

ПЕРМСКИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

Сборник материалов
VII Всероссийской конференции
с международным участием,
посвященной памяти профессоров
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого
и Д. В. Любимова

22–24 октября 2020 г.



Пермь 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт механики сплошных сред УрО РАН

ПЕРМСКИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ

Сборник материалов VII Всероссийской конференции
с международным участием,
посвященной памяти профессоров
Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова

22–24 октября 2020 г.



Пермь 2020

УДК 532.5
ББК 22.25
П275

Пермские гидродинамические научные чтения : материалы П275 всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Электронные данные. – Пермь, 2020. – 46,3 Мб ; 447 с. – Режим доступа: <http://www.psu.ru/files/docs/science/books/sborniki/permskie-gidrodinamicheskie-nauchnye-chteniya-2020.pdf>. – Заглавие с экрана.

ISBN 978-5-7944-3563-4

Представлены материалы всероссийской конференции, проходившей на базе Пермского государственного национального исследовательского университета 22–24 октября 2020 г. Конференция посвящена памяти руководителей Пермской гидродинамической научной школы – ведущей научной школы Российской Федерации – профессоров Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого и Д. В. Любимова.

Тематика сборника охватывает широкий спектр актуальных исследований в области физической гидродинамики, перспективных материалов и технологий, физики мягких конденсированных сред.

Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов естественнонаучных специальностей вузов.

УДК 532.5
ББК 22.25

*Издается по решению ученого совета физического факультета
Пермского государственного национального исследовательского университета*

Ответственные за выпуск: *Т. П. Любимова, Л. С. Клименко*

ISBN 978-5-7944-3563-4

© ПГНИУ, 2020

Организаторы

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Институт механики сплошных сред УрО РАН

Председатель конференции

Любимова Т.П. – д.ф.-м.н., профессор, заслуженный деятель науки РФ.

д.ф.-м.н. Е.А. Демехин, Краснодар
д.ф.-м.н. М.Ю. Жуков, Ростов на Дону
д.ф.-м.н. О.А. Кабов, Новосибирск
д.ф.-м.н. В.В. Козлов, Новосибирск
д.ф.-м.н. В.Г. Козлов, Пермь
проф. А.К. Колесников, Пермь
д.ф.-м.н. И.Ю. Макарихин, Пермь
д.ф.-м.н. В.Э. Малышкин, Новосибирск
акад. РАН В.П. Матвеевко, Пермь
проф. А. Моштаби, Тулуза, Франция
проф. А. Непомнящий, Хайфа, Израиль
д.ф.-м.н. Н.В. Никитин, Москва
д.ф.-м.н. Е.Н. Пелиновский, Нижний Новгород
чл.-корр. РАН В.В. Пухначев, Новосибирск
проф. Б. Ру, Марсель, Франция
д.ф.-м.н. Н.Н. Смирнов, Москва
д.ф.-м.н. П.В. Трусов, Пермь
д.ф.-м.н. П.Г. Фрик, Пермь
д.ф.-м.н. Ю.Д. Чашечкин, Москва
проф. В. Шевцова, Брюссель, Бельгия

Локальный организационный комитет

Т.П. Любимова
Л.С. Клименко
М.И. Петухов
Т.В. Демина

К.А. Гаврилов
Н.А. Зубова
Я.Н. Паршакова

Содержание

Пленарные лекции

C. Gualtieri Mega-rivers under the global change: some field observations from Amazon, Orinoco and Yangtze	10
E.V. Ermanyuk Wave attractors: geophysical applications	11
L.O. Filippov Investigation of the effect of process water salinity on the fine particle flotation	12
D. Fornasiero Kinetics of particle-bubble interaction in flotation.....	13
О.А. Кабов Испарительное охлаждение микроэлектроники с высоким тепловыделением.....	14
T.P. Lyubimova, A.P. Lepikhin, Ya.N. Parshakova, C. Gualtieri, S. Lane, B. Roux. Influence of hydrodynamic regimes on mixing of waters of confluent rivers	15
A. Nepomnyaschy, A. Samoiloва, I. Faizrakhmanova, I. Simanovskii. Excitations and control of oscillatory interfacial instabilities	16
Y. Ni, G. Moradi, Z. Cao, S. N. Lane Lagrangian simulation of gravel particle trajectories at a 90° river confluence.....	17
E. Pelinovsky, T. Talipova. Korteweg-de Vries hierarchy in mechanics of continuum media	18
Е.Н. Пелиновский, А.А. Куркин, О.Е. Куркина, М.В. Кокоулина, А.С. Епифанова Анализ динамики коронавируса с помощью логистических моделей.....	19
B. Roux, E. Alekseenko Sedimentary dynamics of muddy sediments in a narrow and shallow channel confluenting a wide reservoir in a windy area.....	20
I.I. Ryzhkov, S.V. Kozlova, V.E. Zaluzniak, M.M. Simunin Control of ion transport in nanoporous membranes by electric field: theory and experiment	21

Материалы секционных докладов

Burago N.G., Fedyushkin A.I. Numerical solution of the Stefan problem.....	23
Абрамов А.Г., Смирнов С.И., Китанина Е.Э., Смирнов Е.М. Нестационарные вихревые структуры, формирующиеся в нагреваемой быстровращающейся кольцевой полости с транзитным осевым потоком охлаждающего воздуха	28
Алабужев А.А. Влияние неоднородности подложки на продольные колебания цилиндрической капли в ограниченном объеме жидкости	38
Алабужев А.А., Кашина М.А. Вынужденные колебания и параметрическая неустойчивость цилиндрической капли при круговых вибрациях.....	43
Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. О влиянии размера нагревателя на структуру течений в двухслойной системе	46
Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н. Характеристики течений в двухслойной системе при неоднородном испарении.....	52
Бекежанова В.Б., Шефер И.А. Влияние гравитации на характеристики пространственной неустойчивости стратифицированного двухфазного течения	59
Брацун Д.А., Костарев К.Г. Естественная конвекция в среде высших животных ..	65
Брацун Д.А., Мизёв А.И., Мошева Е.А., Писмен Л.М., Сираев Р.Р., Шмыров А. В. О механизмах перемешивания с помощью вынужденной и естественной конвекции в микрожидкостных устройствах	68

Брацун Д.А., Сираев Р.Р. Управление перемешиванием в проточном химическом реакторе с помощью электро-осмотического воздействия.....	71
Бугаенко А.А., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса и её частные решения	80
Бухаров Д.Н., Кучерик А.О., Аракелян С.М. Гидродинамическая модель осаждения углеродной островковой нанопленки	85
Васильев А.Ю., Сухановский А.Н. Особенности теплообмена в турбулентной конвекции при смешанных граничных условиях	93
Вертгейм И.И., Закс М.А. Трёхмерные двоякопериодические течения с прокачкой.....	98
Виноградов Д.А., Ивочкин Ю.П., Тепляков И.О. Электровихревое перемешивание жидкого металла в полусферическом объеме	106
Володин И.В., Алабужев А.А. Линейная неустойчивость длинноволновой конвекции Марангони в тонкой пленке под действием касательных вибраций	114
Воробьев А.М., Прокопьев С.А., Любимова Т.П., Загвозкин Т.Н. Капиллярное давление на границе двух смешиваемых жидкостей.....	120
Вяткин А.А., Сабиров Р.Р. Влияние вибраций на тепловую конвекцию во вращающемся цилиндрическом толстом слое	124
Вяткин В.А., Брацун Д.А. Определение границы устойчивости двухслойной системы смешивающихся жидкостей с линейными законами диффузии	127
Герцен Т.А., Любимова Н.Ю. Неустойчивость растекающейся полимерной пленки по жидкой подложке.....	130
Глухов А.А., Сидоров А.С. Роль термофореза и седиментации частиц в конвекции магнитных жидкостей в узких каналах при подогреве снизу	133
Демин В.А., Марышев Б.С., Меньшиков А.И. О пороге десорбции при прокачке наножидкости через пористую среду.....	148
Демин В.А., Петухов М.И., Шмырова А.И., Шмыров А.В. О поведении пленки нерастворимого сурфактанта при переходе в равновесие	155
Денисова М.О., Костарев К.Г. Диффузия ПАВ малой концентрации из всплывающей капли	162
Денисова М.О., Костарев К.Г. Диффузия реагента из медленно всплывающей капли с поверхностной химической реакцией.....	165
Евграфова А.В., Сухановский А.Н. Теплообмен в условиях городской среды.....	168
Ельгищев В.А., Колесниченко И.В. Развитие электровихревого течения жидкого металла в цилиндрическом объеме под действием внешнего магнитного поля.....	172
Засимова М.А., Левченя А.М., Смирнов С.И., Смирнов Е.М. Подковообразные вихревые структуры в окрестности цилиндрического выступа, возмущающего турбулентный свободно-конвективный пограничный слой на вертикальной пластине.....	176
Иванцов А.О., Любимова Т.П. Динамика капли смешиваемой жидкости в пористой среде в поле тяжести	182
Иванцов А.О., Любимова Т.П. Моделирование динамики околоскритической жидкости при вибрационном воздействии в условиях невесомости	186
Ингель Л.Х. Возникновение регулярного течения у наклонной поверхности в стратифицированной турбулентной среде	189
Ингель Л.Х. Об эффекте обращения направления конвекции в двухкомпонентной жидкости	194

Казачинский А.О., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование нестационарного течения придонной части восходящего закрученного потока газа	200
Карпунин И.Э., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Неустойчивость Саффмана-Тейлора колеблющейся межфазной границы в радиальной ячейке Хеле-Шоу.....	207
Клименко Л.С., Марышев Б.С. Влияние диффузии на транспорт пассивной примеси через бесконечный двумерный массив вихрей	211
Клименко Л.С., Марышев Б.С. Концентрационная конвекция в горизонтальном слое пористой среды с учетом закупорки при высокой концентрации примеси.....	217
Козлов В.Г., Власова О.А. Осцилляционная динамика границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкостей в прямом щелевом канале	223
Козлов В.Г., Дементьева Ю.С., Кобелева В.С., Петухова М.А. Устойчивость границы раздела жидкостей с высоким контрастом вязкости в неравномерно вращающейся полости	228
Козлов В.Г., Рысин К.Ю., Вяткин А.А. Вибрационная конвекция во вращающемся горизонтальном плоском слое.....	234
Козлов М.В., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Фатталов О.О., Кугаевская А.А. О механизме селективного закрепления пузырьков под действием ультразвука в растворах NaCl и KCl при дегазации	238
Козлов Н.В. Исследование конвекции двойной диффузии при вибрациях	241
Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Влияние сорбции на конвективную устойчивость в слоистой пористой системе.....	246
Колчанова Е.А., Колчанов Н.В. Генерация крупномасштабной конвекции продольными вибрациями в слое жидкости с пористым включением.....	249
Кугаевская А.А., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Фатталов О.О., Козлов М.В. Экспериментальное исследование возникновения парогазовых пузырьков в воде и растворах солей, под действием ультразвука.....	253
Куликов Ю.М., Сон Э.Е. Сеточная сходимость интегральных характеристик двойного сдвигового слоя.....	257
Кучинский М.О., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Клименко Л.С., Фатталов О.О. Экспериментальное и численное исследование распределение акустического давления в сонохимическом реакторе.....	264
Любимова Т.П., Муратов И.Д. Конвекция в наклонной прямоугольной области пористой среды, насыщенной жидкостью.....	270
Любимова Т.П., Паршакова Я.Н. Численное моделирование поступления загрязненных грунтовых вод в р. Вятку.....	274
Любимова Т.П., Рушинская К.С., Зубова Н.А. Влияние уровня тяжести на возникновение и нелинейные режимы конвекции бинарной смеси в прямоугольной полости при подогреве снизу	278
Мандрыкин С.Д., Колесниченко И.В., Фрик П.Г. Динамика полоидальных электровихревых течений жидкого металла в слабом внешнем магнитном поле	281
Мизёв А.И., Мошева Е.А., Ощепков В.О. Диффузионные механизмы неустойчивости в многокомпонентных растворах	285
Мизёв А.И., Мошева Е.А., Шмыров А.В., Ощепков В.О. Развитие оптических методов для измерения концентрационной зависимости коэффициента диффузии в водных растворах	288
Мингалев С.В., Сипатов А.М., Абрамчук Т.В. Численное исследование влияния параметров топлива на характеристики аэрозоля капель в пневматической форсунке в двухмерном приближении	291

Мусихин А.Ю., Зубарев А.Ю. Магнитный поле-индуцированный циркуляционный поток в феррожидкостях	295
Некрасов О.О., Смородин Б.Л. Модулированные бегущие волны в плоском конденсаторе при модуляции заряда на катоде	300
Никулин И.Л., Демин В.А. Математическое моделирование упругонапряжённого равновесия диэлектрической плёнки на поверхности проводящей жидкости в переменном магнитном поле	304
Никулина С.А., Перминов А.В., Любимова Т.П. Влияние высокочастотных вибраций малой интенсивности на конвективное течение в замкнутой квадратной полости	307
Полежаев Д.А., Козлов В.Г. Экспериментальное изучение влияния осцилляций воздуха в каналах переменного сечения и гранулированных средах на диффузию пара.....	312
Полосков И.Е. Моделирование в задачах математической физики с последствием.....	317
Прокопьев С.А., Любимова Т.П., Воробьев А.М. Моделирование вытеснения несмешивающихся жидкостей в системе капилляров с помощью метода фазового поля.....	326
Проскурин А.В. Математическое моделирование неустойчивого течения в изогнутом канале при помощи метода выборочного подавления частот	329
Роготнев А.А., Никитюк А.С., Наймарк О.Б., Баяндин Ю.В. Метаболизм и пространственно-временная динамика локализации тепла при раке молочной железы	333
Русаков С.В., Гилев В.Г., Кондюрин А.В., Рахманов А.Ю. Моделирование диффузионно-кинетических процессов в слое переменной толщины	337
Рыбкин К.А., Любимова Т.П., Фатталов О.О., Кучинский М.О. Исследование динамики парогазовых пузырьков, дрейфующих в жидкостях под действием ультразвука вблизи поверхности твердых тел.....	343
Садилов Е.С. Совместное влияние электрического поля и вибраций на неустойчивость жидкого диэлектрического слоя со свободной границей	348
Сидорова А.А., Тонков Л.Е. Проекционные методы с коррекцией скорости для численного решения задач гидродинамики.....	353
Смирнов Е.М., Иванов Н.Г., Панов Д.О., Смирнов П.Е. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в свободно-конвективном пограничном слое при возмущающем действии прямоугольных препятствий	361
Сокольчик Д.П., Макаров Д.В. Концентрационные волны диамагнитной примеси в холестерическом жидком кристалле	367
Сомов С.А., Иванов А.С. Исследование конвекции в сухом и влажном воздухе методом голографической интерферометрии.....	374
Субботин С.В., Ширяева М.А., Козлов В.Г. О роли направления круговых колебаний ядра на структуру течений во вращающейся сфере.....	379
Сухановский А.Н., Евграфова А.В. Толщина пограничного температурного слоя в случае протяженного дискретного источника тепла	382
Уточкин В.Ю., Сираев Р.Р., Брацун Д.А. Центробежная конвекция в двухслойной системе реагирующих смешивающихся жидкостей.....	387
Фатталов О.О., Любимова Т.П., Рыбкин К.А., Лунегов И.В., Кучинский М.О. Экспериментальное исследование кавитационной эрозии кварца при наличии молекул ПАВ.....	391

Фахретдинова Р.Р., Душин В.Р., Смирнов Н.Н., Никитин В.Ф., Коленкина (Скрылева) Е.И., Макеева М.Н. Вычислительное моделирование вытеснения жидкости из пористой среды с учетом наличия трещины гидроразрыва.....	397
Федюшкин А.И., Пунтус А.А. Обучение студентов моделированию процессов гидродинамики и тепломассопереноса.....	413
Хохрякова К.А., Паравин Д.К., Колесниченко Е.В. Колебания слоя магнитной жидкости на жидкой подложке	424
Циберкин К.Б. Бегущие волны намагниченности в магниторазбавленном материале	434
Черепанов И.Н., Смородин Б.Л. Конвективные течения коллоидной суспензии в горизонтальном слое, толщина которого порядка длины седиментации.....	438
Шмырова А.И., Мизёв А.И. Гравитационные механизмы неустойчивости в несмешивающихся реагирующих средах в условиях реакции нейтрализации.....	442

Проекционные методы с коррекцией скорости для численного решения задач гидродинамики

А. А. Сидорова, Л. Е. Тонков

^a Удмуртский государственный университет 426034, Ижевск, Университетская улица, 1
email: sidorova_albina@bk.ru
letonkov@mail.ru

На примере решения задачи обтекания обратного прямого уступа потоком несжимаемой вязкой жидкости, движущейся под действием заданного градиента давления выполнено сравнение решений уравнений Навье-Стокса, полученных с помощью проекционных численных схем. Рассмотрены в сравнении варианты проекционных схем с коррекцией поля скорости, с коррекцией скорости в приращениях и классическая схема PISO.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость; уравнения Навье-Стокса; проекционный метод.

Velocity-correction projection methods for numerical solving incompressible flows

А. А. Sidorova^a, L. E. Tonkov^b

^a Udmurt State University, Universitetskaya St. 1, 426034, Izhevsk
email: sidorova_albina@bk.ru
letonkov@mail.ru

The interest in using projection methods to overcome this difficulty in time-dependent viscous incompressible fluid flows started in 1968 with the work of Chorin and Temam. The most attractive feature of projection methods is that, at each time step, one only needs to solve a sequence of decoupled elliptic equations for the velocity and the pressure. Original projection scheme composed of two sub-steps for each time step: the pressure is treated explicitly or ignored in the first sub-step and is corrected in the second one. Therefore they are called pressure-corrected schemes. The article is concerned with a numerical investigation of pressure-driven incompressible flow by velocity-corrected projection schemes. The main idea is to switch the role of the velocity and the pressure in the pressure-correction schemes. The viscous term is treated explicitly in the first substep and the velocity is corrected accordingly in the second substep. The numerical results obtained are compared with classical Chorin-Temam and PISO schemes.

Keywords: incompressible liquid flows; pressure driven flow; velocity-correction projection scheme, Navier–Stokes equations

1. Введение

Одним из подходов к построению приближенного решения системы уравнений Навье-Стокса [1] для несжимаемой вязкой жидкости является проекционный метод, предложенный Чориным (Chorin) и Темамом (Temam) (1968). В основе метода лежит теорема Гельмгольца о разложении векторного поля на соленоидальную и потенциальную составляющие. Применительно к решению задачи о течении несжимаемой вязкой жидкости, проекционный метод может трактоваться как расщепление исходной системы уравнений по физическим процессам, в котором отдельно учитываются конвективный перенос и действие градиента давления.

2. Математическая модель

Рассматривается система нестационарных уравнений Навье-Стокса, которая описывает течение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

где \mathbf{u} – вектор скорости, ν – кинематическая вязкость, p – давление, отнесенное к плотности среды. Предполагается, что жидкость занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, с границей $S = S_i \cup S_w \cup S_o$, где на S_i и S_o задано значение давления, S_w – непроницаемая твердая стенка.

Основная трудность при численном решении системы уравнений (1) связана с расчетом поля давления, поскольку, в отличие от задач о течении сжимаемой среды, давление не может быть выражено в этом случае через какие-либо другие физические переменные, например, плотность. В данной работе численное решение системы уравнений Навье – Стокса ищется при помощи проекционной схемы. Дискретизация дифференциальных операторов осуществляется методом контрольных объемов на совмещенной сетке, то есть компоненты скорости и давление определяются в центрах ячеек. Известно, что при использовании таких сеток при совместном решении уравнений сохранения импульсов и уравнения Лапласа для давления возникает проблема осцилляций давления (эффект «шахматной доски»). Для устранения аналогичной проблемы в реализацию проекционной схемы вводилась коррекция на основе интерполяции Ри – Чоу (Rhi and Chow).

Основное отличие от классических проекционных схем состоит в том, чтобы поменять роли скорости и давления [2]. На первом этапе из уравнения импульсов определяется скорость, которая удовлетворяет условию несжимаемости, диссипативное слагаемое не учитывается. На втором этапе вычисляется поле промежуточной скорости путем решения уравнений импульса без учета влияния давления.

Характерной особенностью проекционных методов является отсутствие необходимости в совместном определении полей давления и скорости [3]. При этом скалярная функция, имеющая смысл давления, необходима лишь для построения оператора проектирования и не является в привычном смысле аппроксимацией поля гидродинамического давления.

2.1. Стандартная схема с коррекцией скорости

Перепишем систему (1) в полудискретной форме с аппроксимацией первого порядка точности производной по времени

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} = \nabla p^{k+1} - (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^k,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0. \quad (2)$$

При $\tilde{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}_0$ для $\forall k \geq 0$ вычисляются $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$, \mathbf{u}^{k+1} , p^{k+1} решением

$$\begin{cases} \frac{1}{(\Delta t)} (\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^k) + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0, \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(\Delta t)} (\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}) - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = 0, \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\Gamma} = 0 \quad (4)$$

$f(\cdot) = 0$ в данном случае.

Уравнение, связывающее p^{k+1} и $\tilde{\mathbf{u}}^k$, получается путем применения оператора дивергенции к обеим частям уравнения (3) с учетом условия несжимаемости. Таким образом, на первом этапе проекционной схемы по известному полю скорости $\tilde{\mathbf{u}}^k$ решением уравнения Пуассона определяется поле давления

$$\nabla^2 p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^k. \quad (5)$$

Определив поле давления и поле промежуточной скорости, можно явно найти скорость:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \tilde{\mathbf{u}}^k - \Delta t \nabla p^{k+1}. \quad (6)$$

На втором этапе \mathbf{u}^{k+1} подставляется в

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}}{\Delta t} = -(\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\Gamma} = 0 \quad (7)$$

и находится поле промежуточной скорости $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$. Далее цикл вычислений повторяется для следующего шага по времени [2].

2.2. Схема коррекции скорости в приращениях

Аналог схемы коррекции давления в приращениях (в стандартной форме) [2].

Пусть $\mathbf{u}^{*,k+1} = \sum_{j=0}^{r-1} \gamma_j \mathbf{u}^{k-j}$ – экстраполяция $\mathbf{u}(t^{k+1})$ порядка r .

Стандартная форма метода коррекции скорости в приращениях определяется следующим образом: установить $\tilde{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}_0$ и выбрать такое $\tilde{\mathbf{u}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}^{q-1}$, чтобы они

были точными приближениями $\mathbf{u}(\Delta t), \dots, \mathbf{u}(t^{q-1})$ соответственно, далее для $k \geq q - 1$ вычисляются $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}$ решением

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t} \left(\beta_q \mathbf{u}^{k+1} - \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j \tilde{\mathbf{u}}^{k-j} \right) - \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{*,k+1} + \nabla p^{k+1} = f(t^{k+1}), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0, \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{\beta_q}{\Delta t} (\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}) - \nu \nabla^2 (\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{*,k+1}) + (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = 0 \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Выберем $(r, q) = (1, 2)$. Тогда формулы (8) и (9) примут вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\Delta t} (3\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - 4\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}) - \nu \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^k + \nabla p^{k+1} = 0, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = 0, \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2\Delta t} (\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1}) - \nu \nabla^2 (\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}^k) + (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = 0, \\ \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим в двумерной постановке известную задачу об изотермическом течении несжимаемой жидкости в канале с обратным уступом (рис. 1). Единственным числом подобия в данной задаче является число Рейнольдса Re , которое строится по величине средней скорости \mathbf{u}_{cp} в сечении уступа ($x=0$) и высоте канала H . Используемые в дальнейших расчетах параметры среды и геометрия области совпадают с принятыми для вычислительного эксперимента в [4] и соответствуют $Re=800$. Результаты получены на структурированной ортогональной сетке ($n_x = 1601$) x ($n_y = 81$).

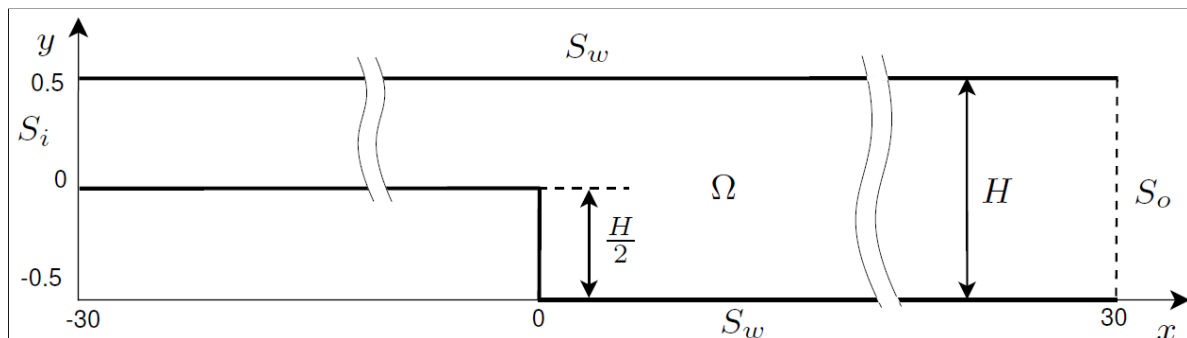


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Значительный практический интерес представляют задачи о течении жидкости в канале под действием перепада давления, определяемого граничными условиями Дирихле на входной S_i и выходной S_o границах Ω . Соответствующие значения p_i и p_o не могут быть произвольными и должны удовлетворять «двумерной проекции» уравнения Пуассона (5)

$$\nabla_{\tau} \cdot \nabla_{\tau} p^{k+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla_{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\tau}, \quad (12)$$

что обеспечивает соблюдение условия несжимаемости на S_i и S_o . Здесь ∇_{τ} – оператор с производными, касательными к поверхностям S_i и S_o , а $\tilde{\mathbf{u}}_{\tau}$ – касательная компонента вектора \mathbf{u} . Уравнение (12), в свою очередь дополняется граничными условиями на контурах Γ_i и Γ_o , ограничивающих S_i и S_o соответственно

$$p_i^{k+1} = p_i \text{ и } p_o^{k+1} = p_o. \quad (13)$$

В случае, когда входная и выходная поверхности нормальны к оси потока дополнительное граничное условие на этих поверхностях сводится к условию

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

где \mathbf{u}_x – нормальная компонента вектора \mathbf{u} .

В рассматриваемой задаче граничные условия на твердой стенке S_w будут иметь вид

$$S_w: \mathbf{u}^{k+1} = 0, \quad (15)$$

и

$$S_w: \frac{\partial p^{k+1}}{\partial n} = 0. \quad (16)$$

Для скорости на S_i и S_o поверхности ставилось условие равенства нулю нормальной компоненты градиента. Распределение давления определялось решением уравнения (12) с граничными условиями (13), которые в двумерной задаче принимают вид

$$S_i: p|_{x=-3} = 1, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_x}{\Delta t}, \quad (17)$$

и

$$S_o: p|_{x=3} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_x}{\Delta t} \quad (18)$$

Кроме того, представлено решение с постоянными по сечению граничными условиями

$$S_i: p = 1 \text{ и } S_o: p = 0 \quad (19)$$

Следует отметить, что численные результаты, соответствующие граничным условиям (17) – (18) в рассматриваемой задаче весьма незначительно отличаются от полученных для условия (19), так как в окрестности S_o устанавливается профиль

скорости близкий к Пуазейлевскому. Требование (14) выполняется за счет того, что входная и выходная границы расположены достаточно далеко друг от друга.

4. Численные результаты

Представленные численные результаты получены при помощи проекционных схем №1 и №2 с шагом по времени $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ и с граничными условиями (19), (15) и (16).

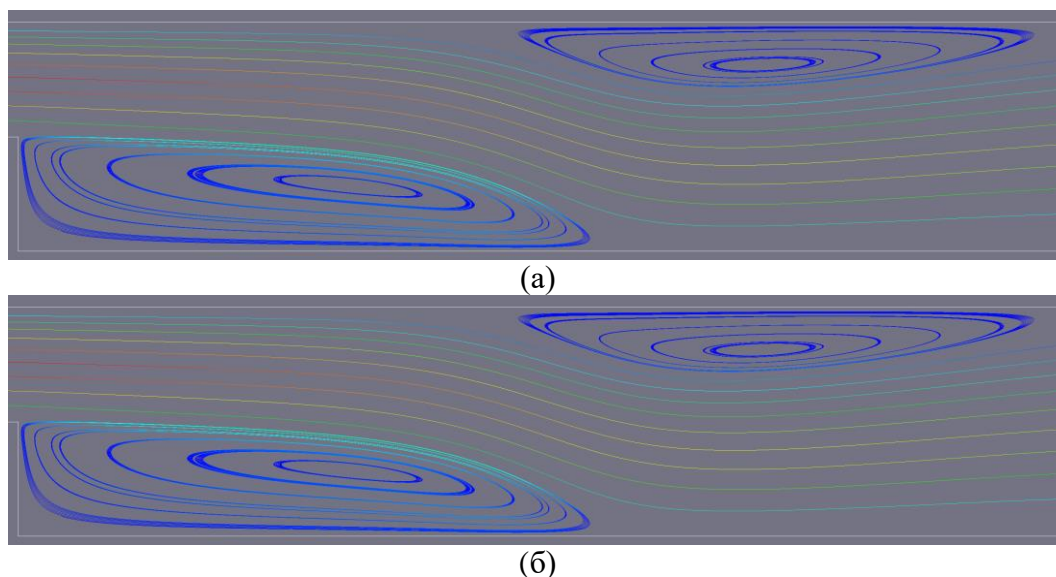


Рис. 2. Линии тока: (а) – расчет по проекционной схеме №1, (б) – расчет по проекционной схеме №2.

Линии тока, представленные на рисунках 2,а и 2,б иллюстрируют основные особенности отрывного течения в рассматриваемом канале. Поток за угловой точкой ступеньки образует рециркуляционный вихрь с точкой присоединения на нижней стенке. Еще одна рециркуляционная зона образуется на верхней стенке, и далее в канале восстанавливается Пуазейлевское течение. Длины и взаимное расположение зон рециркуляционного течения (рис. 2), полученные в данной работе, хорошо согласуются с расчетами, полученными в [5].

На рисунке 3 показаны графики распределений давления вдоль линии $y = -0.05$. Заметим, что вблизи плоскости выхода давление начинает падать по линейному закону, что соответствует полностью развитому потоку [5]. Видно, что на участке после присоединения потока имеется небольшое вертикальное смещение профилей, где максимальное отклонение давления, полученного в нашем расчете, от давления из [5] составляет около 5%.

Это связано с тем, что за нулевой уровень давления принимается значение в углу ступеньки, где решение, строго говоря, является сингулярным. Численные ошибки в этом месте наибольшие, что делает нормировку давления чувствительной к размеру ячейки.

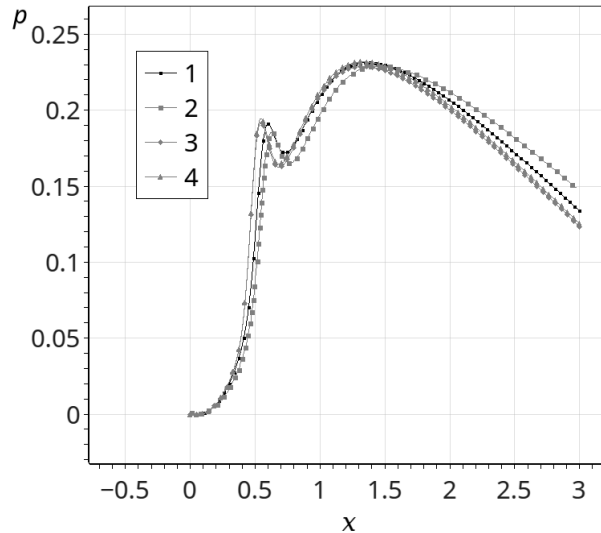


Рис. 3. Распределение давления на нижней стенке $y = -0.05$: 1 – расчет PISO, 2 – расчет [4], 3 – расчет по схеме №1, 4 – расчет по схеме №2.

Профиль поперечной составляющей скорости в сечении канала $x = 1.5$ показан на рисунке 4. Можно видеть, что полученные зависимости практически неотличимы от численных результатов [4, 5] (относительная ошибка составляет менее 1%).

В рассматриваемой здесь задаче профили скорости и давления эволюционируют под действием разности давлений вдоль канала. Таким образом, u_x не является точно параболическим профилем при $x = 0$, и компонента u_y не равна нулю при $x = 0$, хотя и очень мала. При $x = 1.5$ (рис. 4) результаты уже практически неразличимы в масштабе рисунка.

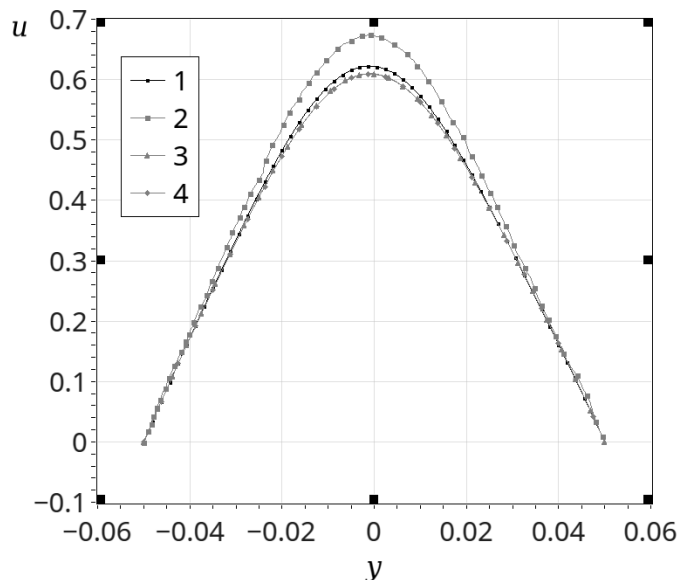


Рис. 4. Профили поперечной скорости в сечении канала $x = 1,5$: 1 – расчет PISO, 2 – расчет [4], 3 – расчет по схеме №1, 4 – расчет по схеме №2.

На рис. 5 показана зависимость от времени величины скорости в точке $(0,0)$ для различных вариантов расчета. Все рассмотренные схемы имеют первый порядок аппроксимации по времени и демонстрируют весьма близкие результаты при решении нестационарной задачи.

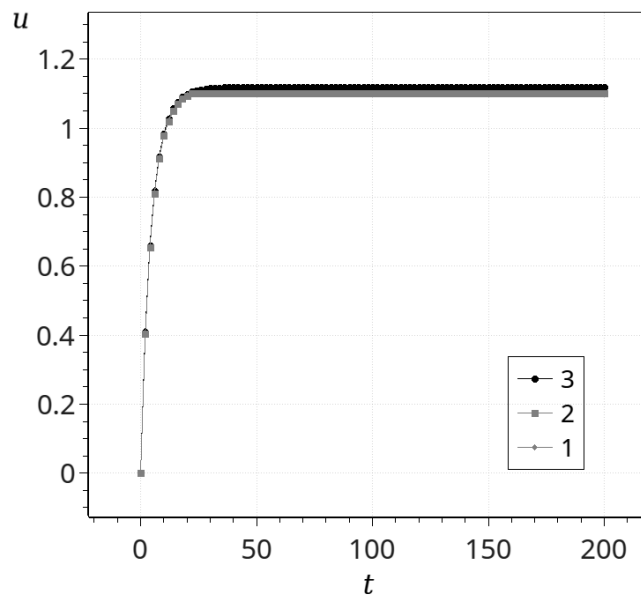


Рис. 5. Проверка сходимости численных схем: 1 – расчет по схеме №1, 2 – расчет по схеме №2, 3 – расчет PISO.

5. Заключение

Рассмотренные схемы с коррекцией скорости представляют интерес как с точки зрения построения более эффективных методов решения систем уравнений Навье-Стокса, так и при решении сопряженных задач взаимодействия потоков жидкости и деформируемого твердого тела (FSI).

В качестве основного недостатка данного подхода отмечается сложность построения численных схем с порядком аппроксимации выше второго, что выражается в необходимости построения специального вида граничных условий для давления и промежуточной скорости.

Список литературы

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. 7-е изд., испр. М. Дрофа, 2003. 840 с.
2. Guermond J. L., Mineev P., Jie Shen An overview of projection methods for incompressible flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006. Vol. 195. P. 6011-6045.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971. 560 с.
4. Fernandez-Feria R., Sanmiguel-Rojas E. An explicit projection method for solving incompressible flows driven by a pressure difference // Computers and Fluids. 2004. Vol. 33. P.463-483.
5. Gartling D. K. A test problem for outflow boundary conditions – flow over a backward-facing step // Internatioan Journal for Numerical Methods in Fluids. 1990. Vol. 11. P. 953-967.