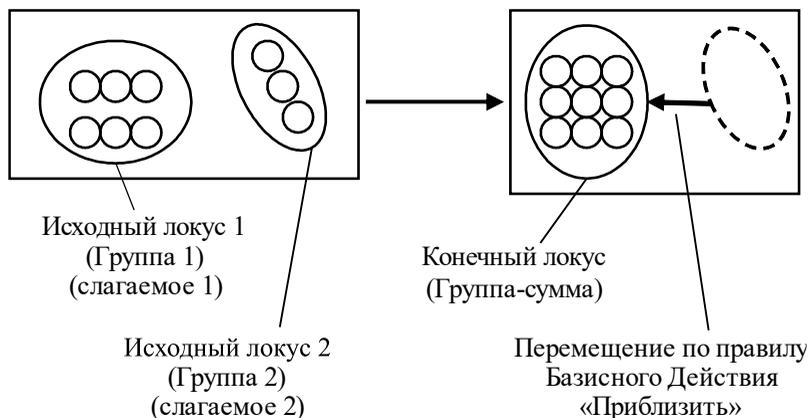
Известно, что человек, собирающийся выполнить Мат.Действие, прежде чем начать Мат.Действие, всегда рассматривает (узнает, определяет) обе его части. В этот момент, воспринимая исходные числа 3 и 6, его Система Мат.Действий преобразует (представляет) каждое число 6 и 3 в совокупности единичных объектов:  $3 + 6 \rightarrow \text{I I I}$  и  $\text{I I I I I I}$ .

*ЭТАП 2. Этап перемещения Группы по правилу  
Базисного Действия «Приблизить»*

В. Далее Система Мат.Действия привлекает Мат.Суперобщешформу, начинается осуществление ее функции. Мы называем Мат.Суперобщешформу механизмом Мат.Действия, она функционирует как матрица или шаблон Действия, содержащий исходные локусы 1, 2 для вмещения единичных абстрактных объектов, соответствующих преобразованному числам вычисляемого Мат.Действия. После того как Мат.Суперобщешформа установлена, она вводит абстрактные объекты Образов чисел в локусы. В Исходном локусе 1 формируется Группа 1, соответствующая Образу числа первого слагаемого. В Исходном локусе 2 формируется Группа 2, соответствующая Образу числа второго слагаемого. Образ числа 6 (IIIIII) → Группа 1 (IIIIII); Образ числа 3 (III) → Группа 2 (III).

Преобразование Образов чисел в Группы есть преобразование 2.

Г. После того как Группы 1, 2 сформированы и установлены в локусах, Мат.Суперобщешформа начинает перемещение — приближение Группы 1 по направлению К Группе 2. Действие-перемещение выполняется по правилу Базисного Действия «Приблизить» (рис. 9).



*Рис. 9. Сложение*

В процессе перемещения Система Восприятия, принадлежащая Системе Мат.Действия «Сложение», воспринимает его выполнение во внутреннем пространстве Образной Мат.Системы (в Образной Сфере) и контролирует перемещение.

### ЭТАП 3. Завершающий этап

Д. Группа 2 после перемещения к ней Группы 1 в Конечном локусе становится Группой-Суммой. Далее Система Мат.Действия (Система преобразования «Число ↔ Образ числа») определяет количество единичных абстрактных объектов в Группе-Сумме. Совокупность составляющих ее единичных объектов преобразуются в символьную числовую форму — число 9 ( $3 + 6 = 9$ ). Это обратное преобразование Образа числа в Число (преобразование «вверх»).

Мат.Действие  $3 + 6 = 9$  выполнено с помощью механизма Мат.Действия «Сложение» — Системы Мат.Действия, включающей Систему преобразования «Число ↔ Образ числа» и Мат.Суперобще-форму.

ГРУППА-СУММА как результат Полного Мат.Действия «Сложение» сформировалась по правилу Базисного Действия «Приблизить» при однократном приближении одного целого объекта (Группы 1), состоящего из единичных абстрактных объектов, к другому целому объекту (Группе 2).

Итак, Мат.Действие «Сложение» включает три этапа: этап прямого преобразования графически представленных чисел вычисляемого Мат.Действия в Образы чисел; этап привлечения Мат.Суперобщеформы, формирования Групп и перемещения объектов по правилу Базисного Действия «Приблизить»; этап обратного преобразования Группы-Суммы в графическое число-результат.

Все события Полного Мат.Действия контролируются Системой Восприятия, принадлежащей Системе Мат.Действия.

## 2. Мат.Действие «Вычитание»

В работе [36] педагог-методист А. С. Пчёлко о методике обучения детей Мат.Действию «Вычитание» путем отсчитывания по единице пишет: «Учитель откладывает на счетах 5 шариков и предлагает детям сосчитать их. Затем, отодвигая один шарик, говорит: «От шести отнять один — сколько останется?» Дети дают полный ответ: «От шести отнять один — останется пять». Далее отодвигается ещё один шарик, учитель говорит: «От пяти шариков отнять один шарик — сколько останется?» Дети отвечают: «От пяти шариков отнять один — останется четыре шарика». Такое отсчитывание по единице производится и на других предметах, например, палочках, кубиках. То, что учитель делает на счетах, дети проделывают на своем счетном (дидактическом) материале.

Далее, когда ученики усвоят прибавление и отнимание по единице в отдельности, нужно поупражняться в этих действиях вразбивку, про-

водя упражнения на наглядных пособиях (счетном материале), далее — на отвлеченных числах».

Автор приведенного текста указывает на необходимость использования в самом начале обучения при формировании Мат.О-А «Вычитание» реальных предметов счета (дидактического или счетного материала), таких как шарики на счетах, кубики, палочки, ложки, яблоки и т. д. Второе, на что указывает опытный педагог-методист, это общий удаляющий (отдаляющий) предметы характер манипуляции руки предметами счета при обучении Мат.Действию «Вычитание».

Формирование Мат.О-А «Вычитание» с помощью реальных предметов происходит так, как описано выше для Мат.О-А «Сложение». Как только Мат.О-А «Вычитание» для конкретных предметов сформирован, он утверждается в Образной Мат.Системе (Образной Сфере) как фундаментальный объект — МЕХАНИЗМ выполнения данного Мат.Действия «Сложение» — перемещения конкретных предметов во внешнем мире по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)».

По мере накопления Мат.О-А «Вычитание» формируется Мат.Суперобщформа «Вычитание» как абстрактный Образ — механизм (матрица, шаблон) выполнения Мат.Действия «Вычитание» по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)». После того как Мат.Суперобщформа «Вычитание» сформирована, ученик способен выполнить Мат.Действие «Вычитание» с числами, записанными в символическом виде в Полном Мат.Действии. Мат.Суперобщформа осуществляет главное событие Полного Мат.Действия «Вычитание» — перемещение — отдаление Группы 1 в направлении ОТ Группы 2.

Мат.Суперобщформа «Вычитание» осуществляет однократное удаляющее (отдаляющее) движение внутри Полного Мат.Действия «Удалить (Отдалить)» в виде перемещения одной группы объектов по направлению **ОТ** другой группы объектов по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)».

Покажем последовательность событий, происходящих в Образной Мат.Системе при выполнении субъектом Полного Мат.Действия «Вычитание» для Мат.Действия  $6 - 3$  начиная с момента появления его записи на доске, бумаге и т. д. в графическом виде до момента написания учеником результата в виде числа.

### *ЭТАП 1. Подготовительный этап*

А. При появлении графической записи на бумаге, доске и т. д. выражения  $6 - 3$  Система Восприятия воспринимает выражение « $6 - 3$ », при этом активизируется Система Мат.Действия «Вычитание» (рис. 10).

Б. Далее Система Мат.Действия (Система преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа») производит преобразование чисел 3 и 6 из символической знаковой формы в Образы чисел — форму совокупности единичных абстрактных объектов для каждого числа:  $6 \rightarrow (I I I I I)$ ,  $3 \rightarrow (I I I)$ . Это преобразование 1 подготовительного этапа (этапа подготовки перемещения Групп) — прямое преобразование каждого из двух чисел Мат.Действия в Образы чисел (преобразование «вниз»).

*ЭТАП 2. Этап перемещения Группы по правилу  
Базисного Действия «Удалить (Отдалить)»*

В. Далее Система Мат.Действия привлекает Мат.Суперобщформу, начинается осуществление ее функции. Мы называем Мат.Суперобщформу механизмом Мат.Действия, она функционирует как матрица или шаблон Действия, содержащий исходные локусы 1, 2 для вмещения единичных абстрактных объектов, соответствующих преобразованным числам вычисляемого Мат.Действия.

После того как Мат.Суперобщформа «Вычитание» установлена, она вводит единичные абстрактные объекты Образов чисел в локусы. В Исходном локусе 1 формируется Группа 1, соответствующая образу числа уменьшаемого. В Исходном локусе 2 формируется Группа 2, соответствующая образу числа вычитаемого. Образ числа 6  $(I I I I I) \rightarrow$  Группа 1  $(I I I I I)$ ; Образ числа 3  $(I I I) \rightarrow$  Группа 2  $(I I I)$ .

Мат.Суперобщформа «Вычитание» формирует Группу 2 (вычитаемое), состоящую из трех единичных абстрактных объектов в Исходном локусе 2, так что Исходный локус 2 включает три абстрактных объекта, входящих в Группу 1 (уменьшаемое), которые будут удалены (отдалены) ОТ Исходного локуса 1:  $I I I I I$  и  $I I I \rightarrow ((I I I (I I I)))$ .

Г. После того как Группы 1, 2 сформированы и установлены в Исходных локусах 1, 2, Мат.Суперобщформа начинает выполнять свою главную функцию — характеристическое отдаляющее перемещение — удаление (отдаление) Группы 2 по направлению ОТ Исходного локуса 1 (который задается Системой Мат.Действия в качестве Точки Отсчета) по направлению к некоторой произвольной точке «ближнего» внутреннего воспринимаемого пространства.

По сути, в процессе перемещения Группа 2 изымается из Группы 1 и отдаляется от нее в некоторую произвольную «ближнюю» точку пространства Образной Сферы, в которой происходит данное Мат.Действие:  $((I I I (I I I)) \rightarrow ((I I I) \text{ и } (I I I))$ .

После перемещения — отдаления — Исходный локус 1 преобразуется в Конечный локус, содержащий Группу-Результат или Группу-Разность.

Действие перемещения выполняется по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)».

### ЭТАП 3. Завершающий этап

Д. Группа 1 после перемещения по направлению ОТ нее Группы 2 становится Группой-Разностью (Группа-Результат). Далее Система Мат.Действия «Вычитание» определяет количество единичных абстрактных объектов в Группе-Разности. Совокупность составляющих ее абстрактных объектов преобразуется Системой преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа» в символьную числовую форму — число 3 ( $6 - 3 = 3$ ). Это обратное преобразование Образа числа в Число (преобразование «вверх»).

Мат.Действие  $6 - 3 = 3$  выполнено с помощью Системы Мат.Действия — механизма Полного Мат.Действия «Вычитание».

ГРУППА-Разность как результат Полного Мат.Действия «Вычитание» сформировалась при выполнении Мат.Действия по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)» при однократном отдалении Группы 2 ОТ Группы 1 (рис. 10).

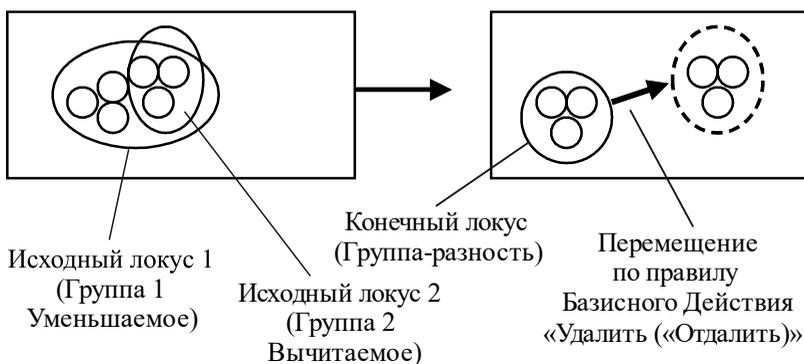


Рис. 10. Вычитание

Система Мат.Действия с помощью Системы Восприятия контролирует правильность выполнения всех событий Полного Мат.Действия  $6 - 3$ .

### 3. Мат. Действие «Умножение»

Обратимся вновь к книге педагога-методиста А. С. Пчёлко [36]. Он пишет: «Порядок изучения умножения и деления в пределе 20 может быть разный. ...надо отдать предпочтение раздельному прохождению умножения и деления».

В начале обучения Мат. Действию «Умножение» формирование Мат. О-А «Умножение» происходит с помощью реальных предметов. А. С. Пчёлко пишет: «В пределе второго десятка сложение равных слагаемых рассматривается как новое действие умножения со своим знаком и терминологией. Учащиеся фактически берут по несколько раз определенные группы предметов, например, 3 раза по 4 кубика или 2 раза по 6 палочек». Итак, мы видим, что автор (педагог-методист) придает важнейшее значение в начале обучения действию руки на реальные предметы: «В соответствии с этим термин «умножить на столько-то» заменяется на этой ступени обучения более понятным для детей и образным термином «взять по столько-то». Запись умножения  $4 \times 5 = 20$  дети в 1 классе читают так: «По 4 взять 5 раз, получится 20». Основным вычислительным приемом умножения в пределе 20 является прием набирания равных слагаемых. Умножение здесь выполняется при помощи сложения» [36].

Далее педагог-методист показывает, что нужно сделать на первом уроке для усвоения смысла умножения. Он пишет [36]:

«Учитель предлагает детям положить на парту дидактический материал (кубики, палочки, кружочки и др.), а сам, обращаясь к классным счетам, откладывает на них 2 шарика. «Сколько шариков отложено на счетах?» (2 шарика.) «Отложите вы у себя 2 палочки. Отложим еще 2 шарика (учитель рядом с первой парой шариков откладывает еще вторую пару шариков). А вы у себя отложите еще 2 палочки. Сколько всего палочек получилось?» (4.) «Как вы узнали?» (К двум прибавили 2.) «Запишем это на доске (появляется запись  $2 + 2 = 4$ ). Отложим еще пару шариков, а вы у себя отложите третью пару палочек. Сколько получилось всего шариков (палочек)? Как вы узнали это?» (К 2 прибавили 2 и еще 2. Получилось 6.)

«Запишем это:  $2 + 2 + 2 = 6$ . Отложим на счетах еще пару шариков, а вы у себя возьмите еще пару палочек». Далее учитель, откладывая по паре шариков (палочек), доводит их количество до 10. На доске появляется запись:  $2 + 2 = 4$ ,  $2+2+2 = 6$ ,  $2+2+2+2 = 8$ ,  $2+2+2+2+2 = 10$ .

Далее учитель откладывает на планку классной доски 5 раз по два кубика, говоря: «Теперь я возьму 5 раз по два кубика. Сколько кубиков получилось? Посчитаем: 2 да 2 = 4» И т. д. «Сколько кубиков я брал?» (По 2.) «Сколько раз я брал по 2 кубика?» (5 раз.) «Сколько кубиков

получилось?» (10 кубиков.) Вместо того чтобы говорить: «К двум прибавить два, прибавить еще два, прибавить еще два, прибавить еще два», говорят короче и скорее: «По два взять пять раз».

Так опытный педагог-методист показывает, как учитель должен объяснить ученикам содержание и смысл Мат. Действия «Умножение». Из его изложения следует, что первые Мат. Действия «Умножение» вырабатываются, когда ученик своей рукой повторяет Действие руки учителя. При этом ученик оперирует реальными целыми предметами (кубики, шарики, палочки и т. д.), которые абсолютно необходимы для выполнения Мат. Действия «Умножение». Предметы объединены в группы по два и более предмета в каждой группе. Такие группы многократно приближаются к некоторому общему месту в поле зрения. В результате ученик манипулирует с помощью своей руки реальными предметами в поле зрения, которые он многократно приближает к определенному месту, что соответствует правилу Базисного Действия «Соединить». Система Восприятия ученика в соответствии с принципом О-А зрительно и проприоцептивно воспринимает выполнение Мат. Действия «Умножение», которое ученик выполняет с помощью своей руки, при этом формируется Мат. О-А «Умножение».

В начале обучения, когда ученик оперирует реальными предметами, выполняя разные Мат. Действия «Умножение», происходит формирование большого числа Мат. О-А и Мат. Общеформ. Далее формируется Мат. Суперобщформа «Умножение». После того как Мат. Суперобщформа сформирована, ученик способен выполнять Мат. Действия «Умножение» в отношении чисел без привлечения реальных предметов.

Повторю, как формируются первые Мат. О-А «Умножение». Учитель показывает выполнение Мат. Действия «Умножение» с помощью реальных предметов. Сначала он пишет на доске множители и знак умножения, например,  $4 \times 5$  или  $M \times N$ . После этого ученик повторяет Действие руки учителя, его Система Восприятия зрительно воспринимает в поле зрения манипуляцию его руки, в результате которой в некотором месте поля зрения возникает группа предметов (количество предметов соответствует первому множителю), далее предметы приближаются к определенному месту поля зрения и остаются там. Вслед за этим в том же месте поля зрения вновь воспроизводится (появляется) группа с тем же количеством предметов в ней, которая вновь приближается к тому же месту, как и предыдущая. Количество таких единичных приближающих действий руки соответствует величине второго множителя. В ОБРАЗЕ Мат. О-А Система Восприятия воспринимает факт N-кратного воспроизведения (возникновения) в одном месте поля зрения одного и того количества предметов (объектов), соответствующего первому множителю. При этом их источник Систему Восприятия

«не интересуется». При восприятии Действия руки Система Восприятия «считает», сколько раз повторялось единичное приближающее перемещение руки с предметами к общему месту, которое Система Мат.Действия «Умножение» определяет как Точку Отсчета (Реперную точку) (см. Часть I, Глава 3, рис. 4). В ОБРАЗЕ Мат.О-А «Умножение» Системой Восприятия восприняты и зафиксированы следующие составляющие вырабатываемого Мат.Действия «Умножить»:

1) появление группы реальных предметов (первый множитель) в некотором месте поля зрения;

2) приближение группы к некоторому месту в поле зрения, оставление предметов в нем;

3) появление новой группы с тем же количеством предметов;

4) количество приближающих перемещений;

5) формирование кучки приближенных несколько раз предметов.

По такой схеме формируются все Мат.О-А «Умножение». Далее от ОБРАЗОВ Мат.О-А отделяются Мат.Общезформы, после чего от них абстрагируется Мат.Суперобщезформа «Умножение».

Мат.Суперобщезформа «Умножение» выполняет в Полном Мат.Действии перемещение — соединение по правилу Базисного Действия «Соединить» путем неоднократного приближения Группы 1 (первый множитель) к конечному локусу по правилу Базисного Действия «Приблизить», ведет счет количества перемещений, соответствующего Группе 2 (второму множителю).

Покажем последовательность событий, происходящих в Образной Мат.Системе, при выполнении субъектом Мат.Действия «Умножение» с момента появления записи Мат.Действия (например,  $3 \times 4$ ) на доске, бумаге и т. д. в графическом виде до момента написания учеником результата данного Мат.Действия в виде числа — результата.

### *ЭТАП 1. Подготовительный этап*

А. При появлении графической записи на бумаге, доске и т. д. выражения  $3 \times 4$  Система Восприятия воспринимает выражение « $3 \times 4$ », при этом активизируется Система Мат.Действия «Умножение».

Б. Далее Система Мат.Действия (Система преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа») производит преобразование чисел 3 и 4 из символьной знаковой формы в Образы чисел — форму совокупности единичных абстрактных объектов для каждого числа:  $4 \rightarrow \text{I I I I}$ ,  $3 \rightarrow \text{I I I}$ . Это преобразование 1 подготовительного этапа (этапа подготовки перемещения Групп) — прямое преобразование каждого из двух чисел Мат.Действия в Образы чисел (преобразование «вниз»).

## *ЭТАП 2. Этап перемещения Группы по правилу Базисного Действия «Соединить»*

В. Далее Система Мат. Действия привлекает Мат. Суперобщформу «Умножение», которая формирует сложный локус, состоящий из двух Исходных локусов 1, 2. Сначала число 3 (множитель 1) преобразуется в Образ числа  $1 \cdot 1$ , далее Мат. Суперобщформа формирует Группу 1 (множитель 1), состоящую из трех абстрактных объектов. Группа 1 входит в Исходный локус 1 (рис. 11).

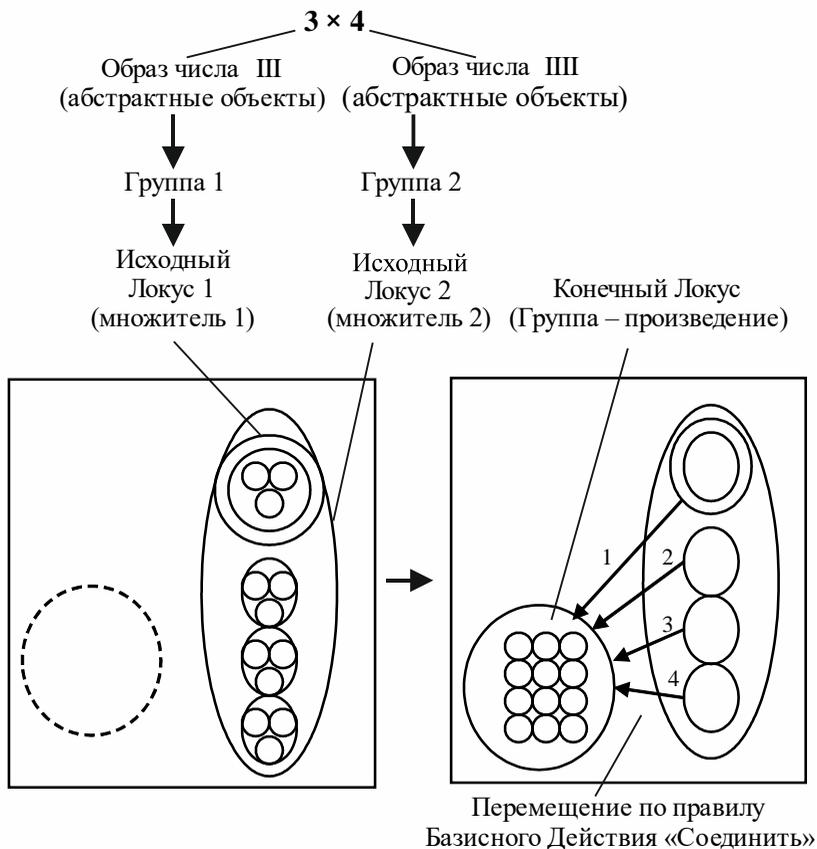
Далее число 4 (множитель 2) преобразуется в Образ числа  $4 - 1 \cdot 1$ . После этого Мат. Суперобщформа преобразует Образ числа 4 в Группу 2, состоящую из четырех единичных абстрактных объектов. Далее Группа 1 мультиплицируется (воспроизводится) соответственно количеству абстрактных объектов, входящих в Группу 2. Другими словами, Группа 1 повторяется столько раз, сколько абстрактных объектов содержит Группа 2 (Группа 2 становится «счетной группой»). Так формируется сложный Исходный локус 2. На рис. 11 видно, что Исходный локус 1 входит в состав Исходного локуса 2.

Г. После формирования и установления Исходного локуса 2 начинается перемещение Групп 1 из Исходного локуса 2 по направлению К Конечному локусу, позиция которого в «ближнем» пространстве определена Мат. Суперобщформой. Единичные перемещения Групп 1 могут происходить последовательно одно за другим, как показано на рис. 11, или одновременно «все сразу».

После приближения К Конечному локусу все единичные объекты Группы 1 остаются в нем. Далее происходит перемещение следующей Группы 1, расположенной в порядке очередности в Исходном локусе 2. В Конечном локусе происходит суммирование всех приблизившихся к нему Групп.

Каждое единичное перемещение выполняется по правилу Базисного Действия «Приблизить». Все в целом перемещения происходят по правилу Базисного Действия «Соединить». Мат. Суперобщформа выполняет акты перемещения до исчерпания Групп 1 в Исходном локусе 2.

Весь процесс повторяющихся актов перемещения выполняется в соответствии с правилом Базисного Действия «Соединить», для которого характерно многократное приближение объектов к общему месту в пространстве с формированием Группы (Кучки). После завершения всех перемещений в Конечном локусе образуется Группарезультат или Группа-Произведение, состоящая из единичных абстрактных объектов.



*Рис. 11 Умножение*

Система Восприятия воспринимает каждое единичное перемещение Группы 1 в пространстве Образной Мат.Системы и контролирует точность его выполнения. Повторим, что единичное Действие — перемещение — выполняется по правилу Базисного Действия «Приблизить». Общее Действие — перемещение всех Групп 1 — выполняется по правилу Базисного Действия «Соединить».

### *ЭТАП 3. Завершающий этап*

Д. Далее Система Мат.Действия «Умножение» определяет количество единичных объектов в Группе-Произведении. Совокупность

составляющих ее единичных объектов преобразуются Системой преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа» в символьную числовую форму — число 12 ( $3 \times 4 = 12$ ). Это обратное преобразование Образа Группы абстрактных объектов в число (преобразование «вверх»).

ГРУППА-ПРОИЗВЕДЕНИЕ как результат выполнения Полного Мат.Действия «Умножение» сформировалась при выполнении перемещений по правилу Базисного Действия «Соединить» при неоднократном приближении одного целого объекта (Группы 1), состоящей из единичных объектов, к Конечному локусу, в котором завершаются единичные перемещения — приближения и суммируются единичные абстрактные объекты.

Система Мат.Действия с помощью Системы Восприятия контролирует правильность выполнения всех событий Полного Мат.Действия  $3 \times 4$ .

#### 4. Мат.Действие «Деление»

Существует два вида деления: деление на равные части и деление по содержанию. В начале обучения деление на равные части понятнее ученику, в нем общее количество предметов (делимое) распределяется по одному в локусы (места), количество которых соответствует делителю. Приведем другой пример деления по содержанию: известна общая сумма денег и стоимость одного предмета. Нужно определить, сколько предметов можно купить на данную сумму. В обоих случаях учитель показывает ученику, как он, перемещая рукой предметы, выполняет Мат. Действие «Деление». Рассмотрим прием деления на равные части.

Вновь обратимся к книге педагога-методиста А. С. Пчёлко [36]: «Основной прием деления на равные части состоит в том, что из группы предметов, которые надо разделить, берется количество предметов, равное числу частей, чтобы в каждой части получилось по одному предмету, по единице. Затем из оставшейся группы снова берется столько предметов, чтобы в каждой части получилось еще по одному предмету. Так поступают до тех пор, пока не будут исчерпаны все предметы данной группы... Нужно требовать, чтобы ученики на первых порах пример  $18 : 2$  читали так: «Восемнадцать разделить на две равные части, получится по девяти».

Для нас указания опытного педагога-методиста по обучению Мат.Действию «Деление» важны тем, что он вновь указывает на абсолютную необходимость использования реальных предметов для обучения, он перечисляет предметы счета, а также указывает на характерное перемещение предметов при выполнении Действия, когда предметы удаляются (отдаляются) от общей Группы, например книги, кото-

рые расставляются по полкам, карандаши, яблоки, орехи, шарики, которые разделяются, веревка для разрезания, листы бумаги, которые раздаются, жидкость, которую разливают по емкостям.

А. С. Пчёлко пишет: *«Первые шаги в изучении деления. На стол ставится 6 кубиков». Сколько кубиков поставлено? Как разделить их на 2 равные части? Взять 2 кубика и разделить их на две равные части, получится в каждой части по одному кубику. Потом взять еще 2 кубика и разделить их на 2 равные части, получится по одному кубику. Дальше взять последние два кубика и разделить их на две равные части; придется еще по одному кубику. Значит, если 6 кубиков разделить на две равные части, то по сколько кубиков будет в каждой части? 6 листов бумаги разделили поровну между двумя учениками. По сколько листов досталось каждому? 6 разделить пополам — сколько будет? 6 литров молока разлили поровну в 2 бидона. Сколько литров налито в каждый бидон? Как это узнать?» (6 надо разделить на 2 равные части — получится 3.)».*

При выработывании с помощью реальных предметов первых Мат. Действий и формировании первых Мат. О-А «Деление» (например,  $6 : 3$ , когда кучка из шести предметов распределяется по трем кучкам) Система Восприятия ученика, повторяющего Действие руки учителя, сначала зрительно воспринимает в определенном локусе (месте) поля зрения исходную группу (кучку), состоящую из шести реальных предметов (предметы счета), соответствующую делимому. С началом манипуляции ученика, разделяющего рукой кучку (предметов), предметы счета, входящие в состав исходной группы (кучки), начинают перемещаться, отдаваясь по одному в три места в поле зрения на расстоянии вытянутой руки. В этих местах предмет оставляется. Единичное перемещение — удаление (отдаление) предметов по одному от общей группы (кучки), состоящей из шести предметов, повторяется три раза до ее исчерпания. Мат. Действие «Деление» группы (кучки) реальных предметов выполняется в соответствии с правилом Базисного Действия «Разделить» (см. часть I, глава 3, рис. 5). После завершения Действия Система Восприятия определяет в качестве результата количество предметов в любом из мест, куда перемещались предметы.

Для множества Мат. О-А, сформированных в начале обучения Мат. Действию «Деление» с помощью реальных предметов, формируется Мат. Суперобщесформа «Деление». С момента формирования Мат. Суперобщесформы потребность в обучении с помощью реальных предметов исчезает. Ученик становится способным выполнить Мат. Действия «Деление» с числами в процессе Полного Мат. Действия.

На этапе 1 Полного Мат.Действия происходит преобразование Чисел в Образы Чисел таким образом, как показано выше.

На этапе 2 Система М.Д. привлекает Мат.Суперобщформу «Деление». Формируются Исходные локусы 1, 2 и Группы 1, 2. Далее Мат.Суперобщформа начинает выполнять перемещения абстрактных объектов — многократные удаляющие (отдаляющие) перемещения абстрактных объектов ОТ общей Группы 1 (делимое) по одному предмету по направлению ОТ Исходного локуса 1 в Конечные локусы. Количество Конечных локусов соответствует количеству единичных абстрактных объектов в Группе 2 (делитель). Система Восприятия воспринимает количество единичных предметов в каждом Конечном локусе как результат Действия, как Группу-Частное. Далее, на этапе обратного преобразования Группа-Частное становится числом, которое ученик записывает в графическом виде на доске, в тетради и т. д. как результат данного Мат.Действия.

Мат. Суперобщформа «Деление» выполняет удаление (отдаление) единичных абстрактных объектов по одному ОТ Группы 1 (делимое), принадлежащей локусу 1, в несколько конечных локусов, количество которых соответствует Группе 2 (делитель). Единичные акты отдаления повторяются до полного исчерпания Группы 1 (Делимое). Количество единичных абстрактных объектов в Конечном локусе есть Группа-результат или Группа-Частное Мат.Действия «Деление».

Покажем подробно на примере  $6 : 3$  последовательность событий, происходящих при вычислении субъектом Мат.Действия «Деление» в процессе Полного Мат.Действия с момента появления записи Мат.Действия (например,  $6 : 3$ ) на доске, бумаге и т. д. до момента написания учеником результата данного Мат.Действия в виде числа 2.

### *ЭТАП 1. Подготовительный этап*

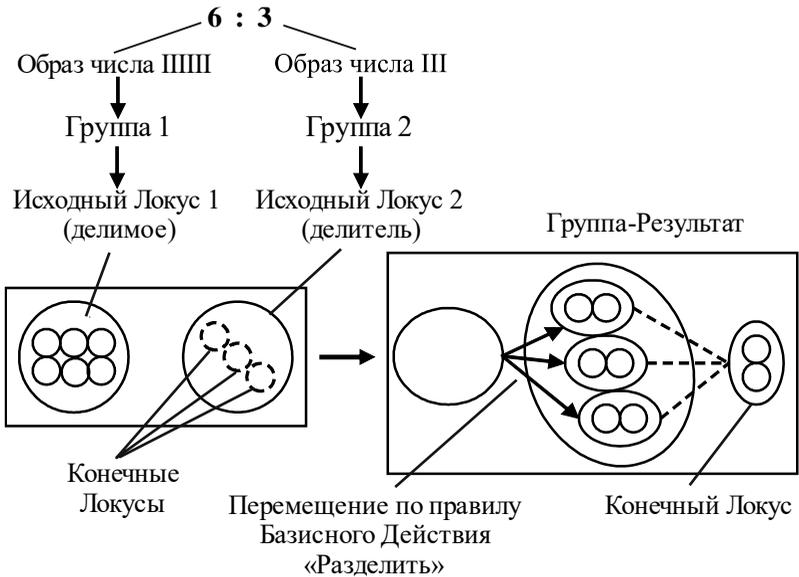
А. При появлении графической записи на бумаге, доске и т. д. выражения  $6 — 3$  Система Восприятия воспринимает выражение « $6 : 3$ », при этом активируется Система Мат.Действия «Деление».

Б. Далее Система Мат.Действия (Система преобразования «Число ↔ Образ числа») производит преобразование чисел 6 и 3 из символической знаковой формы в Образы чисел — форму совокупности единичных абстрактных объектов для каждого числа:  $6 \rightarrow \text{I I I I I I}$ ,  $3 \rightarrow \text{I I I}$ . Это преобразование 1 подготовительного этапа (этапа подготовки перемещения Групп) — прямое преобразование каждого из двух чисел Мат.Действия в Образы чисел (преобразование «вниз»).

*ЭТАП 2. Этап перемещения Группы по правилу  
Базисного Действия «Разделить»*

В. Далее Система Мат.Действия привлекает Мат.Суперобщформу «Деление» для осуществления ее функции. Под ее влиянием происходит преобразование образов чисел, представляющих собой наборы единичных абстрактных объектов в оформленные целые Группы (соответствующие числам), предназначенные для участия в данном Полном Мат.Действии. Сначала Система Мат.Действия определяет количество единичных абстрактных объектов в Образах чисел, а затем преобразует совокупность единичных объектов в Группу, как в единый Образ всей совокупности. В данном примере это Группы 1, 2 по шесть и три объекта в каждой. Это преобразование 2 подготовительного этапа.

Далее Мат.Суперобщформа формирует Исходный локус 1 (делимое) и Исходный локус 2 (делитель). Мат.Суперобщформа формирует в составе Исходного локуса 2 Конечные локусы, их количество определено количеством абстрактных объектов в Группе 2 (рис. 12).



*Рис. 12. Деление*

Г. После того как Исходные локусы 1, 2 и Конечные локусы определены и установлены, Мат.Суперобщформа начинает процесс переме-

щения абстрактных объектов по направлению ОТ Группы 1 к Конечным локусам, входящим в Исходный локус 2. Она выполняет отдаляющие перемещения абстрактных объектов из Группы 1 по одному объекту в каждый Конечный локус. Она повторяет единичные перемещения в Конечные локусы по одному единичному объекту до полного исчерпания Группы 1. После завершения перемещений она определяет количество единичных объектов в одном из Конечных локусов как Группу-Результат или Группу-Частное данного Мат.Действия  $6 : 3 = 2$ .

Каждое единичное перемещение, удаляющее абстрактный объект по направлению ОТ Исходного локуса 1, выполняется по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)». Общее Действие многократного перемещения — отдаления единичных объектов от Группы 1 — выполняется по правилу Базисного Действия «Разделить». Напомним (см. Часть I, Глава 3), что в соответствии с Базисным правилом «Разделить» Кучка предметов разделяется в процессе неоднократного удаления (отдаления) предметов ОТ кучки по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)».

### *ЭТАП 3. Завершающий этап*

Д. Далее Система Мат.Действия определяет количество единичных объектов в Группе-Частном. Совокупность составляющих ее единичных абстрактных объектов преобразуется Системой преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа» в символьную числовую форму — число 2 ( $6 : 3 = 2$ ). Это обратное преобразование Образа числа в число (преобразование «вверх»).

ГРУППА-ЧАСТНОЕ сформирована как результат Мат.Действия «Деление» при выполнении Полного Мат.Действия «Деление» по правилу Базисного Действия «Разделить».

Система Мат.Действия с помощью Системы Восприятия контролирует правильность выполнения всех событий Полного Мат.Действия  $6 : 3$ .

Итак, Мат.Суперобщеформа перемещает единичные абстрактные объекты:

- по правилу Базисного Действия «Приблизить» при выполнении Полного Мат.Действия «Сложение»;
- по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)» при выполнении Полного Мат.Действия «Вычитание»;
- по правилу Базисного Действия «Соединить» при выполнении Полного Мат.Действия «Умножение»;
- по правилу Базисного Действия «Разделить» при выполнении Полного Мат.Действия «Деление».

*! Описание завершения Полного Мат.Действия, с использованием знака Равенства ( $=$ ) см. Часть. II, Глава 4.*

В заключение данного раздела следует сказать несколько слов о единичных безличных абстрактных объектах (условных единицах, абстрактных единицах).

Представление о числе появляется у ребенка до обучения выполнению им Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Представление о числе вырабатывается при манипуляции единичными реальными предметами при их последовательном счете. Сначала совокупность конкретных предметов в пределах 10 воспринимается в сцеплении с некоторым символом (знаком). Объектами, для вырабатывания у ребенка (человека) представления о числе, становятся встречающиеся многократно последовательности (совокупности) разнообразных предметов: шишки, косточки, пальцы, веточки, кубики, шарики, палки, из которых построен забор и т. д. Разные, последовательно расположенные, предметы в их совокупности при многократном восприятии, в сцеплении с символом (знаком) в Образной Сфере субъекта теряют физические облики реальных предметов и начинают восприниматься как некие условные единицы или единичные безличные абстрактные объекты. Внешний воспринимаемый субъектом символ (знак) в сцеплении с Образом совокупности соответствующих символу единичных абстрактных объектов становится воспринимаемым субъектом числом (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и т. д.).

*М. Клайн пишет: «Один из выдающихся специалистов по основаниям математики Анджей Мостовски на конгрессе, состоявшемся в Польше в 1953 г., заявил: Единственная непротиворечивая точка зрения, согласующаяся не только со здравым смыслом, но и с математической традицией, сводится, по существу, к допущению того, что источник и высший смысл понятия числа (не только натурального, но и вещественного) лежит в опыте и практической применимости» [19].*

Для каждого числа (знака) в Образной сфере формируется Образ числа как целая последовательность-совокупность единичных безличных абстрактных объектов (условных единиц). При выполнении Мат.Действий числа, представленные графически на доске, бумаге и т. д. (а также в звуковом или тактильном виде), преобразуются в Образной Мат.Системе с помощью Системы преобразования «Число ↔ Образ числа» в Образы чисел — соответствующие наборы единичных абстрактных безличных объектов. Другими словами, число, записанное в графическом виде или произнесенное голосом, после того

как оно становится объектом внимания человека, преобразуется в Образ числа, представленный в Образной Мат.Системе соответствующим количеством безличных единичных абстрактных объектов. Каждый единичный абстрактный объект (условная единица) — это единица счета. Евклид в «Началах» (книги VII–X) утверждает, что «Число есть совокупность единиц» [18].

Мат.Суперобщеформы, сформированные на основе Мат.О-А в Полном Мат.Действии оперируют единичными абстрактными объектами. Происхождение единичных абстрактных объектов обусловлено реальными физическими предметами, которые исходно, при выработывании представления о числе, служили предметами счета. Таким образом, организованные в последовательности объекты физического мира в форме числа (чисел), войдя в состав Мат.Действия, например,  $4+7$ ;  $8\times 9$  и т. д., преобразуются в мозге человека в абстрактные объекты, которые Мат.Суперобщеформа перемещает по правилу Базисного Действия. По завершении перемещения абстрактные объекты вновь преобразуются в число как результат вычисления Мат.Действия.

### **Г. Вычисление Мат.Действий с многозначными числами при многократном обращении к Полным Математическим Действиям**

Вычисление Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» с дву- и многозначными числами происходит в несколько этапов. Количество этапов зависит от чисел, участвующих в Мат.Действии. На каждом этапе выполняется какое-либо одно Полное Мат.Действие «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Последовательность этапов вычисления Мат.Действия, образованная Полными Мат.Действиями разного типа, образует оригинальную структуру (формулу), характерную для данного Мат.Действия. Это прежде всего относится к Мат.Действиям «Умножение» и «Деление». Появление (вычисление) числа — результата вычисления Мат.Действия происходит в результате выполнения некоторого количества Полных Мат.Действий, которое можно назвать вычислительным циклом Мат.Действия. Покажем это на конкретных примерах. Условные обозначения: Мат.Суперобщеформа — Мат.СО; Полное Мат.Действие — ПМД. «Сложение» — 1, «Вычитание» — 2, «Умножение» — 3, «Деление» — 4.

Математическое Действие «**Сложение**»: 1324 + 1897

$$\begin{array}{r} 1324 \\ + 1897 \\ \hline 3221 \end{array}$$

Таблица 1. — Сложение

Цикл	ПМД	Полное Математическое Действие	Мат.СО
1	1	$4 + 7 = 1\underline{1} \rightarrow 1$ «в уме»	1
2	2	$2 + 1$ «в уме» = 3	1
	3	$3 + 9 = 1\underline{2} \rightarrow 1$ «в уме»	1
3	4	$3 + 1$ «в уме» = 4	1
	5	$4 + 8 = 1\underline{2} \rightarrow 1$ «в уме»	1
4	6	$1 + 1$ «в уме» = 2	1
	7	$2 + 1 = \underline{3}$	1

Количество Полных Математических Действий — 7.

Вычислительная формула — 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Количество вычислительных циклов — 4.

Математическое Действие «**Вычитание**»: 364–179

$$\begin{array}{r} \_364 \\ - 179 \\ \hline \underline{185} \end{array}$$

Таблица 2. — Вычитание

Цикл	ПМД	Этапы вычисления	Мат.СО
1	1	$4 + 10 = 14$	1
	2	$14 - 9 = \underline{5}$	2
2	3	$6 - 1 = 5 \rightarrow 1$ «в уме»	2
	4	$5 + 10 = 15$	1
	5	$15 - 7 = 8$	2
3	6	$3 - 1$ «в уме» = 2	2
	7	$2 - 1 = 1$	2

Количество Полных Математических Действий — 7.

Вычислительная формула — 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2.  
 Количество вычислительных циклов — 3.

*Примеры:*

$$1) 57 - 29 = 28$$

Количество Полных Математических Действий — 4.  
 Вычислительная формула — 1, 2, 2, 2.  
 Количество вычислительных циклов — 2.

$$2) 4738 - 2389 = 2349$$

Количество Полных Математических Действий — 8.  
 Вычислительная формула — 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2.  
 Количество вычислительных циклов — 4.

Математическое Действие «*Умножение*»:  $26 \times 43$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 43 \\ \hline 78 \\ \underline{104} \\ 1118 \end{array}$$

Таблица 3. — Умножение

Цикл	ПМД	Полное Математическое Действие	Мат.СО
1	1	$3 \times 6 = \underline{18} \rightarrow 1$ «в уме»	3
2	2	$3 \times 2 = 6$	3
	3	$6 + 1$ «в уме» = <u>7</u>	1
3	4	$4 \times 6 = \underline{24} \rightarrow 2$ «в уме»	3
4	5	$4 \times 2 = 8$	3
	6	$8 + 2$ «в уме» = <u>10</u>	1
5	7	$7 + 4 = \underline{11} \rightarrow 1$ «в уме»	1
6	8	$10 + 1$ «в уме» = <u>11</u>	1

Количество Полных Математических Действий — 8.  
 Вычислительная формула — 3, 3, 1, 3, 3, 1, 1, 1.  
 Количество вычислительных циклов — 6.

*Пример:*

$$235 \times 378 = 88\ 830$$

Количество Полных Математических Действий — 22.  
 Вычислительная формула —  
 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 3, 3, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.  
 Количество вычислительных циклов — 13.

Математическое Действие «Деление»:  $507 : 13$

$$\begin{array}{r}
 507 \overline{)13} \\
 \underline{39} \phantom{0} \\
 117 \\
 \underline{117} \\
 0
 \end{array}$$

Таблица 4. — Деление

Цикл	№ п/п	Полное Математическое Действие	Мат.СО
1	1	$50 : 13 = \underline{3}..$	4
2	2	$13 \times 3 = 39$	3
	3	$50 - 39 = 11$	2
		сносим 7	
	4	$117 : 13 = \underline{9}$	4
	5	$117 - 117 = 0$	2

Количество Полных Математических Действий — 5.  
 Вычислительная формула — 4, 3, 2, 4, 2.  
 Количество вычислительных циклов — 2.

*Пример:*

$$32340 : 132 = 245$$

Количество Полных Математических Действий — 15.  
 Вычислительная формула — 4, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 2, 2, 2, 4.  
 Количество вычислительных циклов — 8.

Полные Мат.Действия являются главной единичной вычислительной операцией при вычислении Мат.Действий «Сложение», Вычитание», «Умножение», «Деление» с дву- и многозначными числами. При вычислении Мат.Действия с дву- и многозначными числами операции Полными Мат.Действиями выполняются множество раз («количество Полных Мат.Действий»). Поэтому в начале обучения математике важнейшее значение для ученика имеет выработка и доведение до автоматизма выполнения всего алгоритма каждого типа Полного

Мат.Действия, событий всех трех его этапов. Этому посвящены годы обучения ученика в начальных классах.

В следующих классах школы высокий уровень развития Системы М.Д. ученика позволяет освоить логарифмирование и возведение в степень как Мат.Действие «Умножение» и извлечение из корня как Мат.Действие «Деление».

### **ГЛАВА 3. Физическое явление и математическая формула физического явления**

#### **Выделение во внешнем мире физического явления.**

#### **Формирование математической формулы для описания явления физического мира**

Следует отметить, что Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание» применимы к описанию события, касающегося сближающих или отдаляющих перемещений отдельных, самостоятельных объектов или физических явлений. В Мат.Действиях «Умножение» и «Деление» отображены отношения двух параметров, принадлежащих одному физическому явлению.

В первых Мат.формулах, включающих Мат.Действия, описывались наиболее простые физические явления, проявления которых доступны для наблюдения. Человек на протяжении всей истории выделял в окружающей природе наиболее очевидные физические явления как фрагменты реальности, затем определял, какие факторы или параметры образуют данное явление (например, «быстрота» перемещения, количество шагов на определенном расстоянии, длительность пребывания в пути и т. д.). В явлении он определял очевидные отношения параметров в виде очевидных соотношений или эмпирической формулы. Такие формулы находили подтверждение в практической жизни. Так, наблюдая явления перемещения человека, телеги, лодки и т. д. в окружающем мире, человек выделил три основные составляющие этого явления: путь, скорость (быстрота) и время перемещения. С появлением Мат.Действий оказалось, что для описания отношений этих параметров можно использовать Мат.Действия «Умножение» и «Деление». Очевидная зависимость длины пройденного пути от быстроты и времени перемещения с появлением представления о четырех Мат.Действиях получила выражение в виде Мат. формулы  $s = v \times t$ . Возможно, эта формула стала одной из первых формул, представленной Мат.Действиями. Эта формула зависимости между параметрами «пройденный путь», «быстрота перемещения» и «время в пути» ока-

зывается верна, если скорость и время поставить в отношении умножения. Очевидно, что если данная формула, состоящая из одного Мат. Действия «Умножение» и трех параметров (путь, скорость, время), верна для описания простого физического явления перемещения объекта в пространстве, то для описания других явлений физического мира будут верны формулы, включающие другие физические параметры и другое количество параметров.

Назовем сущности, образующие какое-либо реальное явление физического мира, наблюдаемое человеком, «параметрами» физического явления.

Формула  $Q = I^2 \times R \times T$  — закон Джоуля — Ленца: количество теплоты, выделяемое в единицу времени в рассматриваемом участке цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивлению участка.

$F = q_1 \times q_2 / r^2$  — закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, пропорциональна их величинам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Она является силой притяжения, если знаки зарядов разные, и силой отталкивания, если знаки одинаковы;

$F = m_1 \times m_2 / r^2$  — сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками с массами  $m_1$  и  $m_2$ , действующая вдоль соединяющей их прямой, пропорциональная массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния.

$E = m \times v^2 / 2$  — кинетическая энергия тела.

$p = m \times v$  — импульс тела. В классической механике импульс тела равен произведению массы этого тела и его скорости.

$P = F / S$  — давление силы ( $S$  — площадь поверхности, на которую действует сила  $F$ ).

$H = 2\sigma / (\rho g r)$  — высота подъема жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотностью  $\rho$ . Коэффициент поверхностного натяжения — физическая величина, численно равная силе поверхностного натяжения, которая действует на линию разрыва единичной длины.

$R = g \times l / s$  — сопротивление проводника ( $g$  — удельное электрическое сопротивление материала, из которого сделан проводник;  $l$  — его длина;  $S$  — площадь поперечного сечения). И т. д.

Физические явления обусловлены объектами физического мира, которые для человека становятся познанными предметами. В процессе исторического развития человек приобрел способность не только познавать предметы в их функциях и действовать ими (с помощью Дей-

ствия руки предметами), но и познавать явления физического мира, обусловленные предметами. Познание предметов в их функциях с формированием О-А Функций предметов дало возможность человеку выделять (узнавать) целостные физические явления (феномены) физического мира, обусловленные предметами, определять составляющие их параметры, отношения параметров и выработать Мат.формулу явления, используя представление о Мат.Действиях.

Можно предположить, что способность человека узнавать физические явления как ПРОЯВЛЕНИЯ познанных предметов, выделяя наиболее очевидный параметр физического явления (например, пройденный телом путь или льющуюся из трубы воду и т. д.), обусловлена присутствием в Образной Сфере субъекта Механизмов Базисных Действий, в которых в высшей абстрактной форме запечатлено одно из Базисных Действий в отношении некоего виртуального («подразумеваемого») предмета. Трудно представить, что Механизмы Базисных Действий, находясь в высших отделах мозга, остаются бездейственными в общем восприятии субъектом объектов физического мира. Следует предположить, что они влияют на восприятие человеком перемещений предметов в окружающем мире. По-видимому, они, как наиболее общие правила или «архетипы» Действий руки, определяют наше восприятие проявлений внешнего мира, направляют внимание субъекта на феномены и явления внешнего мира, выделяют (определяют) параметры того или иного физического явления. Мы структурируем внешний мир благодаря присутствию в нас Базисных Действий как «предустановленных структур». М. Клайн пишет: *«Наш разум, наделенный предустановленными структурами (по терминологии Канта «интуитивными суждениями») пространства и времени, организует чувственные восприятия в соответствии с тем, что диктуют присущие ему врожденные структуры»* [19].

Возможно, присутствием Базисных Действий в Образной Сфере или на Уровне 2 Нейрореальности (см. Часть I, Глава 1) субъекта можно объяснить его способность устанавливать физические явления как «чудо», о котором пишет Е. Вигнер: *«Это чудо можно сравнить еще с двумя чудесами: существованием законов природы и способностью человеческого мышления раскрывать их»* [8].

Н. Бурбаки пишет: *«Определенные аспекты реальности как будто бы в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм [абстрактных математических форм]»* [5].

Пребывая в физическом мире, наблюдательный человек замечал наиболее очевидные проявления целостных физических явлений, выделял параметры явлений. Он определял отношения параметров явле-

ний (например, отношения скорости и времени прохождения пути) и был способен составить хотя бы в словесной форме эмпирическую формулу отношений параметров. Например, люди знали, что расстояние, на которое летит стрела, тем больше, чем длиннее и чем более упругий лук, чем сильнее оттягивалась тетива лука.

Для составления формулы сначала какой-либо феномен физического мира выделяется наблюдательным человеком из общего потока явлений как самостоятельная целая завершенная физическая реальность, например, истечение воды из трубы, подъем жидкости в капилляре. В явлении определялись, выделялись образующие его параметры как «сущности» явления, например, быстрота перемещения, дистанция, время, длина трубы, плотность вещества, фактор трения и т. д. С появлением представления о числе были введены конкретные меры каждого параметра (сантиметр, аршин, локоть, литр, пинта, фунт, килограмм и т. д.) и количество меры (1 метр, 5 граммов, 100 паскалей и т. д.). Когда явление стало описываться с помощью Мат. Действий в виде Мат. формулы, величина (количество) меры в виде числа вводилось в Мат. формулу для вычисления искомого параметра.

Е. Вигнер пишет: *«Выяснение того, какие условия влияют на данное явление, а какие — нет, составляет существенную часть любого предварительного экспериментального исследования. Выбирать явления, которые зависят от относительно небольшого числа легко реализуемых и воспроизводимых условий, — дело искусств и изобретательности экспериментатора. Если бы не было явлений, зависящих только от небольшого контролируемого набора условий, физика была бы невозможна»* [8].

В. И. Вернадский пишет: *«Вовсе не очевидно, что «законы природы» должны существовать; возможность их существования куда менее очевидна, чем способность человека обнаруживать такие законы»* [7]. Э. Шрёдингер в книге «Что такое жизнь с точки зрения физики» [43] говорит, что *«сущность этой способности человека [познавать] лежит, возможно, за пределами человеческого понимания»* [8].

При анализе физического явления определялось, какие параметры способствуют данному явлению, т. е. обладают усиливающими, конструктивными качествами, а какие обладают деструктивными качествами, уменьшающими данное явление. Так, для феномена протекания жидкости по трубе количество протекающей жидкости увеличивалось с увеличением площади поперечного сечения (диаметра) трубы и давления воды в трубе и уменьшалось с увеличением длины трубы. От-

ношения параметров для разных явлений выражаются в виде эмпирической Мат.формулы с помощью Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Точная формула явления устанавливается тогда, когда оно начинает пониматься во всей полноте и во всех параметрах его проявления. Тогда в процессе практического испытания данного явления его параметры устанавливаются в совершенных отношениях в виде точной Мат.формулы.

*Е. Вигнер пишет: «Тем не менее, нужно подчеркнуть, что математическая формулировка результатов наблюдений физика, часто довольно грубых, приводит в неправдоподобно многочисленных случаях к удивительно точному описанию большого класса явлений. Это обстоятельство показывает, что математический язык следует рассматривать как нечто большее, чем просто язык, на котором мы должны говорить; оно показывает, что математика на самом деле является правильным (подходящим) языком» [8].*

Например, определяя сложное физическое явление загрязнения атмосферы токсичными загрязняющими веществами, определяя количество выброшенных вредных веществ в единицу времени и концентрацию их на определенной территории, исследователь-эколог учитывает большое количество параметров: высоту и диаметр трубы, выбрасывающей дымовые газы, скорость, с которой газоздушная смесь выходит из трубы, температуру газоздушной смеси, агрегатное состояние выбрасываемых ингредиентов, количественно-качественный состав выбросов, размер территории, на которой рассчитывается загрязнение, розу ветров и множество других параметров. Для этих параметров сначала составляется эмпирическая формула, а затем, после верификации, точная формула данного физического явления.

При рассмотрении какого-либо физического явления человек определяет, в каком отношении находятся образующие его параметры. Так, в явлении перемещения тела в пространстве при определении расстояния, которое проходит движущееся тело, параметры скорость и время должны находиться в соотношении, выражаемом Мат.Действием «Умножение», но не «Сложение». Аналогично в явлении протекания жидкости по трубе параметры площади поперечного сечения (диаметра) трубы и давления воды в ней находятся в отношении «Умножение». Хотя здравый смысл подсказывает, что если время и скорость, давление и диаметр трубы способствуют прохождению расстояния в пространстве или прохождению воды по трубе, то их можно было бы поставить в Мат.отношение «Сложение», однако опыт показывает, что отношение между ними есть Мат.отношение «Умножение». Отношение «Умноже-

ние» выбирается потому, что оба параметра, во-первых, принадлежат одному явлению и генуинно сцеплены друг с другом. Во-вторых, их влияние на явление однонаправленно, конструктивно, оба они при возрастании их величин «усиливают» явление. При вычислении Мат.Действия «Умножение» для указанных параметров, взятых как множители, собственно физическое явление играет роль Действия «Соединить», в котором в общую «кучку» = явление соединяются разные, взаимно нераздельные, однонаправленные по влиянию, конструктивные параметры скорость и время, давление и площадь сечения трубы. Далее мы вернемся к этому вопросу.

Минимальное физическое явление включает три параметра. Параметр, благодаря которому физическое явление замечено наблюдателем, выделено им первым из совокупности скрытых параметров, можно полагать определяющим данное явление параметром. Это ОПРЕДЕЛЯЮЩИЙ ПАРАМЕТР физического явления. Два других, менее явных параметров являются образующими данное явление параметрами. Это ОБРАЗУЮЩИЕ ПАРАМЕТРЫ физического явления. Образующие параметры находятся в отношении «Умножение».

Е. Вигнер пишет: *«Когда физик обнаруживает взаимосвязь между двумя физическими величинами, которая напоминает связь, хорошо известную из математики, он немедленно приходит к заключению, что найденная им связь тождественна связи, рассмотренной в математике, просто потому, что он не знает никакой другой»* [8].

Можно отметить, что большое число Мат.формул физических явлений включает всего три параметра:  $E = m \times v^2 / 2$ ;  $Q = I^2 \times R$ ;  $p = m \times v$ ;  $U = I \times R$ ;  $A = N \times t$ ;  $h = 2\sigma / r \times g$ ;  $F = \sigma \times l$  и т. д.

Выявление определяющего параметра физического явления не обязательно ведет к установлению явления, оно может лишь указывать на его присутствие. Многие, возможно, большинство явлений в физическом мире, замеченных человеком, не поддаются выделению, установлению в своей полноте, поскольку многие параметры явлений скрыты от нас, обусловленные не познанными нами физическими объектами. Нам открыты в проявлениях параметры лишь наиболее близких нашей природе физических явлений, доступных нашим сенсорным возможностям. Можно предположить, что их выявление происходит благодаря присутствию в нас Базисных Действий, выработанных в процессе исторического развития Действий руки человека на предметы окружающего мира.

Определяющие параметры определяют собственно содержание физического явления. Так, в физическом явлении «прохождение воды по

трубе» определяющим параметром становится изливающаяся из трубы вода, которая становится для данного явления определяющим параметром «количество протекающей по трубе воды в течение некоторого времени». После этого человек выделяет предметную систему «труба — вода» и отмечает, что количество воды зависит от двух параметров (факторов): площади поперечного сечения (диаметра) трубы и силы (скорости), с которой вода протекает по трубе. Эти три параметра исчерпывают факт зависимости количества протекающей по трубе воды от давления подачи воды и площади поперечного сечения (диаметра) трубы. Если явление протекания воды по трубе рассматривать в более широком контексте с учетом длины трубы, то длина трубы, от которой зависит сопротивление току воды, становилась образующим параметром, влияние которого было разнонаправленно (противоположно) по сравнению с влиянием параметров диаметра трубы и давления воды в трубе. В этом случае длина трубы входила в состав знаменателя Мат.формулы.

Энергия, теплота, работа, сила и т. д. проявляются наиболее явно в Действиях (функциях) предметов и поэтому становятся наиболее доступными в своих проявлениях для восприятия наблюдательного человека, в то время как электрический ток, мощность, сопротивление, диаметр, давление и т. д. не очевидны для восприятия, они не проявляются очевидным для человека способом. Поэтому сначала человек выделяет некоторое событие (факт) во внешнем мире через восприятие определяющего параметра, затем, рассматривая связанные с ним предметные обстоятельства, выделяет образующие физическое явление параметры. Физические явления проявляются ЯВНО через определяющие параметры. Простые физические явления включают три параметра, поэтому множество первоначально открытых физических явлений определены в их формулах, включающих три параметра (переменные).

Первые открытые физические явления включали минимальное для физического явления количество параметров — три (параметра). Для них были определены Мат.формулы, в которых определяющий параметр вычислялся с помощью Мат.Действия «Умножение» двух образующих параметров.

Чем более полно какое-либо физическое явление выделено как факт физической реальности, чем более полно оно определено в своих границах, чем более оно сложно, тем большим количеством параметров оно должно быть представлено познающему явление человеку. Тем не менее, какое бы количество параметров ни содержало физическое явление, установленная и проверенная Мат.формула данного яв-

ления будет описывать физическую реальность так же верно, как минимальная Мат.формула, включающая три параметра.

До некоторого момента в истории человек удовлетворялся эмпирическим (практическим, бытовым) знанием явлений физического мира. Так, для удовлетворения практических нужд ему хватало знания о том, что чем больше диаметр трубы и сила, с которой движется вода (например, при падении с некоторой высоты), тем больше воды протекает по водоводу. Однако в какой-то момент этого знания стало недостаточно. Можно предположить условную ситуацию, когда потребовалось использовать физическое явление в разных ситуациях для удовлетворения разных конкретных потребностей человека. Потребовалось количественно определить интересующий человека параметр явления, вычислить Мат.формулу явления, составленную из Мат.Действий. Например, в засушливых местах, где воды не хватало, появилась необходимость дозировать воду. Таких ситуаций становилось все больше. К этому моменту появилось представление о ЧИСЛЕ и о Мат.Действиях «Сложение», «Вычитание» «Умножение», «Деление».

В определенное время (возможно, XV–XVII вв.) появился гениальный человек, который сделал принципиально важное открытие: он применил понимание практической сущности (содержания, смысла) Мат.Действий к физическим явлениям. Пришло понимание того, что Мат.Действие способно отобразить сущность (смысл) физического явления (см. табл. 5). Приблизительно до начала XVII в. математика считалась наукой о числах, величинах, геометрических фигурах. Областью ее применения были торговля, счет, астрономия, землемерные работы. В качестве примера можно привести вышедшую в 1490 году в Лейпциге книгу Иоанна Видмана «Быстрый и приятый счёт для всех торговцев».

Понимание практического содержания Мат.Действия, распространявшееся ранее на реальные предметы, которыми манипулировал человек в торговле, строительстве и т. д., было перенесено на физические явления и построение Мат.формулы явления. В таблице 5 показано, чем отличается практическая счетная сущность и физическая сущность Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Появилась математическая физика как «применение математики к физическим задачам. В XVIII в. математическая физика начала развиваться при изучении колебаний струн, стержней, маятников, вояпросов, связанных с акустикой, гидродинамикой и т. д. [53].

Появилось понимание физической сущности (смысла) Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Человек оказался способным определить факторы (параметры), способствующие наблюдаемому им явлению или умаляющие его, установил их меры и

применил Мат.Действия «Умножение» и «Деление» к описанию отношений параметров. Он определил Мат.формулу, придал конкретные числовые величины мерам и вычислил конкретное значение искомого параметра физического явления.

Таблица 5. — Сущность Мат.Действия

<b>Практическая счетная сущность (смысл) Мат.Действия</b>	<b>Физическая сущность (смысл) Мат.Действия</b>
Практическая счетная сущность (смысл) Мат.Действия «Сложение» состоит в том, чтобы из двух групп предметов создать одну большую общую группу предметов и определить количество предметов в ней	«Сложение» состоит в перемещении — сближении двух самостоятельных объектов одной физической природы
Практическая счетная сущность (смысл) Мат.Действия «Вычитание» состоит в том, чтобы одну группу предметов вычленил из другой группы и определить, сколько предметов осталось в прежней группе	«Вычитание» состоит в перемещении — отдалении двух самостоятельных объектов одной физической природы
Практическая счетная сущность (смысл) Мат.Действия «Умножение» состоит в том, чтобы из неопределенного количества неорганизованных предметов одним и тем же способом создать организованную Кучку предметов, количество предметов в которой известно	«Умножение» состоит в едином однонаправленном влиянии двух образующих параметров разной физической природы на обусловленное ими физическое явление
Практическая счетная сущность (смысл) Мат.Действия «Деление» состоит в том, чтобы исходную Кучку организованных предметов, количество которых известно, равномерно распределить по некоторому количеству конечных Кучек и определить, сколько предметов содержит каждая конечная Кучка	«Деление» состоит в определении влияния каждого параметра на единичные проявления физического явления

Оказалось, что Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», которые при обучении математике выработывались с помощью Действий руки на предметы и использовались для практических целей в торговле, военном деле, строительстве, можно было успешно применить для выражения (описания) физического явления в виде Мат.формулы, для нахождения величины искомого параметра при вычислении Мат.Действий, образующих Мат.формулу. Математика стала работать для описания явлений физического мира.

При формировании простой или сложной Мат.формулы, верно отображающей некоторый фрагмент физического мира в успешном

результате ее вычисления, соответствующем ожидаемому, мы убеждаемся, что математика успешно РАБОТАЕТ благодаря выработыванию с помощью Действия руки на реальные предметы в начале обучения математике основных Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», формированию Мат.О-А и Мат.Суперобщепформ.

Что касается Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание», то они применимы не к параметрам одного физического явления, но к двум самостоятельным физическим явлениям. Далее это будет показано подробно.

### **Значение представления об Образе-Алгоритме для Полного познания фрагмента физического мира**

Знание человека об окружающем его мире представлено в виде знания доступных ему фрагментов физического бытия. Каждый фрагмент познанного физического мира представлен в виде познанных предметов и познанных физических явлений, которые обусловлены функциональной активностью предметов. Формой познания предмета является О-А Функции предмета, в которой предмет познан. Одной из форм познания физического явления есть его представление в виде Мат.формулы. Л. Е. Князева пишет: *«Математика описывает внешний мир в той мере, в какой он известен человеку»* [19]. К.А. Рыбников в книге «Введение в методологию математики» (1979) пишет: *«математическое рассмотрение процессов, исследуемых другими науками, начинается с выявления первичных абстракций относительно изучаемых объектов и связей между ними»*.

Предметами мы называем объекты физического мира (Континуума), с которым человек вступает во взаимодействие, в отличие от физических объектов, остающихся вне контакта с человеком и потому остающихся неизвестными. Прежде чем познается физическое явление, должны быть познаны предметы, обуславливающие данное явление. Предназначение О-А Действий руки, формируемых в возрасте до 2,5 лет, и далее О-А Простых Действий состоит в создании единичных Действий руки человека на отдельные конкретные предметы. В процессе познания какого-либо предмета О-А Простых Действий для данного предмета выстраиваются в последовательность, образующую познаваемую Функцию предмета [29, 32–34]. В результате выполненной Функции предмета, когда предмет успешно познан в данной Функции, формируется О-А Функции предмета. Он представлен последовательностью (суммой) О-А Простых Действий. Так происходит познание всех реальных предметов с помощью руки. О-А Функции предмета является не

только механизмом выполнения Функции предмета, но и единичным знанием о предмете, о той Функции, которую способен выполнить предмет, для которой он предназначен.

Предметы познаются в активных и пассивных функциях. Так швейная игла познается в активной функции «шить иглой», гора познается в ее пассивной функции «взбираться на гору», тропинка в лесу познаётся в пассивной функции «бежать по тропинке».

Физические явления познаются в виде словесного описания физического явления, совершенное познание человеком физического явления выражаются в виде Мат.формулы. Физическое явление, как часть познанного фрагмента бытия физического мира, обусловлено предметами, предварительно познанными человеком, оно обусловлено функциями или функциональной активностью познанных субъектом предметов.

Значение представления об О-А состоит в том, что Полное знание субъекта о фрагменте физического мира представлено О-А Функции тех познанных им предметов, которые образуют (обуславливают) явление. Мат.формула, которой тот же субъект описывает физическое явление включает Мат.Действия, механизмами которых стали Мат.О-А выработанные им в начале обучения математике.

Физическое явление, выделенное человеком при наблюдении событий внешнего мира, может быть описано Мат.Действиями «Сложение» и «Вычитание», если оно образовано сближением или удалением (отдалением) объектов, обладающих одной физической природой.

Физическое явление выделяется, открывается наблюдательным человеком во внешнем мире благодаря восприятию наиболее явного, очевидного проявления его параметра. Далее выделяются все доступные восприятию (наблюдению) параметры данного явления, а также предметы, благодаря которым явление существует в физическом мире. Например, материальными носителями физического явления «протекание воды по трубе» являются предметы — вода и труба.

Открыть явление в его очевидном параметре — истечение воды из трубы (водовода) — возможно только после того, как человек познал предметы — воду и трубу (водовод). Труба (водовод) познана как круглый в сечении, металлический предмет определенного диаметра, по которому течет вода. Параметр, обусловленный трубой, есть диаметр трубы (водовода). Познанный ранее предмет — вода — познана в функции «протекать по трубе», «оказывать давление», обусловленный водой параметр — давление или «сила» воды. Оба параметра однонаправленным влиянием образуют данное явление. Далее отношения параметров выражаются в виде Мат.отношения «Умножение», оно определяет Мат.формулу  $Q = S \times P$ .

Физическое явление «движение планет по эллиптическим орбитам» открыто после того, как были познаны небесные тела, составляющие Солнечную систему.

Также, для того чтобы определить параметры физического явления раскачивания маятника и составить его Мат.формулу, необходимо познать разные виды маятников в их функции «раскачиваться при подвешивании относительно некоторой точки».

В Образной Сфере человека О-А Функций познанных предметов, образующих физическое явление, и Мат.формула, описывающая отношение параметров физического явления, представляют собой исчерпывающее знание о физическом явлении, как о фрагменте физического бытия человека, позволяющее человеку использовать его в практических целях.

Итак, целостное знание человека о физическом мире представлено Полными знаниями фрагментов физического бытия как «единицами» Полного знания, в которых объединены знания о познанных в функциях предметах и явлениях, обусловленных этими предметами.

Полное знание человека о фрагменте физического мира представлено О-А Функциями тех познанных предметов, которые обусловили данное явление и Мат.формулой, составленной параметрами физического явления, отношения между которыми выражены в Мат.Действиях, механизмами которых стали Мат.О-А.

Поэтому О-А: О-А «чистых» Действий руки, О-А Простых Действий и О-А Функций предметов, а также Мат.О-А как механизмы Действий руки человека на предметы во внешнем мире являются основой полного знания человека о физическом мире, данном человеку в отдельных его фрагментах.

Физический мир для человека представлен как целостная совокупность познанных предметов (ими становятся познанные объекты Континуума) и обусловленных ими физических явлений.

### **Вычисление математических формул и выражений**

Итак, если какое-либо физическое явление определено во всех естественных обстоятельствах его существования, установлены образующие его предметы и параметры, отношения между параметрами, меры параметров (километр, час, скорость, км/ч, ватт, паскаль), то данное физическое явление может быть выражено в виде формулы  $s=v \times t$ .

Параметр: Пройденное расстояние.

Мера параметра: Километр, метр, аршин, миля и т. д.

Величина параметра: 3 метра, 56 дюймов, 30 аршин, 4 мили и т. д.

Мат.формула есть статическое отображение отношений параметров некоторого физического явления. Иногда говорят, что Мат.формула — это высказывание физического явления. С помощью Мат.формулы может быть определено конкретное числовое значение искомого параметра. Для вычисления необходимо придать параметрам конкретные числовые значения. Предназначение формулы состоит в вычислении определенного значения (величины) искомого параметра, для этого меры всех параметров, входящих в состав Мат.формулы, выражаются количественно в универсальном для всех параметров виде — в виде чисел. Только после того, как меры разных параметров физического явления выражены в конкретных числовых величинах (в числах), Мат.Действия, составляющие Мат.формулу, могут быть вычислены и Мат.формула может «работать» для вычисления величины искомого параметра.

Введем представление о МАТ.ОБЪЕКТАХ и МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПАРЕ А и В.

В каждом Мат.Действии участвует пара объектов или два объекта А и В ( $A + B$ ,  $A - B$ ,  $A \times B$ ,  $A : B$ ). Назовем их МАТ.ОБЪЕКТАМИ А и В (или Объектами Мат.Действия А и В). Пара Мат.Объектов А и В образует МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ПАРУ А и В. Мат.Объектами А и В могут быть числа, а также простые и сложные Мат.выражения.

В математике в Мат.Действиях «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» Мат.Объекты А и В во всех Мат.парах представляют собой целые объекты или Целостности. Они полагаются в качестве целых (неделимых) объектов, таких, какими были предметы или Группы предметов, с помощью которых вырабатывались первые Мат.-Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» при обучении ученика математике. Не может быть  $2\frac{1}{2}$  или  $6,37$  Мат.Объекта А или В. Часть (фрагмент) воспринимаемого субъектом реального объекта Система Восприятия (как часть Образной Мат.Системы) воспринимает как целый объект. Если к  $2$  и  $\frac{1}{2}$  яблокам приблизить  $\frac{3}{7}$  яблока, Система Восприятия воспринимает их как  $3$  предмета (яблока) +  $1$  предмет (яблоко).

Е. Вигнер пишет: «...Нет сомнений в том, что понятия элементарной математики, в особенности элементарной геометрии, были сформулированы для описания предметов окружающего мира... Таким же образом правила операций с парами чисел, очевидно, построены так, что приводят к тем же результатам, что и операции с дробями, причем правила для дробей мы учим без ссылки на «пары чисел». «Свои понятия математики выбирают не из-за их простоты — даже последовательности пар чисел далеки от того, чтобы быть простей-

*шими, — а из-за удобств манипулирования с ними, четкости и ясности аргументации на языке этих понятий» [8].*

В Мат.выражениях, состоящих из большого числа Мат.Действий, представленных знаками (+), (−), (×), (:), в Мат.парах (Мат.Действиях) «Сложение» и «Вычитание» представлено сближение и удаление (отдаление) двух Цельностей как самостоятельных объектов. В Мат.Действиях «Умножение» и «Деление» Целостностями являются не самостоятельные объекты, но параметры явления взаимосвязанные в рамках явления, если речь идет о Мат.формулах.

В Мат.паре Объектами А и В могут быть отдельные числа, параметры физического явления или «параметры» абстрактного явления, лишенного физического смысла, появившегося в процессе Мат.операций со сложным Мат.выражением. В составе Мат.пары они приобретают «инструментальное» значение объекта А или В.

Практическое вычисление Мат.Действия, например,  $3+5$ ,  $7\times 5$  и т. д., выполняется как однократный акт между двумя Мат.Объектами А и В, выполненный в Полном Мат.Действии. Вычисление сложной Мат.формулы или Мат.выражения происходит после придания числовых значений Мат.Объектам А и В как последовательность актов вычисления очередных Мат.пар Объектов А и В в Полном Мат.Действии, выполняемая в соответствии с правилами вычисления математических выражений. Число-результат вычисления Мат.Действия для предыдущей Мат.пары А и В становится Объектом А следующей Мат.пары.

Усложнение математического знания и опыта конкретного человека касается только содержания Мат.Объектов А и В. Для вычисления конкретных числовых значений Мат.Действий в начале обучения математике формируются Системы Мат.Действий как механизмы их вычисления в Полном Мат.Действии. Эти механизмы остаются неизменными в течение жизни субъекта.

Мат.формулы и выражения могут содержать разное, часто очень большое количество Мат.Действий (Мат.пар). Мат.Действия (Мат.пары), в которых участвуют Мат.Объекты А и В: «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», образуют базовый действенный «каркас» сложного Мат.выражения.

### **Математическая формула (выражение) как единый паттерн абстрактных Действий руки предметом**

В каждой Мат.формуле и выражении запечатлена единая последовательность Мат.Действий, которую можно представить как последовательность абстрактных Действий руки в отношении «предмета».

Мат.формула — это статическое отображение (высказывание) структуры какого-либо физического явления. Мат.выражение отображает структуру какой-либо искусственной абстрактной Мат.сущности. Каждое Мат.Действие в составе Мат.формулы и выражения в своей основе имеет Действие руки предметами счёта (единичная манипуляция руки предметами счёта по правилу Базисного Действия). Если в Мат.формуле (выражении) заменить Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» на Базисные Действия руки предметами счёта, то мы получим Действенную формулу физического явления или Мат.выражения. Статическую репрезентацию Мат.формулы или выражения преобразованную в последовательность Действий руки на предметы, можно назвать **БАЗИСНОЙ ДЕЙСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ МАТ.ФОРМУЛЫ И МАТ.ВЫРАЖЕНИЯ**.

Покажем на нескольких примерах как происходит преобразование Мат.формул (выражений) в Действенные структуры, в которых последовательно отображены Действия руки предметами. Обозначим Мат.Действия через соответствующие Базисные Действия: Сложение — Приблизить; Умножение — Соединить 1; Возведение в степень — Соединить 2; Логарифмирование — Соединить 3; Вычитание — Удалить; Деление — Разделить 1; Извлечение корня — Разделить 2.

Для Интегрирования примем условное Базисное Действие — Объединить; для Дифференцирования — Разъединить; для Равенства — Сохранить.

Рассмотрим в действенном анализе несколько простых формул:

1)  $s = v \times t$  — Мат.формула пройденного пути.

Действенная структура Мат.формулы:  $s =$  соединить 1.

2)  $Q = I^2 \times R \times T$  — Мат.формула выделенной теплоты (закон Джоуля — Ленца).

Действенная структура Мат.формулы:  $Q =$  соединить 2 — соединить 1 — соединить 1 (СОЕ 2, СОЕ 1, СОЕ 1).

3)  $F = q_1 \times q_2 / r^2$  — Мат.формула силы взаимодействия двух точечных зарядов (закон Кулона).

Последовательность вычисления: соединить 1 ( $q_1 \times q_2$ ) → соединить 2 ( $r \times r$ ) → разделить 1 ( $q_1 \times q_2$ ) / ( $r \times r$ ).

Действенная структура Мат.формулы:  $F =$  соединить 1 — соединить 2 — разделить 1 (СОЕ 1, СОЕ 2, РАЗ).

4)  $A = m + 2 \int \sqrt{1 - (x/b)^2} dx$  — условная формула.

Последовательность вычисления: разделить 1 ( $x/b$ ) → соединить 2  $(x/b)^2$  → удалить (1 - ...) → разделить 2 ( $\sqrt{\dots}$ ) → объединить ( $\int \dots$ ) → соединить 1 ( $f \int \dots$ ) → соединить 1 ( $2 \times \dots$ ) → приблизить ( $m + \dots$ ).

Действенная структура Мат формулы: разделить 1 → соединить 2 → удалить → разделить 2 → объединить → соединить 1 → соединить 1 → приблизить (РАЗ 1, СОЕ 2, УДА, РАЗ 2, ОБЪ, СОЕ 1, СОЕ 1, ПРИ).

Мат.выражение, записанное графически на бумаге или на доске, воспринимается субъектом и переживается им как особое переживание «действия». Наблюдаемое в данный момент Мат.выражение не оставляет его равнодушным. Мат.выражение любой степени сложности во всех случаях внимательно изучается субъектом и переживается им так же, как новая картина изучается знатоком живописи. При восприятии субъектом Мат.выражения, например:  $A = m + 2 f \int \sqrt{1-(x/b)^2} dx$ , представленные в нем Мат.Действия (Мат.пары А и В) «психологически» самоощущаются субъектом как особое субъективное переживание заключенного в них абстрактного сложного собственного Действия (своей) руки. Интроспективное наблюдение показывает, что воспринятые в графическом виде Мат.выражения вызывают субъективное переживание, «чувство», особым образом ощущаются субъектом, вызывают особые эмоциональные состояния. Субъект, прежде чем начать или продолжить вычисление затрачивает некоторое время на ознакомление с внешним видом Мат.формулы (выражения), на разглядывание ее облика, ее «картины», «сюжета», знакомится с ее действительным составом. Прежде всего он постигает действенный «каркас» Мат.формулы (выражения), образованный Мат.Действиями и представленный знаками (+), (-), ( $\times$ ), (:). Очевидно, что элементы изображения Мат.выражения, в которых запечатлены Мат.Действия «Сложение» «Вычитание», «Умножение», «Деление», в первую очередь привлекают внимание воспринимающего изображение субъекта.

В работе [41] показаны паттерны движений глаз по математическим стимулам, но в литературе, посвященной окулографии (айтрекингу) (см. [57] и др.), автор данной работы не встретил исследований, в которых в качестве визуальной модели для изучения направлений взора математика (новичка и эксперта) выбрано сложное Мат.выражение. Очевидно, что подобный визуальный стимул вызывает организованную последовательность движений глаз по стимулу. Можно предположить, что в зависимости от контекста Мат.выражения субъект обращает внимание прежде всего на присутствие информативных для него Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Интроспективное наблюдение показывает, что каждое воспринятое Мат.Действие «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление»

вызывает у субъекта особое эмоциональное переживание. Причину этого можно видеть в том, что в начале обучения математике каждое вырабатывающееся Мат.Действие воспринимается учеником эмоционально, соответственно его личным особенностям, а также подразумеваемому значению или «смыслу» Мат.Действия. Это значит, что Мат.действия «Сложение» и «Умножение» воспринимаются и субъективно переживаются учеником как конструктивные создающие (усиливающие, увеличивающее, укрепляющее, восстанавливающее, поддерживающее, возвышающие) и потому эмоционально положительные Действия руки. Что касается Мат.Действий «Вычитание» и «Деление», то они воспринимаются как деструктивные — уменьшающие нечто, ослабляющие, разрушающие и потому эмоционально переживаются как отрицательные Действия. При формировании Мат.О-А в ОБРАЗЕ (Мат.О-А) каждого типа оказываются запечатлены не только сенсорные (зрительные) сигналы, но и эмоциональное состояние, обусловленное восприятием Мат.Действия. По мере взросления переживание Мат.Действия обогащается новыми ассоциациями. В Мат.Суперобщформах запечатлены общие «эмоциональные» переживания Мат.Действий, но они не представлены в сфере сознания. Следует учитывать, что Мат.Суперобщформы принадлежат Образной Сфере, это Образы-механизмы (Образы-шаблоны) для участия в Полных Мат.Действиях. Они представляют собой инструментальные объекты (механизмы) Образной Сферы, субъект не способен произвольно оперировать ими в сфере сознания. Выше мы показали (см. рис. 8), что Мат.Общформы порождают особые объекты принадлежащие сфере сознания, в них в особом виде представлены содержания Мат.Суперобщформ. Эти объекты есть СМЫСЛЫ Мат.Суперобщформ. Смысл каждой из четырех Мат.Суперобщформ «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» — это своего рода «квинтэссенции» содержания Мат.Суперобщформ. Природа Смыслов нам неизвестна. Именно их осознает, переживает субъект (человек). В самонаблюдении мы убеждаемся, что Смыслы четырех Мат.Действий (Мат.Суперобщформ) постоянно присутствуют в сфере сознания человека, актуализируясь при появлении потребности в вычислении Мат.Действия, мгновенно откликаясь на произвольный запрос субъекта.

В тот момент, когда человек (субъект) рассматривает Мат.выражение, не предназначенное для вычисления, в котором переменные выражены не в числовом, а в буквенном, символическом виде, а Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» представлены виде знаков Мат.Действий:  $(+)$ ,  $(-)$ ,  $(\times)$ ,  $(:)$ , в Образной Мат.Сфере происходит активация общей Образной Мат.Системы.

Выскажем предположение о том, каким образом происходит переживание субъектом воспринятого Мат.выражения, записанного на бумаге, доске и т. д. Можно предположить следующую последовательность событий. Субъект воспринимает графическое Мат.выражение как совокупность Мат.пар  $A+B$ ,  $A-B$ ,  $A \times B$ ,  $A : B$ . Разглядывая Мат.выражение, он переводит взгляд с одной Мат.пары на другую. При восприятии первой Мат.пары активируется Смысл данного Мат. Действия (Мат.пары), далее активируются связанная со Смыслом Мат. Суперобщформа и связанные с ней Мат.Общеформы и Мат.О-А. ОБРАЗЫ Мат.О-А наряду с сенсорными сигналами включают также «эмоциональные» переживания, которые ощущал ученик в начале обучения при выработывании Мат.О-А. Интроспективное наблюдение показывает, что специфическую особенность переживания каждого типа Мат.Действия, например переживание Мат.Действия «Сложение», эмоционально «ощущается» как «благоприятное» или «теплое», «благородное» по сравнению с Мат.Действие «Вычитание», которое переживается как дискомфортное «ощущение» утраты или потери чего-либо. Конечно, переживания ассоциативно обогащаются по мере накопления опыта учеником.

Восприятие Мат.Действия (Мат.пары) в Мат.выражении переживается как ощущение Смысла Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». В момент актуализации Смысла субъект осознаёт данное Мат.Действие как абстрактное Действие «руки» на «предмет». Последовательно переводя взгляд в рамках Мат.выражения с одной Мат.пары на другую, субъект переживает все Мат.Действия, включенные в данное Мат.выражение, как интегральное переживание Мат.выражения, как целое абстрактное Действие (абстрактную манипуляцию) «руки» «предметом».

### **Последовательность событий вычисления Математической формулы (выражения) в Образной математической Системе**

Можно предположить следующую последовательность событий в сфере сознания субъекта, когда появляется мотивированная потребность вычисления Мат.формулы.

Если нужно вычислить расход воды по диаметру трубы, подводящей к дому определенное количество воды в единицу времени под известным давлением, то Образная Мат.Система извлекает из «памяти» известную Мат.формулу  $q = \pi \times d^2 / 4 \times V$ , где  $q$  — расход воды в литрах;  $d$  — размер сечения трубы в сантиметрах;  $V$  — скорость передвижения потока, зависящая от давления в магистрали и выраженная в метрах в секунду.

В данной работе будем использовать *условную* формулу (для простоты объяснения):

$$Q = D \times P,$$

где  $Q$  — расход воды;  $D$  ( $\pi \times d^2/4$ ) — диаметр трубы;  $P(V)$  — условно давление воды в трубе.

При воспроизведении из памяти под влиянием потребности формулы, включающей Мат.Действие «Умножение», активируется Смысл «Умножение», принадлежащий Сфере сознания, он в свою очередь активирует Мат.Суперобщформу, которая обусловила данный Смысл. Активация Мат.Суперобщформы приводит к активации всего набора Мат.Общформ и исходных Мат.О-А «Умножение», от которых была абстрагирована Мат.Суперобщформа. В составе ОБРАЗОВ Мат.О-А активируются те эмоциональные переживания, которые испытывал субъект при выработывании Мат.О-А.

Одновременно Образная Мат.Система вводит в Мат.формулу исходные числовые значения параметров  $P$  и  $D$ . При появлении в Мат.Действии чисел активируется Система Мат.Действия «Умножение», которая инициирует процесс Полного Мат.Действия «Умножение» для данных числовых значений параметров  $P$  и  $D$ . При выполнении Полного Мат.Действия Мат.Суперобщформа порождает Смысл (для данной Мат.Суперобщформы), субъект эмоционально переживает Смысл как «ощущение» вычисления значения искомого параметра  $Q$ .

После завершения вычисления в Полном Мат.Действии формируется число — результат для параметра  $Q$ , а также Смысл в Сфере сознания, в котором оказывается зафиксированным переживание данного Мат.Действия.

## ГЛАВА 4.

### Описание Математических Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Знак «Равенства»

#### 1. Математические Действия «Сложение» и «Вычитание»

О существовании и содержании Базисных Действий мы узнаем путем наблюдения их проявления в конкретных единичных Действиях руки человека в отношении реальных предметов в составе разных форм его деятельности. Базисные Действия впервые проявляются во внешнем мире при выработывании ребенком (субъектом) конкретных Действий руки предметом, выработывании Ед.Базисных Действий и формировании О-А и Мат.О-А.

1. Содержанием (смыслом) Базисного Действия «Приблизить» и «Удалить» является однократное перемещение некоторого «объекта» от одной точки абстрактного пространства к другой точке пространства. Перемещения, запечатленные в Базисных Действиях, претворенные в конкретные Действия руки на предметы во внешнем мире, — перемещения в виде отрезка прямой между двумя условными точками в пространстве в поле зрения, одна из которых становится Точкой Отсчета, по отношению которой оценивается характер перемещения, является наиболее простым, многочисленным и наиболее значимым видом перемещения в пространстве. По отношению к Точке Отсчета перемещения могут быть «Приблизить» и «Удалить (Отдалить)».

В Периоде I онтогенеза воплощенные в конкретные Действия руки во внешнем мире Базисные Действия «Приблизить» и «Удалить» преобразуются в «чистые» Действия руки (Ед.Базисные Действия) (см. Часть I, Глава 1). В Периоде II они преобразуются в единичные Простые Действия «Приблизить» и «Удалить», выполненные конкретными предметами. Это простейшие, наиболее многочисленные и поэтому наиболее значимые Действия руки на предметы во внешнем мире, представленные отрезками прямой. Это фундаментальные Действия руки ребенка (человека), они входят в состав всех Действий руки на предметы: «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Разрушить», «Сохранить».

Первым собственным Действием руки человека — простейшим Ед.Базисным Действием, с которого начинается обусловленный Действием руки первичный психизм субъекта, является Действие ребенка,

когда он впервые, под контролем зрения, протягивает руку к предмету (игрушке). При этом формируется первый простейший О-А «Удалить (Отдалить)».

Собственно существование человека в физическом пространстве, в Континууме, начинается с элементарного «чистого» Действия — перемещения объекта «рука + предмет» между двумя точками пространства. Этим перемещением ребенок впервые обозначает свое присутствие в Континууме. Поэтому Базисные Действия «Приблизить» и «Удалить» обладают наибольшим значением и потенциалом их преобразования, с них начинается формирование всех конкретных Действий руки и собственно психизма ребенка (человека).

В выполненных под влиянием Базисных Действий Простых Действиях руки конкретными реальными предметами «Приблизить» и «Удалить (Отдалить)» происходит приближающее или отдаляющее перемещение отдельных конкретных предметов по отношению к некоторой точке в поле зрения. Далее Простые Действия и О-А Простых Действий участвуют в познании предметов в их функциях как единичные Действия руки предметом в составе сложной функции познаваемого предмета. Также они участвуют в практических манипуляциях руки предметами (рис. 13).

Что касается Мат.Действий, то при обучении математике, при восприятии Системой Восприятия ученика собственного приближающего или отдаляющего предмет или группу предметов Действия (своей) руки, происходит формирование Мат.О-А. Главной особенностью этого перемещения является то, что происходит однократное перемещение группы предметов как отдельно существующих, самостоятельных, целых объектов или Цельностей. Другими словами, в Мат.Действии «Сложение» и «Вычитание» участвуют самостоятельные, независимые друг от друга объекты: целые объекты или Цельности. Система Восприятия воспринимает приближающее или отдаляющее перемещение как перемещение двух Цельностей независимо от того, какое количество предметов содержится в каждой Цельности. Например, к трем орехам прибавляется пять яблок. Группа (орехов) и Группа (яблок) существуют независимо друг от друга, как самостоятельные объекты, которыми манипулирует рука ученика.

Содержание ОБРАЗА Мат.О-А перемещения отдельно взятых, самостоятельных объектов становится содержанием Мат.Суперобщест-  
форм «Сложение» и «Вычитание».



Рис. 13. Формирование и вычисление математической формулы

В историческом развитии человека практические Действия человека рукой (руками) по сближению или отделению групп закрепились в мозговой сфере человека в виде Базисного Действия руки человека «Приблизить» и «Удалить (Отдалить)». Происхождение Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание» обусловлено практической потребностью людей, прежде всего в сфере торговли, обмена товаров, в военном деле и строительстве по сближению групп предметов в одну совокупность или выведению некоторого числа предметов как целой группы (предметов) из общей совокупности предметов при оперировании большими количествами предметов. С появлением чисел постоянно осуществляемые людьми практические Действия (манипуляции) рукой, сближающие (приближающие) или отдаляющие друг от друга группы предметов выделились в особые Действия – Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание».

2. Приближение или удаление (отдаление) предметов или групп предметов, представляющих собой самостоятельные целые объекты или Цельности, существование которых не зависит друг от друга, представляет собой простое элементарное и потому важнейшее явление физического мира (физическое явление). Повторение учеником с помощью своей руки единичного перемещения – приближения или отдаления цельностей (групп предметов) путем наблюдения Действия руки учителя запечатлевается в Мат.О-А.

Таким физическим явлением может быть складывание вместе, добавление или отделение предметов друг от друга в процессе обмена, торговли, в строительстве, в военном деле и т. д. Выполняемые человеком физические явления приближения и удаления (отдаления) групп предметов как целых объектов (цельностей), с которых с появлением чисел началась математика, стали выражаться в виде Мат.пары  $A+B$ ;  $A-B$ .

В математике Мат.Объектами  $A$  и  $B$ , принадлежащих Мат.паре  $A$  и  $B$ , могут быть безличные числа, числа, в которых выражена величина параметра, входящего в состав физического явления, а также простые и сложные Мат.выражения, лишенные физического содержания. Так, физическим явлением может быть добавление некоторого объема гравия к предыдущему объему. Например, 5 т гравия досыпаны к 14 т ранее высыпанного на землю гравия. Другим физическим явлением может быть изъятие некоторого количества бревен из общего штабеля бревен. Например, от штабеля из 40 бревен для строительства дома взято 25 бревен. Выполнение Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание» позволяет ответить на вопрос: сколько тонн гравия получилось в результате добавления 5 тонн или сколько бревен осталось в штабеле. Явления, представленные «сближением — сложением» и «отдалением

— вычитанием» самостоятельных объектов, представляют собой фундаментальные физические явления. Их значимость среди других данных человеку в физическом мире физических явлений является главной, первостепенной, поскольку в таком физическом явлении представлено перемещение сближения или отделения объектов, являющееся наиболее частым перемещением в физическом пространстве минимального количества — двух целых объектов (Цельностей) как двух сущностей физического пространства. Отношения самостоятельных объектов могут быть строго определены при условии выражения каждого объекта в числовом виде (в виде чисел). Это отношения «Сложение» и «Вычитание». Эти очевидные отношения есть первые и главные Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание» при появлении первых Мат.вычислений.

Фундаментальное значение сложения и вычитания двух самостоятельных объектов содержится в Мат.Действиях «Сложение» и «Вычитание», которые присутствуют в составе простых и сложных Мат.выражений. В этом случае Мат.Объекты А и В Мат пары как Цельности, какой бы степенью сложности мат.содержания они ни обладали, вступают в «простые» отношения приближения или сложения (для Мат. пары  $A + B$ ) или в отношения удаления (отдаления) или вычитания — для Мат.пары  $A - B$ . В качестве примера приведем Мат.выражение

Отношение Мат.Объектов  $A + B$  и  $A - B$ , выраженное с помощью чисел, получает форму конкретного Мат.Действия, например,  $12 + 8$  или  $87 - 54$ , и может быть вычислено в Полном Мат.Действии.

Другими словами, благодаря числовому (в виде чисел) представлению целых объектов или Целостностей, образующих физическое явление «приближение» или «отдаление», величины данных отношений, выраженные в виде Мат.Действий (например,  $12 + 8$  или  $87 - 54$ ), мо-

гут быть вычислены (определены) в Полном Мат.Действии с помощью Мат.Суперобщеформы «Сложение» или «Вычитание».

Сущность Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание» есть приближение друг к другу или отделение друг от друга в пространстве двух целых объектов или объектов, каждый из которых принимается как Цельность.

3. В Образной сфере субъекта Мат.Суперобщеформы «Сложение» и «Вычитание» на этапе 2 Полного Мат.Действия осуществляют приближающие и удаляющие перемещения единичных абстрактных объектов, в которые были преобразованы числа Мат.Действия, предназначенного для вычисления. По завершении Полного Мат.Действия получается результат в виде некоторого количества абстрактных объектов в Конечном локусе, преобразуемого в число.

В Мат.Действиях «Сложение» и «Вычитание» в Мат.Объектах А и В (любой Мат.пары) представлены самостоятельные сближающиеся или отдаляющиеся целые объекты или Целостности. Все Мат.Объекты А и В являются объектами одной «природы» (содержания, смысла, структуры и т. д.). В приведенной выше условной формуле  $A = m + 2 f \int \sqrt{1 - (x/b)^2} dx$  слагаемые  $m$  и  $2 f \int \sqrt{1 - (x/b)^2} dx$  однородны, имеют общую «природу» (содержание, смысл). Аналогично уменьшаемое  $\int \sqrt{1 - (x/b)^2} dx$  и вычитаемое  $(x/b)^2$  имеют общую природу.

В работе Wyzant [56] указано, что *«Сложение возможно при условии, что оба аргумента принадлежат одному множеству, т. е. имеют одинаковый тип. Нельзя сложить два ореха и три шишки. Сложение можно определить для абстрактных величин, таких как целые числа, рациональные числа, вещественные числа и комплексные числа, и для других абстрактных объектов, таких как векторы и матрицы».*

Повторим, что Мат.Действиями «Сложение» и «Вычитание» представлены физические явления. В них складываются и вычитаются самостоятельные физические объекты одной природы (тонны, километры, литры и т. д.), поэтому значение Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание» в составе Мат.формул и Мат.выражений максимально велико. Более высокий приоритет выполнения операций умножения и деления в процессе вычисления Мат.выражения по сравнению с приоритетом операций сложения и вычитания обусловлен низкой значимостью (весом) умножения и деления, поэтому они вычисляются первыми («внутри» крупных складывающихся (сложение) или отделяющихся (вычитание), словно «глыбы» или «айсберги» Мат.сущностей. В Мат.формуле и Мат. выражении знаки (+) и (–) разделяют числа и целые Мат.выражения, обладающие общей природой и являющиеся

самостоятельными раздельными Цельностями. Невозможно представить целое физическое явление (феномен), представляющее собой сумму или разность тонн и километров.

Можно сказать, что Мат. Действия «Сложение» и «Вычитание», являющиеся претворениями (преобразованиями) Базисных Действий «Приблизить» и «Удалить», они указывают на одно «большое» физическое явление, в рамках которого складываются и вычитаются целостные отдельные Мат.сущности. Этим они отличаются от Мат.Действий «Умножение» и «Деление», отображающих отношения параметров «внутри» одного физического явления, принадлежащих ОДНОМУ физическому явлению или абстрактному Мат.выражению, которое выступает в роли физического явления.

Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание» РАБОТАЮТ потому, что Мат.Действие (Мат.пара)  $A + B$  и  $A - B$  в составе любого Мат.выражения имеет значение (смысл, содержание) сближения или отдаления друг от друга двух независимых объектов (Мат.сущностей).

## 2. Математическое Действие «Умножение»

1. Содержанием (смыслом) Базисного Действия «Соединить» является приближение некоторого количества абстрактных «объектов» к некоторой точке абстрактного пространства и соединение в ней. (см. рис. 11). Базисное Действие «Соединить» преобразовывается в физическом мире в конкретное Действие руки человека (в Ед.Базисное Действие) и в Простое Действие (формируются О-А и О-А Простого Действия), когда несколько реальных предметов приближаются (одновременно или последовательно) и соединяются в одном и том же месте поля зрения с образованием Кучки реальных предметов. В Кучке каждый предмет занимает не строго предназначенное, но любое место (см. Часть I, Глава 3) [30–34].

При выработывании и выполнении Мат.Действия «Умножение» с реальными предметами (формировании и воспроизведении Мат.О-А) манипуляции руки отличаются простотой: одно и то же количество предметов несколько раз «однообразно» выдвигается из одного места и каждый раз приближается в одному и тому же месту в поле зрения.

2. В историческом развитии человека практические Действия человека рукой (руками) по собиранию в кучку некоторого количества предметов закрепились в идеальной сфере человека в виде Базисного Действия руки человека «Соединить». Происхождение Мат.Действия «Умножение» обусловлено практической потребностью людей, прежде всего в сфере торговли, обмена товаров, в военном деле и строительстве, при оперировании большими количествами предметов.

С появлением чисел постоянно осуществляемые людьми практические Действия (манипуляции) рукой, соединяющие некоторое количество «неорганизованных» предметов в организованную Кучку в разных обстоятельствах, требующих учета количества предметов (строительство, торговля, обмен), выделились в особое Действие – Мат.Действие «Умножение». В Мат.Действиях манипуляция руки, однообразно соединяющая предметы в одной точке, при счете предметов упростилась, стала легко повторяемой, так как человеку субъективно более комфортно перемещать рукой предметы из какого-либо определенного места, при этом перемещать каждый раз одно и то же количество предметов по одной и той же траектории.

Мы имеем основания полагать, что содержанием и смыслом Мат.Действия «Умножение» (для любых Мат.Объектов А и В Мат. пары  $A \times B$ ) стало именно практическое многократное перемещение одного и того же количества предметов, выполненное для того, чтобы определить, какое количество неучтенных ранее предметов вошло в состав организованной с помощью перемещений Кучки предметов. Далее это практическое содержание (смысл) практической манипуляции «Умножение» стало успешной моделью, стало применяться для учета однонаправленных ВЛИЯНИЙ параметров в выделенных феноменах физического мира — физических явлениях.

В предыдущем разделе мы рассмотрели физическое явление, образованное сближением или отдалением друг от друга объектов или групп объектов однородных (килограммы с килограммами, литры с литрами и т. д.).

Особый тип физических явлений представляют собой явления, образованные физическими сущностями или параметрами разной природы. Такие физические явления выделены в физическом мире человеком, ранее познавшим предметы, участвующие в физическом явлении. Именно предметы, точнее, познанные человеком функции предметов («действующие» предметы, функциональная активность предметов) становятся источником, обуславливают наблюдаемые физические явления. Так, наблюдение перемещения разных предметов послужило источником выделения таких параметров физического явления «перемещение физического тела», как пройденный телом путь, быстрота (скорость) и продолжительность перемещения (длительность, время).

Первые попытки человека описать подобные физические явления с использованием Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» показали, что два параметра одного физического явления, обладающие однонаправленным влиянием на него, находятся в отношении, описываемом Мат.Действием «Умножение».

При определении Мат.формулы для физического явления параметры, способные однонаправленно ВЛИЯТЬ на физическое явление, выражаются через Мат.Действие «Умножение». Для Мат.формулы, включающей четыре параметра те два параметра, которые однонаправленно усиливают физическое явление (конструктивные параметры), присутствуют в числителе Мат.формулы в отношении «Умножение». Другие два других параметра, однонаправленно умягчающие, ослабляющие явление (деструктивные параметры), присутствуют в знаменателе в отношении «Умножение». Например, при определении длины пройденного пути  $s = v \times t$  конструктивными параметрами являются  $v$  и  $t$ ; для закона Кулона  $F = q_1 \times q_2 / r^2$  конструктивными однонаправленными являются параметры  $q_1 \times q_2$ , деструктивными однонаправленными —  $r \times r$ .

Сущность отношения «Умножение» состоит в том, что в него входит два параметра, обуславливающих однонаправленный эффект (тренд) данного физического явления, они обладают общим влиянием на физическое явление. Этот эмпирически подтвержденный факт при выработывании Мат.формулы явления позволяет вводить в отношение «Умножение» те выделенные параметры, общее влияние которых усиливает или ослабляет явление. В Мат.формуле, в отношениях параметров разной природы (например, сила тока и сопротивление электрической цепи), однонаправленно усиливающих и умягчающих проявление явления, отобрана собственно сущность («идея») физического явления.

Обратимся к вопросу о том, какова физическая сущность Мат.Действия «Умножение» (см. ч. II, гл. 3, табл. 5). Внутри физического явления два, однонаправленно влияющих на явление, параметра проявляют свое влияние один через другой. Так, давление воды в трубе  $P$  распределяется на площадь поперечного сечения трубы  $S$ , так что на единицу величины площади приходится единица величины давления (параметр  $D$  — диаметр трубы мы заменили на параметр  $S$  — площадь поперечного сечения трубы). Справедливо обратное, менее естественное утверждение, что на единицу величины давления приходится единица величины площади поперечного сечения. Если  $P=3$ ,  $S=5$ , то три единицы давления равно распределены по каждой из пяти единиц площади поперечного сечения (на каждую единицу площади приходится три единицы давления). Справедливо также обратное, что на каждую из пяти единиц площади поперечного сечения приходится по три единицы давления. Поэтому общее количество воды (в условных единицах), протекающей в единицу времени, равно  $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$ .

Повышение давления воды в трубе на одну единицу (увеличение скорости потока) приводит к тому, что каждая дополнительная едини-

ца величины (влияния) давления приходится на каждую единицу площади поперечного сечения. Если площадь оставить прежней ( $S = 5$ ), а давление увеличить на единицу, так что  $P = 4$ , то каждая добавленная единица давления придется на каждую единицу площади поперечного сечения, т. е. на одну добавленную единицу давления добавится сразу пять единиц площади. Поэтому общее количество воды, протекающей в единицу времени, резко возрастет:  $5 \times 4 = 20$ . В физической интерпретации величина давления влияет на каждую единицу площади, величина давления «представлена» в каждой единице площади поперечного сечения. Поэтому прибавленная к величине давления единица распространяется на все пять единиц площади поперечного сечения.

Справедливо обратное утверждение о том, что площадь поперечного сечения трубы влияет на давление в трубе.

Что касается скорости прохождения (быстроты), времени прохождения объектом определенного расстояния, а также диаметра трубы и давления жидкости в трубе, то для определенной длины пути или количества вытекшей из трубы воды отношения этих параметров определяется через «Деление»:  $s=v \times t$ ,  $v = s/t$  и  $t=s/v$ ;  $Q=P \times S$ ,  $P=Q/S$  и  $S=Q/P$ .

Е. Вигнер пишет: *«Мы пользуемся математикой в «повседневной» физике для количественной оценки эффектов, обусловленных законами природы. Сама возможность таких оценок подразумевает, что законы природы должны быть уже сформулированы на математическом языке»* [8].

Во все времена люди знали и использовали свое понимание того, что количество протекающей по трубе (водоводу) воды тем больше, чем больше диаметр трубы и сила (давление), с которой вода нагнетается в трубу. Люди знали, что диаметр (размер водовода) и давление ВЛИЯЮТ на количество протекающей по трубе воды. Простые наблюдения показывали, что при протекании воды по трубе увеличение диаметра и давления (силы) воды в трубе приводит к увеличению количества протекающей воды. Люди понимали, что это однонаправленные «факты» для данного явления, это факторы, усиливающие явление протекания воды по трубе. Очевидное представление о «влиянии» диаметра трубы и давления составляло собственно знание человека о данном физическом явлении.

Введем понятие ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА на физическое явление. Важно понятие «влияние» мы уделим особое внимание. Представление о ВЛИЯНИИ можно показать на любом физическом явлении, состоящем из трех параметров — одного определяющего и двух образующих (см. ч. II, гл. 2, параграф «Выделение во внешнем мире...»).

Под ВЛИЯНИЕМ мы понимаем эффективное участие (вклад) каждого параметра в определённое физическое явление. Влияние — это свойство, общее всем параметрам одного физического явления, обладающих разной физической природой.

Другими словами, общность разных по природе параметров, образующих физическое явление определяется тем, что они ВЛИЯЮТ (ВЛИЯНИЕМ) на одно и то же, общее им физическое явление. Все параметры обладают ВЛИЯНИЕМ на явление. Именно однонаправленное влияние двух параметров определяют содержание Мат.Действия «Умножение» при его использовании для описания физического явления. Разнонаправленные влияния параметров определяют содержание Мат.Действия «Деление». Еще до того, как мы введем для параметров отношение «умножение», на «доматематическом» этапе определим как очевидный факт, что влияние увеличения диаметра трубы и давления воды в трубе равно способствуют (усиливают) прохождению воды по трубе. Каждый параметр обладает разной физической природой, их меры выражаются в сантиметрах и технических атмосферах. При этом каждый из этих параметров обладает одним и тем же ВЛИЯНИЕМ на физическое явление. Поэтому ВЛИЯНИЕ есть общее свойство каждого параметра в определенном физическом явлении.

Два параметра создают одно общее однонаправленное или разнонаправленное Влияние на физическое явление. Поэтому их можно рассматривать в единстве и свести друг с другом через отношение «Умножение» и «Деление». Другими словами, общей «природой» двух параметров одного явления, позволяющей рассматривать их в единстве через отношение «Умножение», становится то, что они при увеличении их величин имеют однонаправленное ВЛИЯНИЕ на явление. Таким образом, несмотря на разную физическую природу параметров, все они обладают общностью, и эта общность есть их «общность по влиянию». Диаметр трубы и давление воды в трубе при их увеличении — это параметры, обладающие однонаправленным ВЛИЯНИЕМ, усиливающим прохождению воды по трубе.

В определенный момент человек уже не удовлетворяется общим пониманием однонаправленных влияний «размера трубы» и «силы воды» (диаметра и давления) на ток воды, но для практических нужд желает определить зависимость количества вытекающей из трубы воды от величин диаметра и давления. В этот условный для нас момент человек обозначает термином «диаметр» размер отверстия трубы. Для обозначения силы, с которой вода «давит» на человека, если, например, он подставит руку под струю воды, он вводит термин «давление». Так, для МЕРЫ диаметра и давления вводится обозначение единицы меры: миллиметр, сантиметр, дюйм, паскаль, бар, миллиметр ртутного

столба, миллиметр водяного столба, атмосфера техническая, фунт-сила на квадратный дюйм и т. д. При введении обозначения параметра, которое есть МЕРА параметра, появляется возможность придать ему числовые значения, выразить параметр в виде числа, далее выразить физическое явление в виде Мат.формулы (например,  $Q = D \times P$ ) и вычислить числовое значение искомого параметра.

Величины влияний двух параметров разной физической природы одинаково выражаются в виде чисел в Мат.Действии «Умножение» и поэтому могут вступать в отношении их Влияний. В Полном Мат.Действии «Умножение» Мат.Суперобщформа «Умножение» оперирует единичными абстрактными объектами, в которые преобразованы числа (величины) двух параметров одного явления, например:  $Q = 15 \times 8$ , где площадь поперечного сечения трубы равна 15 кв. см, давление — 8 атм.

Формула, взятая сама по себе, есть статическое отображение отношений параметров физического явления. Человека в его деятельности интересует не только формула, но прежде всего количественная величина искомого параметра, которая получается при установлении определенных количественных величин влияний других параметров в формуле. Для определения (вычисления) величины искомого параметра величина влияния каждого параметра задается в виде конкретного числа, так как числа лишены природы параметра и являются лишь количественным отображением Влияния параметра на данное явление.

При изучении и практическом использовании физического явления (для которого выработана Мат.формула), в котором участвуют однонаправленные или разнонаправленные по влиянию параметры, человека прежде всего интересует количественный результат вычисления заданного соотношения величин параметров. Для определенных обстоятельств конкретные количественные величины влияний каждого из параметров, например,  $16 \times 78$  двух параметров  $D$  в  $P$  вводятся в Мат.формулу и вычисляются в Полном Мат.Действии с помощью Мат.Суперобщформы по правилу Базисного Действия «Соединить».

3. Зададим вопрос, с помощью какого процесса в мозге субъекта реализуется однонаправленное Влияние двух параметров одного физического явления? С помощью какого процесса в Образной Сфере мозга в Полном Мат.Действии с помощью Мат.Суперобщформы «Умножение» по правилу Базисного Действия «Соединить» реализуется («вычисляется») однонаправленное отношение двух параметров явления?

Покажем, как работает мозговой механизм, реализующий Мат.Действие «Умножение» (см. Часть II, Глава 2, параграф «Вычисление Полных Математических...»).

Выше мы показали, что числа, находящиеся в Мат.формуле в отношении «Умножение» в Полном Мат.Действии «Умножение», сначала преобразуются в единичные абстрактные объекты.

В Образной Мат.Системе субъекта процесс однонаправленного влияния двух параметров разной природы, принадлежащих одному явлению, выраженное в Мат.Действии «Умножение» происходит так:

1) Сначала числа, которыми в Мат.Действии «Умножение» представлены числовые величины параметров преобразуются в Образы чисел – в единичные абстрактные объекты и далее в Группы абстрактных объектов, соответствующие множителю 1 и 2.

2) Далее с помощью Мат.Суперобщей формы происходят перемещения Группы 1 абстрактных объектов (множитель 1) столько раз, сколько абстрактных объектов содержится в Группе 2 (множитель 2). Их количество в каждой Группе соответствует ВЕЛИЧИНЕ ВЛИЯНИЯ параметра или числу.

Напомним, что сначала в Полном Мат.Действии формируется Исходный Локус 1, содержащий Группу 1 абстрактных объектов, соответствующих множителю 1 (см. Часть II, Глава 2, рис. 11) Далее Группа 1 мультиплицируется соответственно числу абстрактных объектов в Группе 2 (множитель 2) с образованием сложного Локуса 2. После того как Локус 2 сформирован, все входящие в него Группы 1 начинают последовательно перемещаться в направлении К Конечному локусу. Возможно одновременное их перемещение «все сразу». Это перемещение всего количества абстрактных объектов, которые составят Группу-Произведение. На рис. 11 видно, что если множители поменять местами, то количество абстрактных объектов в Группе-Произведении останется тем же.

Такой способ одновременного перемещения единичных абстрактных объектов есть единственный способ осуществить «в мозге» Мат.Действие «Умножение», выразить в том числе однонаправленные Влияния двух разных параметров физического явления.

Только так, в функции Мат.Суперобщей формы, путем перемещения Группы 1, соответствующей множителю 1, и повторения единичных перемещений Группы 1, выполненных соответственно количеству единичных абстрактных объектов в множителе 2, выражено (воплощено, отображено, представлено) взаимное однонаправленное Влияние физических параметров в явлении, принадлежащем физическому миру. Так работает мозговой механизм Мат.Действия «Умножение».

Подчеркнём, что в работе мозгового механизма выполнения Мат.Действия «Умножение» Влияние двух, однонаправленно работающих в физическом явлении параметров, проявляется в том, что

Мат.Суперобщформа выполняет ОДНОВРЕМЕННО как ОДНО Действие «Соединить» соединяющее перемещение Группы 1 абстрактных объектов (количество которых соответствует множителю 1) столько раз, сколько абстрактных объектов содержит Группа 2, соответствующая множителю 2. Так, через выполняемое одновременно как ОДНО Действие, в единичном перемещении и повторении единичных перемещений с помощью Мат.Суперобщформы, в которой претворено Базисное Действие «Соединить», может быть реализовано одновременное, однонаправленное, неразрывное Влияние двух параметров одного физического явления. Так функционирует мозговой механизм выполнения Мат.Действия «Умножение».

Количество абстрактных объектов в Группе-Произведении, преобразованное в число, становится числовым результатом вычисления Мат.Действия «Умножение».

Так при вычислении Мат.Действия «Умножение», входящего в состав Мат.формулы, определяется суммарное влияние (эффект влияния) двух однонаправленно действующих параметров физического явления, заданных в числовом виде, когда в определенных обстоятельствах для конкретных числовых значений каждого параметра требуется определить их совместный вклад в реализацию данного физического явления.

### **3. Математическое Действие «Деление»**

В процессе исторического развития разных форм деятельности человека практическая потребность разделить кучку предметов в одном Действии (акте), так чтобы появилось несколько «кучек», содержащих разделенные предметы, обусловила формирование Базисного Действия «Разделить». Мат.Действие «Деление» обязано своим происхождением практической потребности людей, прежде всего в сфере торговли, обмена товаров, в военном деле и строительстве, например при разделении (распределении) некоторой совокупности предметов (товаров, улова рыбы, урожая) «поровну» между несколькими участниками торговой сделки, рыбной ловли или совместного владения полем.

Собственно, первым содержанием (смыслом) Мат.Действия «Деление» стало практическое многократное перемещение предмета или группы, содержащей одно и то же количество предметов из общей Кучки в некоторое количество кучек. Это содержание (смысл) практической манипуляции «Деление» стало содержанием ОБРАЗА Мат. О-А и Мат.Общформы «Деление».

Содержанием (смыслом) Базисного Действия «Разделить» является неоднократное отдаляющее перемещение некоторых абстрактных

(подразумеваемых) «объектов» ОТ одной общей точки в некоторое количество точек абстрактного пространства.

В конкретных Действиях руки — в Ед.Базисных Действиях и Простых Действиях (О-А и О-А Простого Действия), выполненных по правилу Базисного Действия «Разделить», исходно заданная Кучка предметов разделяется таким образом, что разделенные предметы образуют Группы разделенных предметов. В начале обучения математике в Мат.Действии «Деление» Кучка реальных предметов (предметов счета) разделяется на некоторое количество Кучек в поле зрения, так чтобы в каждом локусе содержалось одинаковое количество предметов.

В какой-то исторический момент, путём введения в состав Мат.формулы физического явления практического счётного Действия — Мат.Действия «Деление», стало возможным определить отношения разнонаправленных влияний параметров, образующих явление. Рассуждения, приведенные для Мат.Действия «Умножение», справедливы и для Мат.Действия «Деление». Если выделена (установлена) Мат.формула простого физического явления, включающего три параметра, в котором один параметр является определяющим, а два — образующими параметрами, то параметры могут вступать в отношения «Умножение» и «Деление». В этом случае каждый образующий параметр обусловлен разнонаправленными влияниями определяющего и образующего параметров. Например, практическая деятельность показывает, что для определенного количества излитой из трубы воды величины площади поперечного сечения (диаметра) трубы и давления воды (скорости потока) в трубе обладают уменьшающим влиянием друг на друга: для фиксированного объема воды они находятся в обратных отношениях: чем больше  $S$ , тем меньше  $P$ . Поэтому при определении Мат.формулы они находятся в отношении «Деление»:  $P=Q/S$ ;  $S=Q/P$ .

Для физического явления «прохождение телом пути  $s$ » отношения параметров скорость  $v$  и время  $t$  по отношению к одному и тому же пути обладают взаимно уменьшающим влиянием, когда увеличение скорости (или времени в пути) приводит к уменьшению времени (или скорости). Они находятся в отношении «Деление»:  $v = s/t$ ;  $t = s/v$ .

В. С. Яковлев пишет: *«Скорость есть свойство движения, отражающееся в сравнении длины и времени; а именно: она определяет, какая длина в какое время проходится»* [48].

Итак, отношения параметров, обладающих разнонаправленным влиянием на физическое явление, находятся в отношении «Деление», например:  $P = F / S$  — давление твердых тел;  $P = M / V$  — плотность;  $I = U / R$ ;  $R = U / I$  — закон Ома,  $N = A / T$  — мощность и т. д.

По-видимому, в истории применения Мат. Действий, при описании доступных прямому наблюдению физических явлений первыми выделялись определяющие параметры, и для них создавалась Мат. формула «Умножение». Мат. формулы для определения искомым образующих параметров выводились из Мат. формулы «Умножение» через Мат. Действие «Деление».

Физическое содержание (смысл) Мат. Действия «Деление» в составе Мат. формулы при описании физического явления, определенного тремя параметрами, состоит в том, чтобы определить, сколько частей определяющего параметра приходится на одну часть образующего параметра, или, на сколько частей (единиц) определяющего параметра распространяется влияние одной части (единицы) образующего параметра. Упрощая, можно сказать, что в отношении «Деление» определяется, сколько единичных величин делимого приходится на одну единичную величину делителя. Такое понимание физического смысла Мат. Действия «Деление» справедливо не только для Мат. формулы физического явления (в котором отображена физическая реальность), но и для Мат. пар (Мат. Действий), в которых в качестве Мат. Объектов А и В участвуют как простые числа, так и сложные («большие») Мат. выражения, входящие в состав числителя и знаменателя общего Мат. выражения.

После того как установлены Меры параметров (секунды, метры, ватты, джоули и т. д.) и заданы числовые величины параметров для Мат. формулы, в Образной Мат. Системе начинает выполняться вычисление конкретного Мат. Действия в Полном Мат. Действии «Деление» (см. Часть II, Глава 2, рис. 12).

Выполнение Полного Мат. Действия «Деление» начинается с преобразования чисел делимого и делителя в Образы чисел и Группы. Сначала Мат. Суперобщформа устанавливает Исходный локус 1. Количество абстрактных объектов в Группе 1 в Исходном локусе 1 соответствует величине делимого. Далее формируется Исходный локус 2, который включает Конечные локусы, количество которых соответствует количеству абстрактных объектов в Группе 2 или величине делителя. После этого Мат. Суперобщформа начинает выполнять отдаленные перемещения абстрактных объектов, принадлежащих Группе 1, по одному, по направлению ОТ Исходного локуса 1 к Конечным локусам. В этом общем перемещении количество абстрактных объектов в Конечном локусе показывает, сколько абстрактных объектов, принадлежащих делимому, приходится на одну единицу делителя.

Точно так для того же явления второй разнонаправленный по Влиянию параметр вычисляется в Полном Мат. Действии по отношению в той же величине определяющего параметра, который становится делимым.

Когда все абстрактные объекты Группы 1 (делимое) будут равномерно распределены (перенесены) по Конечным локусам, любой из конечных локусов становится Группой-Результатом или Группой-Частным. Количество абстрактных объектов в Группе-Частном преобразуется в число, которое появляется на Внутреннем сенсорном Экране (в сфере сознания), вычисляющий субъект воспринимает его как результат вычисления Мат.Действия и записывает в форме числа на бумаге, классной доске и т. д.

Так Базисное Действие «Разделить», претворенное (преобразованное) в мозговой сфере в Мат.Суперобщеформу «Деление», становится механизмом перемещения абстрактных объектов в общем механизме выполнения функции мозгового нейропсихологического механизма Мат.Действия «Деление».

Так, в начале обучения математике Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», манипуляции ученика реальными предметами с помощью руки – манипуляции приближающие, удаляющие (отдаляющие), соединяющие, разделяющие группы предметов в поле зрения, на расстоянии вытянутой руки, во внешнем мире становятся Мат.О-А и Мат.Суперобщеформой. В Полном Мат.Действии, с помощью Мат.Суперобщеформы, оперирующей единичными абстрактными объектами, преобразованными из чисел величин параметров включенных в состав Мат.формулы, происходит вычисление Мат.Действия и получение результата в виде числа.

#### **4. Описание математического знака «Равенства» (=)**

В формировании Мат.О-А кроме Базисных Действий «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить» участвует также Базисное Действие «Сохранить». Описанию Базисных Действий и формированию Ед.Базисных действий «Разрушить» и «Сохранить» приведено в работе [29].

При восприятии выполнения Мат.Действия Система Восприятия воспринимает характеристические перемещения предметов счёта по Базисным правилам «Приблизить», «Удалить», Соединить», «Разделить». При этом она воспринимает всю «картину», включающую группы предметов и их перемещение как одну целую «картину». В это время кроме Базисного Действия «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить» проявляет активность также Базисное Действие «Сохранить». Это наиболее сложное «Базисное Действие. После того как создана группа-результат происходит формирование Мат.О-А «Сложение», Вычитание», «Умножение», «Деление». Одновременно в этом под влиянием Базисного Действия «Сохранить» формируется

Мат. О-А, обладающий сложным двойным ОБРАЗОМ. В одном Образе запечатлены Исходные группы предметов и начало перемещений предметов. Во втором Образе – завершение перемещений и конечная (результатирующая) группа предметов. Оба Образа запечатлены в одном Образе восприятия. При это АЛГОРИТМ остаётся тем же, что и для соответствующего Мат.Действия. Так формируется Мат.О-А «Равенство», обозначаемое знаком (=).

Базисное Действие «Сохранить» не есть счётное (т.е. перемещающее предметы) Действие, но Действие более высокого уровня. Напомним, что в нём для нематематического Действия руки запечатлено выполнение формирования сложного предмета и выполнение Действия руки по его сохранению (см. [29], гл. 8, рис. 16). Для Мат.Действия реальными предметами в целом ОБРАЗЕ (Мат.О-А «Равенство») запечатлены две части Мат.Действия – исходная и конечная. В каждой части количество предметов, участвующих в исходном и конечном перемещении одно и то же. Так (2 и 5) или (4 и 2) — количество отдельных предметов, вступающих в Мат.Действие «Сложение» и «Умножение» и после его завершения остаётся одним и тем же. Учитель, выполняя Мат.Действие объясняет его словами и записывает на доске в виде выражения. Он произносит «сложим два предмета и пять предметов» или «умножим 4 предмета на два», при этом он записывает на доске выражение в виде  $2 + 5$  и  $4 \times 2$ . После этого он выполняет перемещение счётных предметов, и ученик наблюдает Действие учителя. Переместив предметы, учитель подсчитывает их количество, как правило в этот момент в Мат.Действии возникает ПАУЗА, в течение которой учитель демонстративно для учеников подсчитывает результирующее количество предметов. После этого он оглашает результат. Далее он записывает операцию подсчёта результата и конечное количество предметов в символьном виде  $\dots = 7$  или  $\dots = 8$ .

Полная запись Мат.Действия выглядит так  $2 + 5 = 7$  и  $4 \times 2 = 8$ .

Так формируются Мат.О-А «Равенство» для всех конкретных Мат. Действий выполненных учеников. Мы видим, что содержанием О-А «Равенство», запечатленного в ОБРАЗЕ является не просто указание на тип перемещения предметов, но указание того основополагающего факта, что перемещение осуществляется в отношении одного и того же количества одних и тех же предметов.

Счётное содержание Мат.Действия «Равенство» состоит в том, в нем выражен факт того, что количество вступивших и завершивших Мат.Действие предметов остаётся неизменным. Функцией (предназначение) знака «Равенство» (=) является указание на Мат.Действие, которое выполняется как самостоятельный, уникальный, отличный от

других Акт Счёта (счетный акт). В этот состоит содержание (значение, смысл) знака «Равенство» (=).

Счётный Смысл Базисного Действия «Сохранить» претворённого в конкретные Мат.Действия состоит в обеспечении уверенности человека, выполняющего практическое Мат.Действие (торговля, строительство, военное дело, обмен товаров), в том, что в Мат.Действии количество предметов (товары) сохраняется неизменными, одним и тем же.

Физический Смысл Базисного Действия «Сохранить», претворённого в значение (функцию) знака «Равенство» (=) состоит в том, что Мат. Числа и выражения, стоящие по правую и левую стороны знака «Равенство» (=) содержат одно и то же количество условных объектов, каждый из которых сохраняет свою неизменность.

Для всех Мат.Действий формируются одновременно Мат. О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», а также Мат. О-А «Равенство». Далее для Мат.О-А каждого основного математического типа формируются четыре Мат.Суперобщеформы «Равенство».

В процессе выполнения Полного Мат.Действия Система Мат.Действия (с помощью Системы Восприятия) контролирует правильность выполнения всех его этапов. В процессе внутреннего восприятия Система Восприятия воспринимает:

- 1) последовательные стадии формирования Исходных Локусов,
- 2) перемещения абстрактных объектов,
- 3) создание Конечного локуса.

После того, как формирование Конечного локуса закончено, перед тем как начнётся процесс обратного преобразования абстрактных объектов – результата в число-результат и Полное Мат.Действие завершится, Система Мат.Действия (с помощью Системы Восприятия) воспринимает всю «картину» выполненной функции Мат.Суперобщеформы. Это можно сравнить с восприятием Системой Восприятия внешнего выполненного конкретного Мат.Действия при формировании Мат.О-А «Равенство».

Другими словами, воспринятая целая «картина» первого внутреннего Образа, где отображено формирование исходных Групп абстрактных объектов и их перемещение, а также второй Образ, в котором формируется конечная Группа, образованная перемещёнными абстрактными объектами, образуют общий ОБРАЗ функции Мат.Общеформы данного Действия. Процесс его формирования есть преобразование Базисного Действия «Сохранить» в конкретную форму.

В этот момент, когда Система Восприятия подсчитывает количество абстрактных объектов в Конечном Локусе и воспринимает всё выполненное Мат.Суперобщеформой, завершённое двойное Действие,

в целом, самоощущается субъектом как психологическое состояние «решил» (констатация «сложил», «вычел», «умножил», «разделил»). Этот субъективный момент соответствует знаку «Равенство» ( $=$ ), т. е. полному удовлетворению запечатлённому в Мат.Суперобществе форме положению о том, что количество абстрактных объектов в Исходных и Конечном локусе осталось неизменным (одним и тем же).

В момент «решил» или «вычислил» начинается обратное преобразование количества абстрактных объектов в Конечном локусе в число (знак). Ученик записывает на бумаге Мат.Действие в полном графическом виде:  $3 + 6 = 9$ ;  $10 - 8 = 2$ ;  $4 \times 5 = 20$ ;  $18 : 3 = 6$ .

Мы показали нейропсихологическое основание взаимоотношения «Равенство». Знак Равенства называют краеугольным камнем математики, поскольку в нём содержится заявление о том, что две сущности абсолютно одинаковы. Ряд математиков полагает знак «Равенства» первоначальной ошибкой математики. Они хотят использовать более свободный язык эквивалентности. Они полагают, что на месте Равенства должна быть эквивалентность. Этому посвящены, в частности, работы Джекоба Лурье. Возможно приведенные тут материалы помогут обратиться к исходному (первичному) нейропсихологическому обоснованию представления о базовом, строгом «Равенстве».

## **5. Почему существует всего четыре основных Математических Действия: «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление»**

Почему существует всего четыре основных Мат.Действия? Какова причина того, что существует четыре Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», которые стали НАЧАЛАМИ математики?

Попытаемся дать ответ на этот вопрос. Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» вырабатываются в начале обучения математике. Основой Мат.Действия является сенсорно-проприоцептивно воспринятое собственное Действие ученика (человека), которое он повторяет с помощью руки, наблюдая Действие руки учителя предметами в поле зрения на дистанции вытянутой руки.

Предметы, с помощью которых вырабатывается Мат.Действие, мы называем предметами счета. При выполнении Мат.Действия ученик сначала наблюдает (воспринимает) выполнение Мат.Действия, которое показывает ему учитель. Учитель всегда показывает (демонстрирует) выполнение ОДНОГО «счетного» Действия своей рукой. Затем ученик повторяет Действием своей рукой Действие руки учителя, перемещающего предмет (предметы) счета. Для этого он использует Действия руки предметами, выработанные ранее в Периоде Выработки Действий

(Период I) [29, 32]. Ученик при повторении Действия учителя выполняет своё близкое или похожее Простое Действие (Приблизить, Удалить, Соединить», «Разделить), выработанное ранее. При повторении Действия своей рукой Система Восприятия ученика воспринимает Действие по сенсорно-проприоцептивному принципу О-А и формирует Мат.О-А. При выработывании Мат.Действий «Сложение» и «Вычитание» ученик выполняет (его Система Восприятия воспринимает) приближающее и удаляющее (отдаляющее) однократное перемещение предметов в поле зрения между Точкой Отсчета (относительно которой оценивается направление перемещения предметов) и второй точкой.

В Мат.Действии «Сложение» некоторое количество предметов в поле зрения приближается **К** Точке Отсчета, которая может исходно содержать предметы или быть лишенной предметов. В Мат.Действии «Вычитание» некоторое количество предметов удаляется (отдаляется) **ОТ** Точки Отсчета, содержащей предметы.

В Мат.Действии «Умножение» происходит неоднократное перемещение реальных предметов от некоторого места в поле зрения по направлению **К** некоторому фиксированному месту в поле зрения, где происходит накопление перемещаемых предметов.

В Мат.Действии «Деление» происходит неоднократное перемещение — удаление (отдаление) предметов **ОТ** исходного места, где содержится некоторое количество предметов и их распределение по одному в некоторых фиксированных местах поля зрения, где происходит накопление предметов.

Определим какие признаки присущи Мат.Действию? Какими характерными факторами, воспринимаемыми субъектом, обладают Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление»?

**ПЕРВЫМ ФАКТОРОМ**, определяющим каждое из четырех основных Мат.Действий, является, собственно, **ПЕРЕМЕЩЕНИЕ** предметов (однократное или многократное) в поле зрения. Перемещение или «движение» предметов в поле зрения — первый признак вырабатываемого Мат.Действия. Система Восприятия субъекта (ученика) воспринимает реальное перемещение предметов рукой во внешнем мире. Первые обучающие счетные манипуляции руки с реальными предметами при сложении, вычитании, умножении, делении — это всегда выполнение реального перемещения (движения) предметов из одной точки поля зрения в другую. Счетные Действия (манипуляции) предметами с помощью руки могут происходить только путем перемещения предметов руками. Выполнение Мат.Действия происходит в физическом пространстве как перемещение реальных предметов между двумя точками (локусами) пространства. Факт перемещения предме-

тов счета в поле зрения запечатлевается в ОБРАЗЕ и АЛГОРИТМЕ Мат.О-А как Образы восприятия Действия руки предметами.

Повторю, что при выработывании Мат.Действий и формировании Мат.О-А происходит реальное перемещение реальных предметов в физическом пространстве (в поле зрения) на дистанции вытянутой руки.

ВТОРЫМ ФАКТОРОМ, определяющим каждое из четырех главных Мат.Действий, является воспринимаемый Системой Восприятия субъекта факт изменения количества предметов (накопления или убыли) в исходном и конечном местах, откуда начинается и где заканчивается перемещение.

При выработывании Мат.Действия «Сложение» после приближения (сближения) некоторого количества предметов К некоторому месту поля зрения их становится больше. Сближенные в определенном месте в однократном акте приближения предметы не образуют «объект», обладающий какой-либо «формой» (например, формой «кучки»). Образуется неопределенный по форме объект.

При выработывании Мат.Действия «Вычитание» его результатом становится также лишенный какой-либо «формы» (например, формы «кучки») и уменьшенный по «размеру» объект или объект-разность.

Обратимся к альтернативной паре «Умножение» — «Деление». В начале обучения, при выработывании учеником Мат.Действия «Умножение», в результате неоднократных перемещений в поле зрения одного и того же количества реальных предметов, образующих группу предметов К некоторому месту поля зрения образуется обладающая «формой» Кучка предметов. Эта образованная реальными предметами в результате их неоднократного перемещения совокупность предметов воспринимается Системой Восприятия как объект, обладающий «формой», как Кучка предметов. Кучка — это составной предмет, обладающий формой, присущей всем составным предметам (например, кучка песка, гравия, яблок, орехов, камней и т. д.). Каждый предмет в Кучке занимает не определенное, но произвольное место. Так, при разделении Кучки «на предметы» и соединении из них новой Кучки каждый предмет занимает любое произвольное место (см. ч. I, гл. 3, рис. 5).

При выполнении рукой Мат.Действия «Умножение» форма образованного из предметов «объекта-произведения» имеет форму Кучки предметов. Другими словами, в результате выполнения Мат.Действия «Умножение» в некотором месте поля зрения появляется Кучка, состоящая из реальных предметов.

Что касается Мат.Действия «Деление», то при выработывании учеником в начале обучения Мат.Действия «Деление» происходит обратный процесс: исходная Кучка, содержащая некоторое количество реальных предметов, в процессе их перемещения в разные места (точки) поля

зрения распадается (распределяется) таким образом, что в каждом месте (точке) оказывается некоторое количество предметов. Их количество в точке становится результатом разделяющего перемещения.

В возрасте 6-7 лет все четыре Мат. Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» воспринимаются Системой Восприятия ученика во всех деталях одновременно зрительно и проприоцептивно:

1) как перемещения реальных предметов (предметов счета) рукой в поле зрения во внешнем мире;

2) как формирование обладающего или не обладающего «формой» объекта-результата.

Последнее особенно отчетливо проявляется в Мат. Действии «Умножение» при формировании Кучки предметов как реального составного предмета.

Очевидно, что вырабатывание Мат. Действий ребенком происходит как процесс усложнения Мат. Действий: сначала вырабатываются простые Мат. Действия «Сложение» и «Вычитание», затем более сложные — Мат. Действия «Умножение» и «Деление». Если в процессе сложения и вычитания (это заметно при манипуляции — сложении) из реальных предметов создается не определенный по форме объект «сумма» или объект «разность», то в процессе следующего по сложности Мат. Действия «Умножение» создается обладающая четко выраженной формой составного предмета Кучка (предметов). В процессе деления отчетливо воспринимаемая учеником Кучка предметов разделяется, распределяется по некоторому количеству мест (точек) с формированием меньшей Кучки-результата.

Первые Действия руки предметами «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» обладают практическим «счетным» содержанием, они позволяют в практической деятельности выполнять счетные операции с предметами, перемещая некоторое количество предметов, концентрируя их в одном месте или распределяя по разным местам.

Выше мы упоминали о том, что первоначально Мат. Действия использовались для практических целей в торговле, военном деле, строительстве.

Покажем, в чем состоит практическое счетное содержание (смысл) Мат. Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» (см. ч. I, гл. 3, табл. 5):

1. Практическое счетное содержание (смысл) Мат. Действия «Сложение» состоит в том, чтобы из двух групп предметов создать одну большую общую группу предметов и определить количество предметов в ней.

2. Практическое счетное содержание (смысл) Мат.Действия «Вычитание» состоит в том, чтобы одну группу предметов вычленил из другой группы и определить, сколько предметов осталось в прежней группе.

3. Практическое счетное содержание Мат.Действия «Умножение» состоит в том, чтобы из неопределенного количества неорганизованных предметов, путём перемещения групп, содержащих одинаковое количество предметов создать организованную Кучку предметов, количество предметов в которой известно.

4. Практическое счетное содержание Мат.Действия «Деление» состоит в том, чтобы исходную Кучку организованных предметов, количество предметов в которой известно, равномерно распределить по некоторому количеству конечных Кучек и определить, сколько предметов содержит каждая конечная Кучка.

Итак, четыре Базисных Действия «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить» обладают счётными возможностями. Обладают ли следующие по степени сложности Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить» счётными свойствами? Согласно тенденции возрастающего усложнения Базисных Действий, следующим по степени сложности Мат.Действием (после Мат.Действий «Умножение» и «Деление») должно было бы стать Мат.Действие, конструктивным эффектом которого было бы создание, с помощью руки в поле зрения, следующего по сложности, не составного, но сложносоставного предмета. Другими словами, следующим после Мат.Действий «Умножение» и «Деление» должно быть Мат.Действие, в котором формируется (создается и распадается) уже не составной, а сложносоставной предмет, обладающий характерной, уникальной формой, в котором каждая деталь (часть) занимает предназначенной ей место. Покажем, что Действие «Объединить» и «Разъединить» не обладает счетными свойствами, оно не способно обеспечить счетную операцию перемещения любых количеств предметов. Объединяя или разъединяя (собирая или разбирая) из уникальных деталей (частей) сложносоставной предмет, Базисное Действие «Объединить» и «Разъединить» лишено счетного свойства.

Главной особенностью сложносоставного предмета является то, что в его составе каждая часть (деталь) занимает особое, предназначенное ей место (см. Часть I, Глава 3, рис.5). Поэтому следующим Мат.Действием должно было бы стать, выполненное с помощью руки, «счетное» Мат.Действие объединения (сборки) и разъединения (разборки) сложносоставного предмета, выполненное по Базисному правилу «Объединить» и «Разъединить».

При выработывании Действия руки на предмет «Объединить» и «Разъединить» объединяются детали сложносоставного предмета. При этом объединение (сборка) сложносоставного предмета с помощью руки происходит так, что детали сложносоставного предмета приближаются и соединяются в нем в разном количестве и с разных направлений. Что касается объединения и разъединения сложносоставного предмета в гипотетическом Мат.Действии «Объединить» и «Разъединить» (которые могли бы появиться после Мат.Действий «Умножение» и «Деление»), то разные сложносоставные предметы должны были бы объединяться (собираться) и разъединяться (разбираться) с помощью одних и тех же (одинаковых) Действий, происходящих по одному, общему для всех направлению. Однако такое объединение реального сложносоставного предмета невозможно. Каждый сложносоставной предмет не похож на другой (кроме однотипных предметов). Разъединение сложносоставного предмета по «математическому типу», т. е. так, чтобы перемещения деталей для всех без исключения сложносоставных предметов были одинаковы (как одинаковы единичные перемещения в Мат. Действии «Умножение» и «Деление»), для реального сложносоставного предмета невозможны. Сама постановка вопроса о счётном смысле собирания сложносоставного предмета абсурдна.

Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить» не могут быть преобразованы в Мат.Действия, поскольку в Действиях руки реальными предметами «Объединить» и «Разъединить» не происходит счетных переместительных манипуляций с предметами с помощью руки. Каждый сложносоставной предмет объединяется и разъединяется (собирается или разбирается) как уникальный предмет, в котором каждая деталь доставляется рукой на предназначенное ей место с помощью уникального Действия.

Для полного ответа на этот вопрос предположим, что следующими после Мат.Действий «Умножение» и «Деление» должны были бы стать, выполненные рукой ученика, по правилу Базисных Действий Мат.Действия «Объединить» и «Разъединить» по отношению к реальным сложносоставным предметам. Такими Мат.Действиями (манипуляциями) могли бы стать одинаковые манипуляции по объединению предмета по правилам (сначала) «Приблизить» и (затем) «Соединить» или Мат.Действия руки ученика по разъединению реального сложносоставного предмета по правилу (сначала) «Разделить» и (затем) «Удалить (Отдалить)», когда равные доли разъединяемого предмета разделяются и отдаляются по общему для них правилу в одном направлении и сохраняются в том порядке, в котором они отъединялись от основного предмета и отдалялись от него. Как могло бы быть выполнено рукой ученика такое перемещение частей реального предмета? Перемещение ЧЕГО

должно было бы произойти? Какой мог бы быть способ универсального разъединения рукой ученика любого сложносоставного предмета, так чтобы иметь возможность восстановить его (его форму) в процессе обратной, объединяющей предмет манипуляции руки им? В чем бы состояла счетность (счетная сущность) этого Действия? Поскольку все реальные предметы имеют разную форму, универсальное объединение и разъединение их по одному и тому же правилу перемещения оказывается невозможным. Если Кучка (составной предмет) не имела определенной формы и поэтому порядок (способ) ее разделения на «части» не имел значения, то при объединении и разъединении сложносоставных предметов разной формы способ разъединения и порядок перемещения имеют главное значение. Используя Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить», невозможно перемещать предметы для целей их счета, т. е. учета изменения количества предметов в одном акте в разных местах близкого пространства.

Итак, для реальных предметов выполнить с помощью руки Мат.Действие (манипуляцию) разъединения на составные части и объединения из составных частей оказывается невозможно. Можно предположить, что такое разъединение и объединение было бы возможно не для реальных предметов, а для идеальных объектов, таких как график функции, когда он делится в одной плоскости на равные по толщине сечения  $\Delta$ , при этом величина сечения постоянно уменьшается, т. е.  $\Delta \rightarrow 0$ . При таком способе разъединения формы объекта («предмета») множеству бесконечно малых  $\Delta$  соответствует все более точная моментальная (мгновенная) величина формы «предмета» (графика функции).

Возможно, что следующими после Мат.Действий «Умножение» и «Деление» являются Мат.Действия «Дифференцирование» и «Интегрирование», они могут быть выполнены идеально по отношению к идеальным, обладающим оригинальной формой объектам, например, по отношению к графику функции. При этом роль перемещения выполняет сечение Мат.Объекта — «сложносоставного предмета» — при условии  $\Delta \rightarrow 0$ .

Дж. Лакофф пишет: *«Определение математического понятия исчисления производных требует использования таких повседневных понятий, как движение, приближение к границе и т. д.»* [21].

Эти рассуждения указывают на то, что основных Мат.Действий, в основе которых лежат реальные Действия руки на реальные предметы во внешнем мире, может быть всего четыре: Сложение, Вычитание, Умножение, Деление.

## Краткое повторение и заключение

### А

1. Происхождение Базисных Действий и их механизмов можно объяснить тем, что на протяжении эволюции человека в его «психологической» Образной Сфере закрепились способы оптимального манипулирования предметами с помощью руки.

2. Всего существует восемь Базисных Действий: «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», «Объединить», «Разъединить», «Сохранить», «Разрушить» (ПРИ, УДА, СОЕ, РАЗ, ОБЪ, РАЗЪ, СОХ, РАЗР). Базисные Действия есть основные правила (программы, архетипы) для выработки конкретных Действий руки субъекта (человека) в отношении предметов и формирования по сенсорно-проприоцептивному принципу механизма единичного Базисного Действия или Образа-Алгоритма (О-А).

3. О-А есть двойной Образ восприятия, образованный воспринятым Системой Восприятия ребенка (человека) сенсорно (прежде всего, зрительно) и проприоцептивно собственного Действия (своей) руки на предмет. О-А образован сенсорным Образом восприятия, или ОБРАЗОМ О-А, и проприоцептивным Образом восприятия, или АЛГОРИТМОМ О-А, который является мышечным правилом выполнения данного Действия руки. Сенсорно-проприоцептивный способ формирования механизма Действия руки или О-А назван ПРИНЦИПОМ О-А [30–34].

4. В течение первых 2,5 лет после рождения ребенок еще не способен познавать предметы, так как его Система Восприятия не способна воспринимать как отдельные предметы руку и предмет, которым манипулирует рука. В этот период ребёнок не познаёт предметы, но в сфере восприятия ребенка формируются О-А как мозговые механизмы «чистых» Действий (манипуляций) руки предметами, как СПОСОБЫ манипулирования рукой с предметом по правилам восьми Базисных Действий. В этот период формируются О-А как механизмы «чистых» Действий по Базисным правилам ПРИ, УДА, СОЕ, РАЗ, ОБЪ, РАЗЪ, СОХ, РАЗР.

5. С появлением у ребенка в возрасте 2,5 лет системы мотивации (потребности) и первых целенаправленных Действий Система Восприятия начинает воспринимать предметы как отдельные объекты в поле зрения и формирует Образы предметов. При целенаправленном манипулировании конкретным предметом Образ предмета сцепляется с О-А как с «чистым» механизмом (способом) Действия руки на данный предмет, при этом формируется механизм Действия руки конкретным предметом. Он

представлен единичным конкретным Действием в отношении реального предмета, выполненным во внешнем мире по правилу одного из восьми Базисных Действий. Так формируется О-А ПРОСТОГО ДЕЙСТВИЯ Приблизить, Удалить (Отдалить), Соединить, Разделить, Объединить, Разъединить, Разрушить, Сохранить как механизм единичного Действия (манипулирования) рукой конкретным предметом во внешнем мире по правилу одного из восьми Базисных Действий.

6. После того как сформировано большое число О-А Простых Действий как единичных Действий на конкретные предметы, с их помощью в целенаправленных актах начинают познаваться предметы. Предметы познаются в их функциях, функции предметов могут быть активными и пассивными. Каждая функция предмета представлена единичными Простыми Действиями, объединенными в последовательность. Так, функция познаваемого предмета молотка «забить молотком гвоздь» есть последовательность трех О-А Простых Действий: замах молотка — О-А Простого Действия «Отдалить»; приближение молотка к гвоздю — О-А Простого Действия «Приблизить»; соприкосновение молотка и шляпки гвоздя — О-А Простого Действия «Соединить».

7. Все без исключения предметы познаются по сенсорно-проприоцептивному принципу О-А в активных или пассивных функциях. К предметам мы относим как ограниченные, обладающие формой объекты (тела, предметы), так и лишённые «границ» объекты, например, поля (электрическое, гравитационное и т. д.).

Предметы познаются в единичных функциях. Для каждой единичной функции формируется О-А Функции предмета, представленный ОБРАЗОМ и АЛГОРИТМОМ Функции Предмета. О-А Функции состоит из О-А Простых Действий, объединенных в последовательность, т. е. О-А единичной Функции познания предмета есть сумма О-А Простых Действий, с помощью которых предмет был познан.

Для каждого познанного в разных функциях предмета в Образной Сфере субъекта образуется особый сложный объект — Образ предмета, сцепленный с набором О-А Функций данного предмета.

## Б

8. В возрасте 6–7 лет, при обучении ребенка первым Мат.Действиям «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», механизмы Базисных Действий в Образной Сфере инициируют выработку Мат.Действий и формирование Мат.О-А (рис.13).

9. Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» вырабатываются при выполнении учеником Действий (манипулирования) руки реальными предметами (предметами счета) в поле

зрения по правилам четырех Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить».

10. Система Восприятия ученика воспринимает выполнение «счетного» Действия (манипуляции) руки учителя предметами счёта, после чего ученик повторяет действие руки учителя. При повторении Система Восприятия ученика формирует по сенсорно-проприоцептивному принципу О-А данного Действия руки реальными предметами счета, который мы называем МАТ.О-А.

11. Мат.О-А «Сложение» формируется по правилу Базисного Действия «Приблизить»; Мат.Действие «Вычитание» — по правилу Базисного Действия «Удалить (Отдалить)»; Мат.Действие «Умножение» — по правилу Базисного Действия «Соединить»; Мат.Действие «Деление» — по правилу «Разделить».

12. В каждом Мат.Действии (манипуляции) Система Восприятия воспринимает исходные положения предметов в поле зрения, характеристические перемещения предметов и конечное положение предметов. Это становится содержанием ОБРАЗА Мат.О-А.

13. В начале обучения математике формируется четыре набора (совокупности) Мат.О-А «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление». Далее, от ОБРАЗА каждого Мат.О-А отъединяется его копия, которая в Образной Сфере становится «чистым» Образом или МАТ.ОБЩЕФОРМОЙ, не связанной с Мат.О-А. Формируется четыре набора Мат.Общеформ. После этого от наборов Мат.Общеформ, в процессе восходящего абстрагирования формируются четыре Образа высокого уровня абстрагирования — Мат.Суперобщеформы «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

14. Мат.Суперобщеформы «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» — это абстрактные Образы, в них в абстрактной форме представлено содержание ОБРАЗА Мат.О-А каждого типа: отображения двух исходных локусов и конечного локуса, вмещающих предметы счета, собственно характеристические перемещения, приближающие, удаляющие, соединяющие и разделяющие группы предметов.

Мат.Суперобщеформа — главная часть механизма вычисления Мат.Действия, например  $4 + 9$ ,  $7 \times 5$  и т. д. Это собственно механизм перемещения единичных абстрактных объектов (эквивалентов реальных предметов) в абстрактной Образной Сфере.

15. В Образной Сфере мозга человека Мат.Суперобщеформы как абстрактные объекты представляют собой матрицы или шаблоны для выполнения Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» для всего множества чисел.

## В

16. Для человека физический мир (Континуум) представлен в виде объектов и физических явлений. Объекты во взаимодействии с человеком мы называем предметами. Многие очевидные физические явления и обуславливающие их предметы давно известны человеку. Так, люди, не умея вычислять количественные отношения, всегда знали, что «сила» давления воды зависит от массы и высоты ее падения, что длина пройденного пути зависит от быстроты и времени движения, что количество выливаемой воды тем больше, чем больше диаметр водовода и сила (скорость), с которой вода протекает по трубе.

17. Для простых явлений человек мог составить эмпирическую формулу отношений параметров, образующих явление. Сначала явление выделялось наблюдательным человеком из общего числа явлений как самостоятельная, целая физическая реальность. Например, физическое явление — подъем жидкости в капилляре. Его параметры: поверхностное натяжение, радиус канала капилляра, плотность жидкости.

В каждом физическом явлении определялись (выделялись) образующие его «сущности» или параметры, определялись конкретная мера каждого параметра (сантиметр, аршин, литр, килограмм и т. д.) и количество меры (1 метр, 5 граммов, 100 паскалей и т. д.).

18. При становлении математики первым шагом было появление представления о «естественном», или натуральном числе, отделенном от конкретных предметов, используемых как предметы счёта. В Образной Сфере появился Образ числа. В Образе числа символу числа (знаку) соответствуют не конкретные предметы (не Образы конкретных предметов), но абстрактные субъективные «условные единицы» или безличные единичные, абстрактные объекты, лишённые признаков реальных предметов.

Числа в виде Образов чисел не могут существовать в Образной Сфере человека «сами по себе», не участвуя в вычислительных операциях. Одновременно с появлением Образов чисел в Образной Сфере мозга человека начинают формироваться особые нейropsихологические механизмы или системы реализации математических действий, осуществляющие вычисления Мат.Действий (например,  $5 + 3$ ,  $4 \times 3$  и т. д.), в которых участвуют Образы чисел.

19. После того как на основе практических Действий с предметами в торговле, строительном, военном деле было утверждено вычисление Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», оказалось, что Мат.Действия «Сложение» и «Вычитание» могут быть использованы для выражения отношений физических явлений и параметров собственно физических явлений, т. е. кроме счетной сущности

Мат.Действий они имеют способность описывать физические явления в виде формул.

Мат.Действия «Сложение», «Вычитание» применимы к самостоятельным, отдельно взятым, целостным объектам и физическим явлениям общей физической природы (литры, тонны, километры и т. д.).

Мат.Действия «Умножение» и «Деление» выражают отношения параметров, принадлежащих одному физическому явлению.

20. Мат.формула описывает статическую структуру физического явления. При появлении Мат.формулы устанавливаются меры параметров (литры, метры, тонны, дюймы, паскалы и т. д.).

Мат.формула начинает «работать», если для искомого физического явления или параметра физического явления заданы числовые величины параметров, составляющих физическое явление.

21. Минимальное физическое явление состоит из трех параметров, поэтому Мат.формулы многих физических явлений включают три параметра. Один параметр, наиболее явный, благодаря которому физическое явление выделено из других явлений, можно назвать определяющим параметром, два других — образующими параметрами. Во многих случаях количество параметров зависит от того, насколько сложно и полно определено физическое явление. Так, физическое явление, описываемое как закон тяготения материальных масс, включает четыре параметра. Для описания явления протекания воды по трубе достаточно знания давления воды в трубе (скорости) и диаметра трубы, но более полное описание этого явления включает ряд дополнительных параметров, например, длину трубы.

Чем сложнее физическое явление, тем большее количество параметров необходимо выделить для его описания в виде Мат.формулы и определить отношения между параметрами.

Для большинства известных нам физических явлений все составляющие его параметры остаются неизвестными, поэтому Мат.формулы для них не определены.

22. Для вычисления Мат.формулы, т. е. для определения искомого параметра, параметры приводятся к единой системе мер (например, Система СИ). Далее параметрам придаются актуальные для данной ситуации числовые значения. После этого последовательно выполняются Мат.Действия, составляющие Мат.формулу.

## Г

23. Вычисление Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» представляет собой последовательность событий, происходящих в Образной Сфере субъекта. Можно назвать его нейропсихологическим механизмом вычисления Мат.Действий. Процесс

вычисления Мат.Действия мы называем Полным Математическим Действием, или Полным Мат.Действием.

24. Полное Мат.Действие выполняется с помощью СИСТЕМЫ МАТ.ДЕЙСТВИЯ «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», которая состоит из двух частей:

1) система преобразования «Число  $\leftrightarrow$  Образ числа»;

2) Мат.Суперобщформа данного типа Мат.Действия «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Вычисление Мат.Действия в Полном Мат.Действии начинается с момента появления записи (или при произнесении) Мат.Действия в числовом виде (например,  $7 + 9$ ,  $25 - 8$ ,  $7 \times 8$ ,  $18 : 3$  и т. п.) на каком-либо носителе: бумаге, классной доске и т. д.

Вычисление Мат.Действия в процессе Полного Мат.Действия включает три этапа.

На этапе 1 Система преобразования выполняет преобразование каждого из двух чисел (участвующих в Мат.Действии) в Образы чисел, когда каждое число в Образной Сфере представляется в виде наборов единичных абстрактных объектов (условных единиц).

На этапе 2 Система Мат.Действия привлекает Мат.Суперобщформу, соответствующую типу Мат.Действия ( $7 + 9$ ,  $25 - 8$ ,  $7 \times 8$ ,  $18 : 3$ ).

Мат.Суперобщформа каждого типа является своего рода матрицей или шаблоном для выполнения в Образной Сфере Мат.Действий с любыми числами. Главной функцией Мат.Суперобщформы является характеристическое математическое перемещение единичных абстрактных объектов.

При появлении образов двух чисел, состоящих из абстрактных объектов, Мат.Суперобщформа создает Группы абстрактных объектов и образует Исходные локусы 1, 2. После этого она начинает выполнять характеристические перемещения («Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разъединить») Групп абстрактных объектов в Конечные локусы. В Конечном локусе формируется Группа единичных абстрактных объектов, количество которых соответствует результату их перемещения. В Конечном локусе формируется Группа-Результат: Группа-Сумма, Группа-Разность, Группа-Произведение, Группа-Частное.

На этапе 3 Полного Мат.Действия Система преобразования выполняет обратное преобразование Группы-Результата в числовую форму, число, которое как результат вычисления Мат.Действия записывается в графической форме на бумаге, доске.

25. При вычислении Мат.формулы (выражения) образующие их Мат.Действия выполняются в известной последовательности вычисления Мат.выражений.

26. В завершение вычислений всех Мат.Действий, входящих в состав Мат.формулы, получается значение искомого параметра.

## Д

Физический мир, частью которого является человек, познаваем, поскольку представлен предметами и физическими явлениями, обусловленными предметами. Прежде чем будут познаны физические явления, должны быть познаны предметы, обуславливающие (образующие) данное физическое явление.

27. Предметы познаются в разных функциях. При познании предмет познается в одной, единичной функции по сенсорно-проприоцептивному принципу Образа-Алгоритма. После успешного завершения познания предмета в его Функции формируется механизм познания Функции. Это О-А Функции предмета, состоящий из единичных О-А Простых Действий, в которых представлены единичные Простые Действия руки субъекта на данный предмет. О-А Функции предмета может содержать от двух (познание швейной иглы, молотка и т. д.) до миллионов и более (познание океана, горы и т.д.) организованных в блоки О-А Простых Действий. Основой О-А Простых Действий являются О-А Действий руки на предметы, большинство которых выработаны в период раннего детства, в возрасте до 2,5 лет.

28. Физические явления выявляются и познаются при образовании нового явления в результате сближения или отдаления двух отдельных объектов или явлений одной физической природы, такие явления выражаются в Мат.Действиях «Сложение» и «Вычитание».

Также целые физические явления познаются с помощью Мат.формул (физического явления), в которых представлены выявленные параметры, совокупность которых образует физическое явление. В Мат.формуле параметры находятся в отношении «Умножение» и «Деление».

Полное и совершенное знание человека о какой-либо части физического мира представлено физическим явлением и предметами, образующими данное явление.

## Е

29. Базисные Действия «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить» способны обеспечить выполнение Действий, обладающих счетными свойствами в отношении реальных предметов путем однократного или многократного их перемещения в поле зрения. В Счетных (математических) Мат.Действиях «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» происходят перемещения в поле

зрения реальных предметов. Они происходят однократно или многократно с помощью стандартных простых актов перемещения одного и того же количества предметов из определенного места в одно и то же общее место «сбора» предметов.

30. Базисное Действие «Приблизить» обеспечивает (поддерживает) содержание практического счетного Мат.Действия «Сложение». Оно состоит в том, чтобы из двух групп предметов создать одну большую общую группу предметов и определить количество предметов в ней.

Базисное Действие «Удалить (Отдалить)» обеспечивает содержание практического счётного Мат.Действия «Вычитание». Оно состоит в том, чтобы одну группу предметов вычленил из другой группы и определить, сколько предметов осталось в прежней группе.

Базисное Действие «Соединить» обеспечивает содержание практического счетного Мат.Действия «Умножение». Оно состоит в том, чтобы из неопределенного количества неорганизованных предметов путём однотипных актов перемещения одного и того же количества предметов создать организованную Кучку предметов, количество предметов в которой известно.

Базисное Действие «Разделить» обеспечивает содержание практического счётного Мат.Действия «Деление». Оно состоит в том, чтобы исходную Кучку организованных предметов, количество предметов в которой известно, равномерно распределить по некоторому количеству конечных Кучек и определить, сколько предметов содержит каждая конечная Кучка.

31. Базисные Действия «Объединить» и «Разъединить» не способны обеспечить счетные свойства Действиям руки на предметы в поле зрения во внешнем мире. Они обеспечивают Действия по созданию или разъединению сложносоставного предмета, каждое такое Действие уникально. Поэтому Базисное Действие «Объединить» и «Разъединить» лишены счетных свойств. Этим объясняется факт существования всего четырех Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление».

Базисному Действию «Сохранить» соответствует функция, которую выполняет математический знак «Равенства» (=).

## Ж

32. Если собственно параметры физического явления, отношения параметров и исходные величины параметров в Мат.формуле правильно выделены и определены, т. е. Мат.формула верна, то величина искомого параметра в процессе вычисления совпадает с ожидаемой величиной.

Если для конкретных числовых величин параметров результат вычисления Мат.формулы совпадает с ожидаемым результатом или подтверждается последующей проверкой физического явления, то мы говорим, что Мат.формула верна и что математика РАБОТАЕТ.

Восемь Базисных Действий выработаны в процессе исторического развития человека как оптимальные варианты всех возможных Действий человека на предметы внешнего мира с помощью руки. Математика работает, потому что Действия руки человека на предметы (предметы счета) при выработывании Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление», выполненные по правилам Базисных Действий «Приблизить», «Удалить (Отдалить)», «Соединить», «Разделить», приводят к формированию в мозговой Образной Сфере человека сенсорно-проприоцептивного механизма Действия — Мат.О-А.

От Мат.О-А абстрагируется Мат.Суперобщформа, она выполняет по правилам Базисных Действий перемещения единичных абстрактных объектов, в которые при вычислении Мат.Действий «Сложение», «Вычитание», «Умножение», «Деление» были преобразованы числа, в которых в свою очередь представлены величины параметров Мат.формулы, описывающей изучаемое явление физического мира.

Сама Мат.формула представлена Мат.Действиями, сущностью (содержанием) которых являются сущности (содержания) Базисных Действий «Приблизить», «Удалить», «Соединить», «Разделить», выработанных в процессе эволюции в действиях человека с помощью руки на предметы внешнего мира (объекты физического мира, Континуума).

## Литература

1. *Александров А. Д.* Избранные труды. Т. 3: Статьи разных лет. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 2008. С. 526–531.
2. *Арбиб М.* Метафорический мозг. М.: Мир, 1976. 296 с.
3. *Барыбин К. С.* Методика преподавания алгебры. М.: Просвещение, 1965. 345 с.
4. *Бернштейн Н. А.* О построении движений. М.: Книга по требованию, 2012. 253 с.
5. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. М.: Мир, 1965. 292 с.
6. *Вежбицкая А.* Понимание культур через посредство ключевых слов / Пер. с англ. А. Д. Шмелева. М.: Языки славянской культуры, 2001. 288 с.
7. *Вернадский В. И.* Размышления натуралиста. Пространство и время в неживой и живой природе. М.: Наука, 1975. 174 с.
8. *Вигнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Успехи физ. наук. 1968. Т. 94, вып. 3. С. 535–546.
9. *Выготский Л. С.* Научное наследство. Собр. соч.: В 6 т. М.: Педагогика, 1984. Т. 6. 400 с.
10. *Газзанига М.* Кто за главного? Свобода с точки зрения нейробиологии / Пер. с англ. под ред. А. Якименко. М.: АСТ: CORPUS, 2017. 368 с.
11. *Гибсон Дж.* Экологический подход к зрительному восприятию. М.: Прогресс, 1988. 464 с.
12. *Гурфинкель В. С., Левик Ю. С.* Концепция схемы тела и моторный контроль // Интеллектуальные процессы и их моделирование. Организация движений. М.: Наука, 1991.
13. *Гуссерль Э.* Картезианские размышления. М.: Наука, 2006. 315 с.
14. *Гуссерль Э.* Собрание сочинений. Т. 3 (1). Логические исследования. Т. II (1). М.: Гнозис, 2001. 576 с.
15. *Де Фриз Г.* Избранные произведения. М.: Медгиз, 1932. 148 с.
16. *Дорофеев Г. В., Петерсон Л. Г.* Математика. 6 класс. Ч. 2. М.: Баласс: С-инфо, 2002.
17. *Евклид.* Начала. Кн. VII–X. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. 511 с.
18. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984. 446 с.
19. *Князева Л. Е.* Методика рациональных чисел в 5–6 классах: Учеб.-метод. пособие для студентов педвузов, профиль «Математика». Ростов н/Д: РГПУ, 2008. 39 с.
20. *Лакофф Дж., Нуньес Р.* Откуда взялась математика: как разум во плоти создает математику // Горизонты когнитивной психологии:

Хрестоматия. М.: Языки славянских культур: Рос. гос. гуманитар. ун-т, 2012. С. 29–47.

21. *Леонтьев А. Н.* Деятельность. Сознание. Личность. М.: Политиздат, 1975. 304 с.

22. *Мамчур Е. А.* Ненаблюдаемые сущности современной физики: социальные конструкции или реальные объекты? // Эпистемология и философия науки. 2017. Т. 51, № 1. С. 106–123.

23. *Мах Э.* Познание и заблуждение // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 74 (подстрочное примечание).

24. *Мендель Г.* Опыты над растительными гибридами. М.; Л.: Сельхозгиз, 1935. 112 с.

25. *Монтессори М.* Впитывающий разум ребенка. СПб.: Благотворительный фонд «Волонтеры», 2009. 320 с.

26. *Монтессори М.* Помоги мне сделать это самому. М.: Издат. дом «Карапуз», 2000. 272 с.

27. *Обухова Л. Ф., Шаповаленко И. В.* Формы и функции подражания в детском возрасте. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. 112 с.

28. *Пиаже Ж.* Речь и мышление ребенка. М.: Римис, 2008. 249 с.

29. *Пляшкевич В. Л.* Базисные действия человека. Новосибирск: РИЦ «Новосибирск», 2017. 308 с.

30. *Пляшкевич В. Л.* Значение Образа-Алгоритма как механизма произнесения и написания слова речи // Тр. 7-го Междунар. форума по когнитивному моделированию (IFCM-2019). Ч. 2. Когнитивное моделирование в лингвистике (CML-2019), Ретимно (Греция, о. Крит), 5–15 сент. 2019 г. Ростов н/Д: Фонд науки и образования, 2019. С. 122–129.

31. *Пляшкевич В. Л.* Когнитивное значение Образа-Алгоритма в передаче действия руки от родителей детям // Тр. 7-го Междунар. форума по когнитивному моделированию (IFCM-2019). Ч. 3. Когнитивное моделирование в науке, культуре, образовании (CMSCE-2019), Ретимно (Греция, о. Крит), 5–15 сент. 2019 г. Ростов н/Д: Фонд науки и образования, 2019. С. 337–344.

32. *Пляшкевич В. Л.* Когнитивное значение Образа-Алгоритма (О-А) как механизма действия руки предметом // Когнитивное моделирование: Тр. 6-го Междунар. форума по когнитивному моделированию (CMSCE-2018). Ч. 2. Когнитивное моделирование в науке, культуре, образовании, Тель-Авив (Израиль), 30 сент. – 7 окт. 2018 г., Ростов н/Д: Фонд науки и образования, 2018. С. 319–325.

33. *Пляшкевич В. Л.* Образ-Алгоритм как мозговой механизм действия руки предметом и произнесения слова речи // Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2019: Тр. 6-й Всерос. конф., 23–27 сент. 2019 г., Н. Новгород: ИПФ РАН, 2019. С. 145–148.

34. *Пляшкевич В. Л.* Представление об Образе-Алгоритме как о механизме действия руки предметом // Новые подходы к изучению классических проблем: Материалы 9-й Всерос. с междунар. участием конф. с элементами научной школы по физиологии мышц и мышечной деятельности, посвящ. памяти Е. Е. Никольского. М.: ГНЦ РФИМБП РАН, 2019. С. 60.
35. *Прибрам К.* Языки мозга. М.: Прогресс, 1975. 464 с.
36. *Пчёлко А. С.* Методика преподавания арифметики в начальной школе: Пособие для учителей. М.: Учпедгиз, 1949. 432 с.
37. *Сеченов И. М.* Рефлексы головного мозга. М.: Изд-во АСТ, 2014. 352 с.
38. *Теплов Б. М.* Избранные труды: В 2 т. Т. 1. М.: Педагогика, 1985. 328 с.
39. *Тхостов А. Ш.* Психология телесности. М.: Смысл, 2002. 287 с.
40. *Шварц А. Ю.* Роль чувственных представлений в математическом познании и понимании математики // Психологические исследования: Электрон. науч. журн. 2011. № 3. [Электрон. ресурс] Режим доступа: <http://psystudy.ru>.
41. *Шварц А. Ю.* // Ч1 на Московском семинаре по когнитивной науке, 01.04.2005. [Электрон. ресурс] URL: <https://youtu.be/lhtg6ZlujDA>
42. *Шеррингтон Ч.* Интегративная деятельность нервной системы. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1969. 390 с.
43. *Шрёдингер Э.* Что такое жизнь с точки зрения физики. М.: Рипс, 2009. 176 с.
44. *Эббингауз Г.* Очерк психологии. СПб.: Издание О. Богдановой, 1911. 242 с.
45. *Эльконин Д. Б.* Избранные психологические труды. М.: Педагогика, 1989. 560 с.
46. *Эльконин Д. Б.* Психическое развитие в детских возрастах: Избр. психол. тр. М.: НПО «МОДЭК», 2001. 416 с.
47. *Юнг К. Г.* Психические типы. СПб.: Ювента; М.: Издат. фирма Прогресс-Универс, 1995. 718 с.
48. *Яковлев В. И.* Предыстория аналитической механики. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 328 с.
49. *Boehme R., Hauser S., Gregory J. Gerling, Markus Heilig, and Håkan Olausson.* Distinction of self-produced touch and social touch at cortical and spinal cord levels // PNAS. 2019. V. 116, N 6. P. 2290–2299. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <https://doi.org/10.1073/pnas.1816278116>.
50. *Esther F. Kutter, Jan Bostroem, Christian E. Elger, et al.* Single neurons in the human brain encode numbers // Elsevier Neuron. 2018. V. 100. P. 753–761.

51. *Gallagher S., Cole J.* Body Schema and Body Image in a Deaf-ferented Subject // *J. Mind Behavior*. 1995. V. 16. P. 369–390.
52. *Heyes C.* Transformational and associative theories of imitation // *Imitation in animals and artifacts*. Cambridge: MIT Press 2002. P. 501–523.
53. *Noson S. Yanofsky.* Cornell Uninersity. Why mathematics works so well (submitted on 28 Jun. 2015). [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [Arxiv.org/abs/1506.08426](https://arxiv.org/abs/1506.08426) (submitted on 28 Jun 2015).
54. *Thompson E.* Life and mind: from autopoiesis to neurophenomenology. A tribute to Francisco Varela // *Phenomenology Cognitive Sci.* 2004. V. 3. P. 381–398.
55. *Varela Francisco J., Thompson Evan, Rosch Eleanor.* The embodied mind: Cognitive science and human experience. Cambridge: MIT Press, 1991.
56. Wyzant: Order of operation lessons. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: [https://www.wyzant.com/resources/lessons/math/algebra/order\\_of\\_operations](https://www.wyzant.com/resources/lessons/math/algebra/order_of_operations)
57. *Yarbus A. L.* Eye Movements and Vision. N. Y.: PlenumPress, 1967. 222 p.

## Summary.

### Neuropsychological mechanisms of the main mathematical actions

The monograph shows that the basis of mathematical Actions "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division" are Basic Human Actions "Move closer", "Move away", "Join", "Divide", "Unite", "Separate", "Destroy", and "Keep (Save)". Their neuropsychological mechanism is shown/

1. Part I of the monograph shows how Images-Algorithms are formed according to the rules of Basic Actions. It is asserted that there are eight Basic Actions:

Basic Actions are universal "rules" or "programs" (archetypes) for all actions of the human hand by objects of the physical world.

Eight Basic Actions are formed in the process of evolution Of the action of the human hand by objects. Basic Actions are realized in separate specific human hand Actions with objects.

The mechanism of human hand Action with an object (Singular Crown-act) is called Image-Algorithm (I-A).

The image-Algorithm is formed as a double sensory-proprioceptive image of perception in the process of perception by the subject's Perception System of its own action with the object.

Image-Algorithm consists of an IMAGE and an ALGORITHM.

An IMAGE is a sensory (visual, auditory, etc.) Image of perceiving the Action of one's own hand in the field of view.

An ALGORITHM is a proprioceptive image of perception in which the muscular rule of performing an action with a hand is represented.

In The Image-Algorithm, the IMAGE and the ALGORITHM exist as one in unbroken unity.

This is the simplest psychic object in the sphere of perception

Images-Algorithms are the mechanisms of action of the subject's hand, they are formed according to the rules of Basic Actions "Move closer", "Move away", "Join", "Divide", "Unite", "Separate", "Destroy", and "Keep (Save)".

All forms of human activity with the help of the hand are represented by single individual actions of the hand performed according to one of the Basic rules.

Each form of human activity with the help of the hand is an original combination of individual actions according to the rules of Basic Actions,

similarly to a combination of 4 nucleotides (thymine, adenine, guanine, cytosine) in living organisms' DNA.

Image-Algorithms of a hand Action with an object are formed right after a child's births as "pure" hand actions with objects (before the beginning of objects' cognition). They are formed as a "way" of manipulating the hand with an object. Further, in conjunction With the image of the object, Image-Algorithms provide knowledge of objects in their functions.

A person born as "nobody" into a foreign to him or her external world at first has to develop Actions of his or her hand, by means of which he or she will further cognize objects of the external world in their functions.

This gives him the opportunity to survive in the real world.

Image-Algorithm of a hand Actions with an object is the only "way" of human interaction with objects belonging to external physical world.

In the form Of an Image-Algorithm the external object becomes part of the inner world of a person, and forms the inner world of a person.

Then with appearance of the "need" a child (subject) with the help of Image-Algorithms begins purposeful cognition of objects in their functions.

\*\*\*

2. In Part II of the monograph, it is shown that when teaching mathematics, a student performs mathematical actions with the help of a hand with real objects (counting objects). It performs a Checkmate Actions "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division" according to the rules of 4 Basic Action "Move closer", "Move away", "Join", "Divide".

When teaching mathematical operations Mathematical operation "Addition" is performed according to the rule of the Basic Action "Move closer" (Approach); Mathematical operation "Subtraction" performed by the rule of the Basic Action "Move away (zoom Out)"; Mathematical operation "Multiplication" — "to Join"; "Divide" — "Divide".

When performing a mathematical Action in the field of view with real objects in the brain sphere, a mathematical Image-Algorithm is formed according to the sensory-perceptual principle

Mathematical Image-Algorithm is formed as a double sensory-proprioceptive image of perception in the process of perception by the subject's Perception System of its own mathematical Action with objects (counting objects) in the field of view.

The Formed Mathematical Image-Algorithm of each type form in the brain sphere sets (associations, groups) "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division".

A copy of the IMAGE, called the Mathematical Form, is separated from the IMAGES of Mathematical Image-Algorithm.

From each set of Mathematical Forms "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division" is abstracted an IMAGE called Mathematical SuperForm. Four types of super-Forms are formed: Addition, Subtraction, Multiplication, and Division.

Mathematical SuperForms are abstract mechanisms for performing calculations of Mathematical Actions in the brain, for example  $3+8$ ,  $7-5$ ,  $7\times 9$ ,  $12 : 4$ .

This is the template in which Mathematical operations are performed.

When calculating Mathematical Actions, numbers are first converted into single abstract objects.

Next, the Mathematical SuperForm moves abstract objects according to the Mathematical Action according to the rules of the Basic Actions "Move closer", "Move away", "Join", "Divide".

The result of moving abstract objects is converted back to a Number (in numeric form). This number is the result of calculating this Mathematical Action .

Thus, the action of the subject's hand becomes a neuropsychological mechanism for calculating Mathematical Action.

Mathematical formulas describing physical phenomena of the external world consist of Mathematical Actions "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division".

Calculation of Mathematical Actions included in the Mathematical formula is performed using Mathematical superForms "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division", the origin of which is due to the action of the hand in relation to objects of the physical world.

Thus, the eight Basic Actions formed in the course of the evolution Of human hand actions by objects become Mathematical superForms, which are used to calculate Mathematical formulas that accurately (correctly) describe the physical phenomena of the physical world. The world we belong to.

Basic Actions "Move closer", "Move away", "Join", "Divide", "have counting properties. When performing hand Actions with real objects (counting objects) in the field of view, they are used to move items in the process of counting objects.

When performing the Mathematical Actions "Addition" and "Subtraction", the objects of the account are moved once in the same direction.

When performing the Mathematical Actions "Multiplication" and "Division", the objects of the account are repeatedly moved in the same direction.

Basic Actions "Unite", "Separate", "Destroy", and "Keep (Save)". are devoid of counting properties. Therefore, there are only four main mathematical actions: "Addition", "Subtraction", "Multiplication", "Division".

Научное издание

Пляшкевич В. Л.

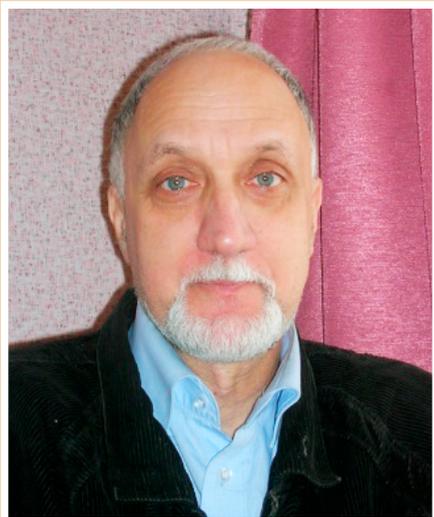
**НЕЙРОПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ  
ОСНОВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ**

*Издаётся в авторской редакции*

Компьютерная вёрстка: *Мельников К. Л.*  
Отпечатано в издательстве «Академиздат»  
(ООО «Агентство маркетинга инноваций»)  
www.academizdat.ru e-mail: knigi@academizdat.ru

630048, г. Новосибирск, ул. Немировича-Данченко, д. 137, оф. 6  
Тел.: +7 (383) 263-24-88, +7 (913) 909-90-85  
Подписано в печать 3.05.2020.

Тираж 70 экз. Заказ № 368  
Усл. печ. л. 9,8. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Печать цифровая.



### **Пляшкевич Виктор Леонидович**

родился в 1947 году. В 1972 году окончил Новосибирский медицинский институт.

Работал в отделении диагностики в Новосибирском институте патологии кровообращения (директор – акад. Е. Н. Мешалкин). Далее – в отделе нейрофизиологии в лаборатории механизмов регуляции памяти под руководством профессора Р. Ю. Ильюченка в Институте физиологии Сибирского отделения АМН (Новосибирский Академ-городок).

С помощью метода регистрации Вызванных Потенциалов и вегетативных показателей исследовал «след памяти» в глубинных структурах мозга животных.

В отделении детской неврологии г. Новосибирска исследовал электроэнцефалографическую активность детей с патологией ЦНС, активность эпилептического очага в состоянии бодрствования и во время сна с одновременной регистрацией вегетативных показателей (КГР, дыхание, RR-ритм, двигательная активность).

В Институте клинической и экспериментальной медицины (директор – акад. В. П. Казначеев), в лаборатории профессора А. В. Трофимова изучал эффекты воздействия гипомангнитного поля в условиях гипомангнитной камеры на мозг и вегетативную нервную систему здорового человека и при некоторых видах патологии ЦНС.

В Институте экспериментальной медицины (Ленинград, директор акад. Н. П. Бехтерева) в отделе Клинической нейробиологии под руководством профессора Д. К. Камбаровской исследовал биоэлектрическую активность глубинных структур мозга человека с помощью метода вживлённых электродов и центральную регуляцию ритма сердца.

