Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

В.Н. Баранов, О.В. Баранова

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ
Метод раскраски. Принцип Дирихле

Учебное пособие

Ижевск

2021

УДК 512.8
ББК 22.11
Б 24

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: А.Г. Ицков, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Прикладная математика и информационные технологии» ФГБОУ ВО «Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова»

Баранов В.Н., Баранова О.В.

Б 24 Элементы дискретной математики. Метод раскраски. Принцип Дирихле: учебное пособие. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. – 168 с.

ISBN 978-5-4312-0876-8

Учебное пособие посвящено экстремальным задачам в дискретной математике. Пособие включает теоретический материал курса лекций по дисциплине «Дискретная математика». Пособие содержит множество примеров. Практическая часть включает задания для самостоятельной работы студентов.

Учебное пособие предназначено для студентов уровней бакалавриата и специалитета, обучающихся по направлениям «Фундаментальная информатика и информационные технологии», «Прикладная информатика», «Фундаментальная и прикладная химия». Пособие будет полезно также студентам бакалавриата и магистратуры других естественно-научных направлений.

УДК 512.8
ББК 22.11

ISBN 978-5-4312-0876-8

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие посвящено исследованию и решению экстремальных задач в дискретной математике, которые традиционно излагаются в курсе комбинаторной геометрии.

Клетчатая бумага (множество точек плоскости с целочисленными координатами) является своеобразным множеством, которое дает возможность при решении чисто геометрических задач воспользоваться методами алгебры, теории чисел и математического анализа, и наоборот, задачи аналитического характера позволяет переводить на геометрический язык. Умение решать задачи на клетчатой бумаге полезно как для будущих математиков, так и для специалистов в области информатики.

Основной упор в пособии сделан на метод раскраски, который часто возникает при исследовании задач, связанных с инвариантами. Эти задачи крайне важны для развития логического мышления у будущих специалистов.

Такие задачи возникают в различных областях математики, в компьютерных науках, в электронике, в других дисциплинах (в том числе в экономике). При этом практически отсутствует систематизированное изложение изучаемых вопросов.

Задачи о раскрашивании различных математических объектов появились сравнительно недавно, во второй половине XVIII века (знаменитая проблема четырех красок была сформулирована в 1878г.). Исследования в этом направлении встречаются в работах Бернсайда, Коши, Фробениуса, Пойа и других математиков. Часто раскрашивание объектов является средством для решения поставленной задачи. Именно такие задачи рассматриваются в данной работе.

Учебное пособие состоит из трех глав.

В первой главе изучается метод шахматной раскраски.

Вторая глава посвящена конструированию раскрасок, удовлетворяющих заданным условиям, и применению различных раскрасок для решения задач.

В третьей главе рассматриваются различные задачи смешанного содержания. Основное внимание уделено применению принципа Дирихле при помощи наделения объектов метками, что можно рассматривать, как раскраску.

В пособии содержится большое количество задач. Многие из них приведены с подробными решениями. Задачи систематизированы по методам их решений. Кроме того, предложено большое количество упражнений для самостоятельной работы, решение которых позволяет читателю правильно оценить приобретенные знания и способствует повышению его математической культуры.

Материал пособия может быть использован студентами старших курсов и магистрами естественно-научных направлений при работе над курсовыми и выпускными квалификационными проектами.

Глава 1

Шахматная раскраска

1.1 Подсчет двумя способами

Прежде чем приступить к обсуждению метода, разберем следующую, давно ставшую классической, задачу.

Задача 1.1. Можно ли разрезать доску 8×8 с вырезанными клетками:

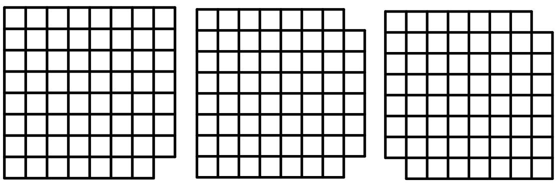


Рис. 1.1: Задача 1.1. Условие: а) б) в)

на прямоугольники 1×2 по линиям сетки?

Ответ: а) нельзя; б) можно; в) нельзя.

Р е ш е н и е. а) Применим метод от противного, которым неоднократно будем пользоваться в дальнейшем. Предположим, что можно разрезать фигуру на прямоугольники 1×2. Прямой подсчет показывает, что оставшаяся часть доски содержит

$64 - 1 = 63$ клетки. Посчитаем количество клеток этой фигуры, исходя из нашего предположения. Каждый прямоугольник содержит две клетки. Значит, фигура состоит из $2n$ клеток, где n — число прямоугольников 1×2, полученных при разрезании. Откуда получаем, что $63 = 2n$, противоречие.

В этом пункте мы использовали метод от противного и подсчет двумя способами, который привел к получению противоречия: четное число равно нечетному.

б) Пример разрезания фигуры:

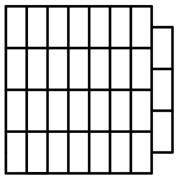


Рис. 1.2: Пример к задаче 1.1.б).

в) После нескольких неудачных попыток разрезать фигуру, возникает желание доказать, что это сделать невозможно. Применим метод от противного, как в пункте а).

Какие численные характеристики есть у доски? Самая первая — это количество клеток. Их в нашей задаче $64 - 2 = 62$. Получаем, что если фигуру разрезать возможно, то прямоугольников должно быть $62/2 = 31$. Пока никакого противоречия, но появилась информация о количестве прямоугольников.

Чтобы получить противоречие, нам необходимо найти еще какие-то численные характеристики, кроме количества клеток. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке, то есть так, чтобы любые две соседние клетки были покрашены в различные цвета: белый и черный, см. рис.1.3.

Прямой подсчет показывет, что на доске 30 белых и 32 черные клетки.

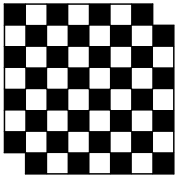


Рис. 1.3: Задача 1.1. Раскраска в пункте в).

Посчитаем белые и черные клетки, предположив, что данную фигуру можно разрезать на прямоугольники 1×2. Любой прямоугольник 1×2, содержащий две соседние по стороне клетки, содержит одну белую и одну черную клетку. Получим, что 31 прямоугольник содержит 31 черную и 31 белую клетки. Получили противоречие: 31=30. Значит, доску на такие прямоугольники разрезать нельзя. □

Введение в этой задаче шахматной раскраски помогло применить метод разбиения на пары: если фигуру можно разбить на прямоугольники, то белые и черные клетки разбиваются на пары; метод подсчета двумя способами: мы непосредственно подсчитали количество черных и белых клеток на доске, а затем посчитали их в предположении, что клетки доски удалось разбить на пары; метод доказательства от противного: предположение, что утверждение верно, привело к равенству 31=32.

Разберем идею раскраски. Мы наделили объекты различными свойствами (раскрасили клетки в два цвета), то есть каждой клетке мы поставили в соответствие один из цветов, дали некую метку. Таким образом, помимо общего числа клеток появились численные характеристики, равные количеству клеток с разными метками. И уже эти характеристики, которых не было вначале, помогли нам решить задачу.

Как придумать метки, сколько их должно быть, по какому правилу их присваивать объектам зависит от конкретной задачи, свойств объектов и, разумеется, от воображения решающего. Трудность решения методом раскраски заключается в том, что изначально раскраска не дана, и ее нужно придумать, как инструмент, для решения конкретной задачи.

Дадим определение шахматной раскраски. Пусть у нас есть множество, в котором введено понятие «соседних» элементов. Например, это могут быть части некоторой геометрической фигуры, где части называются соседними, если имеют общий участок границы. По сути, мы рассматриваем граф, где соседи — это смежные вершины. *Шахматной раскраской такого множества называется наделение элементов двумя цветами — белым и черным, так, что любые два соседние элемента раскрашены в разные цвета.* В теории графов это понятие совпадает с понятием двудольного графа. Вопрос, какие графы являются двудольными, изучается отдельно.

При решении задач используют различные раскраски. Шахматная раскраска среди всех раскрасок занимает такое же место, какое занимает инвариант — четность среди всех инвариантов. Она помогает решать задачи, связанные с чередованием, разбиением на пары, объектами, описываемые при помощи двудольных графов.

Задача 1.2. а) Можно ли при помощи комплекта тетриса из пяти четырехклеточных фигур: прямоугольника 1×4, квадрата 2×2, буквы Т (пьедестал), уголка (буквы L или Г), буквы S, выложить прямоугольник 4×5? Фигурки можно поворачивать и переворачивать; б) можно ли при помощи двух комплектов тетриса накрыть прямоугольник 4×5 в два слоя?

Ответ: а) нельзя; б) можно.

Решение. а) Предположим, что можно. Используем шахматную раскраску прямоугольника 4×5. Получим, 10 черных и 10 белых клеток. Все фигуры тетриса, кроме буквы Т, накрывают по две черные и две белые клетки, так как их можно

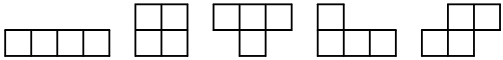
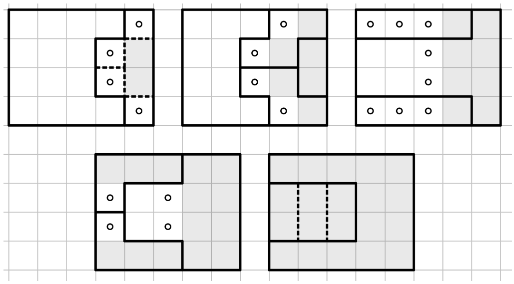


Рис. 1.4: Фигурки тетриса: прямоугольник, квадрат, Т (пьедестал), уголок (L, Г), S.

разрезать на два прямоугольника 1×2.

Буква Т накрывает нечетное число белых и нечетное число черных клеток, так как у центральной клетки три соседних, и все они должны быть одного цвета, отличного от центральной. Если возможно выложить прямоугольник фигурами тетриса, то мы можем представить 10 в виде суммы четырех четных и одного нечетного чисел, а этого сделать нельзя.

б) Например так:



Сначала укладываем две буквы Т, затем две S, два прямоугольника, два уголка и два квадрата. Закрашенные клетки накрыты в два слоя, точками отмечены клетки, накрытые на данный момент в один слой. □

З а м е ч а н и е. Как и в задачах на инварианты, задачи типа пункта б) с ответом «можно», когда достаточно привести пример, полезно включать в занятия, чтобы обучащиеся анализировали условие, а не каждый раз начинали решение с фразы: "используем раскраску".

Задача 1.3. а) Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать или на 9 фигурок, изображенных на рис. 1.5 справа или на 6 фигурок, изображенных на этом же рисунке слева? б) Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать как на фигурки, изображенные на рис. 1.5 справа, так и на фигурки, изображенных на этом же рисунке слева?

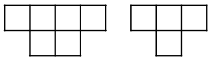


Рис. 1.5: Задача 1.3. Фигуры.

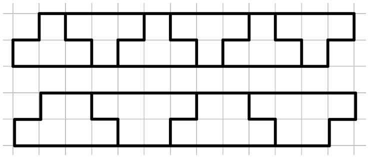
Ответ: а) Не существует. б) Существует:

Р е ш е н и е. Сначала заметим, что если фигурку, изображенную слева, разместить на поле, раскрашенном в шахматную раскраску, то она будет накрывать по три белые и черные клетки, а фигурка, изображенная справа, будет накрывать или одну белую, три черных, либо три белых, одну черную клетки.

а) Предположим, что такая фигура существует. Раскрасим полученную фигуру в шахматную раскраску. Тогда 6 фигур, изображенных слева накроют 18 белых и 18 черных клеток. С другой стороны, 9 фигур, изображенных справа, накроют нечетное число белых и черных клеток. Получили противоречие.

б) Предположим, что такая фигура существует. Раскрасим ее в шахматную раскраску. Так как каждая 6-клеточная фигура содержит поровну белых и черных клеток, то и вся искомая фигура должна содержать одинаковое количество белых и черных клеток. Тогда количество 4-клеточных фигурок, составляющих эту фигуру, должно быть четным. Откуда получаем, что количество клеток в фигуре делится на 8. Получаем, что количество 6-клеточных фигур должно делиться на 4.

Фигура из 24 клеток на картинке может быть разрезана на фигурки обоих видов.



□

З а м е ч а н и е. Отличие этой задачи от предыдущих заключается в том, что мы не знаем вид фигуры, о которой идет речь. Возникает вопрос: а как раскрасить неизвестную клетчатую фигуру в шахматную раскраску? Будем рассуждать так. Мы можем раскрасить любой квадрат в шахматную раскраску, по очереди раскрашивая столбцы. Для любой ограниченной фигуры найдется квадрат, в который она помещается, и стороны клеток фигуры совпадают со сторонами клеток квадрата. Раскрасив весь квадрат, мы получим и раскраску клеток нашей фигуры таким образом, что любые две соседние клетки окрашены в разные цвета.

Во втором пункте раскраска помогла понять, сколько клеток должно быть в фигуре. Осталось сложить 4 фигуры первого типа так, чтобы полученную фигуру можно было разрезать на 6 фигур второго типа.

Задача 1.4. Можно ли разрезать квадрат: а) 10×10; б) 8×8; на фигурки тетриса типа Т? в) При каких $n \in \mathbb{N}$ можно разрезать квадрат $n \times n$ на фгурки тетриса типа Т?

Ответ: а) Нельзя. б) Можно. в) $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$.

Р е ш е н и е. а) Предположим, что можно. Применим шахматную раскраску. Получим 50 белых и 50 черных клеток. Каждая фигурка типа Т накрывает либо одну черную и три белых клетки, либо три черных и одну белую клетки. Пусть фигурок первого типа — x, второго — y. Тогда все фигурки накрывают

$x + 3y$ черных и $3x + y$ белых клеток. Получаем такую систему:

$$\begin{cases} 3x + y &= 50; \\ x + 3y &= 50. \end{cases}$$

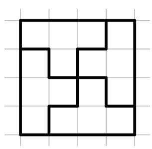
Откуда следует, что

$$\begin{cases} x + y &= 25; \\ x - y &= 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений в целых числах, например, потому, что из первого уравнения следует, что x и y разной четности, а из второго, что одинаковой.

Не составляя систему, можно рассуждать следующим образом: так как черных и белых клеток поровну, то количество фигурок T первого типа должно быть равно количеству фигурок второго, а всего их должно быть $100/4 = 25$.

б) Кавдрат 8×8 можно разрезать на квадраты 4×4, а квадраты 4×4 легко разрезаются на фигурки типа T:



в) Так как фигурка T состоит из 4 клеток, значит, если квадрат $n \times n$ клеток можно разрезать на фигурки типа T, то $n^2 \vdots 4$, и n должно быть четное.

Если $n = 4k$, то можно поступить аналогично пункту б): Квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 4×4, а квадраты 4×4 разрезають на фигурки типа T. То есть, применить постепенное конструирование.

Если $n = 4k + 2$, то можно поступить аналогично пункту а): применив шахматную раскраску, получаем $2(2k + 1)^2$ белых и

$2(2k+1)^2$ черных клеток. Воспользуемся обозначениями из пункта а). Получим систему:

$$\begin{cases} 3x+y &= 2(2k+1)^2; \\ x+3y &= 2(2k+1)^2. \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$\begin{cases} x+y &= (2k+1)^2; \\ x-y &= 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений в целых числах.

Второй способ. Систему можно не составлять, а использовать четность. Количество фигур Т — произведение двух четных чисел, не кратных 4, деленое на 4. Значит, фигур Т — нечетное число. Из подсчета черных и белых клеток, получаем, что фигур первого и второго типа должно быть поровну. □

Замечание. В этой задаче мы не только клетки разделили на два типа, но и фигуры. То есть, использовали две раскраски: клеток и фигур.

Задача 1.5. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурками типа Г и Т. Затем фигурки достали и одну фигурку типа Г заменили на одну четырехклеточную фигурку типа Т. Удастся ли теперь выложить дно той же коробки?

Ответ: Нет.

Решение. Мы не знаем, ни размер коробки, ни количество фигур каждого типа.

Предположим, что выложить удастся. Раскрасим дно коробки в шахматную раскраску.

Сначала заметим, что поскольку дно коробки удалось выложить четырехклеточными фигурами, то всего четное число клеток. Значит, у нас поровну черных и белых клеток (так как прямоугольник с четной стороной можно разрезать на полоски четной длины, а их, в свою очередь, на прямоугольники 1×2, каждый из которых, содержит поровну белых и черных клеток).

Аналогично предыдущей задаче, мы получаем, что если дно коробки удастся выложить фигурками типа Г и Т, то фигурок типа Т — четное число. Но в первом и втором случае количество фигурок типа Т отличается на 1. Противоречие.

□

З а м е ч а н и е. Дно коробки не обязательно должно быть прямоугольным. Достаточно требовать, что дно коробки можно выложить фигурами тетриса. Тогда рассуждения придется немного изменить, так как мы не знаем, как соотносится количество черных и белых клеток. Фигуры типа Г всегда накрывают по две черные и две белые клетки. Количество фигурок типа Т в первом и втором случае отличается на 1. Значит, отличается четность их количества. Так как каждая фигурка типа Т накрывает нечетное число черных клеток, то количество черных клеток, накрытых этими двумя способами, отличается четностью и не может быть равным. Получили противоречие.

Задача 1.6. а) Можно ли разрезать шестиугольник на рис. 1.6 по линиям сетки на 23 равные фигуры? б) Какое наибольшее количество ромбов, состоящих из двух треугольников, можно вырезать из этой фигуры по линиям сетки?

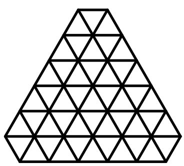


Рис. 1.6: Задача 1.6. Фигура.

Ответ: а) Нельзя. б) 21.

Р е ш е н и е. а) На рисунке 46 треугольников. Значит, разрезать можно только на ромбы, состоящие из двух треугольников, имеющих общую сторону. Раскрасим фигуру в шахматную раскраску.

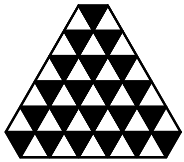


Рис. 1.7: Задача 1.6. Раскраска.

Каждый ромб должен накрывать один белый и один черный треугольник. Однако, их неравное количество: черных — 21, белых — 25.

б) В этой задаче нас интересует не только, можно ли разрезать, но если нельзя, то какое наибольшее количество ромбов можно вырезать. Это задача типа «оценка+пример». Используя шахматную раскраску получаем, что так как каждый ромб содержит черную клетку, значит ромбов не более 21. Пример, как вырезать 21 ромб:

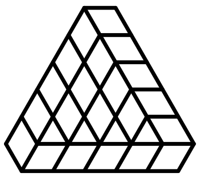


Рис. 1.8: Пример к задаче 1.6.б).

□

Задача 1.7. Можно ли из 13 «кирпичей» $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

Ответ: Нельзя.

В этой задаче мы сталкиваемся с пространственной фигурой. Сначала сделаем общее замечание.

Любую фигуру, составленную из кубиков $1\times1\times1$ с параллельными гранями, которые граничат только или по ребру, или по грани, можно раскрасить в шахматную раскраску. Под шахматной раскраской мы опять понимаем такую раскраску кубиков, что любые два кубика, имеющие общую грань, окрашены в два различных цвета. Действовать можно также, как при раскраске клетчатых фигур на плоскости. Сначала находим достаточно большой параллелепипед, затем раскрашиваем его послойно в шахматном порядке. Роль «доминошки» теперь играет параллелепипед $1 \times 1 \times 2$. Он состоит из двух соседних кубиков и, соответственно всегда содержит по одному кубику каждого цвета.

Р е ш е н и е. Предположим, что мы смогли из 13 «кирпичей» $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре. Раскрасим фигуру в шахматную раскраску. Прямой подсчет показывает, что мы получим 14 черных и 12 белых кубиков. Посчитав кубики в каждом «кирпиче» мы получим, что фигура состоит из 13 белых и 13 черных кубиков. Противоречие.

□

Задача 1.8. В нашем распоряжении имеются «кирпичи», имеющие форму, которая получается следующим образом: приклеиваем к одному единичному кубу по трём его граням, имеющим общую вершину, ещё три единичных куба, так что склеиваемые грани полностью совпадают. Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед $11 \times 12 \times 13$ из таких «кирпичей»?

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Поступим, как в предыдущей задаче. Теперь «кирпичи» напоминают букву Т из тетриса. Аналогично, каждый из таких «кирпичей» содержит нечетное число черных и белых кубиков.

Предположим, что параллелепипед $11 \times 12 \times 13$ можно сложить из таких «кирпичей». Раскрасим его в шахматную раскраску. Разрежем этот параллелепипед на 11 слоев 12×13. В какждом таком слое, также как и в прямоугольнике с четной стороной, поровну белых и черных кубиков. Значит, и во всем параллелепипеде $11 \times 12 \times 13$ белых и черных кубиков поровну,т.е. по $11 \cdot 12 \cdot 13/2 = 11 \cdot 6 \cdot 13$ кубиков каждого цвета.

Теперь посчитаем кубики вторым способом. Наш параллелепипед разбит на $11 \cdot 12 \cdot 13/4 = 11 \cdot 3 \cdot 13$ — нечетное число «кирпичей». Каждый содержит неченое число черных кубиков. Получаем, что вся фигура содержит нечетное число черных кубиков. Но $11 \cdot 6 \cdot 13$ — четное число.

$\square$

В этом параграфе мы познакомились с шахматной раскраской. Все задачи относились к отработке способа подсчета двумя способами. Напомним, что как бы это ни казалось скучным, в каждой задаче необходимо придерживаться логики рассуждений. И если, используется метод от противного, то он тдолжен быть грамотно оформлен. Нельзя раскрасить фигуру во что бы то ни было, до того, как мы предположили, что она существует.

Дополнительные задачи на подсчет двумя способами при помощи шахматной раскраски

Задача 1.9. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разрезать или на четыре трехклеточных уголка, или на три четырехклеточные Т-шки, или на две равные части?

Ответ: Не существует.

Р е ш е н и е. Предположим, что такая фигура существует. Используем шахматную раскраску. Из второго способа разрезания следует, что фигура содержит нечетное число черных и нечетное число белых клеток (как сумма трех нечетных чисел). Если эту же фигуру можно разрезать на две одинаковые части, то они будут содержать по шесть клеток. Пусть одна часть содержит k белых клеток и $6-k$ черных. Возможны два варианта для второй фигуры. Либо она содержит k белых клеток и $6-k$ черных, либо содержит $6-k$ белых клеток и k черных. В любом случае, обе части содержат четное число черных клеток. Противоречие $\square$

Задача 1.10. Каемкой клетчатого прямоугольника (со сторонами, не меньшими двух) назовем полосу ширины 1, идущую по краю прямоугольника. (Прямоугольник $2\times n$, $n \geqslant 2$ является и своей каемкой). Можно ли квадрат а) 2021×2021; б) 2022×2022; покрыть по линиям сетки каемками в несколько слоев (то есть над каждой клеткой квадрата должно быть поровну клеток каемок)?

Ответ: а) Нельзя. б) Можно.

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим шахматную раскраску квадрата 2021×2021. Количества черных и белых клеток не равны. Значит и суммы черных и белых клеток в нескольких слоях, накрывающих квадрат, не могут быть равны. Но эти несколько слоев складываются из каемок, а в каждой каемке одинаковое количество черных и белых клеток в силу чередования.

б) Можно покрыть в один слой прямоугольниками 2×2022. $\square$

Задача 1.11. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×2 можно вырезать из фигуры на рис. 1.9?

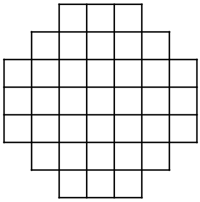


Рис. 1.9: Задача 1.11.

Задача 1.12. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 1.10, на фигурки тетриса, используя как можно меньше фигурок типа Т.

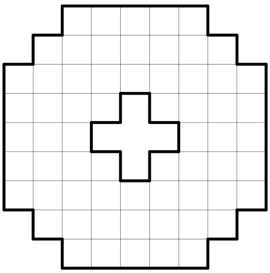


Рис. 1.10: Задача 1.12.

Задача 1.13. Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты — по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

У к а з а н и е. Каждый треугольник накрывает равные по площади куски черного и белого цвета. □

Задача 1.14. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

У к а з а н и е. Покрасьте клетки каждой грани куба в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Посчитайте, на сколько черных клеток больше белых. «Перевес» черных клеток дают согнутые полоски. □

1.2 Чередование

Зачастую шахматную раскраску можно применить в задачах, для того, чтобы увидеть чередование. Напомним основные идеи в задачах на чередования. 1) *Если в некотором процессе объекты двух видов чередуются, то количество объектов одного вида отличается от количества объектов другого вида не более, чем на 1.* 2) *Если процесс начинается и заканчивается на одном объекте (например циклический путь), или начало и конец пути — объекты разных классов, то количество объектов первого вида равно количеству объектов второго вида, а количество шагов в процессе — четное.* Это происходит, например, когда процесс заключается в обходе какой-либо конструкции.

Разберем несколько задач, связанных с обходами.

Задача 1.15. Можно ли конем обойти доску 7×7, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в начальную клетку?

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Используем шахматную раскраску. Каждым ходом конь меняет цвет клетки, на которой стоит. Чтобы обойти всю доску 7×7 и вернуться в начальную клетку, надо сделать 49 ходов. Но после 49 хода конь будет находится в клетке цвета, отличного от начального. □

Задача 1.16. Шахматный король обошёл всю доску 8×8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку. Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов. Диагональный ход — это перемещение фигуры в клетку, имеющую только одну общую вершину, с клеткой, в которой стоит фигура.

Р е ш е н и е. Рассмотрим шахматную раскраску. После диагонального хода король не меняет цвет клетки, на которой стоит. Если ход не диагональный, то меняет. Так как король обошел всю доску и вернулся в начальную клетку, то он сделал четное число не диагональных ходов. Но всего сделано ровно 64 хода, значит, диагональных ходов также четное число. □

Задача 1.17. Можно ли обойти все города на рис. 1.11, побывав в каждом городе ровно один раз? Точки на схеме — города, отрезки, их соединяющие — дороги между городами.

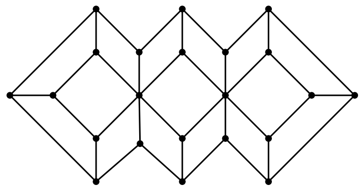


Рис. 1.11: Задача 1.17. Схема карты городов и дорог.

Ответ: Нельзя.

Р е ш е н и е. Раскрасим города в шахматном порядке, то есть так, что по дороге мы переходим из черного города в белый и наоборот:

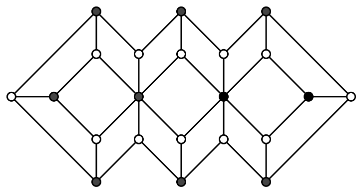


Рис. 1.12: Задача 1.17. Раскраска.

На схеме 10 черных и 12 белых городов. Если можно указать маршрут, проходящий через все города, то в нем должны чередоваться белые и черные города, следовательно, белых городов не может быть на два больше. □

Задача 1.18. Замок имеет форму правильного треугольника, разделенного на 25 маленьких залов той же формы. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. а) Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить. б) Найдите наибольшее число залов, которое ему удастся посетить, если закончить экскурсию он хочет в зале, в котором начал.

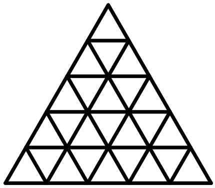


Рис. 1.13: Задача 1.18. Схема замка.

Ответ: а) 21; а) 20.

Р е ш е н и е. Раскрасим комнаты замка в шахматном порядке:

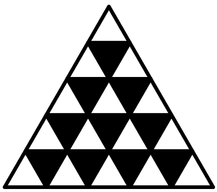


Рис. 1.14: Задача 1.18 Раскраска.

Получится 10 черных и 15 белых комнат. В любом пути черные и белые комнаты чередуются. Так как всего 10 черных комнат, то в любом пути не более 10 черных комнат.

а) Путник может посетить максимум 10 черных и 11 белых комнат. То есть всего не более 21-й комнаты.

б) Путник может посетить максимум 10 черных и 10 белых комнат. То есть всего не более 20-и комнат.

Примеры показаны на рисунке:

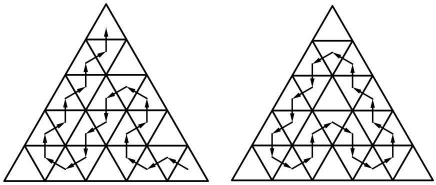


Рис. 1.15: Примеры к задаче 1.18.

□

Задача 1.19. Правильный треугольник разбит на n^2 одинаковых правильных треугольников. Часть из них занумерована числами 1, $2, \ldots, m$, причем треугольники с последовательными номерами имеют смежные стороны. Докажите, что $m \leqslant n^2-n+1$.

Р е ш е н и е. Раскрасим треугольники в шахматную раскраску, верхний угол — белый. Тогда белых треугольников будет $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$, а черных $1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$. Ясно, что два треугольника с последовательными номерами разноцветные. Поэтому среди занумерованных треугольников белых может быть только на 1 больше, чем черных. Следовательно, общее число занумерованных треугольников не превосходит $n(n-1)+1$.

□

В следующей задаче на разрезание мы испоьзуем факт, что в любом клетчатом прямоугольнике, раскрашенном в шахматную раскраску, количестов белых и черных квадратов отличается не более, чем на 1. Один из способов доказательства этого факта — обход «змейкой» данного прямоугольника. В этом пути чередуются белые и черные клетки.

Задача 1.20. На какое наименьшее число прямоугольников можно разбить по линиям сетки решетку, изображенную на рис. 1.16?

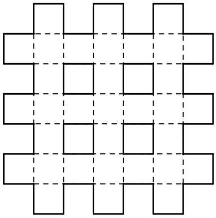


Рис. 1.16: Задача 1.20. Решетка.

Ответ: 15.

Р е ш е н и е. Раскрасим решетку в шахматную раскраску.

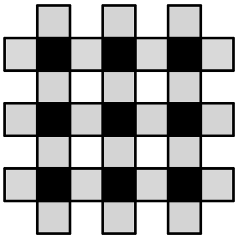


Рис. 1.17: Задача 1.20. Раскраска.

Получится 9 черных и 24 белых клеток. Каждый из прямоугольников может содержать либо равное число белых и черных клеток, либо эти числа будут отличаться на 1. Предположим, что при разрезании получилось n прямоугольников. Обозначим x_i — количество черных, y_i — количество белых клеток в i-прямоугольнике, $i = 1, 2, \ldots, n$. Получаем, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 9,$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 24,$$

$$x_i + 1 \geqslant y_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сложим неравенства и получим, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \geqslant y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + 15 = y_1 + y_2 + \ldots + y_n,$$

откуда получаем, что $n \geqslant 15$.

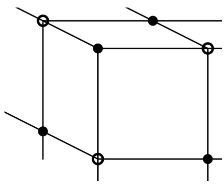
Или, другими словами, понадобится не менее 15 частей, чтобы получить «перевес» в 15 белых клеток, если в каждой части мы можем иметь «перевес» максимум в 1 белую клетку. Пример, как разрезать на 15 прямоугольников строится несложно. □

Задача 1.21. При каких n можно провести в каждом квадратике 1×1 на поверхности куба $n \times n \times n$ диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?

Ответ: Ни при каких.

Р е ш е н и е. Раскрасим узлы сетки на поверхности куба в шахматную раскраску. Подумайте, почему это можно сделать. Диагональ соединяет два узла одного цвета. Значит, если такой путь существует, то он идет или только по белым узлам, или только по черным.

Рассмотрим угол большого куба:



В каждом из трех, прилегающих к нему квадратиков нужно провести диагональ. Если диагонали соединяют точки черного цвета, то мы имеем узел, где сходится три диагонали. Если белого — то получаем путь длиной три звена. Ни то ни другое не может быть частью пути, содержащего все диагонали. □

Дополнительные задачи

Задача 1.22. Конь вышел с поля $a1$ и через несколько ходов вернулся на него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.

Задача 1.23. Напомним, что фигура конь ходит по доске ходом типа $(1, 2)$, то есть в одном из четырех направлений на одну клетку и, перпендикулярно этому направлению в любую сторону, еще на две клетки. Назовем "верблюдом" фигуру, ход которой имеет тип $(1, 3)$. Можно ли пройти ходом "верблюда" с произвольного поля на соседнее по стороне поле на доске 7×7?

Задача 1.24. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Задача 1.25. Можно ли обойти хромым королём (король не может ходить по диагоналям) все клетки шахматной доски, начав в левом нижнем углу и закончив в правом верхнем углу?

Задача 1.26. Замок имеет форму шестиугольника, как на рис. 1.18. В каждой стене между залами проделана дверь. Путник ходит по замку, не посещая более одного раза ни один из залов. Какое наибольшее число залов, которое ему удастся посетить?

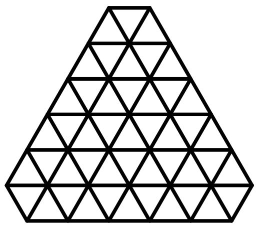


Рис. 1.18: Задача 1.26. План замка.

Задача 1.27. Фишка стоит в левом нижнем углу квадрата 4×4. За один ход она может передвинуться в соседнюю по стороне клетку. Во скольких клетках доски она может закончить свой путь, если обязана побывать во всех клетках по одному разу?

Задача 1.28. На какое наименьшее число прямоугольников можно разбить по линиям сетки фигуру на рисунке 1.19?

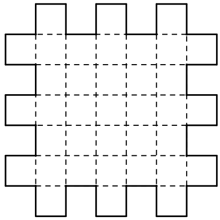


Рис. 1.19: Задача 1.28. Зубчатая доска.

Задача 1.29. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок - на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 – 2 раза, ..., на клетке 9 – 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

Задача 1.30. Замок имеет вид прямоугольника размером 7×9 клеток. Каждая клетка, кроме центральной, — комната замка, а в центральной клетке находится бассейн. В каждой стене (стороне клетки), разделяющей две соседние комнаты, проделана дверь. Можно ли, не выходя из замка и не заходя в бассейн, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Задача 1.31. Прямоугольный участок размера $m \times n$ разбит на квадраты 1×1. Каждый квадрат является отдельным участком, соединенным калитками с соседними участками. При каких размерах участка можно обойти все квадратные участки, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в первоначальный?

Задача 1.32. «Крокодилом» называется фигура, ход которой заключается в прыжке на клетку, в которую можно попасть сдвигом на одну клетку по вертикали или горизонтали, а затем на N клеток в перпендикулярном направлении (при $N = 2$ «крокодил» — это шахматный конь). При каких N «крокодил» может пройти с каждой клетки бесконечной шахматной доски на любую другую?

Задача 1.33. В левом нижнем углу доски 9×9 стоят 9 шашек, образуя квадрат 3×3. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат 3×3 в: а) левом верхнем углу; б) правом верхнем углу; в) центральном квадратике 3×3?

Задача 1.34. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Указание. Центры граней в пути всегда идут между вершинами. Вершин на две больше, чем центров граней. □

Задача 1.35. Шахматный слон ходит по диагонали на любое число клеток. Назовем ход слона нечётным, если слон за этот ход переместился на нечётное число клеток. Однажды слон, сделав несколько ходов, попал из правого нижнего в левый верхний угол шахматной доски. Докажите, что он сделал нечётное число нечётных ходов.

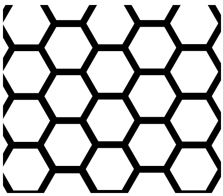
Указание. Так как слон ходит только по диагонали одного цвета в шахматной раскраске, то не имеет смысла раскрашивать всю доску. Можно в шахматную раскраску раскрасить только диагонали, по которым ходит слон.

1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0
1		1		1		1	
	0		0		0		0

Подумайте, чем отличаются четные и нечетные ходы слона. □

Задача 1.36. Блоха прыгает по плоскости. Каждый прыжок имеет длину 1 см и его направление повернуто по отношению к предыдущему на 60°(в любую сторону). После нескольких прыжков блоха вернулась в начальное положение. Докажите, что длина ее пути — четное число.

У к а з а н и е. Блоха прыгает по узлам шестиугольной сетки. Эти узлы можно раскрасить в шахматную раскраску.



Задача 1.37. Улитка ползет по стволу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90°, а в промежуках между поворотами она ползет по прямой. Докажите, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

Задача 1.38. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (каждое ровно по 1 разу). Оказалось, что числа, отличающиеся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловые клетки, разность чисел в которых делится на 6?

1.3 Дополнительные соображения

Рассмотрим несколько задач, когда раскраска помогает увидеть конструкцию.

Задача 1.39. Расставьте в квадрате 4×4 числа $1, 2, \ldots, 16$ так, чтобы каждое число было либо меньше всех чисел, стоящих в соседних (по стороне) клетках, либо больше всех этих чисел.

Р е ш е н и е. Заметим, что если клетка является наибольшей среди всех своих соседей, то любая из соседних клеток уже не может обладать этим свойством, то есть она является наименьшей среди своих соседей. Получаем, что для каждой пары соседних клеток одна максимальная среди своих соседей, другая — минимальная. Значит, можно использовать шахматную раскраску: минимальные числа стоят в белых клетках, максимальные — в черных. Поставим в белые клетках все числа от 1 до 8, в черные: $9 - 16$. □

Задача 1.40. Можно ли отметить несколько клеток на доске 10×10 так, чтобы при любом разбиении доски на прямоугольники 1×2 нашлось ровно 23 прямоугольника, содержащих ровно одну отмеченную клетку?

Ответ: Можно.

Р е ш е н и е. Используем шахматную раскраску. Тогда при любом разбиении доски ровно 50 прямоугольников будет содержать ровно одну черную клетку. Если мы перекрасим несколько черных клеток в белый цвет, то при любом разбиении доски на прямоугольники 1×2, каждая из оставшихся черных клеток будет соответствовать ровно одному прямоугольнику разбиения. Значит, можно отметить любые 23 черные клетки. □

Задача 1.41. Таблица 5×5 заполнена числами $1, 2, \ldots, 25$, причем любые два последовательных числа записаны в соседних (имеющих общую сторону) клетках. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одном столбце?

Ответ: 4.

Р е ш е н и е. Раскрасим доску в шахматную раскраску. Главная диагональ — белая. По условию задачи два последовательных числа стоят в клетках разного цвета. Так как у нас 13 нечетных чисел и 13 белых клеток, то в белых клетках стоят нечетные числа, в черных — четные. Значит, в каждом столбце не менее двух четных чисел, одно из которых точно составное. Значит, в любом столбце не более 4 простых чисел. Начало расстановки чисел, когда в первом столбце ровно 4 простых числа:

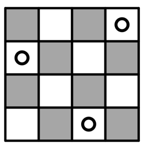
3	4	5		
2	1	6		
11	10	7		
12	9	8		
13	14			

□

Задача 1.42. В каждой клетке таблицы 4×4 записано по числу так, что сумма соседей у каждого числа равна 16 (соседними являются клетки, имеющие общую сторону). Чему равна сумма всех чисел таблицы?

Ответ: 96.

Р е ш е н и е. Раскрасим клетки доски в шахматную раскраску. Найдем сумму чисел в черных клетках. Для этого отметим три белые клетки:

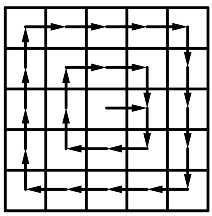


У этих клеток соседи — все черные клетки, причем ни одна черная клетка не граничит сразу с двумя отмеченными белыми. Значит, сумма всех соседей этих трех клеток — это сумма всех чисел в черных клетках. То есть, 48. Аналогично, сумма чисел во всех белых равна тоже 48.

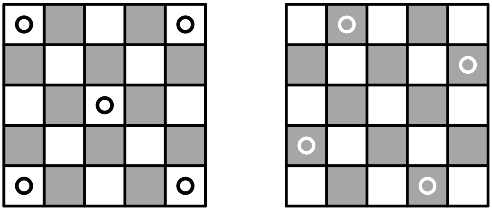
Упражнение. Докажите, что в центральном квадрате 2×2 могут стоять только нули. □

Задача 1.43. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. По команде каждый из жуков перелетает на одну из соседних клеток. а) Какое наименьшее количество клеток после этого может оказаться свободными? б) Какое наибольшее количество клеток после этого может оказаться свободными?

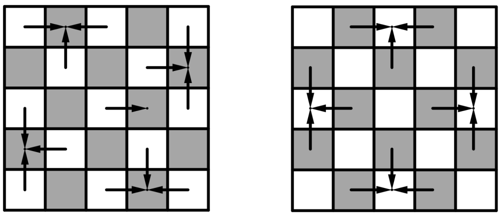
Ответ: а)1; б) 16. **Р е ш е н и е.** Раскрасим квадрат в шахматную раскраску. Главная диагональ — белая. На доске 12 черных и 13 белых клеток. Заметим, что все жуки, находившиеся в белых клетках, переползут в черные и наоборот. Значит, 12 жуков из черных клеток займут не более 12 белых клеток. Значит, хотя бы одна клетка окажется свободной. Пример, когда ровно одна клетка окажется свободной:



Отметим пять белых и четыре черные клетки:



Заметим, что жуки из этих клеток не могут переползти в одну клетку, то есть нет клетки, граничащей сразу с двумя отмеченными. Значит, из пяти белых отмеченных клеток жуки переползут в разные черные клетки. Таким образом, жуки из пяти белых отмеченных клеток займут не менее пяти черных клеток. Аналогично, жуки из черных клеток займут не менее четырех белых клеток. То есть, свободными окажутся не более 16 клеток. Пример, когда будет занято ровно 9 клеток:



□

З а м е ч а н и е. В этих двух задачах помимо раскраски, мы использовали прием, который называется — «метод отмеченных множеств». Ему будет посвящен отдельный цикл задач.

Задача 1.44. а) На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли на доске в результате таких ходов встретиться все возможные позиции расположения этих двух фишек, причем ровно по одному разу? б) А если разрешается сдвигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

Ответ: Нет в обоих пунктах.

Р е ш е н и е. Предположим, что это возможно. При перемещении фишки меняется цвет клетки, в которой она стоит. Тогда можно сказать, что все позиции делятся на 4 категории по цвету клеток, в которых стоят фишки: (б,б), (б,ч), (ч,б), (ч,ч). Разобьем все позиции на два типа: обе фишки стоят в клетках разного цвета и фишки стоят в клетках одного цвета. Заметим, что при перемещении фишки в соседнюю по стороне клетку, позиции первого и второго типа чередуются. Позиций первого типа — $64*32$, второго — $32*31+32*31=64*31$. Количество позиций первого и второго типа отличаются на 64, значит, все позиции не могут чередоваться, встречаясь ровно по одному разу.

Заметим, что в этой задаче шахматная раскраска помогла разбить позиции на две категории. Таким образом, идея чередования использовалась два раза. □

Задача 1.45. Можно ли обойти доску а) 8×8; б) 9×9 королем, чередуя диагональные и недиагональные ходы?

Ответ: а) Можно; б) Нельзя.

Р е ш е н и е. а) Да, можно, см. рисунок 1.20.

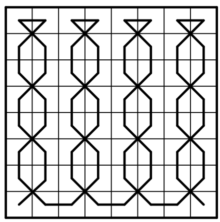


Рис. 1.20: Задача 1.45. Путь короля.

б) Предположим, что такой обход возможен. Используем шахматную раскраску, главная диагональ — белая. При диагональном ходе король не меняет цвет клетки, на которой стоит. Из клеток, прилегающих стороной к краю доски — 16 белых. Так как все клетки принадлежат пути короля, в котором чередуются диагональные ходы, то, каждая из 16 белых пограничных клеток должна быть связана с белой клеткой из второго слоя (это клетки имеющие общую сторону с клетками первого слоя). То есть, можно установить соотвествие между белыми клетками первого слоя и белыми клетками из второго слоя. Но во втором слое их всего 12. Значит, разбить на пары 16 белых клеток, прилегающих к краю доски, и 12 белых клеток из второго слоя невозможно.

Отметим, что в пункте а) белые клетки из пограничного слоя могут быть связаны диагональным ходом как с белыми клетками из второго слоя, так и с белыми клетками пограничного слоя. В этом случае шахматная раскраска помогает построить пример. Разобьем белые клетки из первых двух слоев на пары. Мы имеем диагональные ходы короля, соответствующие этому разбиению. Аналогичные рассуждения, позволяют построить диагональные ходы, соответствующие разбиению черных клеток первых двух слоев на пары. Из соображения чередования диагональных и недиагональных ходов, строим остальные ходы, связывающие клетки в первых двух слоях:

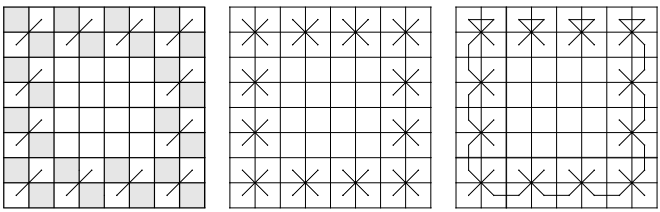


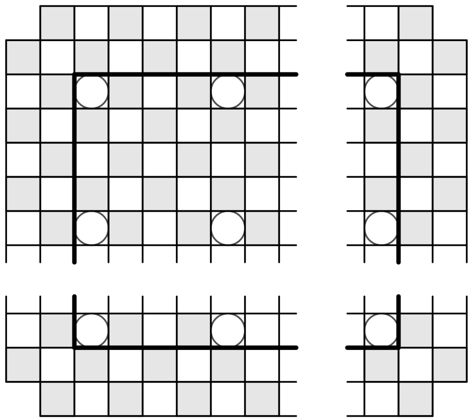
Рис. 1.21: Задача 1.45. Построение пути короля.

В этой задаче шахматная раскраска помогла нам найти ходы, с которых начинается построение примера. □

Идея: *когда фигура чередует цвета и при этом в некоторой области количество клеток одного цвета более чем на* 1 *больше, чем клеток другого цвета, то эту область обойти невозможно*, дополняется выбором области — части всего объекта, в которой эта идея используется. Аналогичный прием используется при решении задач на поиск инварианта. Более сложные задачи связаны с исследованием так называемого «зонного» инварианта, когда от исследования всего объекта мы переходим к наблюдению только за частью всего обьекта.

Задача 1.46. На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвёртое, так что они образуют квадратную сетку. Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.

Р е ш е н и е. Предположим, что такой путь существует. Рассмотрим квдрат размером $(4n+1)\times(4n+1)$ такой, что в угловых клетках стоят пешки. Раскрасим сетку в шахматную раскраску так, чтобы пешки стояли в белых клетках:



Внутри квадрата находится $8n^2+4n+1$ белых клеток, $8n^2+4n$ черных клеток и $(n+1)^2$ пешек.

З а м е ч а н и е. Размер квадрата выбирался для удобства вычиселений.

Внутри этого квадрата путь проходит через $8n^2+4n$ черных клеток. Поставим каждому черному квадрату в соответствие следующую за ним в пути коня белую клетку. Эти белые клетки находятся либо внутри выделенного квадрата, либо в каемке из двух клеток, прилегающей к границе этого квадрата, кроме 4 угловых клеток.

Внутри квадрата свободных белых клеток — $8n^2 + 4n + 1 - (n+1)^2 = 7n^2 + 2n$. В каемке без угловых клеток — $16n+8$ белых клеток.

Получаем, что $8n^2 + 4n$ черной клетке можно поставить в соответствие не более $7n^2+2n+16n+8 = 7n^2+18n+8$ белых клеток. Но, начиная с некоторого номера $8n^2 + 4n > 7n^2 + 18n + 8$, так как $n^2 - 14n - 8$ — квадратный трехчлен, с положительным старшим коэффициентом. То есть черных клеток внутри квадрата больше, чем белых, в которые из них можно попасть. Получили противоречие.

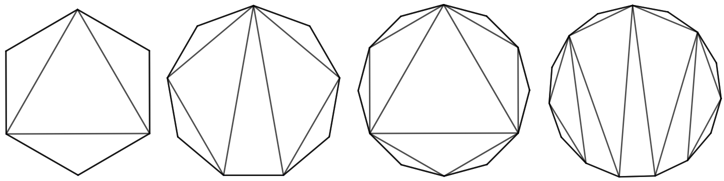
З а м е ч а н и е. Номер, для которого $n^2 - 14n - 8 > 0$ можно вычислить. Так как $14^2 - 14 \cdot 14 - 8 = -8 < 0$, а $15^2 - 14 \cdot 15 - 8 = 7 > 0$, то при $n \geqslant 15$ имеем, что $n^2 - 14n - 8 > 0$. $\square$

Задача 1.47. Концы N хорд разделили окружность на $2N$ дуг единичной длины. Известно, что каждая из хорд делит окружность на две дуги чётной длины. Докажите, что число N чётно.

Р е ш е н и е. Раскрасим концы дуг в шахматную раскраску. Это возможно, так как их четное число. Каждая хорда соединяет точки одного цвета, так как длина дуги — четное число, а при прохождении одной дуги происходит чередование цвета точки разбиения. Так как N хорд разбили окружность на $2N$ дуг, то хорды не имеют общих концов. Значит, все точки одного цвета разбиваются на пары, то есть N — четное число. $\square$

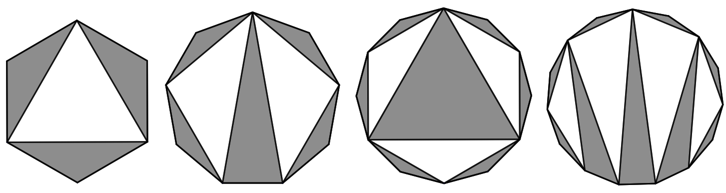
Задача 1.48. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями, причем в каждой его вершине сходится нечетное число треугольников. Докажите, что n делится на 3.

Р е ш е н и е. Начнем с того, что построим конкретные примеры для $n = 6, 9, 12, 15$. Построение примеров зачастую приводит к пониманию идеи доказательства.



Заметим, что если многоугольник разбит на части несколькими диагоналями, то эти части можно раскрасить в два цвета так, чтобы части, имеющие общую сторону, были разного цвета, т.е. в шахматную раскраску. Доказать это можно так. Начнем проводить диагонали. Пусть до проведения диагонали многоугольник имел шахматную раскраску. Каждая проведенная диагональ делит многоугольник на две части, каждая из которых окрашена в шахматную раскраску. Поменяв все цвета в одной части на противоположные, мы получим опять шахматную раскраску.

Так как в нашем случае в каждой вершине сходится нечетное число треугольников, то при такой раскраске все стороны многоугольника будут принадлежать треугольникам одного цвета, например черного.



Каждая диагональ является стороной белого и черного треугольника. Каждая сторона многоугольника — стороной черного треугольника.

Каждому белому треугольнику соответствует три диагонали, при этом ни одна диагональ не может соответствовать двум белым треугольникаам. Обозначим количество белых треугольников через l. Тогда всего диагоналей $3l$.

Получаем, что черным треугольникам соответствует $3l + n$ сторон и это число должно делиться на 3, так как черные треугольники не имеют общих сторон. Следовательно, $n \vdots 3$.

З а м е ч а н и е. Можно было остановиться на подсчете диагоналей, если использовать следующий факт. Количество непересекающихся диагоналей, разбивающих выпуклый n-угольник на треугольники равно $n-3$. Докажем это по индукции. При $n = 3$ утверждение очевидно. Предположим, что мы доказали утверждение для всех $n \leqslant k$. Пусть $n = k+1$. Рассмотрим разбиение $k+1$-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Возьмем любую диагональ. Она разобьет многоугольник на m- и r-многоугольники, $m, r \leqslant k$. Тогда $r+m = (k+1)+2$, так как концы диагонали посчитанны два раза. По предположению индукции, в меньших многоугольниках проведено $m - 3$ и $r - 3$ диагонали. Значит, в нашем $n = k + 1$-угольнике проведено $1+(m-3)+(r-3) = (r+m)-5 = (k+1)+2-5 = n-3$ диагоналей. Утверждение доказано. Тогда получаем, что $n - 3 = 3l$. откуда $n \vdots 3$. $\square$

Задача 1.49. Доска 100×100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты — по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?

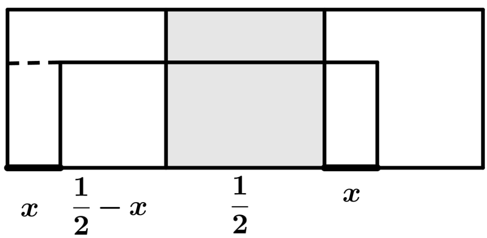
Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Используем шахматную раскраску. На доске равное количество белых и черных клеток. Каждый треугольник, удовлетворяющий условию, накрывает равные по площади области черного и белого цвета. Если оставшуюся часть доски можно покрыть согласно условию, то она также должна обладать этим свойством. Но, вырезав одну клетку определенного цвета, разность между площадьми областей белого и черного цвета уже не равна 0. □

Задача 1.50. Прямоугольник составили из прямоугольников, каждый из которых имеет хотя бы одну целочисленную сторону. Докажите, что и большой прямоугольник имеет целочисленную сторону.

Р е ш е н и е. Рассмотрим квадратную сетку со стороной ячейки $1/2$, такую, что левый нижний угол данного прямоугольника находится в узле сетки, а стороны прямоугольника параллельны линиям сетки. Раскрасим ячейки сетки в шахматную раскраску.

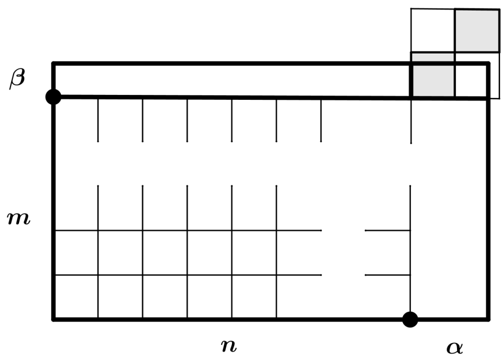
Каждый прямоугольник с целой стороной содержит поровну белого и черного цвета, (то есть площади частей, окрашенных в белый и черный цвет, равны). Действительно, разрежем его линиями сетки на прямоугольники, целиком лежащие между двумя параллельными линиями сетки, идущими вдоль целой стороны. Затем, эту полосу разрежем на прямоугольники со стороной 1. Каждый такой прямоугольник содержит поровну белого и черного цвета:



Получаем, что наш прямоугольник, составленный из меньших прямоугольников, каждый из которых содержит поровну белого и черного цвета, также обладает этим свойством.

Докажем, что одна из сторон нашего прямоугольника — целое число. Предположим, что это не так. Пусть стороны прямоугольника равны $a = n + \alpha$ и $b = m + \beta$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \alpha, \beta < 1$.

Разобьем прямоугольник $a \times b$, на три меньших:



Их размеры: $a \times m$, $n \times \beta$, $\alpha \times \beta$. Тогда в первых двух прямоугольниках поровну белых и черных частей, так как одна из сторон — целое число. В третьей части разница между площадью черного цвета и площадью белого цвета равна:

$$S_{\text{Ч}} - S_{\text{Б}} = \begin{cases} \alpha\beta, & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, 0 < \beta < \frac{1}{2}; \\ (1-\alpha)\beta, & \frac{1}{2} < \alpha < 1, 0 < \beta < \frac{1}{2}; \\ \alpha(1-\beta), & 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \beta < 1; \\ (1-\alpha)(1-\beta), & \frac{1}{2} < \alpha < 1, \frac{1}{2} < \beta < 1; \end{cases}$$

Это можно записать короче:

$$S_{\text{Ч}} - S_{\text{Б}} = \min\{\alpha, 1-\alpha\} \cdot \min\{\beta, 1-\beta\}.$$

По нашему предположению, в третьей части $S_{\text{Ч}} - S_{\text{Б}} \neq 0$, так как $0 < \alpha, \beta < 1$. Получаем, что и во всем прямоугольнике не поровну белых и черных частей. Но мы доказали, что это не так. Получили противоречие. Значит, наше предположение, что обе стороны прямоугольника — нецелые числа, неверно.

З а м е ч а н и е. Факт, что в третьей части $S_{\text{Ч}} - S_{\text{Б}} \neq 0$, если обе стороны имеют нецелые длины, можно доказать и чисто геометрически, разбиением черной и белой части на области равной площади.

З а м е ч а н и е. Утверждение, что любой прямоугольник, содержащий поровну белого и черного цвета, имеет хотя бы одну целую сторону, вообще говоря, неверно. Любой прямоугольник, центр которого совпадает с узлом сетки, обладает этим свойством. При доказательстве существенно использовалось, что одна из вершин нашего прямоугольника совпадает с узлом сетки. То есть, в этой задаче помимо раскараски, необходимо еще описывать и выбор сетки. $\square$

З а м е ч а н и е. У этой задачи есть еще одно решение, использующее кратные интегралы. Рассмотрим функцию $F(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Тогда для любого прямоугольника П, стороны которого параллельны осям координат и одна из сторон — целое число, верно равенство

$$\iint\limits_{\Pi} F(x, y) dx dy = 0.$$

Действительно, пусть прямоугольник П имеет стороны n и r, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$, а левый нижний угол расположен в точке (x_0, y_0). Тогда

$$\iint\limits_{\Pi} F(x, y) dx dy = \int\limits_{y_0}^{y_0+r} \int\limits_{x_0}^{x_0+n} F(x, y) dx dy =$$
$$= \int\limits_{y_0}^{y_0+r} \sin(2\pi y) \left(-\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \Big|_{x_0}^{x_0+n} \right) dy = 0.$$

Рассмотрим прямоугольник $\Pi = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Pi_k$ составленный из меньших, согласно условию задачи и его стороны равны a и b.

Выберем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с левым нижним углом прямоугольника П, а оси координат были параллельны сторонам прямоугольника П. Вычислим $\iint\limits_{\Pi} F(x,y)dxdy$ двумя способами. Согласно аддитивности интеграла:

$$\iint\limits_{\Pi} F(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{\Pi_k} F(x,y)dxdy = 0.$$

Прямое вычисление показывает, что: $\iint\limits_{\Pi} F(x,y)dxdy =$

$$= \int\limits_0^b \int\limits_0^a F(x,y)dxdy = \left(-\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \Big|_0^a \right) \cdot \left(-\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi y) \Big|_0^b \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos(2\pi a))(1 - \cos(2\pi b)).$$

Сравнивая полученные результаты, получаем, что $(1 - \cos(2\pi a))(1 - \cos(2\pi b)) = 0$, откуда следует, что одна из сторон прямоугольника — целое число.

Здесь интеграл использовался в качестве «счетчика» разности между белой и черной частями прямоугольника, если считать, что часть плоскости, где выполнено неравенство $\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) > 0$ — белая, а $\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) < 0$ — черная.

Глава 2

Различные раскраски

2.1 Раскраски с заданным условием

Во всех предыдущих задачах мы рассматривали шахматную раскраску. Эта раскраска среди всех раскрасок занимает такую же позицию, как и идея четности среди всех инвариантов. Однако, раскрасок, используемых при решении задач, очень много. Мы начнем с того, что будем придумывать раскраски, удовлетворяющие заданному условиям. В дальнейшем, исходя из условия задачи, мы будем понимать, каким условиям должна удовлетворять раскраска, чтобы получить противоречие или помочь в построении конструкции.

При построении раскрасок используются методы конструирования, подсчета двумя способами и, конечно, воображение. Приведем задачи на построение раскраски и разберем некоторые из них.

Задача 2.1. а) Отметьте несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали было по три отмеченные клетки. б) Отметьте несколько клеток на доске 6×8 так, чтобы во всех вертикалях было одинаковое количество отмеченных клеток и во всех горизонталях было одинаковое количество отмеченных клеток. Сколько отмеченных клеток может быть на доске? в) Закрасьте несколько клеток доски 8×8 так, чтобы во всех вертикалях было одинаковое количество закрашенных клеток, а во всех горизонталях — различное.

У к а з а н и е. в) Сначала воспользуйтесь методом подсчета двумя способами. Так как во всех вертикалях должно быть одинаковое количество закрашенных клеток, то количество закрашенных клеток на всей доске должно делиться на 8. В горизонталях количество закрашенных клеток — это 8 различных чисел, принимающих значения от 0 до 8. То есть, из 9 чисел от 0 до 8 нужно выбрать 8 чисел так, чтобы их сумма делилась на 8. Это можно записать как $0 + 1 + 2 + \ldots + 8 - x = 36 - x$, где x — то число, которое не войдет в 8 выбранных. Так как $(36 - x)\vdots 8$, то $x = 4$, всего закрашенных клеток на доске будет 32, в каждой вертикали по 4, в горизонталях: 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.

Примеры во всех пунктах задачи строятся несложно. □

Задача 2.2. а) Раскрасьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне закрашенные клетки. б) Можно ли некоторые клетки доски 6×20 закрасить так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне закрашенные клетки?

Р е ш е н и е. а) Воспользуемся методом постепенного кон-

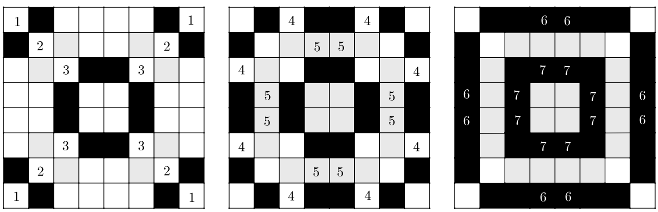


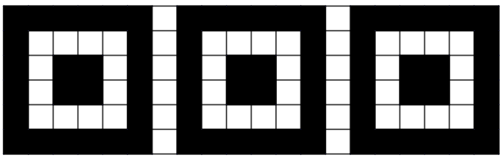
Рис. 2.1: Постепенное конструирование в задаче 2.2 а).

струирования. На рис. 2.1 цифрами обозначены клетки, которые дают однозначную информацию о своих соседях в том порядке, в котором идут номера этих клеток. Белым цветом обозначены клетки, информация о цвете которых пока не определена, серым — те клетки, которые точно не закрашены, черным — те клетки, которые точно должны быть закрашены.

Рассмотрим клетки с номером 1. У них ровно два соседа, значит оба должны быть закрашены. У клеток с номером 2 уже есть по два закрашенных соседа, значит два других соседа точно не закрашены. У клеток с номером 3 есть два соседа, которые точно не закрашены, значит два других соседа точно закрашены. У клеток с номером 4 всего три соседа, один из которых точно не закрашен, значит, два других точно закрашены.

Продолжите рассуждения самостоятельно, используя рисунок 2.1.

б) **Ответ:** Можно. Пример:



□

Задача 2.3. а) Отметьте на шахматной доске 8×8 несколько белых клеток так, чтобы у каждой черной клетки была ровно одна соседняя по стороне отмеченная белая клетка. б) Отметьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки была ровно одна соседняя по стороне отмеченная клетка.

Р е ш е н и е. а) Опять воспользуемся методом постепенного конструирования. Числами будем обозначать клетки в том порядке, в котором отмечали эти клетки, (рис. 2.2). Ясно, что у угловой черной клетки должен быть один отмеченный сосед. Всего два варианта. Выберем любой из них. Обозначим эту клетку 1 — первая отмеченная клетка.

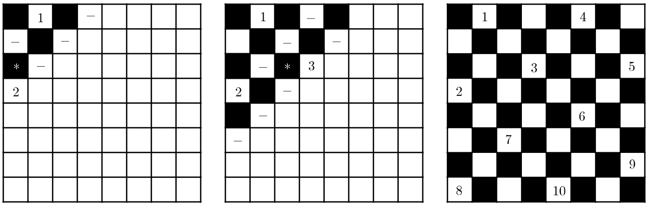
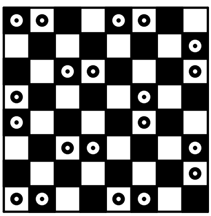


Рис. 2.2: Постепенное конструирование в задаче 2.3 а).

У всех черных клеток-соседей клетки 1 уже есть отмеченная клетка, значит, их соседи — белые клетки, не являются отмеченными. Поставим в них значок «-». Тогда у черной клетки, отмеченной на левом рисунке значком «*», осталась ровно одна белая клетка-сосед, в которой нет «-». Значит, это — вторая отмеченная клетка. Обозначим у всех черных клеток-соседей клетки 2 все соседние белые клетки значком «-». Тогда у черной клетки, отмеченной на среднем рисунке значком «*» три соседние клетки отмечены значком «-», значит, мы нашли место для третьей отмеченной клетки. Поступая аналогично, расставим все отмеченные клетки на доске.

б) Пример:



У к а з а н и е. Заметим, что при шахматной ракраске у белых клеток соседи — черные клетки, а у черных — белые. Значит, можно на одной картинке объединить результаты пункта а) для белых и черных клеток. Отмеченные черные клетки получим при помощи поворота доски на 90° : $\square$

Задача 2.4. Отметьте некоторые клетки бесконечной клетчатой доски так, чтобы каждый прямоугольник а) 2×4; б) 2×3; в) 2×2 содержал ровно одну закрашенную клетку.

Р е ш е н и е. а) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех прямоугольниках 2×3, содержащих эту клетку, больше нет отмеченных клеток. Значит, фигура, изображенная на рис. 2.3 слева, не содержит больше ни одной отмеченной клетки. По условию задачи, прямоугольник 2×4, изображенный на рис. 2.3 в центре должен содержать закрашенную клетку. Это может быть только клетка, отмеченная значком «*». Получаем, что вместе с отмеченной клеткой должны быть отмечены и клетки, изображенные на рис. 2.3 справа.

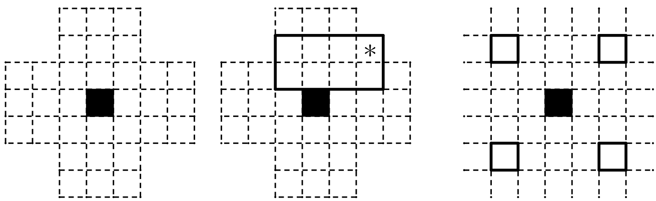


Рис. 2.3: Постепенное конструирование в задаче 2.4 а).

Продолжая дальше эти рассуждения, получим раскраску:

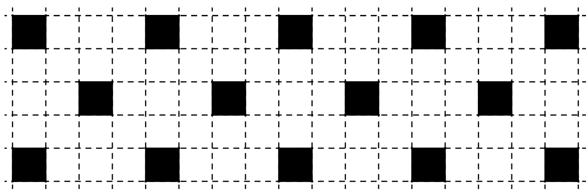


Рис. 2.4: Раскраска в задаче 2.4 а).

б) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех прямоугольниках

2×3, содержащих эту клетку больше нет отмеченных клеток. Значит, фигура, изображенная на рис. 2.5 слева не содержит больше ни одной отмеченной клетки. По условию задачи, прямоугольник 2×3, изображенный на рис. 2.5 справа должен содержать закрашенную клетку. Противоречие.

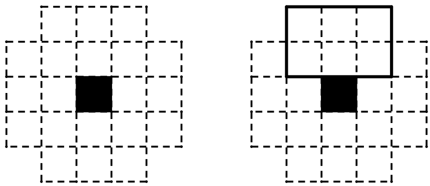


Рис. 2.5: Постепенное конструирование в задаче 2.4 б).

Получаем, что не существует раскраски, удовлетворяющей условию пункта б).

в) Рассмотрим отмеченную клетку. Во всех квадратах 2×2, содержащих эту клетку больше нет отмеченных клеток. Значит, квадрат 3×3, изображенная на рис. 2.6 не содержит ни одной отмеченной клетки, кроме центральной. По условию задачи, квадрат, изображенный на рис. 2.6 сплошным цветом должен содержать закрашенную клетку. Значит, либо клетка 1, либо клетка 2 закрашена.

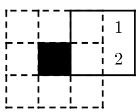


Рис. 2.6: Постепенное конструирование в задаче 2.4 в).

Продолжив рассуждение, получим две раскраски:

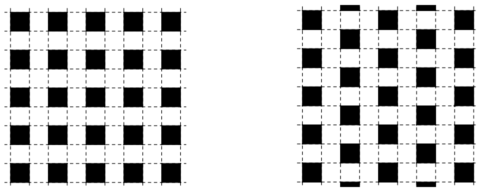


Рис. 2.7: Раскраски к задаче 2.4 в).

Заметим, что возможны и другие раскраски, комбинирующие эти две.

В этой задаче мы получили единственно возможную раскраску с доказательством единственности; доказали, что раскраска не существует; получили множество раскрасок. □

Задача 2.5. Закрасьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы каждый прямоугольник а) 1×2; б) 1×3; в) 1×4; г) 1×5 содержал ровно одну закрашенную клетку.

Задача 2.6. Раскрасьте некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы каждый квадрат а) 2×2; б) 3×3 содержал ровно одну закрашенную клетку. Каким наименьшим и каким наибольшим количеством клеток можно обойтись?

Задача 2.7. Раскрасьте клетки доски 8×8 в четыре цвета так, чтобы а) каждый прямоугольник 1×4; б) квадрат 2×2 содержал клетки всех четырех цветов.

Задача 2.8. а) Раскрасьте некоторые клетки бесконечного клетчатого поля так, чтобы каждый крест из пяти клеток содержал ровно одну закрашенную клетку. б) Раскрасьте клетки бесконечного клетчатого поля в пять цветов так, чтобы каждый крест из пяти клеток содержал клетки всех пяти цветов.

Задача 2.9. а) Можно ли отметить несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы каждый а) уголок из 4 клеток; б) буква T из 4 клеток; в) буква S из 4 клеток; г) прямоугольник 2×3; д) прямоугольник 2×4; е) прямоугольник 2×5 содержал ровно одну закрашенную клетку?

Задача 2.10. Можно ли отметить несколько клеток на доске 8×8 так, чтобы каждый квадрат 3×3 содержал ровно а) две; б) три; в) четыре отмеченные клетки?

Задача 2.11. Можно ли отметить 5 клеток на доске размером 8×8 так, чтобы любой квадрат 3×3 содержал в точности одну отмеченную клетку? Сколько клеток можно отметить на доске, чтобы было выполнено условие задачи? Приведите все ответы.

Задача 2.12. а) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любой квадрат 2×2 содержал нечетное число отмеченных клеток, а любой прямоугольник 1×4 — четное. б) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы на всей доске было четное число отмеченных клеток, а в любой четырехклеточной фигуре типа Г — нечетное. в) Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любой квадрат 2×2 содержал четное число отмеченных клеток, а любая четырехклеточная фигура типа Г — нечетное.

Задача 2.13. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 нужно закрасить так, чтобы в любом прямоугольнике 1×4 и в любом квадрате 2×2 была хотя бы одна закрашенная клетка? Приведите пример такой раскраски.

Задача 2.14. Докажите, что если любой прямоугольник 2×4 с границами, расположенными по линиям сетки, на бесконечной клетчатой доске, содержит ровно одну закрашенную клетку, то найдется прямоугольник 1×5, содержащий две закрашенные клетки.

Задача 2.15. а) Существует ли трехцветная раскраска доски 8×8 такая, что каждый уголок из трех клеток содержит по одной клетке всех трех цветов? б) Существует ли четырехцветная раскраска доски 8×8 такая, что каждый уголок из трех клеток содержит три клетки различных цветов?

Задача 2.16. Можно ли раскрасить куб $4\times4\times4$ в шахматную раскраску? То есть, раскрасить каждый из кубиков $1 \times 1 \times 1$ в черный или белый цвет так, что любые два кубика, имеющие общую грань, были раскрашены в различные цвета.

Задача 2.17. Отметьте на гранях куба $4 \times 4 \times 4$ некоторые клетки так, чтобы любая полоска 1×3 накрывала ровно две отмеченные клетки.

Задача 2.18. Назовем крокодилом шахматную фигуру, ход которой заключается в прыжке на m клеток по вертикали или по горизонтали, и потом на n клеток в перпендикулярном направлении. Верно ли, что для любых m и n можно так раскрасить бесконечную клетчатую доску в 2 цвета (для каждых конкретных m и n своя раскраска), что всегда 2 клетки, соединенные одним ходом крокодила, будут покрашены в разные цвета?

2.2 Использование раскрасок в задачах на разрезание

В этом параграфе мы рассмотрим задачи, связанные с разрезаниями и покрытиями клетчатых фигур.

Задача 2.19. Можно ли разрезать доску 6×6 на прямоугольники 1×4?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Предположим, что возможно. Тогда должно получиться 9 прямоугольников.

Применение шахматной раскраски не приводит к противоречию: каждый прямоугольник накрывает по две белые и черные клетки, всего на доске 18 белых и 18 черных клеток, $9\cdot 2 = 18$. То что мы не получили противоречия, не означает, что разрезание возможно (это очень распространенное ошибочное рассуждение среди учащихся).

Попробуем раскрасить доску по-другому.

Первый способ. Рассмотрим следующую раскраску в два цвета:

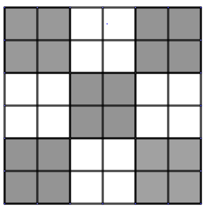


Рис. 2.8: Задача 2.19. Крупная шахматная раскраска.

Она получается, если доску разбить на квадраты 2×2 и раскрасить их в шахматном порядке. Тогда на доске 20 черных и 16 белых клеток. Каждый прямоугольник 1×4 накрывает по 2 белые и 2 черные клетки. Значит, 9 прямоугольников должны накрыть

$9 \cdot 2 = 18$ черных клеток. Получили противоречие: $20 = 18$.

Второй способ. Шахматную раскраску можно рассматривать и как диагональную раскраску в два цвета: мы раскрашиваем диагонали по очереди в белый и черный цвета. Так как прямоугольник 1×4 в два раза длинее домино, как и в предыдущей раскраске «укрупним» диагональ, то есть будем раскрашивать в черный и белый цвета по две диагонали:

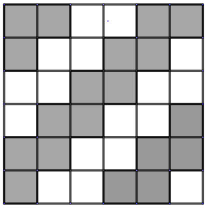


Рис. 2.9: Задача 2.19. Крупная диагональная раскраска.

Всего на доске 19 черных и 17 белых клеток. Каждый прямоугольник 1×4 накрывает по 2 белые и 2 черные клетки. Значит, 9 прямоугольников должны накрыть $9 \cdot 2 = 18$ черных клеток. Получили противоречие: $19 = 18$.

Третий способ. Так как каждый прямоугольник 1×4 накрывает четыре подряд идущие клетки, то можно закрасить каждую четвертую диагональ.

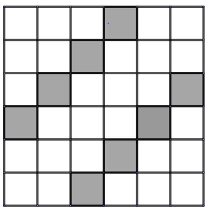


Рис. 2.10: Задача 2.19. Редкая диагональная раскраска.

Тогда каждый из 9 прямоугольников накроет ровно по одной черной клетке, но всего их на доске — 8. Получили противоречие: $9 = 8$.

В следующих способах решения, кроме прямого подсчета, нам понадобятся дополнительные соображения, например, использование четности, делимости или сразу нескольких раскрасок в одной задаче. Хотя в данной задаче это и более сложные решения, не стоит пропускать обсуждение этих раскрасок.

Четвертый способ. Рассмотрим раскраску «горох», которая получается, если в каждой второй строке раскрасить каждую вторую клетку.

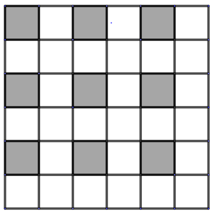


Рис. 2.11: Задача 2.19. Раскраска «горох».

Всего на доске получится 9 черных клеток. Каждый прямоугольник 1×4 накрывает 0 или 2 черные клетки. Несмотря на то, что мы не можем точно сказать, сколько черных клеток накрывает прямоугольник, можно заметить, что это количество — четное число. Значит, 9 прямоугольников накроют четное число черных клеток. Получили противоречие: 9 — четное число.

Пятый способ. Рассмотрим вертикальную раскраску в два цвета, или, как ее называют раскраску «зебра», которая получается, если мы раскрасим каждый второй столбец.

Раскраска «зебра» позволяет различать горизонтальные и вертикальные прямоугольники: каждый горизонтальный прямоугольник содержит по две белые и по две черные клетки, а каждый вертикальный — либо 0, либо 4 черные клетки. Числа 0 и

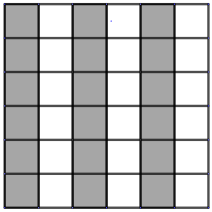


Рис. 2.12: Задача 2.19. Раскраска «зебра».

4 имеют общее свойство: они делятся на 4. Общее число черных клеток на доске — $18 = 4 \cdot 4 + 2$, то есть при делении на 4 дает остаток 2. Значит, должно быть нечетное число горизонтальных прямоугольников. Это уже дополнительная информация. Но пока никакого противоречия. Чтобы его получить, повернем раскраску «зебра» на 90°, и получим, что количество вертикальных прямоугольников тоже должно быть нечетное. Но всего прямоугольников 9. Значит, количество вертикальных и горизонтальных прямоугольников не может быть нечетным.

Заметим, что в этом решении мы использовали две раскраски (на самом деле одну, но с поворотом) и идею, что не только клетки можно разбить(раскрасить) на две категории, но и фигурки разрезания можно разбивать на различные категории и исследовать их численные характеристики.

Шестой способ. Аналогичные рассуждения можно провести, используя «редкую вертикальную» раскраску, которая получается, если раскрасить каждый четвертый столбец.
В этом случае вертикальные и горизонтальные прямоугольники отличаются тем, что вертикальные накрывают четное число черных клеток, а горизонтальные — нечетное. Так как всего закрашено 12 клеток, то количество горизонтальных прямоугольников должно быть нечетным. Дальше опять используем поворот и получаем, что количество вертикальных прямоугольников также

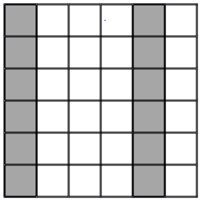
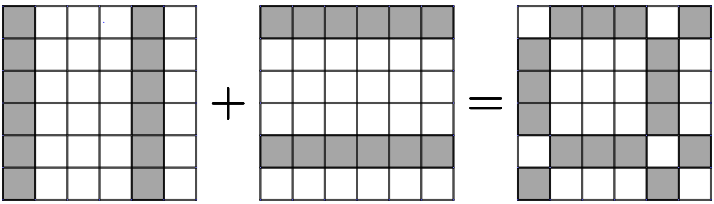


Рис. 2.13: Задача 2.19. Редкая вертикальная раскраска.

должно быть нечетным. Но вместе их — 9. Противоречие.

Седьмой способ. Из редкой вертикальной раскраски и ее поворота можно получить еще одну раскраску следующим образом: раскрасим в черный цвет те клетки, которые раскрашены только в одном случае, так называемое двоичное суммирование. В закрашенную клетку будем записывать 1, а в незакрашенную — 0, результатом будет сложение по mod2. В теории множеств эта оперция называется «симметрическая разность».



В этом случае любой прямоугольник 1×4 накрывает нечетное число черных клеток, всего прямоугольников 9, значит они накроют нечетное число черных клеток. Но прямой подсчет показывает, что на доске 16 черных клеток.

В этот раз мы усложнили раскраску, но нам не пришлось рассматривать два типа прямоугольников 1×4. *Поворот мы использовали при построении раскраски.*

Восьмой способ. При помощи объединения редкой вертикальной раскраски и ее поворота можно получить раскраску «решетка»:

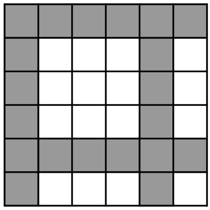


Рис. 2.14: Задача 2.19. Раскраска «решетка».

В этом случае любой прямоугольник 1×4 накрывает либо 0, либо 3 белые клетки, то есть число, кратное 3. Получаем, что 9 прямоугольников 1×4 накроют количество белых клеток, кратное 3. Но всего на доске 16 белых клеток. Получили противоречие: 16 кратно 3.

Заметим, что соображение четности в предыдущем способе немного легче, чем делимость на 3.

Еще один способ придумать раскраску — «умножить» вертикальную и горизонтальную зебру, то есть раскрасить только те клетки, которые раскрашены в обоих случаях. Тогда мы получим раскраску горох, при использовании которой, также использовались только соображения четности. Этими способами (пересечение, объединение, двоичное сложение) можно придумывать и другие раскраски.

Кроме двухцветных, существуют и многоцветные раскраски.

Девятый способ. Рассмотрим в этой же задаче и четырехцветную раскраску. Раскрасим доску 6×6 в четырехцветную диагональную раскраску.

На доске получилось по 9, 10, 9 и 8 клеток четырех цветов. Каждый прямоугольник 1×4 накрывает по одной клетке каждого цвета. Значит, 9 прямоугольников накроют по 9 клеток каждого цвета. Получили противоречие с количеством второго и четвер-

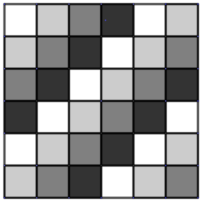


Рис. 2.15: Задача 2.19. Четырехцветная диагональная раскраска.

того цвета.

Заметим, что редкая диагональная раскраска соответствует выбору одного из цветов. К противоречию приведет выбор второго и четвертого цвета. Выше мы выбрали четвертый цвет. Получаем, что даже выбрав тип раскраски, нам еще приходится выбирать, откуда начинать раскрашивать.

Можно использовать и четырехцветную вертикальную раскраску. В этом случае придется использовать поворот, так как мы получим информацию о четности количества вертикальных прямоугольников. □

Задача 2.20. Можно ли разрезать доску 6×6 на: а) четырехклеточные фигуры типа Т; б) четырехклеточные фигуры типа Г.

Ответ: а) Нет; б) нет.

Р е ш е н и е. Во всех случаях, если разрезание возможно, то количество фигур должно быть $36/4=9$.

а) Предположим, что это возможно. Рассмотрим шахматную раскраску. Количество белых и черных клеток при шахматной раскраске равно 18. Одна буква Т накрывает либо 1, либо 3 черные клетки, т.е. нечетное число. Девять фигур типа Т накроют нечетное число черных клеток. Получили противоречие: 18 — нечетное число.

б) Шахматная раскраска в этом пункте уже не поможет, т.к.

каждая фигура содержит по две черные и две белые клетки, и подсчет двумя способами приводит к тождеству: $18 = 18$. Используем раскраску «зебра». Каждая фигура из 4 клеток типа Г содержит либо одну, либо три черные клетки. Далее решение аналогично пункту а). $\square$

Задача 2.21. Можно ли разрезать доску 7×7 с вырезанной угловой клеткой на четырехклеточные фигуры типа Г?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Предположим, что можно. Используем раскраску «зебра».

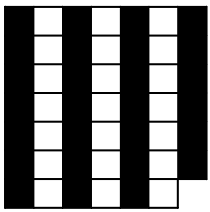


Рис. 2.16: Задача 2.21. Раскраска «зебра».

На доске получится 21 белая и 27 черных клеток. Каждая буква Г занимает либо 3 черные, 1 белую клетки, либо 1 черную, 3 белых клетки, то есть нечетное число черных клеток. Всего должно получиться 12 фигур. 12 фигур Г накроют четное число черных клеток. Получили противоречие: 27 — четное число. $\square$

Задача 2.22. Можно ли выложить доску 8×8 костями домино 1×2 так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 — вертикально?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Заметим, что раскраска «зебра» дает разные характеристики вертикальным и горизонтальным фигурам домино: вертикальные накрывают четное число черных клеток, а горизонтальные — ровно одну черную клетку.

Предположим, что можно выложить доску 8×8 костями домино 1×2 так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 — вертикально. Раскрасим доску в раскраску «зебра». Получим, что на доске 32 белые и 32 черные клетки. С другой стороны, 17 горизонтальных домино накроют ровно 17 черных клеток, а 15 горизотальных — четное число. Тогда все домино накроют нечетное число черных клеток. Получили противоречие: 32 — четное число. $\square$

Рассмотрим еще одну задачу, где будет разобрано несколько способов решений. Они напоминают первую задачу, и полезно дать обучающимся самим придумать несколько решений.

Задача 2.23. Можно ли разрезать доску 8×8 с вырезанным уголком на прямоугольники 1×3 по линиям сетки?

Р е ш е н и е.

Первый способ. Попробуем придумать раскраску, которая имеет что-то общее для всех прямоугольников 1×3. По аналогии с шахматной (когда в любой прямоугольник 1×2 попадает по одной клетке каждого из двух цветов) рассмотрим трехцветную раскраску такую, что в каждый прямоугольник 1×3 попадает по одной клетке каждого из трех цветов:

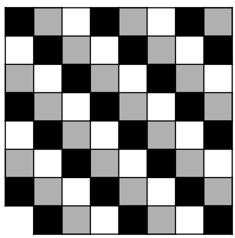


Рис. 2.17: Задача 2.23. Трехцветная диагональная раскраска.

Если разрезание возможно, то 21 прямоугольник 1×3 будет содержать 21 черную, 21 серую и 21 белую клетки. При этом доска содержит 22 черных, 21 серую и 20 белых клеток.

Второй способ. Рассмотрим трехцветную горизонтальную раскраску.

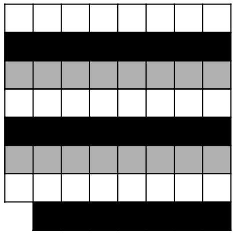


Рис. 2.18: Задача 2.23. Трехцветная горизонтальная раскраска.

Всего на доске 24 белых, 16 серых и 23 черных клеток. Прямоугольники 1×3 делятся на вертикальные и горизонтальные. Каждый вертикальный прямоугольник занимает по одной клетке всех трех цветов. А каждый горизонтальный — число, делящееся на 3 (0 или 3). Пусть x — число вертикальных прямоугольников. Получаем, для белых клеток выполнено равенство $24 = x + 3k$, а для серых клеток: $16 = x + 3l$, откуда имеем, что 8 делится на 3, противоречие.

Третий способ. Упростим раскраску. Оставим из трехцветной горизонтальной раскраски только каждую третью строчку, см. рис. 2.19.

Все прямоугольники 1×3 делятся на вертикальные и горизонтальные. Каждый горизонтальный прямоугольник содержит 0 или 3 черные клетки, а каждый вертикальный — по 1.

Всего черных клеток 16, значит $(16 - x) \vdots 3$, где x — количество вертикальных прямоугольников. Получаем, что количество вертикальных прямоугольников при делении на 3 дает остаток 1. Пока никакого противоречия. Вспомним, что в задаче никак не

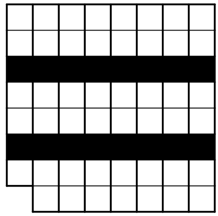
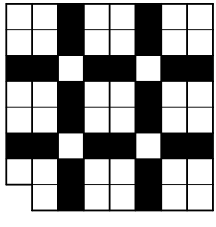


Рис. 2.19: Задача 2.23. Двухцветная редкая горизонтальная раскраска.

фигурировало деление прямоугольников на вертикальные и горизонтальные. Это выбор раскраски привел нас к выводу о свойстве количества вертикальных прямоугольников. Значит, то же самое можно сказать и о горизонтальных прямоугольниках. Действительно, взяв вместо горизонтальных черных полосок вертикальные и повторив все рассуждения, получим, что количество горизонтальных прямоугольников при делении на 3 также дает остаток 1. Всего прямоугольников 21, значит, делится на 3, а сумма двух чисел вида $3k+1$ не может делиться на 3. Противоречие.

Заметим, что по сравнению с решением вторым способом мы упростили раскраску, но усложнили рассуждения.

Четвертый способ. Используем двоичное сложение двух раскрасок, горизонтальной и вертикальной, из предыдущего способа:



Всего на доске 24 черных и 39 белых клеток. Каждый прямоугольник 1×3 накрывает либо 2 черные и одну белую, либо 1 белую и 2 черные клетки. Пусть у нас x прямоугольников первого типа и y прямоугольников второго типа. Имеем соотношения: $2x + y = 24$ для черных клеток и $x + 2y = 39$ для белых. Откуда получаем, что $x = 3$, $y = 18$. Заметим, что прямоугольник, накрывающий белую клетку, стоящую в пересечении черной строки и черного столбца, обязан накрывать две черные клетки. Значит, раз пересечений 4 и один прямоугольник не может накрывать сразу две из этих 4 клеток, прямоугольников первого типа не менее 4. Но мы получили, что их ровно 3. Противоречие.

Пятый способ. При помощи объединения двух раскрасок из третьего способа можно получить раскраску «решетка».

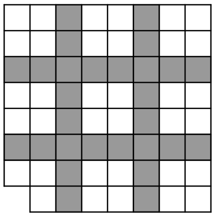


Рис. 2.20: Задача 2.23. Раскраска «решетка».

В этом случае любой прямоугольник 1×3 накрывает либо 0, либо 2 белые клетки, то есть четное число. Получаем, что 21 прямоугольник 1×3 накроют четное число белых клеток. Но всего на доске 35 белых клеток. Получили противоречие: 35 — четное число.

Заметим, что в отличие от первой задачи этого параграфа, из предыдущих двух пунктов более легкое решение оказалось при использовании раскраски «решетка». Поэтому, заранее сказать, какая из раскрасок приведет к более короткому решению, нельзя. Чем больше раскрасок мы можем придумать, тем больше у нас инструментов. □

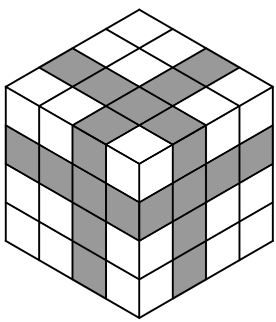
Задача 2.24. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×4 и квадратами 2×2. Затем все фигуры высыпали и один квадрат поменяли на прямоугольник. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Р е ш е н и е. В этой задаче нам понадобится раскраска, которая дает различные характеристики прямоугольнику 1×4 и квадрату 2×2. Это раскраска — горох. каждый квадрат накрывает ровно одну черную клетку, а каждый прямоугольник — 0 или 2 черные клетки. Значит, количество черных клеток на дне коробки по четности совпадает с количеством квадратов 2×2. Но в первом и втором случае — это различные по четности числа. □

Задача 2.25. Можно ли три попарно соседние грани кубика $4 \times 4 \times 4$ оклеить 16 полосками 3×1?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Предположим, что это возможно. Вспомнив различные раскраски, которые помогали нам решать задачи с прямоугольниками 1×3, и выберем ту, котрую можно распространить на смежные грани куба. Подойдет раскраска «решетка». Всего на трех гранях 21 черная и 27 белых клеток. Каждая полоска 1×3 будет накрывать 0 или 2 белые клетки, то есть четное число. Следовательно, 16 полосок накроют четное число белых клеток. Получили противоречие: 27 — четное число.



□

Задача 2.26. Можно ли прямоугольную доску размером а) 5×9; а) 7×9 разрезать на уголки из 3 клеток?

Ответ: а) Да; б) Да.

Р е ш е н и е. □

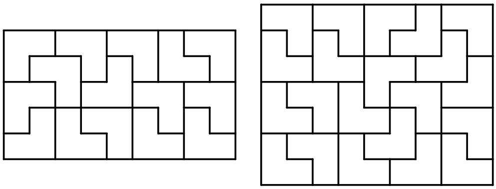


Рис. 2.21: Задача 2.26. Разрезание досок 5×9 и 7×9 на уголки.

Задача 2.27. Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трех клеток в несколько слоев так, чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же количеством уголков?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Первый способ. Предположим, что можно. Рассмотрим четырехцветную раскраску такую, что каждй уголок из трех клеток содержит три клетки различных цветов:

1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1
3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1

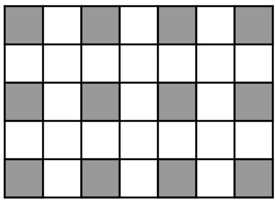
Тогда у нас 12 клеток цвета «1»; 9 клеток цвета «2»; 8 клеток цвета «3»; 6 клеток цвета «4». Все уголки делятся на четыре типа: накрывающие клетки всех цветов, кроме «1»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «2»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «3»; накрывающие клетки всех цветов, кроме «4».

Пусть у нас получилось n уголков, накрывших доску в k слоев. Пусть, далее, уголков первого типа — x; второго типа — y; третьего типа — z; четвертого типа — t.

Рассмотрим клетки цвета «1». Всего их 12 и они накрыты в k слоев. Каждый из уголков второго, третьего и четвертого типов накрывают ровно одну клетку цвета «1» по одному разу. Значит, эти уголки накроют клетки цвета «1» ровно $y+z+t$ раз. При этом все клетки цвета «1» накрыты $12k$ раз. Имеем равенство: $y+z+t=12k$.

С другой стороны, каждая из 35 клеток накрыта k раз, а каждый из уголков накрывает по 3 клетки. Получим равенство: $3(x+y+z+t)=35k$. Учитывая равенство $y+z+t=12k$, получаем, что $3x=-k<0$. Противоречие.

Второй способ. Упростить это решение можно при помощи раскраски «горох».



Пусть имеется a уголков, которые накрывают черную клетку, а b — количество тех уголков, которые не накрывают. Так как каждая из 35 клеток накрыта ровно k раз, а каждый уголок накрывает ровно три клетки, имеем равенство: $3a+3b=35k$. Каждая из 12 черных клеток накрыта ровно k раз, а каждый из a уголков первого типа накрывает ровно одну черную клетку, следовательно, имеем равенство $a=12k$. Система этих двух равенств не имеет решений в целых неотрицательных числах, кроме $a=b=k=0$. Противоречие. $\square$

Задача 2.28. Из доски а) 8×8; б) 6×6 вырезали квадрат из четырех клеток. Верно ли, что оставшуюся часть можно разрезать на прямоугольники 1×2 так, что число горизонтальных прямоугольников равно числу вертикальных?

Задача 2.29. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурами типа Г и квадратами 2×2. Затем все фигуры высыпали и один квадрат поменяли на фигуру Г. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Задача 2.30. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×4 и четырехклеточными фигурами типа Г. Затем все фигуры высыпали и один прямоугольник поменяли на фигуру Г. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Задача 2.31. Дно прямоугольной коробки выложили четырехклеточными фигурками типа Г и четырехклеточными фигурками типа S. Затем фигурки достали и одну фигуру Г поменяли на фигуру S. Удастся ли теперь выложить дно той же коробки?

Задача 2.32. Можно ли выложить квадрат 8×8, используя 15 прямоугольников 1×4 и один уголок из 4 клеток?

Задача 2.33. Из шахматной доски (размером 8×8) вырезали центральный квадрат размером 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на равные фигурки в виде буквы Г, состоящие из четырёх клеток?

Задача 2.34. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×3 и уголками из трех клеток. Один прямоугольник потеряли и заменили его уголком. Можно ли теперь выложить дно той же коробки?

Задача 2.35. Из доски 8×8 вырезали одну угловую клетку. Можно ли разрезать полученную фигуру на а) уголки из трех клеток; б) уголки и прямоугольники из трех клеток?

Задача 2.36. Можно ли разбить квадрат 10×10 на фигуры: а) четырехклеточные фигуры типа Г; б) четырехклеточные фигуры типа Т?

2.3 Раскраски и дополнительные соображения

В этом параграфе мы рассмотрим задачи, где используются различные раскраски, не относящиеся к задачам на разрезания, которым был посвящен предыдущий параграф.

Сначала рассмотрим несколько задач на разбиение объектов на несколько групп с определенными условиями, которые решаются при помощи метода раскрасок.

Задача 2.37. На шахматной доске стоят несколько королей. Докажите, что их можно разбить не более, чем на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.

Р е ш е н и е. Раскрасим доску в 4 цвета так, чтобы клетки одного цвета не имели общих точек:

1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3
1	2	1	2	1	2	1	2
4	3	4	3	4	3	4	3

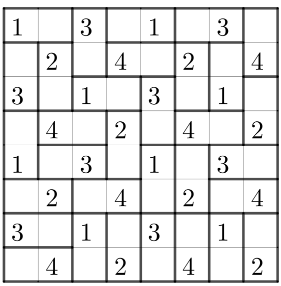
Заметим, что при такой раскраске король ходит в клетку другого цвета. Объединим всех королей, стоящих в клетках одного цвета в одну группу. Получим не более четырех групп, при этом короли одной группы не бьют друг друга. □

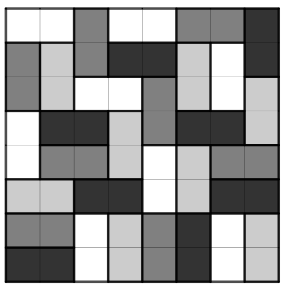
Задача 2.38. Из 32 прямоугольников 1×2 сложен квадрат. Докажите, что можно покрасить по 8 прямоугольников красной, синей, желтой и зеленой красками так, чтобы любые два прямоугольника, имеющие общий участок границы (ненулевой длины), были окрашены различно.

Р е ш е н и е. Переформулируем условие. Нам необходимо наделить каждый прямоугольник одной из 4 меток, так чтобы прямоугольники с одной меткой не имели общего участка границы. Рассмотрим шахматную раскраску. Каждому прямоугольнику соответствует ровно одна черная клетка при шахматной раскраске доски. Если разбить черные клетки на 4 группы по 8 клеток так, что прямоугольники, соответствующие клеткам одной группы не могут иметь общий участок границы, то можно каждому прямоугольнику поставить в соотвествие номер той группы, клетку которой он содержит.

1		3		1		3	
	2		4		2		4
3		1		3		1	
	4		2		4		2
1		3		1		3	
	2		4		2		4
3		1		3		1	
	4		2		4		2

Продемонстрируем на конкретном примере, как раскрасить прямоугольники, из которых сложен квадрат:





□

Задача 2.39. На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

У к а з а н и е. Рассмотрите четырехцветную раскраску, получаемую сдвигом раскраски «горох». Клетки одного цвета не имеют общих точек.

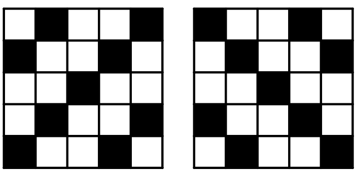
Следующие несколько задач используют идею поворота раскраски, которую мы обсуждали в предыдущем параграфе. Напомним, что конструкция должна удовлетворять одновременно всем полученным из различных раскрасок условиям.

Задача 2.40. В клетчатом квадрате 5×5 по линиям сетки без наложений разместили 8 прямоугольников 1×3. Какая клетка могла оказаться ненакрытой ни одним прямоугольником? (Укажите все варианты).

Ответ: Только центральная клетка.

Р е ш е н и е. Рассмотрим редкую диагональную раскраску.

Черных клеток 9. Каждый прямоугольник накрывает ровно одну черную клетку, значит, одна из черных клеток окажется ненакрытой. Получаем 9 вариантов. Однако, если мы попытаемся разместить прямоугольники так, чтобы оказалась ненакрытой не центральная клетка, то у нас ничего не выйдет. Действительно, если мы повернем квадрат на $90°$, все черные клетки, кроме центральной, поменяют цвет. Но ненакрытой может быть только черная клетка, которая входит и в первый, и во второй вариант раскраски.



В первую и вторую раскраску входит только центральная клетка. Значит, только она и может оказаться свободной. Пример строится несложно. □

В этой задаче мы использовали идею поворота и соображение, что если мы используем несколько раскрасок, то все полученные условия должны быть выполненны одновременно.

Задача 2.41. На доске 8×8 Паша расставил 21 прямоугольный трёхпалубный корабль, а Витя выстрелил один раз и не попал. Куда он мог выстрелить? (Укажите все варианты).

Задача 2.42. В квадрате 7×7 клеток размещено 16 плиток размером 1×3. Докажите, что свободная клетка либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата. Найдите все варианты. Приведите примеры для каждого.

Задача 2.43. В квадрате 10×10 разместили 32 плитки размером 1×3 и одну плитку — размером 2×2. Может ли плитка 2×2 : а) закрывать центр квадрата; б) примыкать к границе квадрата; в) находиться в углу квадрата?

В следующих задачах будем использовать идею чередования.

Задача 2.44. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый из них перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере 9 клеток после этого окажутся свободными.

Р е ш е н и е. Рассмотрим раскраску «зебра». Вначале 45 жуков сидят в черных клетках, 36 — в белых. По команде все жуки переползают в клетку противоположного цвета. Значит, в 45 черных клетках окажется 36 жуков. Получаем, что не меньше 9 клеток окажутся свободными. □

Задача 2.45. На доске расставлены шашки:

○		○		○		○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○						○
○						○	
	○		○		○		○
○		○		○		○	
	○		○		○		○

Каждая может бить другую по шашечным правилам, то есть шашка должна перепрыгнуть через другую, соседнюю по диагонали, шашку на следующую свободную по диагонали клетку. Дамок нет. Может ли на доске остаться одна шашка? Если может, то определите все ее возможные положения.

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Раскрасим диагонали, где стоят шашки, в три цвета:

1		1		1		1	
	2		2		2		2
3		3		3		3	
	1		1		1		1
2		2		2		2	
	3		3		3		3
1		1		1		1	
	2		2		2		2

В задаче все шашки одинаковые, поэтому, будем говорить о цвете шашки, как о цвете клетки, в которой она стоит. Заметим, что когда одна шашка бьет другую, то исчезают две шашки разных цветов и появляется шашка третьего цвета.

Вспомним известную задачу про амебы. *Имеются амебы трех цветов. Когда встречаются амебы двух различных цве-*

тов, они сливаются в одну амебу третьего цвета. При каких начальных условиях на количество амеб каждого типа они все смогут слиться в одну амебу? При помощи трехцветной раскраски диагоналей, нам у далось свести задачу про шашки к задаче про амебы.

Инвариантом в этой задаче является четность разностей количеств шашек разных цветов. Действительно, пусть x, y, z — количество шашек, первого второго и третьего типа соответственно. Возможны всего три варианта изменения количеств шашек:

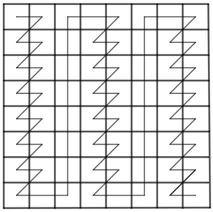
x	y	z
+1	-1	-1
-1	+1	-1
-1	-1	+1

Заметим, что разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ не меняют своей четности. Изначально шашек 1-го и 2-го цвета по 10, третьего — 8. Все цвета отличаются на четное число. Значит, разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ будут делиться на 2, независимо от хода процесса. Если бы в конце осталась одна шашка, то x, y, z приняли значения 0, 0, 1 в некоторой перестановке, а их разности $x - y$, $y - z$, $z - x$ — значения 0, 1, -1. То есть два нечетных числа, одно — четное. Противоречие. Одна шашка остаться не может. $\square$

Задача 2.46. Новая фигура «дельфин» ходит на одну клетку только в одном из трех направлений: вниз, влево и вверх-вправо. Можно ли пройти из правого нижнего угла в левый верхний угол доски: а) 8×8, б) 9×9, побывав во всех клетках доски ровно по одному разу?

Ответ: а) да; б) нет.

Р е ш е н и е. а) Пример:



б) Попробуем придумать раскраску, где удастся увидеть чередование. Пусть фигура стоит в клетке цвета 1. Покрасим все клетки, куда она может попасть одним ходом, цветом 2:

		2
2	1	
	2	

Далее, все клетки, куда она может попасть за два хода — цветом 3:

				3
		3	2	
3	2	1	3	
	3	2		
		3		

За три хода мы можем вернуться в начальную клетку, поэтому клетки, в которые можно попасть из клеток цвета 3, опять покрасим в цвет 1:

						1
				1	3	
		1	3	2	1	
1	3	2	1	3		
	1	3	2	1		
		1	3			
			1			

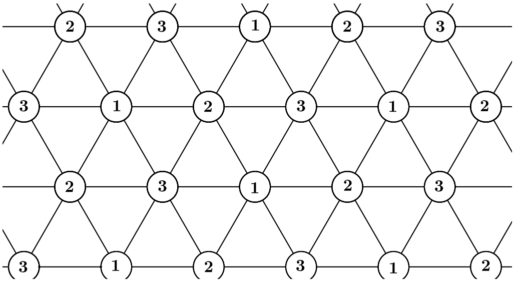
Таким образом, мы получим трехцветную диагональную раскраску доски 9×9 :

1	3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2	1
1	3	2	1	3	2	1	3	2
2	1	3	2	1	3	2	1	3
3	2	1	3	2	1	3	2	1

При движении фигуры цвета будут чередоваться: $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \ldots$. Чтобы попасть из правого нижнего угла в левый верхний, побывав в каждой клетке по одному разу, нужно сделать 80 ходов. После 80-го хода фигура будет находиться в клетке цвета 3, но левый верхний угол имеет цвет 1. Противоречие. $\square$

Задача 2.47. Улицы города расположены в трёх направлениях, так что все кварталы – равные между собой равносторонние треугольники. Правила уличного движения таковы, что через перекресток можно проехать либо прямо, либо повернув влево или вправо на 120° в ближайшую улицу. Поворачивать разрешается только на перекрёстках. Две машины выехали друг за другом из одной точки в одном направлении и едут с одинаковой скоростью, придерживаясь этих правил. Может ли случиться, что через некоторое время они на какой-то улице (не на перекрёстке) встретятся?

Р е ш е н и е. Пусть машины начали движение от перекрестка 1 к перекрестку 2. Как в предыдущей задаче, раскрасим перекрестки, чтобы цвета перекрестков при движении чередовались по циклу: $1 \to 2 \to 3 \to 1 \to \ldots$: Предположим, что машины встретились на какой-то улице. Значит, они двигались по



этой улице в противоположных направлениях: одна от цвета i к j, другая наоборот. Но в цикле чередования цветов такая ситуация невозможна. При помощи раскраски мы смогли выставить одностороннее движение на улицах, удовлетворяющее правилам проезда перекрестка. □

Задача 2.48. Новая фигура «заяц» может ходить на одну клетку вверх по любой диагонали или на клетку вниз по вертикали. За какое наименьшее число ходов заяц сможет обойти все поля доски а) 7×7; а) 5×5 и вернуться на исходное поле?

Р е ш е н и е. Начнем раскрашивать доску, начиная с цвета 1, как в задаче 2.46. Покрасим все клетки, куда фигура может попасть одним ходом, цветом 2:

2		2
	1	
	2	

Далее, все клетки, куда она может попасть за два хода — цветом 3:

3		3		3
	2		2	
	3	1	3	
		2		
		3		

Все клетки, куда фигура может попасть за три хода — цветом

4:

4		4		4		4
	3		3		3	
	4	2	4	2	4	
		3	1	3		
		4	2	4		
			3			
			4			

За четыре хода мы можем вернуться в начальную клетку, поэтому клетки, в которые можно попасть из клеток цвета 4, опять покрасим в цвет 1. Получилась четырехцветная раскраска, удовлетворяющая условию: фигура «заяц» при движении чередует цвета по циклу:$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to \ldots$. Это значит, что попасть в клетку того же цвета можно ровно через 4 хода.

а) Рассмотрим полученную раскраску на доске 7×7 :

3	1	3	1	3	1	3
4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1
2	4	2	4	2	4	2
3	1	3	1	3	1	3
4	2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3	1

На доске 14 клеток цвета «1», 10 клеток цвета «2», 14 клеток цвета «3», 11 клеток цвета «4».

Путь, проходящий через все клетки, содержит не менее 14 клеток цвета «1». Поэтому в пути не менее 56 клеток, то есть нужно сделать не менее 56 ходов. Пример на 56 ходов помогает построить рассуждение, что через клетки цвета «1» путь должен проходить по одному разу.

Заметим, что такую же оценку даст раскраска «горизонтальная зебра». Фигура каждым ходом меняет цвет клетки. Значит, количество ходов не менее 56, так как на доске 28 черных и 21 белая клетки.

б) Раскраска «зебра» даст оценку — 30 ходов. Четырехцветная раскраска, как в пункте а):

1	3	1	3	1
2	4	2	4	2
3	1	3	1	3
4	2	4	2	4
1	3	1	3	1

даст оценку 32, так как всего 8 клеток цвета «1». Более точная – вторая. На доске 8 клеток цвета «1». Построить пример помогут рассуждения, что через клетки цвета «1» фигура должна пройти ровно по одному разу. Определив эти ходы, достраивается весь путь. Начало в верхней левой клетке. Обозначим ее как 0 и 32 — начало и конец пути. В остальных клетках расставим номера, соответствующие номеру хода, после которого фигура попадает в эту клетку:

0 32	30	16	18 22	20
1	27 31	17 25 29	15 19 23	21
2	28	26	24	14
3	5	7	9 13	11
4	6	8	10	12

□

Задача 2.49. В 17 клеток квадрата 5×5 поставили по одной фишке. В один ход каждую фишку передвигают в соседнюю по стороне клетку, соблюдая два правила: запрещено ставить две фишки в одну клетку и, если фишка в какой-то ход передвигалась по горизонтали, то в следующий ход ее надо передвинуть по вертикали, и наобоорот. Может ли процесс продолжаться сколь угодно долго?

Р е ш е н и е. Предположим, что такой процесс возможен. Раскрасим квадрат 5×5 в 4 цвета: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 \to \ldots$:

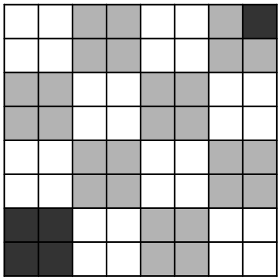
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1

Заметим, что двигаясь по правилам, фишки из клеток цвета «1» попадают в клетки цвета «2» или «4», а следующим ходом они однозначно попадают в клетки цвета «3».

На доске 9 клеток цвета «1», 6 клеток цвета «2», 4 клетки цвета «3», 6 клеток цвета «4». Так как клеток цвета «3» всего 4, то изначально в клетках цвета «1» стояло не более 4 фишек. Иначе через два хода в 4 клетках окажется более 4 фишек. Получаем, что в клетках «1» и «3» цвета изначально было не более 8 фишек. Тогда в клетках «2» и «4» цвета изначально стояло не менее 9 фишек. После первого хода они окажутся в клетках «1» и «3» цвета. Так клеток «3» цвета всего 4, то в клетках «1» цвета окажется не менее 5 фишек, которые еще через два хода должны попасть в 4 клетки «3» цвета. Противоречие. 17 фишек не смогут двигаться дольше 3 ходов. $\square$

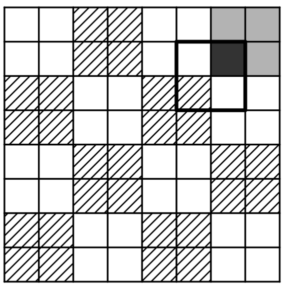
Задача 2.50. В одном из углов шахматной доски лежит плоский картонный квадрат 2×2, а в противоположном углу — квадрат 1×1. Двое играющих по очереди перекатывают каждый свой квадрат через сторону: Боря — большой квадрат, а Миша — маленький. Боря выигрывает, если Мишин квадрат окажется на клетке, накрытой Бориным квадратом. Начинает Боря. Может ли он выиграть независимо от игры Миши?

Р е ш е н и е. Покажем, что Миша может действовать так, что Боря не сможет выиграть. Рассмотрим крупную шахматную раскраску: Квадрат Бори в левом нижнем углу, Миши — в правом



верхнем. Ход Миши заключается в перемещении своего квадрата в соседний по стороне квадрат 1×1. Ход Бори заключается в перемещении своего квадрата в соседний по стороне квадрат $2{\times}2$. При этом цвет клеток, которые накрывает квадрат Бори, будет меняться на противоположный.

Миша четвертым ходом занимает позицию, изображенную на риунке:



Борин квадрат при этом накрывает один из 7 заштрихованных квадратов. Опишем стратегию Миши после 4-го хода. Он ходит только по 4 клеткам в выделенной области. После хода

Миши квадраты игроков оказываются в клетках одного цвета. Если квадрат Бори накрывает клетку в выделенной области, то Миша ходит во второй квадрат этой области того же цвета. Если квадрат Бори не накрывает ни одной клетки в выделенной области, то Миша возвращается в клетку, как после четвертого хода.

□

2.4 Раскраски и расстановка чисел

Идея решения задач в этом параграфе состоит в том, чтобы вместо красок использовать числа. Это позволяет помимо подсчета количества клеток определенного цвета выполнять арифметические операции с самими числами.

Разберем несколько уже решенных задач.

Задача 2.51. Можно ли разрезать доску 6×6 на: четырехклеточные фигуры типа Г?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Если разрезание возможно, то количество фигур должно быть 36/4=9.

Нам удалось решить эту задачу при помощи раскраски «зебра» и использования соображений четности. Расставим числа в таблице следующим образом:

1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0

Сумма всех чисел в таблице равна 18. Вычислим сумму в предположении, что доску можно разрезать на четырехклеточные фигуры типа Г. Сумма чисел, накрытых фигурой типа Г равна либо 1, либо 3, то есть нечетному числу. Значит, сумма чисел в 9 фигурах типа Г — нечетное число. Получили противоречие: 18 — нечетное число. □

Заметим, что в большинстве задач, где удается ипользовать четность в раскраске, мы можем заменить отмеченные клетки цифрами 1 в таблице.

Задача 2.52. Можно ли разрезать доску 8×8 с вырезанным уголком на прямоугольники 1×3 по линиям сетки?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Первый способ. Запишем в каждую клетку доски числа 0, 1, 2 следующим образом:

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
	1	2	0	1	2	0	1

Это аналог трехцветной диагональной раскраски. Вместо красок — остатки от деления на 3. Сумма всех чисел в таблице равна 64. Вычислим сумму в предположении, что доску можно разрезать на прямоугольники 1×3. Сумма чисел, накрытых прямоугольником 1×3 равна 3. Получаем, что в 21 прямоугольнике сумма чисел равна 63. Получили противоречие: 64=63.

Решение по сложности такое же, как и с подсчетом количества клеток каждого цвета.

Второй способ. Запишем в каждую клетку доски числа 0, 1, 2 следующим образом:

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1

Это аналог трехцветной горизонтальной раскраски. Сумма всех чисел в таблице равна 55. Вычислим сумму в предположении, что доску можно разрезать на прямоугольники 1×3. Сумма чисел, накрытых прямоугольником 1×3 всегда делится на 3. Получаем, что в 21 прямоугольнике сумма чисел делится на 3. Получили противоречие: 55 делится на 3.

При решении этим способом нам удалось избежать алгебраических выкладок, используя только арифметику, что существенно упростило решение по сравнению с подсчетом количества клеток различных цветов. □

Задача 2.53. Можно ли разрезать квадрат 6×6 на 11 прямоугольников 1×3 и один трехклеточный уголок?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. Использование раскрасок типа трехцветная диагональная и трехцветная горизонтальная приводит к перебору вариантов, сколько клеток каждого цвета накрывает уголок. Используя аналог трехцветной горизонтальной раскраски, мы получаем короткое арифметическое решение. Расставим числа в таблице следующим образом:

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2

Сумма всех чисел в таблице равна 36. Вычислим сумму в предположении, что доску можно разрезать на 11 прямоугольников 1×3 и один трехклеточный уголок. Сумма чисел, накрытых прямоугольником делится на 3. Значит, сумма чисел, накрытых 11 прямоугольниками 1×3 делится на 3. Уголок содержит две клетки в одной строке и одну в соседней. Значит, сумма чисел, накрытых уголком не делится на 3. Плучаем, что все фигуры накрывают числа, сумма которых не делится на 3. Получили противоречие:

36 не делится на 3. □

Задача 2.54. Можно ли доску 5×7 покрыть уголками из трех клеток в несколько слоев так, чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же количеством уголков?

Ответ: Нет.

Р е ш е н и е. В этой задаче используем такую идею: расставим числа в таблице 5×7 так, чтобы в каждом уголке сумма была отрицательная, а во всей таблице — положительная. Используем соображения раскраски «горох». Расставим числа в таблице следующим образом:

x	y	x	y	x	y	x
y	y	y	y	y	y	y
x	y	x	y	x	y	x
y	y	y	y	y	y	y
x	y	x	y	x	y	x

Сумма всех чисел в таблице равна $12x+23y$, а сумма в уголках $3y$ или $x + 2y$. Подберем числа x и y так, чтобы они удовлетворяли неравенствам: $12x + 23y > 0$, $3y < 0$, $x + 2y < 0$. Эти неравенства приводят к следующим: $y < 0$, $-\dfrac{23}{12}y < x < -2y$. В качестве чисел можно взять $y = -24$, $x = 47$. Тогда, вычислив сумму всех чисел в таблице, накрытой в k слоев двумя способами, мы получим что положительное число равно отрицательному. □

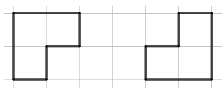


Рис. 2.22: Задача 2.55. Уголки.

Задача 2.55. Прямоугольник $m \times n$ разрезан на уголки из трёх клеток. Докажите, что разность между количеством уголков, ориентированных как на рис. 2.22. слева, и количеством уголков, ориентированных как на рис. 2.22. справа, делится на 3.

Р е ш е н и е. Сначала заметим, что либо m, либо n делится на 3, так количество клеток прямоугольника делится на 3.

Используем соображения трехцветной диагональной раскраски. Расставим числа в прямоугольнике следующим образом:

1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1

Сумма всех чисел в таблице делится на 3, так как мы ее можем разрезать на прямоугольники 1×3.

Всего уголков 4 типа. Два типа уголков, которые не указаны в условии задачи, всегда расположены в трех последовательных диагоналях, следовательно накрывают три клетки, сумма чисел в которых равна 3:

1	2		2	0		0	1
	0			1			2

1			2			0	
2	0		0	1		1	2

Уголки, изображенные на рис. 2.22. слева, всегда накрывают три числа, которые в сумме дают остаток 2 при делении на 3:

1	2		2	0		0	1
2			0			1	

Уголки, изображенные на рис. 2.22. справа, всегда накрывают три числа, которые в сумме дают остаток 1 при делении на 3:

	2			0			1
2	0		0	1		1	2

Пусть количество уголков, изображенных на рис. 2.22. слева равно k, а количество уголков, изображенных на рис. 2.22. справа равно l. Так как сумма всех чисел в таблице делится на 3, получаем, что $2k + l \vdots 3$. Откуда получаем, что $(k - l) = 3k - (2k + l)$ также делится на 3. □

Задача 2.56. На шахматной доске расставили 8 ладей так, что они не бьют друг друга. Докажите, что в черных клетках стоит четное число ладей.

Р е ш е н и е. Нам нужно ввести характеристики, позволяющие говорить о четности ладей, стоящих в черных клетках. Как можно численно различать белые и черные клетки? Заметим, что если ввести координаты на доске, то есть каждой клетке поставить в соответствие номер строки и столбца, где стоит клетка, то белым клекткм соoствествуют пары чисел, сумма которых четна, а черным — пары с нечетной суммой (главная диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний — белая; левая нижняя клетка имеет координаты — (1,1)). Поставим в соответствие ладье сумму чисел координат клеток, где она стоит. Ладьям, стоящим в черных клектах, соотвествуют нечетные числа, а в белых — четные. Сумма всех пар чисел, для 8 не бьющих друг друга ладей, равна $(1+2+3+4+5+6+7+8)+(1+2+3+4+5+6+7+8)$ — четное число. Значит, нечетных слагаемых — четное число. □

Задача 2.57. Дно прямоугольной коробки выложили прямоугольниками 1×4 и квадратами 2×2. Затем все фигуры высыпали и один квадрат поменяли на прямоугольник. Удастся ли снова выложить дно коробки?

Указание. Решите эту задачу при помощи четырехцветной диагональной раскраски. Обратите внимание, что если диагонали пронумеровать 1, 2, 3, 4, $1, \ldots$, то каждый квадрат накрывает 4 числа, в сумме кратные 4, а каждый прямоугольник — 4 числа, в сумме дающие 10.

В каждой из следующих задач придумайте соответствующую задачу на разрезание, и ее решение при помощи полученной таблицы.

Задача 2.58. Заполните таблицу 6×6 числами так, чтобы сумма чисел во всей таблице была четной, а в каждом прямоугольнике 1×4 — нечетной.

Задача 2.59. Заполните таблицу 8×8 числами так, чтобы сумма чисел во всей таблице была четной, а в а) каждом квадрате 3×3; б) в каждой фигуре из четырех клеток, типа S — нечетной. Можно ли это сделать для в) букв Г из четырех клеток; г) букв Т из четырех клеток?

Задача 2.60. Заполните таблицу 8×8 числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была четной, а в каждой фигуре из четырех клеток типа Г — нечетной.

Задача 2.61. Заполните таблицу 8×8 числами так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была нечетной, а в каждом прямоугольнике 1×4 — четной.

Задача 2.62. Заполните таблицу 6×6 числами $1, 2, 3$ так, чтобы сумма чисел во всех прямоугольниках 1×3 делилась на 3, а в любом уголке из трех клеток не делилась.

Задача 2.63. Заполните таблицу 8×8 числами так, чтобы: а) сумма чисел в каждом квадрате 2×2 не делилась на 4, а в каждом прямоугольнике 1×4 — делилась; б) сумма чисел в каждом квадрате 2×2 делилась на 4, а в каждом прямоугольнике 1×4 — не делилась.

Задача 2.64. Можно ли расставить в клетках таблицы 100×100 натуральные числа так, чтобы при любом разрезании этой таблицы на прямоугольники 1×2 нашлось ровно 2021 прямоугольник, сумма чисел на которых четна (а на остальных — нечетна)?

Задача 2.65. Расставьте натуральные числа в таблице 8×8 так, чтобы в любом вертикальном прямоугольнике $1 \times n$ сумма чисел была нечетная, а в любом горизонтальном — четная, при $n = 1, 2, 3$.

Глава 3

Принцип Дирихле

Часто возникают задачи с вопросом — какое наибольшее (наименьшее) количество объектов можно (нужно)... Решать такие задачи помогает принцип Дирихле: *если в каждой из n клеток сидит не более одного кролика, то всего в клетках находится не более n кроликов.* Этот принцип можно сформулировать в терминах меток: *если мы хотим наделить n объектов различными метками, то нам понадобится не менее n меток.* Обычно мы будем говорить о соотвествии между объектами — «кроликами» и метками — «клетками».

Также это утверждение является одной из форм следующей теоремы теории множеств: Если имеется отображение множества X **на** часть множества Y, то мощность Y не менее мощности X.

В некоторых задачах непосредственно из условия становится понятно, что считать «кроликами», а что «клетками», в других требуется изрядное воображение, чтобы это понять. Придумать удобные метки — «клетки» в задаче — это тоже самое, что и придумать раскраску.

3.1 Прямой подсчет

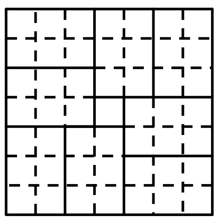
К самым простым задачам на применение принципа Дирихле относятся задачи, где можно непосредственно оценить количество исследуемых объектов.

Задача 3.1. Какое наибольшее количество прямоугольников 2×3 можно вырезать из доски 7×7?

Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Пусть из доски вырезали n прямоугольников 2×3. Каждому из n прямоугольников будет соответствовать ровно 6 различных клеток. Так как каждая клетка может принадлежать не более, чем одному прямоугольнику 2×3, то всего $6n$ различных клеток будет соответствовать вырезанным прямоугольникам. Их не может быть более 49 (всего клеток в квадрате). Значит, $6n \leqslant 49$, $n \leqslant 8$.

Пример на 8 прямоугольников:



В этой задаче объекты-«кролики» — это клетки, их 49 штук. Метки-«клетки» — это прямоугольники, которым они принадлежат. В каждой «клетке» сидит ровно по 6 «кроликов». Значит, «клеток» не более 8. Заметим, что какие-то «кролики» могут не попасть ни в одну из «клеток».

С точки зрения меток решение можно было описать следующим образом. Мы наделяем некоторые из 49 объектов метками (каждому не более одной), причем мы выдаем по 6 экземпляров каждого вида меток. Мы не можем выдать более 8 комплектов меток. □

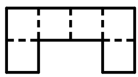
Задача 3.2. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×5 можно вырезать из доски 8×8?

Ответ: 12.

Задача 3.3. Новая шахматная фигура тритон бьёт три клетки — одну перед собой в заданном направлении и соседние с этой клеткой справа и слева относительно указанного направления, т.е. фактически бьёт прямоугольник 1×3, перпендикулярный направлению. Какое наименьшее количество тритонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы ни один не бил другого, а все свободные клетки находились под боем?

Ответ: 16.

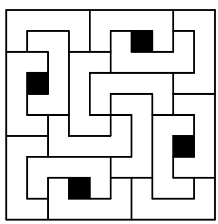
Задача 3.4. Какое наибольшее количество фигурок — скобок из 6 клеток можно вырезаь из квадрата 10×10?



Ответ: 16.

Р е ш е н и е. Всего клеток 100. Каждая клетка может соответсвовать не более чем одной фигуре, значит фигур не более, чем $[100/6] = 16$.

Пример на 16 скобок:



Задача 3.5. В какое наименьшее число цветов можно раскрасить клетки квадрата 7×7 так, чтобы у каждой клетки все соседние по стороне клетки были различных цветов?

Ответ: 4.

Р е ш е н и е. Так как есть клетки, у которых 4 соседа и по условию они все должны быть различных цветов, то цветов на доске не менее четырех.

Пример:

1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1

В этой задаче метки-«клетки» — это цвета. Из геометроических соображений, мы определили, что найдется 4 «кролика», которые должны попасть в различные «клетки». Значит, нам покадобится не менее 4 «клеток». □

Задача 3.6. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить клетки квадрата 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

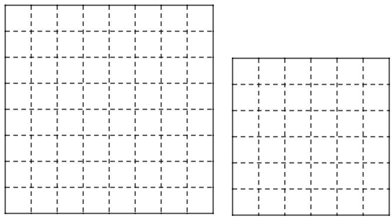
Ответ: 16.

Р е ш е н и е. Рассмотрим любой цвет, присутствующий на доске. Возьмем любую клетку этого цвета и двух ее соседей такого же цвета. Эти две клетки не могут быть соседними по стороне. Значит, у них имеется хотя бы еще одна соседняя по стороне клетка того же цвета. Получаем, что выбранному цвету соответствует не менее 4 клеток. Значит, на доске не боле $64/4 = 16$ цветов.

Пример — каждый из 16 квадратов 2×2 окрашен в свой цвет.

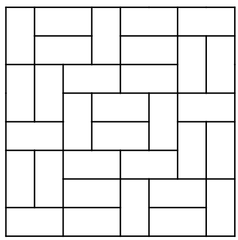
В этой задаче метки-«клетки» — это цвета. Мы показали, что в каждой «клетке» находится не менее 4 кроликов. Значит, клеток не более 16. □

Задача 3.7. Можно ли разбить доску: а) 8×8; б) 6×6 на прямоугольники 2×1 так, чтобы каждая линия сетки пересекала хоя бы один прямоугольник?



Ответ: а) Да; б) Нет.

Р е ш е н и е. а) Пример:



б) Предположим, что это возможно. Мы можем построить соответствие между линиями сетки и прямоугольниками 2×1, которые они пересекают. Всего у нас 10 линий сетки, 5 вертикальных и 5 горизонтальных.

Заметим, что линия сетки разрезает доску на две части, каждая из которых, содержит четное число клеток. Значит, линия сетки пересекает четное число прямоугольников (иначе, в части с четным числом клеток окажется нечетное число половинок прямоугольников). Получаем, что каждой линии сетки соотвествует не меньше двух прямоугольников, которые она пересекает.

При этом, каждому прямоугольнику соотвествует ровно одна линия сетки, которая его пересекает. Воспользуемся принципом

Дирихле. Если назвать прямоугольники — «кроликами», а линни сетки — «клетками», то получим, что у нас имется 10 «клеток», в каждой из которых, сидит не менее двух кроликов. Значит, «кроликов» не менее 20. Но у нас имеется всего $36/2 = 18$ прямоугольников-«кроликов». Противоречие. $\square$

Задача 3.8. 55 квадратов 2×2 расположили на клетчатой доске 10×10 так, что они накрыли всю доску, а их стороны идут по линиям сетки. Докажите, что один из них можно снять так, что доска останется покрытой.

Р е ш е н и е. Рассмотрим положение левых верхних клеток квадратов 2×2. Если какие-то две совпадают, то совпадают и квадраты и один из них можно снять. Предположим, что все 55 клеток различны. Для них возможно расположение в 9 строках. По принципу Дирихле, найдется строка, в которой находится не менее семи левых верхних клеток квадратов. Отметим левые верхние квдраты клеток в этой строке. Заметим, что если в строке три отмеченные клетки идут подряд, то квадрат, соотвествующий средней, можно снять. Отмеченные клетки могут располагаться только в 1-9 столбце. Разобьем их на три тройки: $1-3$, $4-6$, $7-9$. Так как клеток 7, то по принципу Дирихле найдется тройка, где все клетки — отмеченные. Можно убрать квадрат, соотвествующий средней клетке этой тройки. $\square$

3.2 Разбиение на меньшие части

Один из способов применения принципа Дирихле — это метод разбиения на меньшие части. Метод заключается в том, что «большой» объект мы разбиваем на меньшие непересекающиеся части, в каждой из которых, можно сделать оценку.

Заметим, что этот прием наглядно иллюстрирует применение рассуждений типа «кролики»-«клетки». Каждая меньшая часть — это «клетка», в которой мы считаем «кроликов». В некоторых задачах придумать меньшую часть несложно, исходя из свойств объекта, в других придется применить изобретательность, чтобы понять, какие меньшие части нам могут помочь.

Разумется, все рассуждения можно провести в терминах меток или раскрасок. Каждую меньшую часть мы можем покрасить в свой цвет-метку, и показать, что одному цвету-метке соответствует определенное количество исследуемых объектов.

Разберем примеры с шахматными фигурами.

Задача 3.9. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

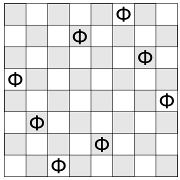
Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на восемь вертикалей. В каждой может стоять не более одной ладьи. Получается, что на доске может стоять не более восьми ладей. Пример расстановки: ладьи на главной диагонали. □

Задача 3.10. Какое наибольшее количество ферзей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Интересно, что оценка и ответ в этой задаче такой же, как и в задаче с ладьями. Однако пример здесь строится намного сложнее, поэтому многие пытаются начать доказывать, что больше семи ферзей поставить нельзя. Один из примеров на восемь ферзей:



□

Обратим внимание, что все решения должны содержать две части: оценку и пример. Принцип Дирихле, в основном, помогает сделать оценку.

Задача 3.11. Какое наибольшее количество королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 16.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2. В каждом может стоять не более одного короля. Всего не более 16 королей.

Пример: в каждом квадрате 2×2 король стоит в левом верхнем углу. □

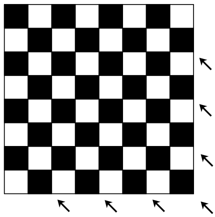
Задача 3.12. а) Докажите, что если поставить одного короля на шахматную доску, то после этого можно поставить еще 15 королей так, что все 16 королей не будут бить друг друга. б) На доску поставили двух небьющих друг друга королей. Всегда ли можно после этого поставить еще 14 королей так, что все 16 королей не будут бить друг друга?

Ответ: б) нет.

Задача 3.13. Какое наибольшее количество слонов можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 14.

Р е ш е н и е. Заметим, что слон, стоящий в черной клетке бьет только черные клетки. Разобьем все черные клетки на семь диагоналей.



Получается, что на черные клетки доски можно поставить не более семи слонов. Аналогично, не более семи слонов можно поставить в белые клетки доски. Значит, всего можно поставить не более 14 слонов.

Пример строится несложно. □

З а м е ч а н и е. Можно не делить слонов на стоящих в черных и белых клетках. Всю доску можно разбить на 15 диагоналей, параллельных главной диагонали $a1-h8$. При этом нужно заметить, что в двух диагоналях, содержащих по одной клетке ($a8$ и $h1$), двух слонов одновременно поставить нельзя.

Задача 3.14. Какое наибольшее количество коней можно поставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 32.

Р е ш е н и е. Заметим, что конь бьет клетки противоположного цвета тому, на котором стоит. Значит, если поставить 32 коней в 32 черные клетки, то получим пример расстановки для 32 коней.

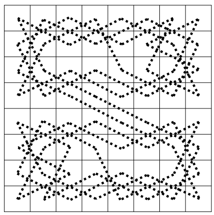
Теперь оценка. Разобьем доску на прямоугольники 2×4 и покажем, что в каждом из них может стоять не более 4 коней. Раскрасим прямоугольник 2×4 в 4 цвета:

1	2	3	4
3	4	1	2

Все клетки в области разбились на 4 пары одноцветных клеток. В каждой паре может стоять не более одной фигуры, так как они связаны одним ходом коня, значит, в каждой из 8 областей можно поставить не более 4 коней, а на всей доске — не более $8 \times 4 = 32$ коней. □

З а м е ч а н и е. Заметим, что в этом решении мы использовали разбиение, а для доказательства оценки в меньшей части раскраску. Раскраску можно было использовать сразу, если разбить все клетки доски 8×8 на 32 пары клеток, отстоящих друг от друга на ход коня. Это решение эквивалетно разбиению на 32 меньшие части.

З а м е ч а н и е. Еще один способ состоит в следующем: построим замкнутый путь коня, проходящий через все клетки доски по одному разу.



Пронумеруем клетки вдоль пути числами от 1 до 64. Тогда в двух клетках, пронумерованных соседними числами, не может находиться более одного коня. Поэтому занятых клеток не более половины.

Задача 3.15. Какое наибольшее количество клеток на доске 8×8 можно закрасить так, чтобы не оказалось ни одного полностью закрашенного уголка из трех клеток?

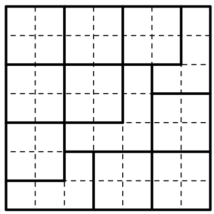
Ответ: 32.

У к а з а н и е. Разбейте доску на 16 квадратов 2×2.

Задача 3.16. Какое наибольшее количество клеток на доске 7×7 можно закрасить так, чтобы не оказалось ни одного полностью закрашенного уголка из трех клеток?

Ответ: 28.

Р е ш е н и е. В отличие от предыдущей задачи, доску не удастся разбить на удобные для оценки квадраты $2{\times}2$. Разместим эти квадраты с углов насколько это возможно, оставшуюся часть разобьем на два уголка из 4 клеток и уголок из 5 клеток:



В каждом квадрате 2×2 можно отметить не более двух клеток, в уголке из четырех клеток не более трех, в уголке из пяти — не более 4. Всего получается, чпо можно отметить, не более $2 \times 9 + 2 \times 3 + 4 = 28$ клеток.

Пример — раскраска «зебра». □

З а м е ч а н и е. Обратим внимание, что в этой задаче мы разбили доску на различные области, в каждой из которых мы сделали различные оценки.

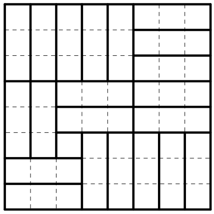
Задача 3.17. Какое наименьшее количество клеток на доске а) 8×8; б) 7×7; нужно закрасить так, в любом уголке из трех клеток нашлась закрашенная клетка?

Ответ: а) 32; б) 21.

Задача 3.18. Какое наименьшее число клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 была отмеченная клетка?

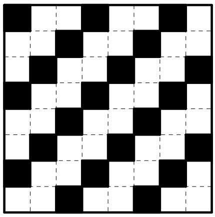
Ответ: 21.

Р е ш е н и е. Выделим на доске 21 непересекающийся прямоугольник 1×3.



Для того, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 оказалась отмеченная клетка, необходимо отметить не менее 21 клетки.

Пример — редкая диагональная раскраска.



□

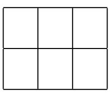
Задача 3.19. Какое наибольшее число клеток на доске 8×8 можно отметить так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 нашлась неотмеченная клетка?

Ответ: 43.

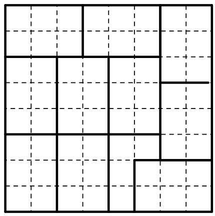
Задача 3.20. Какое наименьшее число клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом уголке из 4 клеток нашлась отмеченная клетка?

Ответ: 21.

Р е ш е н и е. Квадрат 8×8 можно разбить на 16 непересекающихся уголков из 4 клеток. Получается, что нам понадобится отметить не менее 16 клеток. Однако пример на 16 клеток построить не удастся. Сделаем более точную оценку. Рассмотрим такую область:



В каждом прямоугольнике 2×3 необходимо отметить не менее двух клеток (прямой перебор показывает, что одной клетки недостаточно). Разобьем доску на 10 прямоугольников 2×3 и один уголок из 4 клеток:



Получаем, что необходимо отметить не менее $2 \times 10 + 1 = 21$ клетки.

Пример такой же, как в задаче 3.18. Действительно, каждый уголок содержит прямоугольник 1×3, значит, в каждом уголке будет находиться хотя бы одна отмеченная клетка. □

Задача 3.21. Какое наибольшее число клеток на доске 8×8 можно отметить так, чтобы в любом уголке из 4 клеток нашлась неотмеченная клетка?

Ответ: 43.

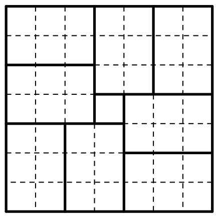
Задача 3.22. Больной ладьей называется шахматная фигура, которая ходит и бьет как обычная ладья, но только на одну или две клетки. Какое наибольшее число больных ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 22.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на 21 прямоугольник 1×3 и одну клетку. В каждом прямоугольнике 1×3 можно поставить не более одной ладьи. Значит на доску можно поставить не более $22 + 1 = 22$ больных ладей так, чтобы они не били друг друга. Пример — диагональная раскраска с 22 клетками. □

Задача 3.23. В квадрате 7×7 отмечено 7 клеток. Докажите, что внутри квадрата можно по клеточкам выделить прямоугольник 2×3 без отмеченных клеток.

Р е ш е н и е. Выделим в квадрате 7×7 восемь непересекающихся прямоугольников 2×3 :



7 отмеченных клеток могут попасть только в семь из них. □

Задача 3.24. На шахматную доску по очереди выставляются короли так, что каждый новый поставленный король бьёт не более одного выставленного на тот момент на доску короля. Какое наибольшее количество королей можно выставить на доску по таким правилам?

Ответ: 32.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на 16 квадратов 2×2. В каждом квадрате может быть выставлено не более двух королей, иначе, третий по счету выставленный в квадрат король будет бить двух, ранее выставленных в этот квадрат королей.

Пример на 32 короля:

1		9		17		25	
2		10		18		26	
3		11		19		27	
4		12		20		28	
5		13		21		29	
6		14		22		30	
7		15		23		31	
8		16		24		32	

□

Задача 3.25. На шахматную доску по очереди выставляются короли так, что каждый новый поставленный король, начиная со второго, бьёт ровно одного выставленного на тот момент на доску короля. Какое наибольшее количество королей можно выставить на доску по таким правилам?

Ответ: 32.

Р е ш е н и е. Оценка делается также, как в предыдущей задаче.

Пример на 32 короля:

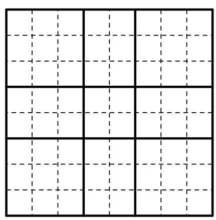
1			23	22	21	20	
2		24					19
3		25		32			18
4		26			31		17
5		27			30		16
6			28	29			15
7							14
	8	9	10	11	12	13	

□

Задача 3.26. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 находилось ровно 4 фишки?

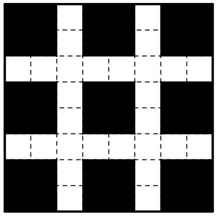
Ответ: 36.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на 9 областей:



В каждой из 9 областей можно расставить не более 4 фишек. Значит, на доске можно расставить не более 36 фишек.

Пример:



□

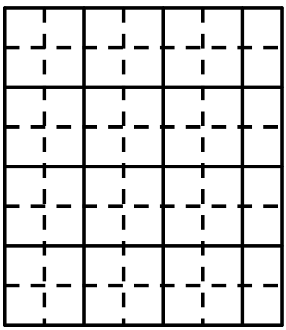
Задача 3.27. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 находилось ровно 3 фишки?

Ответ: 27.

Задача 3.28. Клетки прямоугольника 7×8 покрашены в три цвета, причём в любом квадратике 2×2 есть клетки всех трёх цветов. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено в один цвет?

Ответ: 32.

Р е ш е н и е. Разобьем прямоугольник на 16 областей:



В каждой области в один цвет может быть закрашенно не более двух клеток. Значит на всей доске в один цвет может быть закрашенно не более 32 клеток.

Пример:

1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1
1	2	1	2	1	2	1
1	3	1	3	1	3	1

□

Задача 3.29. Назовём квартетом четвёрку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. Например:

	$*$			$*$
	$*$			$*$

Какое наибольшее число квартетов можно разместить в квадрате 5×5?

Ответ: 5.

Р е ш е н и е. Разобьем доску на вертикали. Если в вертикали есть клетка какого-либо квартета, то в этой вертикали должна быть и вторая клетка этого квартета. Значит, в каждой вертикали клетки разбиваются на пары клеток из одного квартета и свободные клетки. Получаем, что в каждой вертикали четное число клеток, принадлежащих одному из квартетов, то есть не более 4. Значит, в квадрате не более $4 \times 5 = 20$ клеток, принадлежащих одному из квартетов. Каждому квартету принадлежит ровно 4 клетки, получаем, что квартетов не более 5.

Построим пример с 5 квартетами:

4	1	4	1	
2	2	5		5
2	2		3	3
4		4	3	3
	1	5	1	5

□

Задача 3.30. Какое наибольшее количество коней можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый конь бил ровно одного коня?

Ответ: 32.

Решение. Рассмотрим квадрат 4×4 и его раскраску в 4 цвета:

1	3	4	2
4	2	1	3
3	1	2	4
2	4	3	1

В клетках одного цвета не может стоять более двух коней. Значит, всего в квадрате 4×4 можно расставить не более 8 коней, а на всей доске не более 32.

Пример на 32 коня:

К	К	К	К			К	К
К	К	К	К			К	К
						К	К
						К	К
К	К						
К	К						
К	К			К	К	К	К
К	К			К	К	К	К

□

Задача 3.31. Какое наибольшее количество чисел можно отметить среди первых 1000 натуральных чисел, чтобы разность любых двух отмеченных чисел не была простым числом?

Ответ: 250.

Р е ш е н и е. Запишем числа от 1 до 1000 в клетки строки 1×1000. Докажем, что среди 8 подряд идущих чисел нельзя отметить больше двух чисел так, чтобы они удовлетворяли условию задачи.

Сначала рассмотрим отмеченное число и выделим четверки подряд идущих чисел, в которые оно входит. Это будет цепочка из 7 последовательных чисел. Поставим знак «-» в клетки с теми числами, которые не могут быть отмечены, так как разность между ними и отмеченным числом будет простым числом. Знаком «+» отметим клетки, числа в которых могут быть отмечены.

$-$	$-$	$+$	$\circ$	$+$	$-$	$-$

Отметить оба числа в клетках с + нельзя, так как разность между ними равна 2. Получаем, что если в какой-то четверке подряд идущих чисел есть отмеченное, то в этой четверке максимум два отмеченных числа, причем они соседние.

Предположим, что среди 8 подряд идущих чисел нашлось 3 отмеченных. Тогда два из них попадают в одну четверку подряд идущих чисел. По доказанному, они — соседние. Обозначим знаком «-» среди 7 клеток справа и слева от этой пары те клетки, в которых числа дают разность — простое число с этими отмечеными.

–	–	–	–	–	–	–	○	○	–	–	–	–	–	–	–

Значит, ни среди 7 чисел справа, ни среди 7 чисел слева, больше нет отмеченных чисел. Получаем, что 8 подряд идущих чисел, содержащих отмеченное число, могут содержать максимум еще одно отмеченное число.

Разобьем все числа на 125 восьмерк подряд идущих чисел. Каждой такой восьмерке соотвествует не более двух отмеченных чисел. Значит, всего чисел не более 250.

Пример: все числа, кратные 4. Разность между ними кратна 4, значит — составное число. □

Задача 3.32. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось чётное число фишек?

Ответ: 48.

Указание. . Все клетки одного цвета шахматной доски можно разбить на 8 диагоналей с нечетным числом клеток. В каждой из полученных 16 непересекающихся диагоналей, не могут быть закрашены все клетки.

Задача 3.33. Какое наименьшее количество клеток доски 2×7 нужно закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед?

Решение. Рассмотрим любую клетку на доске и все смежные с ней по стороне. Заметим, что среди этих клеток должна найтись хотя бы одна закрашенная.

Разобьем доску 2×7 на 4 части (раскрасим в 4 цвета):

1	1	2	3	3	3	4
1	2	2	2	3	4	4

В каждой группе клеток одного цвета, должна присутствовать хотя бы одна закрашенная клетка, иначе клетка, смежная с другими в группе, не будет иметь закрашенную соседнюю клетку. Значит, на доске должно быть закрашенно не менее 4 клеток.

Пример:

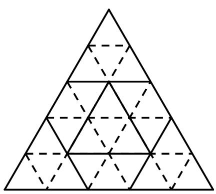
*				*		
		*				*

□

Задача 3.34. Правильный треугольник разбит на 25 маленьких правильных треугольников. Какое наименьшее количество маленьких треугольников нужно закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед? (соседние треугольники — это треугольники, которые имеют общую сторону)

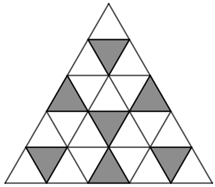
Ответ: 7.

Р е ш е н и е. Разобьем треугольник на 7 неодинаковых частей:



В каждой из 7 частей должен найтись закрашенный треугольник, иначе в этой части найдется незакрашенный треугольник, не имеющий закрашенного соседа. Отсюда получаем оценку, что всего должно быть закрашено не менее 7 треугольников.

Пример:



□

Задача 3.35. Какое наибольшеее количество треугольников можно закрасить в следующих фигурах так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих точек?

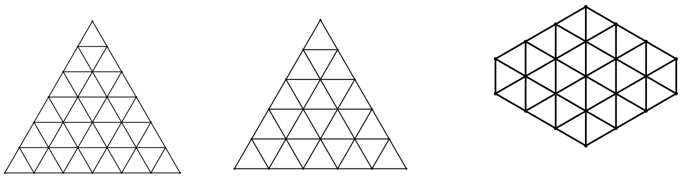
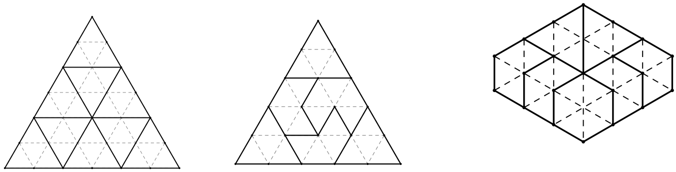


Рис. 3.1: а) б) в)

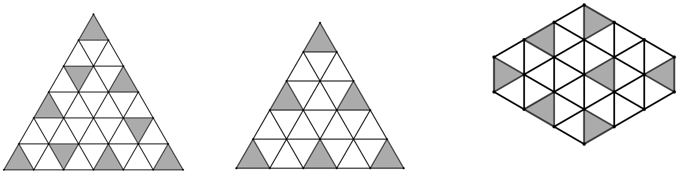
Ответ: а) 9; б) 6; в) 7.

Р е ш е н и е. Разобьем фигуры на меньшие части. Первую удается разбить на 9 одинаковых, а вторую на 6 неодинаковых частей, третью — на 7 неодинаковых частей:



В каждой из частей можно зарасить не более одного треугольника. Отсюда получаем оценки: в первой фигуре — 9, во второй — 6, в третьей — 7.

Примеры:



□

К этой задаче мы еще вернемся в параграфе на метод подсчета узлов.

Задача 3.36. На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Вспомните задачу 3.33. Будем считать лжеца — закрашенной клеткой. Тогда у каждой незакрашенной клетки должна найтись соседняя по стороне закрашенная клетка.

Рассмотрим следующее разбиение доски:

1	1	3	5	5	5	7	7
1	3	3	3	5	6		7
2		3	4	6	6	6	8
2	2	4	4	4	6	8	8

В каждой из областей должна найтись закрашенная клетка, значит закрашенных клеток не менее 8.

Пример, как могут быть расположены 8 лжецов в президиуме:

	*				*		
			*				*
*				*			
		*				*	

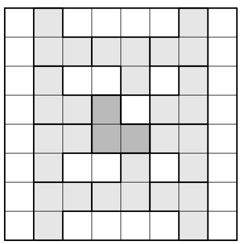
□

Еще раз обратим внимание, что в последних трех задачах, части разбиения были различными, что вызывает определенную трудность при решении.

Задача 3.37. Какое наименьшее количество уголков из трех клеток необходимо вырезать из доски 8×8 так, чтобы нельзя было больше вырезать ни одного уголка?

Р е ш е н и е. В каждом квадрате 2×2 должно быть вырезано не менее двух клеток, значит, всего необходимо вырезать не менее 32 клеток. Следовательно, понадобится не менее 11 уголков.

Пример на 11:



□

Задача 3.38. Каково наибольшее количество вершин у многоугольника, у которого все стороны лежат на шести прямых?

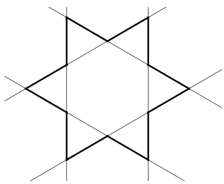
Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Заметим, что стороны многоугольника, лежащие на одной прямой, не могут быть смежными. Следовательно, каждой стороне на одной прямой соотвествует по две различные вершины, и ни одна вершина не соотвествует сразу двум сторонам.

Рассмотрим произвольную прямую, на которой лежат стороны многоугольника. Через каждую вершину на этой стороне проходит еще одна из пяти других прямых. Значит, каждой вершине на выбранной прямой соответствует одна из пяти оставшихся.

Разным вершинам соотвествуют различные прямые. Получаем, что вершин многоугольника, лежащих на одной прямой, не более 5, тогда сторон — не более двух. Получаем, что на 6 прямых лежит не более 12 сторон.

Пример.



□

Задача 3.39. Какое наименьшее количество фишек нужно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 нашлась хотя бы одна фишка?

Ответ: 4.

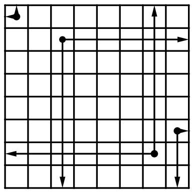
Задача 3.40. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 нашлось не более одной фишки?

Ответ: 9.

Задача 3.41. В белом квадрате 8×8 поочерёдно закрашиваются в чёрный цвет клетки, у которых до покраски было не более одной чёрной вершины. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить таким образом?

Задача 3.42. Фигура «угол» бьет как ладья, но в двух перпендикулярных направлениях. Какое наибольшее число таких фигур можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

На рисунке показаны примеры, как может бить фигура «угол».



Ответ: 16.

У к а з а н и е. В каждой горизонтали может стоять не более двух фигур.

3.3 Клетки — узлы. Метод окрестностей

Рассмотрим еще один параметр, который часто используется в задачах на оценки на клетчатых досках — количество узлов. Узлами на клетчатой доске мы называем вершины клеток. Если у нас имеется прямоугольник из $m \times n$ квадратов, то в этом прямоугольнике $(m+1) \times (n+1)$ узлов. В следующих задачах роль «кроликов» будут играть узлы.

Задача 3.43. Какое наибольшее количество кораблей 1×4 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Считать клетки в этой задаче не имеет смысла, так как достаточное количество клеток не всегда обеспечивает возможность поставить корабли по правилам морского боя.

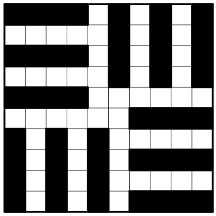
Первое решение. Метод подсчета узлов.

Расстановку кораблей по правилам морского боя помогает исследовать такое соображение: *корабли стоят на клетчатой доске по правилам морского боя, если и только если они не имеют общих узлов сетки.* То есть, каждому кораблю мы можем поставить в соответствие узлы сетки, причем один узел не может соответствовать различным кораблям.

У решетки 10×10 имеется 121 узел. Каждый корабль 1×4 содержит 10 узлов, независимо от расположения на доске. Расставленные по правилам морского боя корабли не могут иметь общих узлов. Значит, на доске 10×10 нельзя разместить более 12 кораблей 1×4.

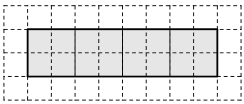
Здесь «кролики» — это узлы, «клетки» — корабли. В каждой клетке должно находиться ровно 10 «кроликов». При этом, не все «кролики» обязаны сидеть в «клетках». Всего «кроликов» 121, значит, клеток не более 12.

Пример:



Второе решение. Метод окрестностей.

Расстановку кораблей по правилам морского боя помогает исследовать еще и такое соображение: *корабли стоят на клетчатой доске по правилам морского боя, если и только если не пересекаются окрестности кораблей шириной в* $1/2$ *клетки.* На рисунке изображен корабль 1×4 с окрестностью в $1/2$ клетки. Для удобства клетка доски разбита на четыре части.



Заметим, что при этом окрестность корабля может выходить за пределы доски, значит, и доску надо рассматривать с окрестностью в $1/2$ клетки.

Доска с окрестностью имеет площадь 121 клетку (заметьте, что и узлов на доске 121), а каждый корабль с окрестностью занимает по площади 10 клеток (также, как и 10 узлов).

Дальше рассуждение полностью повторяет рассуждение с узлами. □

В большинстве задач проходит и метод подсчета узлов, и метод окрестностей.

Вернемся к задаче 3.35 о треугольных фигурах из предыдущего параграфа. Метод разбиения на меньшие части требовал воображения для того, чтобы эти части и разбиение придумать. Метод подсчета узлов, сразу дает точную оценку в пунктах а) и в), и неточную оценку в пункте б).

Задача 3.44. Какое наибольшеее количество треугольников можно закрасить в следующих фигурах так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих точек?

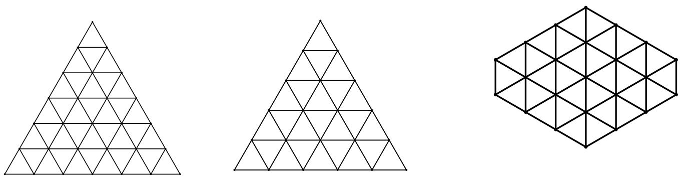


Рис. 3.2: а) б) в)

Ответ: а) 9; б) 6; в) 7.

Р е ш е н и е. Заметим, что каждому закрашенному треугольнику соотвествует ровно три узла доски, при этом ни один узел не может соотвествовать более, чем одному закрашенному треугольнику. Иначе, у двух закрашенных треугольников найдется общая точка.

Посчитаем узлы в фигурах. У первой — 28 узлов, у второй — 21, у третьей — 23.

Получаем, что в фигурах может быть закрашено не более, чем: а) $[28/3] = 9$; б) $[21/3] = 7$; в) $[23/3] = 7$ треугольников.

Примеры для пунктов а) и в) на 9 и 7 треугольников построены в предыдущем параграфе. В пункте б) показано, что точная оценка — 6.

Таким образом, мы видим, что метод подсчета узлов в некоторых задачах более выгоден, а в некоторых, требует дополнительных соображений. Заранее сказать, какой метод более предпочителен в конкретной задаче, разумеется, невозможно. □

Задача 3.45. Какое наибольшее количество кораблей 1×2 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 20.

Задача 3.46. Какой наименьший размер может иметь квадратная доска, чтобы на нее можно было поставить полный комплект кораблей для морского боя (1 корабль 1×4, 2 корабля 1×3, 3 корабля 1×2 и 4 корабля 1×1) по правилам?

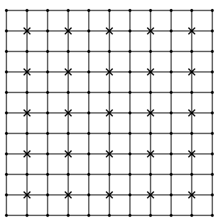
Ответ: 7×7.

Задача 3.47. Какое наибольшее количество кораблей 1×1 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть, не имели общих точек?

Ответ: 25.

Р е ш е н и е. Один из способов доказательства — метод разбиения на меньшие части, аналогично решению задачи о расстановке на шахматной доске небьющих друг друга королей. Полезно обратить внимание на похожесть этих задач.

Так как каждый корабль 1×1 содержит 4 узла, то подсчет узлов даст оценку $[121/4] = 30$. Она неточная. Используем раскраску «горох» для узлов сетки. Каждому кораблю 1×1 будет соотвестовать ровно один окрашенный узел. Чтобы оценка сверху была точной, нужно выбрать раскраску, содержащую наименьшее количество узлов:



Получаем, что больше 25 кораблей 1×1 поставить по правилам морского боя невозможно, так как иначе один узел будет соотвествовать двум кораблям. Пример на 25 кораблей строится несложно.

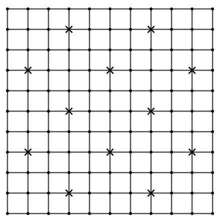
В этой задаче мы использовали раскраску узлов, то есть совместили две идеи. Также эту задачу можно свести к следующей: какое наибольшее количество квадратов 2×2 можно вырезать из квадрата 121×121? $\square$

Задача 3.48. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Каждый корабль 1×3 содержит 8 узлов. Получаем, что на доску 10×10 невозможно поставить более $[121/8] = 15$ кораблей по правилам морского боя. Однако, эта оценка неточная.

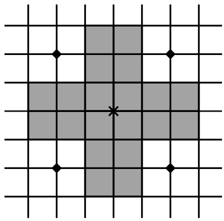
Раскрасим 12 узлов следующим образом:



Если пронумеровать линии сетки по вертикали и горизонтали от 1 до 11, то мы покрасили узлы, обе координаты которых четные, но только одна из них делится на 4.

Каждому кораблю 1×3 будет соответстовать ровно один окрашенный узел. Действительно, каждый корабль 1×3 содержит ровно одну длинную сторону, лежащую на линии с четным номером, следовательно, из четырех узлов на этой стороне ровно один окрашен. Получаем, что больше 12 кораблей 1×3 поставить по правилам морского боя невозможно, так как иначе один узел будет соответствовать двум кораблям. Пример на 12 короблей строится несложно.

Покажем, как придумать эту раскраску узлов. Выберем один узел, обозначим его «крестиком». Затем, выделим область, в которой могут располагаться корабли 1×3, содержащие этот узел. После этого отметим ближайшие узлы, не вошедшие в область.



Этот процесс можно продолжить и получить раскраску узлов на бесконечной сетке. Чтобы оценка сверху была точной, нужно выбрать раскраску доски 10×10, содержащую наименьшее количество узлов. □

З а м е ч а н и е. Кажется удивительным тот факт, что наибольшее количество кораблей 1×3 и 1×4, которое можно поставить на доску 10×10 по правилам морского боя, одно и то же.

Задача 3.49. Какое наибольшее количество кораблей 1×1 можно поставить на поле 10×10 так, чтобы каждый имел общие точки не более, чем с одним кораблем?

Ответ: 40.

Р е ш е н и е. Каждый корабль занимает ровно 4 узла. Каждая пара кораблей, имеющая общую точку, занимает не менее 6 узлов. Если мы расставили n кораблей, то пар не более $[n/2]$. Поэтому узлов, принадлежащих двум кораблям, не более $2 \cdot [n/2]$. Значит, n кораблей занимают не менее $4n - 2 \cdot [n/2]$ узлов. Получаем, что $4n - 2 \cdot [n/2] \leqslant 121$, $n \leqslant 40$.

Пример такой же, как расстановка 20 двухпалубных кораблей. □

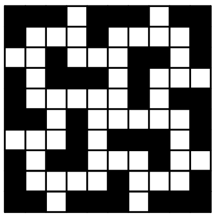
Задача 3.50. На каком наименьшем квадратном клетчатом поле можно расставить полный комплект кораблей для игры в «морской бой» (1 корабль 1×4, 2 корабля 1×3, 3 корабля 1×2 и 4 корабля 1×1), если корабли могут соприкасаться между собой только вершинами и не могут соприкасаться сторонами?

Задача 3.51. Новая фигура морского боя — уголок из четырех клеток, как фигурка а тетрисе. Какое наибольшее количество таких кораблей можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Каждый уголок занимает 10 узлов. Всего узлов 121, значит уголков не более 12.

Пример:



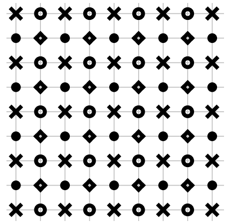
□

Задача 3.52. Любитель игры «Морской бой» Вася однажды решил поиграть на треугольном поле. Для этого он равносторонний треугольник со стороной 9 разбил на 81 равный треугольник отрезками, параллельными сторонам. Какое наибольшее количество однопалубных (1 маленький треугольничек) несоприкасающихся между собой кораблей можно разместить на таком поле?

Задача 3.53. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 8×8 так, чтобы все узлы клетчатой решётки оказались закрашенными?

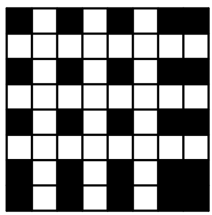
Ответ: 25.

Р е ш е н и е. Разобьем все узлы на 4 группы так, чтобы каждый квадрат 1×1, расположенный по линиям секти, содержал по одному узлу каждой группы.



Получаем, что у нас 25 узлов первой группы. Значит, нужно не менее 25 квадратов.

Пример:

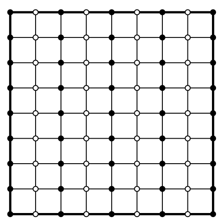


□

Задача 3.54. Какое наибольшее количество диагоналей в квадратах доски 8×8 можно провести так, чтобы они не имели общих концов?

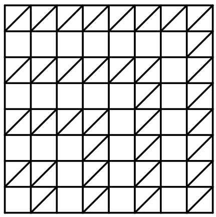
Ответ: 36.

Р е ш е н и е. Раскрасим узлы доски в раскраску «зебра»:



Получим, что на доске 45 черных и 36 белых узлов. Каждая диагональ соединяет черный и белый узлы. Значит, диагоналей не может быть больше, чем белых узлов, то есть не более 36.

Пример на 36 диагоналей:



□

Задача 3.55. Паша разбил квадрат 7×7 на прямоугольники по линиям сетки и раскрасил их в три цвета так, что никакие два прямоугольника, имеющих общую точку, не окрашены в один цвет. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться?

Ответ: 31.

Решение. Будем сопоставлять узлы сетки и вершины прямоугольников. Каждому углу прямоугольника соотвествует ровно один узел. По условию задачи, четырем углам различных прямоугольников разбиения не может соответствовать один узел (иначе 4 квадрата имеют общую точку и мы не сможем раскрасить их в различные цвета). Ровно три угла прямоугольников разбиения также не могут соответствовать одной точке, иначе получается невыпуклая фигура.

Получаем, что для всех узлов (кроме угловых) мы можем поставить в соответствие не более 2 углов прямоугольников.

Значит, всего на доске не более $60 \times 2 + 4 = 124$ углов. Следовательно, прямоугольников не более 124/4=31.

Пример:

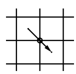
2	3	2	3	2	3	2
1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3	2
1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3	2
1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3	2

□

Задача 3.56. Король обошел всю шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу. Когда соединили центры клеток, по которым он последовательно проходил, получилась ломаная без самопересечений. Какое наибольшее количество диагональных ходов он мог сделать?

Ответ: 49.

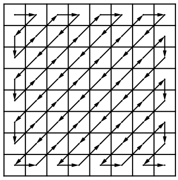
Р е ш е н и е. При диагональном ходе король проходит через внутренний узел сетки:



Значит, каждому диагональному ходу мы можем поставить в соотвествие внутренний узел сетки.

По условию задачи, через один узел король проходить дважды не мог. Поэтому каждому узлу соотвествует не более одного диагонального хода. Всего внутренних узлов 49. Получаем, не более 49 диагональных ходов.

Пример:



□

Задача 3.57. а) Какое наибольшее количество королей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый король бил ровно одного короля? б) Какое наибольшее количество королей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждый король бил не более одного короля?

3.4 Считаем ряды, перегородки и стенки

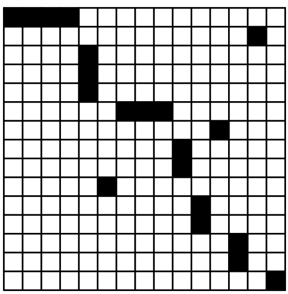
Параметрами клетчатой доски являются ряды и перегородки. Рядом будем называть вертикальный столбец или горизонтальную строку. Например, на шахматной доске 16 рядов. Перегородка — это граница между двумя соседними клетками. Рассмотрим цикл задач, где в качестве «клеток» будут выступать эти параметры.

Задача 3.58. На каком наибольшем квадратном клетчатом поле можно расставить полный комплект кораблей для игры в «морской бой» (1 корабль 1×4, 2 корабля 1×3, 3 корабля 1×2 и 4 корабля $1{\times}1$) так, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали хотя бы одна клетка была занята? Корабли соприкасаться между собой не могут.

Ответ: 15×15.

Р е ш е н и е. Пусть имеется поле $n \times n$, удовлетворяющее условию задачи. Тогда каждому из $2n$ рядов должна соответствовать хотя бы одна клетка корабля. Клетки корабля 1×4 соответствуют 5 рядам, 1×3 — 4; 1×2 — 3; 1×1 — 2. Значит, все клетки полного комплекта кораблей могут соответствовать не более, чем $1 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 30$ рядам. Получаем, что $2n \leqslant 30$, $n \leqslant 15$.

Пример: □



На примере этой задаче видно, что иногда оказывается удобно не делить ряды на вертикальные и горизонтальные. Тогда нам не придется рассматривать несколько вариантов. Например, для корабля 1×4 всегда будет верным утверждение, что он находится в пяти рядах.

Задача 3.59. За какое наименьшее количество ходов конь может добраться из левого нижнего угла доски до правого верхнего?

Р е ш е н и е. Пусть левая нижняя клетка имеет координаты (0,0), правая верхняя — (7,7). Сумма координат должна увеличиться на 14. Каждым ходом конь перемещается в сумме на три ряда (два в одном направлении, один — в перпендикулярном). Значит, сумма координат за один ход может увеличиться максимум на 3. Получаем, что нужно не менее 5 ходов. Вспомнив шахматную раскраску, замечаем что количество ходов — четное (конь начинает и заканчивает на клетке одного цвета). Окончательная оценка — ходов не менее 6.

Пример:

							6
					5		
							4
					3		
			2				
		1					
*							

□

В этой задаче также оказалось удобнее следить за рядами, а не рассмтривать различные варианты ходов.

Задача 3.60. Какое наибольшее количество ладей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждая ладья била ровно одну ладью?

Р е ш е н и е. Ладьи разбиваются на пары. Каждой паре соответствует три ряда, в которых нет других ладей. Всего 16 рядов, значит пар ладей не более 5.

Пример:

Л	Л						
		Л					
		Л					
			Л	Л			
					Л		
					Л		
						Л	Л

□

Далее рассмотрим задачи на подсчет перегородок. Перегородкой будем называть границу клетки, не являющуюся границей доски.

Задача 3.61. Сколькими способами на шахматной доске можно разместить доминошку 1×2?

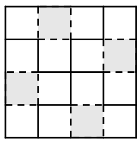
Ответ: 112.

Р е ш е н и е. Кажой доминошке можно поставить в соотвествие ровно одну перегородку, а именно ту, которая целиком лежит внутри доминошки. И наоборот, для каждой перегородки существует ровно одно положение доминошки, для которой эта перегородка является внутренней границей клетки. Всего перегородок на доске 112 — 56 вертикальных и 56 горизонтальных. Значит, существует 112 положений для домино. □

Задача 3.62. Клетчатая доска 4×4 покрыта 13 прямоугольниками 1×2, стороны которых идут по линиям сетки. Докажите, что один из прямоугольников можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

Р е ш е н и е. Предположим, что ни одного прямоугольника снять нельзя. Каждая клетка покрыта в один или несколько слоев. Сумма всех слоев над всеми клетками равна 26=13*2. Заметим, что каждый прямоугольник должен покрывать не меньше одной клетки, покрытой в один слой, иначе этот прямоугольник можно снять. При этом двум различным прямоугольникам не может соответствовать одна клетка, покрытая в один слой. Значит, клеток, покрытых в один слой не менее 13. Получается, что 13 оставшихся слоев покрывают не более чем три клетки. Значит, одна из них покрыта не менее чем пятью слоями. Но из пяти прямоугольников, покрывающих одну клетку, всегда можно найти два, расположенных одинаково. Один из них можно снять, так как у них общая перегородка. Получили противоречие.

Заметим, что 12 прямоугольниками можно покрыть доску 2×2 так, что нельзя снять ни одного, чтобы доска оставалась покрытой. Пример:



Каждую из 4 отмеченных клеток накрываем в три слоя так, чтобы прямоугольники 1×2 не совпадали. Тогда каждому из 12 прямоугольников будт соответствовать клетка, накрытая в один слой, и никакой прямоугольник снять не получится. □

Задача 3.63. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки квадрата 3×3 так, чтобы для любых двух цветов нашлась пара соседних по стороне клеток, окрашенных в эти цвета?

Р е ш е н и е. Заметим, что каждой паре цветов должна соответствовать пара соседних клеток, окрашенных в эти цвета, то есть хотя бы одна перегородка. При этом каждая пергородка не может соответствовать более, чем одной паре цветов. Таким образом, пар цветов не больше, чем количество пергородок. На доске 3×3 всего 12 перегородок. Пусть нашлось n цветов, удовлетворяющих условию задачи. Тогда, $n(n-1)/2 \leqslant 12$, $n(n-1) \leqslant 24$, $n \leqslant 5$.

Пример на 5 цветов:

3	5	4
4	1	2
2	3	5

□

Задача 3.64. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки квадрата 4×4 так, чтобы для любых двух цветов нашлась пара соседних по стороне клеток, окрашенных в эти цвета?

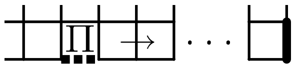
Задача 3.65. В клетчатом квадрате 8×8 закрашивают по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку число её ранее закрашенных соседей (по стороне). Какие значения может принимать сумма всех написанных чисел?

Р е ш е н и е. Есть взаимно однозначное соответствие между парами соседних клеток и перегородками. Получаем, что мы считаем перегородки между двумя соседними закрашенными клетками, причем ровно один раз, в тот момент, когда закрашивается второй сосед этой пергородки. При этом, каждая перегородка будет посчитана. Значит, всегда будет получаться одно и тоже число — количество перегородок: 2*7*8=112. □

Задача 3.66. Пулемётчик — ладья, бьющая только в одну из четырёх сторон. Какое наибольшее число пулемётчиков можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Р е ш е н и е. Заметим, что каждый пулеметчик бьет ровно одну внешнюю стенку (крайняя стенка в ряду, в которой стоит пулеметчик и бьет в направлении этой стенки). Если два пулеметчика бьют одну внешнюю стенку, то они стоят в одном ряду и один из них бьет другого. Значит, кажой внешней стенке можно поставить в соотвествие не более одного пулеметчика, который ее бьет. Всего — 32 внешние стенки, значит, пулеметчиков не более 32.

Рассмотрим 8 внешних стенок, примыкающих к углам доски. Назовем их угловыми внешними стенками. Заметим, что если угловой внешней стенке соответствует пулеметчик, то он стоит в клетке, примыкающей к стороне квадрата и внешняя стенка этой клетки не может находиться под боем.



Пусть из 8 угловых внешних стенок x стенок находится под боем, $x = 0, 1, \ldots, 8$. Тогда всего не более $24 + x$ внешних стенок находится под боем (x угловых и не более 24 неугловых). Из сделанного выше замечания, каждой из x угловых стенок, находящихся под боем, соотвествует одна стенка, точно находящаяся не под боем ни одного пулеметчика. При этом двум различным внешним стенкам, находящимся под боем, соответствуют различные стенки, находящиеся не под боем, иначе, так как это стенки клеток, где стоят пулеметчики, бьющие внешние стенки, один пулеметчик должен бить в двух направлениях. Значит, не под боем находится не менее x клеток, под боем, не более $32 - x$.

Получаем, что на доске не более $24+x$ и не более $32-x$ внешних стенок находится под боем. Откуда, стенок, находящихся под боем не более 28. Пример строится несложно. □

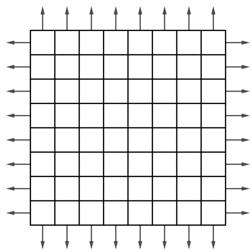
Выделим отдельно задачи про стреляющие фигуры. В этих задачах мы будем считать не только линии, где стоят фигуры, но и направления, вдоль которых бьют фигуры.

С следующей задачей мы сталкивались в предыдущем параграфе, где ее удалось решить при помощи разбиения на меньшие части. Разберем другое решение.

Задача 3.67. Фигура «угол» бьет как ладья, но в двух перпендикулярных направлениях. Какое наибольшее число таких фигур можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 16.

Р е ш е н и е. На доске 16 линий (8 вертикальных и 8 горизонтальных), в каждом есть два направления. Всего 32 направления:



Каждой фигуре «угол» соответствуют ровно два направления, при этом, одному направлению не могут соответствовать две фигуры. Иначе, если одному направлению соответствует две фигуры, то они стоят в одной линии и одна будет бить вторую. Получаем, что фигур не больше 32/2=16.

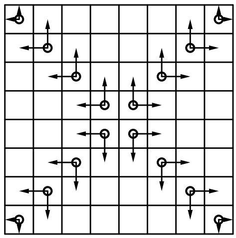
Пример, как расставить 16 фигур «угол» на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга:

□

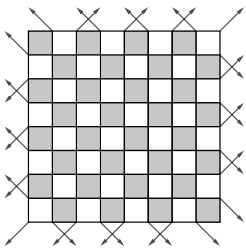
Задача 3.68. Фигура «мамонт» бьет как слон, но только по трем диагоналям. Какое наибольшее число «мамонтов» можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 20.

Р е ш е н и е. Отдельно рассмотрим «мамонтов» в белых и

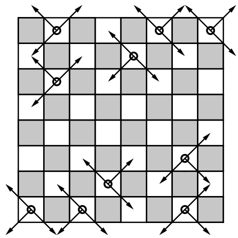


черных клетках, так как друг друга они бить не могут. Для белых диагоналей имеется 30 направлений, в которых могут бить «мамонты»:



Каждому «мамонту» соответствуют три направления, при этом, одному направлению не может соответствовать больше одного «мамонта». Значит, нельзя поставить больше 10 «мамонтов» в белые клетки.

Пример, как поставить 10 «мамонтов» в белые клетки, чтобы они не били друг друга:

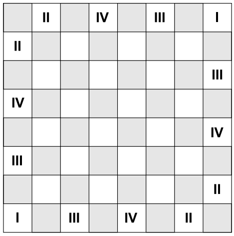


Аналогично, в черных клетках может стоять не больше 10 «мамонтов». Всего на доске не более 20. □

Задача 3.69. Фигура стрелец бьет как слон, но только в одном направлении. Какое наибольшее количество стрельцов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Р е ш е н и е. Обратим внимание, что стрелец бьет клетки только того цвета, какого цвета клетка, в которой он стоит. Поэтому проведем отдельно оценку для белых клеток. Рассмотрим граничные белые клетки. Каждый стрелец бьет ровно одну из них. Каждой граничной клетке поставим в соответствие число — количество, сколько раз клетка находится под боем. При этом если стрелец стоит в граничной клетке, то считаем, что клетка находится под боем один раз. Также считаем, что стрелец, стоящий на граничной клетке доски, не бьет больше ни одной клетки. Действительно, мы можем его повернуть так, чтобы он бил в сторону границы доски. На максимальную расстановку стрельцов это не повлияет, так как количество клеток, находящихся под боем, не увеличится. Таким образом, каждая граничная клетка может находиться под боем или 0, или 1, или 2 раза. Больше 2 быть не может, так как граничная клетка находится в крайних клетках двух диагоналей.

Получаем, что количество стрельцов в белых клетках равно сумме чисел, выписанных в граничные белые клетки, причем каждое число не больше двух. Разобьем все граничные клетки на группы клеток, стоящих в вершинах прямоугольников:

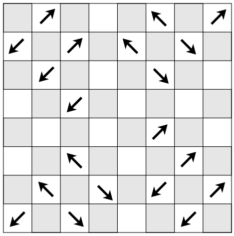


Клетки группы I могут находиться под боем не более одного раза, так как находятся ровно в одной диагонали.

Для клеток группы II две из четырех диагоналей состоят ровно из двух граничных клеток. Поэтому, чтобы они дважды были под боем, необходимо, чтобы стрельцы стояли на границе. Но выше мы обосновали, что можно считать, что граничные стрельцы не бьют ни одной клетки доски. Поэтому, клетки группы II находятся под боем не более одного раза.

Для клеток группы III заметим, что две диагонали состоят из трех клеток, из которых только одна не граничная. Значит, только две из четырех клеток группы III могут находиться под боем два раза. Получаем, что граничные клетки находятся под боем не более чем $2 \times 1 + 4 \times 1 + (2 \times 1 + 2 \times 2) + 4 \times 2 = 20$ раз. То есть можно поставить не более 20 белых стрельцов.

Пример:



Получаем, что на доске не может быть более 40 стрельцов. □

Задача 3.70. Какое наибольшее количество ладей можно разместить на шахматной доске так, чтобы каждая ладья била: а) не более одной ладьи, б) две ладьи, в) не более двух ладей?

3.5 Метод отмеченных множеств

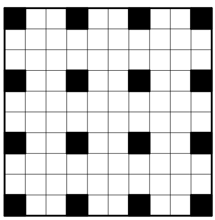
Рассмотрим цикл задач, в которых разбиение на меньшие части не дает результата. Здесь помогает выделение некоторых частей (отмеченных множеств) с которыми можно построить соответствие исследуемых объектов. Это и будут «клетки». В этих задачах можно пользоваться и терминологией «меток».

Задача 3.71. Какое наименьшее число однопалубных кораблей нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×1?

Ответ: 16.

Р е ш е н и е. В задаче, когда было необходимо расставить как можно больше кораблей, мы разбивали всю доску на 25 клеток 2×2, в каждой из которых могло находиться не более одного корабля. В этой задаче можно сказать, что в квадрате 3×3 можно поставить только один корабль так, что больше нельзя поставить ни одного. Но поле 10×10 не разбивается на квадраты 3×3, да и в квадрате 6×6 такая оценка окажется очень грубой: четырьмя кораблями никак не обойтись.

Попытки непосредственно расставить быстро приводят к успеху. Но как доказать минимальность? Рассмотрим картинку, которая получилась в процессе анализа задачи и попробуем ее использовать:



Обратим внимание, что это не расстановка кораблей, а отмеченные множества. Предположим, что мы расставили однопалубные корабли согласно условию задачи. Тогда каждого отмеченного множества должен касаться хотя бы один корабль (иначе в эту отмеченную клетку мы сможем поставить еще один корабль). При этом ни один корабль не может касаться сразу двух отмеченных множеств. Значит, нам понадобится не менее 16 кораблей.

Решение в терминах «меток». Переформулируем это же рассуждение на языке соответствий. Для того, чтобы на доску нельзя было поставить по правилам ни одного корабля, каждому отмеченному множеству должен соответствовать корабль (который помешает поставить корабли в это множество), и ни один корабль не может соответствовать сразу двум множествам. Отмченные множества логично назвать «метками». Получаем, что каждая «метка» должна быть выдана хотя бы одному кораблю, при этом ни одна «метка» не может достаться более, чем одному кораблю. Значит, кораблей должно быть не меньше, чем меток.

Решение в терминах «клетки»-«кролики». Назовем отмеченные на рисунке множества «клетками», а корабли — «кроликами». Будем говорить, что «кролик» сидит в «клетке», если корабль имеет общую точку с отмеченным множеством. В каждой клетке должен сидеть хотя бы один «кролик», иначе расстановка не будет соответствовать условию задачи. При этом, ни один «кролик» не может сидеть сразу в двух клетках. Получаем, что нужно не менее 16 «кроликов».

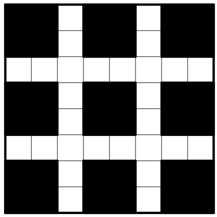
Пример расстановки кораблей в этой задаче совпадает с отмеченными множествами. □

Задача 3.72. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 нужно вырезать из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся фигуры нельзя было вырезать квадрат 2×2?

З а м е ч а н и е. В терминах морского боя эту задачу можно сформулировать так: какое наименьшее число залпов в две соседние клетки нужно дать, чтобы гарантированно ранить корабль 2×2?

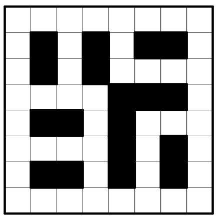
Ответ: 9.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отмеченные множества:



Девять квадратов 2×2, не имеющих общих точек. В каждом из отмеченных множеств должна быть вырезана хотя бы одна клетка, то есть, каждому отмеченному множеству должен соответствовать хотя бы один прямоугольник 1×2. При этом, никакой прямоугольник 1×2 не может иметь общих клеток сразу с двумя отмеченными множествами. Получаем, что вырезанных прямоугольников должно быть не меньше, чем отмеченных множеств. Следовательно, менее, чем 9 вырезанными прямоугольниками, нам не обойтись.

Пример на 9:

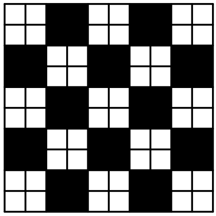


$\square$

Задача 3.73. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доске для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть, не имели общих точек?

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Рассмотрим крупную шахматную раскраску доски:



Заметим, что каждый корабль 1×3 накрывает одну или две клетки ровно одного черного квадрата. То есть, мы можем поставить в соответствие каждому кораблю свой черный квадрат-«метку».

При этом, один квадрат не может соответствовать двум кораблям, иначе корабли будут стоять не по правилам морского боя, т.е. иметь общую точку (так как любые два квадрата из 4 в черном квадрате имеют общую точку).

Значит кораблей не больше, чем черных квадратов, т.е. 12. Пример на 12 строится легко. □

Задача 3.74. Какое наименьшее число слонов нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все клетки доски оказались под боем? (Слон, стоящий в клетке, бьет ее).

Ответ: 8.

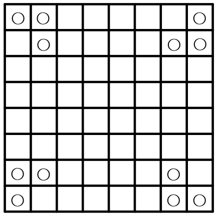
Р е ш е н и е. Заметим, что каждый слон бьет не более 4 граничных клеток того же цвета, на котором стоит. Граничных клеток ровно 28, из них 14 черных, 14 белых. Значит, чтобы под боем оказались граничные клетки, необходимо не менее 4 слонов, стоящих на черных и 4 слонов, стоящих на белых клетках.

Пример на 8 слонов, бьющих всю доску, строится несложно. □

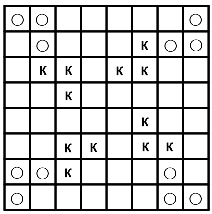
Задача 3.75. Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все клетки доски оказались под боем? (Конь, стоящий в клетке, бьет ее).

Ответ: 12.

Р е ш е н и е. Отметим 12 клеток. Ни один конь не может бить сразу две отмеченные клетки:



Значит, коней должно быть не менее 12. Пример:

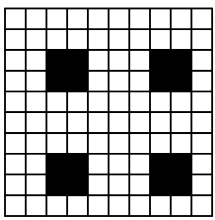


□

Задача 3.76. Какое наименьшее число кораблей 2×2 нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 2×2 по правилам морского боя?

Ответ: 4.

У к а з а н и е. Рассмотрите отмеченные множества:

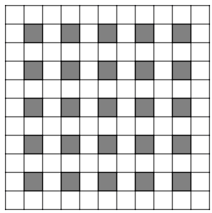


Каждому отмеченному множеству должен соответствовать свой корабль.

Задача 3.77. На доску 11×11 положили несколько квадратов 2×2 так, что стороны квадратов идут по линиям сетки и никакие два квадрата не перекрываются более чем по одной клетке. Какое наибольшее количество квадратов могло быть?

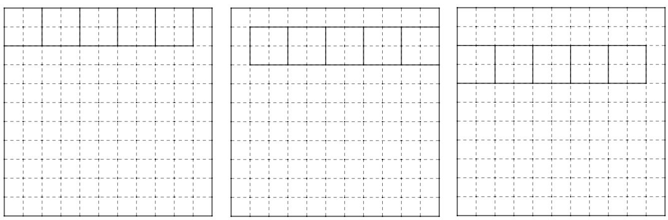
Ответ: 50.

Р е ш е н и е. Отметим 25 клеток:



Заметим, что каждая «метка» соответствует не более, чем двум квадратам. Действительно, если три квадрата содержат общую клетку, то два из них пересекаются более, чем по одной клетке. При этом, каждому квадрату 2×2 соответствует ровно одна клетка-«метка». Значит, 25 «клеткам» соответствует не более 50 квадратов.

Покажем, как расположить 50 квадратов. Начнем выкладывать квадраты слоями:

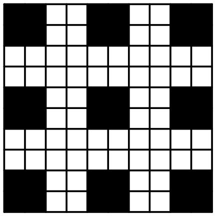


В каждом следующем слое квадраты имеют не более, чем по одной общей клетке с любым квадратом из предыдущего слоя. Всего получится 10 слоев по 5 квадратов. $\square$

Задача 3.78. Какое наименьшее число кораблей 1×2 нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×2?

Ответ: 9.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отмеченные множества:



Заметим, что если ни один корабль не касается отмеченного множества, то в этом множестве можно разместить еще один корабль по правилам морского боя. Однако, один корабль 1×2 может касаться сразу двух отмеченных множеств.

Первое решение. Если корабль имеет общую клетку с отмеченным множеством, то в это множество нельзя больше поставить другой корабль, и этот корабль больше не касается других отмеченных множеств. Такой корабль и множество назовем парой. Между ними есть взаимно однозначное соответствие.

Рассмотрим остальные множества и корабли. То есть, те корабли, которые не имеют общих клеток с отмеченными множествами, и отмеченные множества, не имеющие с кораблями общих клеток. Каждого такого множества должно касаться не менее двух кораблей, иначе в этом отмеченном множестве можно будет расположить еще один корабль по правилам морского боя. Получаем, что кораблей должно быть не меньше, чем этих отмеченных множеств.

Из этих двух оценок следует, что кораблей должно быть не меньше, чем отмеченных множеств.

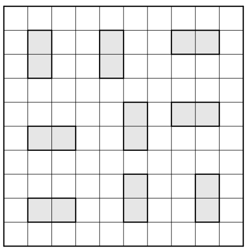
Второе решение. Заметим, что если отмеченное множество не имеет общей клетки ни с одним кораблем, то этого множества должны касаться по крайней мере два корабля, иначе в этом множестве можно разместить корабль.

Значит, все корабли делятся на те, которые имеют общую клетку ровно с одним множеством и те, которые только касаются двух отмеченных множеств.

Пересечение будем называть двойным касанием (то есть, один корабль два раза касается одного множества). Получаем, что каждый корабль имеет не более двух касаний с отмеченными множествами.

Так как каждое отмеченное множество, или должно иметь общую клетку с поставленным кораблем, или должно касаться двух кораблей, то получаем, что для каждого отмеченного множества необходимо по крайней мере два касания, при этом ни один корабль не может касаться более двух множеств. Значит, кораблей должно быть не меньше, чем множеств.

Пример, как расставить 9 кораблей 1×2 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×2 по правилам морского боя:

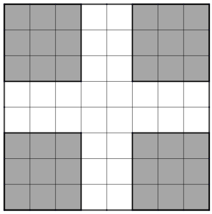


$\square$

Задача 3.79. Какое наименьшее число кораблей 1×3 нужно расставить на поле 8×8 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×3?

Ответ: 4.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отмеченные множества:

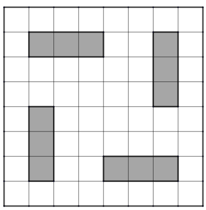


Корабли 1×3 делятся на два типа: те, котрые содержат центральную клетку отмеченного множества, и те, котрые не содержат центральную клетку отмеченного множества. Свойство иметь общую точку корабля с отмеченным множеством, назовем «касанием», при этом будем считать, что корабли первого типа дважды касаются отмеченного множества. Заметим, что каждый корабль может иметь не более двух касаний.

Для того, чтобы в отмеченном множестве нельзя было расположить корабль 1×3 по правилам морского боя, должен либо найтись корабль, содержащий центральную клетку, либо этого множества должны касаться два корабля. То есть, каждому множеству должно соответствовать не менее двух касаний.

Из двух последних оценок следует, что кораблей 1×3 должно быть не меньше, чем отмеченных множеств.

Пример, как расставить 4 корабля 1×3 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×3 по правилам морского боя:



□

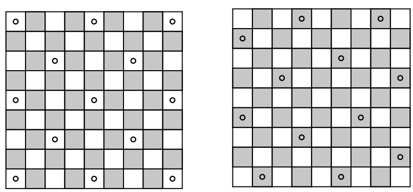
В следующей задаче ничего ни вырезать, ни расставлять не надо. Нужно оценить процесс. Оказывается, что и в таких задачах можно использовать метод отмеченных клеток.

Задача 3.80. В каждой клетке доски 9×9 стоит фишка. Одновременно все фишки сдвигаются в соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее количество клеток может оказаться пустыми?

Ответ: 56.

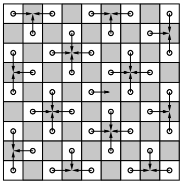
Р е ш е н и е. Раскрасим доску в шахматную раскраску. Заметим, что все фишки из черных клеток окажутся в белых клетках, и наоборот. Отметим 13 белых и 12 черных клеток так, чтобы никакие две фишки из отмеченных клеток не могли переместиться в одну клетку.

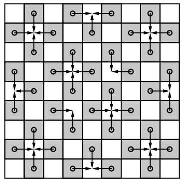
Обратим внимание на связь с задачей: какое наибольшее количество белых (черных) клеток можно отметить на доске так, чтобы у каждой черной (белой) клетки было не больше одной, соседней по стороне отмеченной клетки? Действительно, фишки из клеток, отмеченных таким образом, не могут переместиться в одну клетку. Максимальность дает точную оценку.



Получаем, что каждой из 13 фишек, стоящих в 13 отмеченных белых клетках, будет соответствовать черная клетка, где фишка окажется после перемещения. При этом все 13 клеток будут различными. Следовательно, не менее 13 черных клеток окажутся занятыми. Аналогично, не менее 12 белых клеток окажутся занятыми. Значит, после перемещения фишек не менее 25 клеток на доске окажутся занятыми, а свободными — не более 81-25=56.

Пример, как переместить фишки, чтобы свободными оказались 56 клеток:



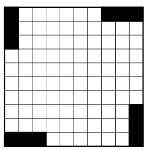


□

В следующих задачах, для одной конструкции нужно несколько раз использовать различные отмеченные области. Иногда разных областей может касаться несколько объектов, поэтому приходится использовать, так называемый, обобщенный принцип Дирихле.

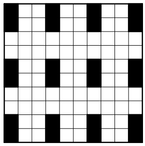
Задача 3.81. Докажите, что полный комплект кораблей: 1 корабль 1×4, 2 — 1×3, 3 — 1×2, 4 — 1×1, всегда можно расставить по правилам на поле 10×10, если расставлять их, начиная с самого большого по убыванию размеров.

Р е ш е н и е. Ясно, что первый корабль всегда можно поставить. Далее отметим четыре трехклеточные области:



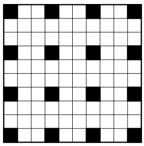
Заметим, что поставленный четырехклеточный корабль может касаться не более одной области. Значит, в двух, из оставшихся трех областей, мы сможем разместить два трехклеточных корабля.

Пусть теперь как-то расположены три корабля: четырехклеточный и два трехклеточных. Рассмотрим отмеченные множества:



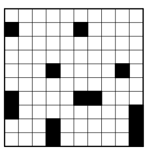
Один четырехпалубный и два трехпалубных корабля касаются не более шести областей. Мы сможем разместить еще три двухпалубных.

Рассмотрим следующие отмеченные множества:



Один четырехпалубный, два трехпалубных и три двухпалубных корабля касаются не более 12 отмеченных областей. Поставив еще три однопалубных, получим, что поставленные корабли касаются максимум 15 областей. Значит, остается место для четвертого однопалубного. Таким образом, мы можем поставить весь набор кораблей по правилам, независимо от способа расстановки. □

Замечание. Заметим, что если расставлять корабли, начиная с самых маленьких, то расстановка может и не получиться:

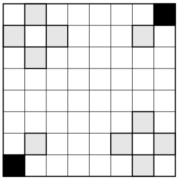


При такой расстановке корабль 1×4 поставить по правилам уже не удастся.

Задача 3.82. Докажите, что все корабли, кроме самого большого, можно поставить, начиная с самых маленьких, независимо от способа расстановки.

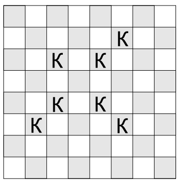
Задача 3.83. Какое минимальное количество коней нужно поставить, чтобы они били все белые клетки?

Р е ш е н и е. Отметим на доске две черные и 10 серых областей (все на белых полях):



Заметим, что никакой конь не может бить сразу черную и серую клетку, две черных клетки, три серых клетки. Это проверяется несложным перебором. Тогда нужно не менее двух коней, чтобы под бой попали две черные клетки и не менее 5 коней, чтобы под бой попали все белые клетки.

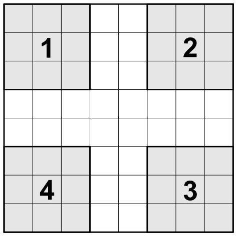
Пример:



□

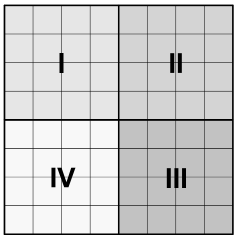
Задача 3.84. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 необходимо вырезать из квадрата 8×8 так, чтобы из оставшейся части больше нельзя было вырезать ни одного прямоугольника 1×3?

Р е ш е н и е. Рассмотрим отмеченные множества:



В области 1 можно разместить три непересекающихся прямоугольника 1×3. Значит, в области 1 должно быть вырезано не менее трех клеток, которые не могут принадлежать одному прямоугольнику 1×2.

Далее рассмотрим такие области:

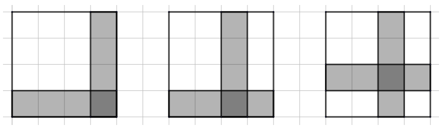


Заметим, что каждый прямоугольник 1×2, имеющий общую клетку с областью 1, полностью содержится в области I. Поэтому не менее двух прямоугольников 1×2 должны полностью лежать в области I.

Докажем, что в области I лежит не менее шести вырезанных клеток. Два прямоугольника 1×2, полностью лежащие в области I, могут располагаться или оба вертикально, или оба горизонтально, или один вертикально, другой горизонтально.

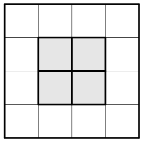
Если оба прямоугольника 1×2 в области I располагаются вертикально, то они находятся в двух из четырех вертикалях области I . Значит, чтобы нарушить прямоугольники 1×2 в двух оставшихся вертикалях, нужно вырезать по крайней мере еще две клетки, и общее число вырезанных клеток в области I, будет не менее шести. Аналогично рассматривается случай, когда в области I два прямоугольника 1×2 располагаются горизонтально.

Рассмотрим случай, когда в области I один прямоугольник 1×2 располагается вертикально, второй — горизонтально. Они располагаются не более, чем в трех вертикалях и не более, чем в трех горизонталях из четырех. Рассмотрим вертикаль и горизонталь, где не оказалось клеток этих двух прямоугольников. Эти линии могут располагаться в области I тремя способами: вертикаль и горизонталь — граничные, одна граничная, вторая — не граничная, обе не граничные. С точностью до поворота, имеем следующие варианты:



В выделенной области должна находиться еще одна вырезанная клетка. Предположим, что вырезав ровно одну клетку, мы сможем нарушить прямоугольники 1×3 в вертикали и горизонтали, не содержащих вырезанных клеток. Эта клетка должна располагаться на пересечении этих вертикали и горизонтали.

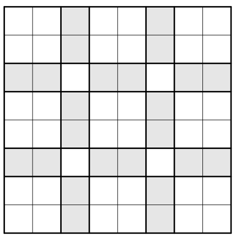
В первых двух случаях придется вырезать еще одну клетку в той линии, где имеется целый прямоугольник 1×3. В третьем случае для положения пятой вырезанной клетки в области I имеется только четыре расположения:



Любой прямоугольник 1×2, содержащий любой из отмеченных квадратов, полностью содержится в области I. Значит, в области I содержится не менее трех вырезанных прямоугольников, что противоречит предположению, что в области I не более пяти вырезанных клеток.

Получаем, в области I должно быть вырезано не менее шести клеток. Аналогично для областей II-IV. Получаем, что в квадрате должно быть вырезано не менее 24 клеток, или не менее 12 прямоугольников.

Пример для 12 прямоугольников:



$\square$

3.6 Уточнение оценки

В некоторых задачах приходится использовать несколько разбиений или соображений, когда первоначальная оценка улучшается.

Задача 3.85. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки квадрата 4×4 так, чтобы в каждом квадрате 2×2 нашлись две клетки одного цвета?

Р е ш е н и е. Заметим, что квадрат 4×4 можно разбить на четыре квадрата 2×2, в каждом из которых клетки раскрашены не более, чем в три различных цвета. Получаем, что квадрат 4×4 содержит клетки, окрашенные не более чем в 12 различных цветов. Оценка достигается только в том случае, когда в каждом из 4 угловых квадратов клетки раскрашены в три различных цвета и у всех 4 квадратов наборы цветов различные.

Рассмотрим центральный квадрат. Он также должен содержать две клетки одного цвета, значит, найдется цвет, принадлежащий сразу двум угловым квадратам. Поэтому на доске не более 11 цветов. Пример:

5	1	6	7
4	1	2	2
3	3	1	8
11	10	1	9

□

Задача 3.86. В какое наименьшее число цветов необходимо раскрасить клетки доски 4×4 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали, с количеством клеток не менее 2, не нашлось двух одноцветных клеток?

Ответ: 5.

Р е ш е н и е. В любой вертикали имеется четыре клетки. Значит, необходимо не менее 4 цветов. Попробуем раскрасить в 4 цвета. Заметим, что в каждой строке и каждом столбце должны присутствовать все 4 цвета. Пусть в первой строке цвета 1,2,3 и 4. Сразу отметим клетки, где не может стоять «2»:

1	2	3	4

$\to$

1	2	3	4
*	*	*	
	*		*
	*		

Во второй строчке остается ровно одна клетка для цвета «2». Сразу отетим клетки, где еще не может стоять «2»:

1	2	3	4
*	*	*	
	*		*
	*		

$\to$

1	2	3	4
*	*	*	2
	*	*	*
	*		*

В 3 и 4 строчке автоматически расставляем «2»:

1	2	3	4
			2
2			
		2	

Аналогично, расставляем «3»:

1	2	3	4
3			2
2			3
	3	2	

Получается, что в правом нижнем углу не может стоять ни 1, ни 4. Значит, четырех цветов недостаточно. Пример на 5 цветов:

1	2	3	4
3	4	5	1
5	1	2	3
2	3	4	5

Задача 3.87. В какое наименьшее число цветов необходимо раскрасить клетки доски 5×5 так, чтобы в каждой строке, каждом столбце и каждой диагонали, с количеством клеток не менее 2, не нашлось двух одноцветных клеток?

Ответ: 5.

Пример:

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Задача 3.88. Петя выписал по кругу в некотором порядке целые числа от 1 до 10 и затем отметил те из них, которые равны сумме двух своих соседей. Какое наибольшее количество чисел могло быть отмечено?

Р е ш е н и е. Заметим, что отмеченные числа не могут стоять рядом, так как каждое отмеченное число больше своих соседей. Значит, отмеченных чисел не больше 5.

Проверим, может ли быть 5 отмеченных чисел из 10. Обозначим числа a_1, $a_2, \ldots, a_{10}$. Пусть отмеченные (так как они в этом случае чередуются) — это a_1, a_3, a_5, a_7, a_9. Тогда выполнены равенства:

$$a_1 = a_{10} + a_2;$$

$$a_3 = a_2 + a_4;$$

$$a_5 = a_4 + a_6;$$

$$a_7 = a_6 + a_8;$$

$$a_9 = a_8 + a_{10},$$

сложив которые, получим $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 2(a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_10)$. Т.е. одна группа чисел в два раза больше второй, что невозможно, так как сумма всех чисел не делится на 3.

Получаем, что отмеченных чисел не более 4. Пример:

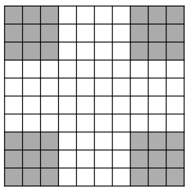
	5	1	**3**	
4				2
10				**9**
	6	8	7	

□

Задача 3.89. Какое наименьшее число кораблей 1×3 нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×3 по правилам морского боя?

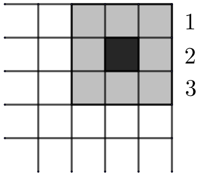
Ответ: 6.

Р е ш е н и е. Рассмотрим отмеченные множества:



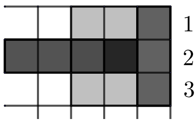
Каждое отмеченное множество должно иметь общую точку хотя бы с одним кораблем 1×3, иначе в этом отмеченном множестве можно расположить корабль 1×3 по правилам морского боя. При этом, ни один корабль 1×3 не может иметь общих точек с двумя отмеченными множествами. Получаем, что на поле необходимо поставить не менее 4 кораблей.

Докажем, что если отмеченное множество имеет общие точки только с одним кораблем, то этот корабль содержит центральную клетку отмеченного множества. Пусть корабль 1×3 не содержит центральную клетку отмеченного множества и расположен горизонтально (случай, когда он расположен вертикально рассматривается аналогично). Этот корабль расположен в 1, 2 или 3 горизонтали.

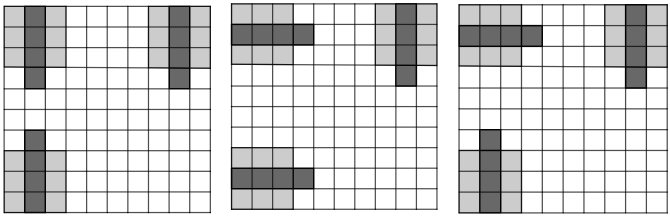


Если он расположен в 1 горизонтали, то еще один корабль по правилам морского боя можно поставить в 3 горизонталь отмеченного множества, так как по предположению, общих точек с другими кораблями отмеченное множество не имеет. Аналогично, если он расположен в 3 горизонтали, то еще один корабль по правилам морского боя можно поставить в 1 горизонталь отмеченного множества.

Если он расположен во второй горизонтали, то в отмеченное множество можно поставить вертикально еще один корабль по правилам морского боя:



Теперь покажем, что если трем отмеченным множествам будет соответствовать ровно три корабля 1×3, на доску 10×10 можно поставить еще один корабль 1×3 по правилам морского боя. Предположим, что ровно по одному кораблю 1×3 соответствует трем отмеченным множествам, расположенным в левой и верхней части доски. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Три этих корабля должны содержать центральные клетки отмеченных множеств. Возможны два варианта: либо все корабли ориентированы одинаково, либо два одинаково, а третий по-другому. С точностью до симметрий покажем, где могут находиться корабли:

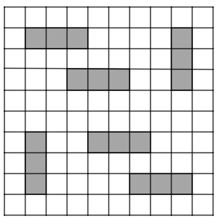


Во всех случаях можно поставить еще один корабль по правилам морского боя так, чтобы он лежал в левой-верхней четверти доски, и не имел общих точек с тремя другими четвертями.

Получаем, что необходимо поставить не менее 5 кораблей 1×3. Они должны соответствовать каждому из 4 отмеченных множеств. Значит, только одному отмеченному множеству может соответствовать более 1 корабля 1×3. Пусть, два корабля 1×3 соотвествуют отмеченному множеству, расположенному в правой-нижней части доски. При необходимости доску можно повернуть. При этом, эти корабли не могут иметь общих точек с тремя другими отмеченными множествами.

Возьмем три множества, которым соответствует по одному кораблю и повторим рассуждения. Получим, что удастся расположить еще один корабль 1×3 причем так, что он не будет иметь общих точек. Значит, кораблей не менее 6.

Пример на 6 кораблей 1×3 :

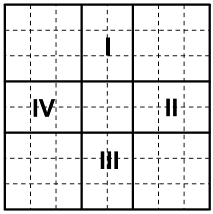


$\square$

Задача 3.90. Какое наименьшее количество фишек нужно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 находилось ровно 4 фишки?

Ответ: 22.

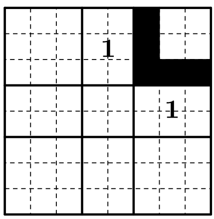
Р е ш е н и е. Разобьем доску на 9 областей:



В каждом угловом квадрате должно быть ровно по 4 фишки. В областях I-IV должно быть по крайней мере по одной фишке, иначе любой квадрат 3×3 содержащий одну из этих областей, будет содержать не более 3 фишек. Получаем, что надо расставить не менее $4\times 4+4\times 1 = 20$ фишек. Однако, пример построить не удастся.

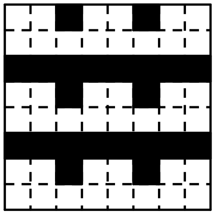
Улучшим оценку.

Предположим, что в областях I и II ровно две фишки, т.е. в каждой по одной. Тогда в ряду из трех клеток справа от области I должно стоять ровно 3 фишки. Аналогично, в ряду сверху от области II должно стоять ровно три фишки.



То есть, в каждой клетке выделенной области должно стоять по фишке. Но тогда в верхнем правом квадрате будет стоять 5 фишек. Получаем, что в областях I и II не может стоять ровно две фишки. Значит, в областях I и II стоит не менее 3 фишек. Аналогично, в областях III и IV стоит не менее 3 фишек. Значит, всего на доске стоит не менее $4 \times 4 + 2 \times 3 = 22$ фишек.

Пример:



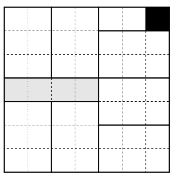
□

Задача 3.91. Какое наименьшее количество фишек нужно расставить на шахматной доске так, чтобы в любом квадрате 3×3 находилось ровно 3 фишки?

Ответ: 16.

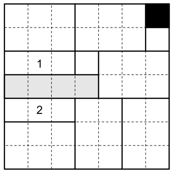
Задача 3.92. В квадрате 7×7 отмечено 8 клеток, одна из которых — угловая. Докажите, что внутри квадрата можно по клеточкам выделить прямоугольник 2×3 без отмеченных клеток.

Р е ш е н и е. Предположим, что прямоугольник 2×3 выделить нельзя. Пусть отмеченная клетка стоит в правом верхнем углу. Отметим 7 непересекающихся областей 2×3:



В каждой из них должна быть отмеченная клетка. Значит, в области, заштрихованной серым цветом, нет ни одной отмеченной клетки.

Тогда хотя бы по одной отмеченной клетке должно быть в областях 1 и 2:



Выделив еще 6 непересекающихся областей 2×3, получим, что отмеченная клетка должна быть в углу, в областях 1 и 2 и еще в шести выделенных областях. То есть, отмеченных клеток должно быть не менее 9. Значит, наше предположение неверно, следовательно, прямоугольник 2×3 выделить можно. □

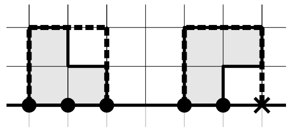
Задача 3.93. Какое наибольшее количество авианосцев (уголков из 3 клеток) можно разместить на поле 10×10?

Ответ: 14.

Р е ш е н и е. Подсчет узлов даст нам оценку: 121/8, т.е. авианосцев не более 15. Однако, эта оценка неточная.

Предположим, что можно расположить 15 авианосцев. Это значит, что всего один узел окажется ненакрытым ни одним авианосцем.

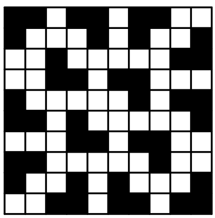
Докажем, что на каждой стороне есть хотя бы два узла, не принадлежащих ни одному авианосцу. Примыкающие к границе поля авианосцы могут иметь или 2 или 3 узла, лежащие на одной стороне. Поместим авианосец в квадрат 2×2. Этот квадрат имеет со стороной поля ровно три общих узла. Заметим, что если авианосец занимает два узла на границе, то третий узел, лежащий в квадрате 2×2, соответствующий этому авианосцу, не может принадлежать больше ни одному другму авианосцу, т.е. не может быть занят.



Получаем, что каждому авианосцу, примыкающему к границе можно поставить в соответствие три узла на стороне поля. При этом тройки узлов, соответствующих различным авианосцам, не имеют общих. Значит, из 11 узлов на стороне поля, не более 9 будут соответствовать какому-либо авианосцу. Получаем, что на каждой стороне не менее двух узлов будут ненакрыты ни одним авианосцем.

Следовательно, 120 узлов накрыто быть не может, и авианосцев не может быть более 14.

Пример, как расположить 14 авианосцев:



□

Литература

[1] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. — М.: Просвещение, 2010.

[2] Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. — М.: Просвещение, 2009.

[3] Андерсон Дж.А. Дискретная математика и комбинаторика. — М.: Вильямс, 2003.

[4] Баранов В.Н., Баранова О.В. Экстремальные задачи в дискретной математике. Метод раскраски. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015.

[5] Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2010.

[6] Кузнецов Д.Ю. О методе раскраски на примере одной задачи. Квант 2015, №3.

[7] Медников Л.Э., Шаповалов А.В. Турнир городов: мир математики в задачах. — М.: МЦНМО, 2017.

[8] Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2001.

[9] Квант. Научно-популярный физико-математический журнал. Задачник кванта.

[10] www.problems.ru — База задач по математике.

Учебное издание

Баранов Виктор Николаевич
Баранова Ольга Викторовна

Элементы дискретной математики. Метод раскраски. Принцип Дирихле

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 04.03.2021. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 9,77. Уч.-изд. л. 8,2.
Тираж 100 экз. Заказ № 413.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4, каб. 207
тел./ факс: +7(3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18