Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра информатики и математики

**В. И. Родионов**

# ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Монография

Текстовое электронное издание

Ижевск
2021

**ISBN 978-5-4312-0893-5**

УДК 517.929
ББК 22.161.614
Р 605

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ*

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор **С. Н. Попова**
к. ф.-м. н., доцент **А. Г. Ицков**

**Родионов В. И.**

Р 605 Применение алгебраических систем в теории дифференциальных уравнений [Электронный ресурс] : монография. Текстовое (символьное) электронное издание (1,19 Мб). — Ижевск : Изд. центр «Удмуртский университет», 2021. — 1 электрон. опт. диск (CD-R).

Представлен обзор результатов автора, полученных при исследовании линейных функционально-дифференциальных уравнений 1-го порядка $\dot{x}-Fx=b$, порожденных пятью семействами линейных операторов $x\to Fx$. В каждой из пяти задач (при каждом $F$) за счет погружения уравнения из алгебры с традиционным (поточечным) умножением в алгебраическую систему со специальным умножением для решений уравнений получены явные представления в форме Коши.

Для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов, интересы которых связаны с дифференциальными уравнениями.



**Минимальные системные требования:** Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x CDROM; разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

**ISBN 978-5-4312-0893-5**



***Виталий Иванович Родионов***

**ПРИМЕНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ**
**В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Подписано к использованию 20.04.2021 г.
Объем электронного издания 1,19 Мб на 1 CD.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4.
Тел. / факс: +7(3412)500-295 E-mail: editorial@udsu.ru

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

В монографии представлен обзор результатов автора, полученных при исследовании линейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) 1-го порядка

$$\dot{x}(t) - (\mathcal{F}x)(t) = b(t), \tag{1}$$

порожденных пятью семействами линейных операторов $x \to \mathcal{F}x$.

Обширная библиография, посвященная как линейным, так и нелинейным ФДУ, представлена в фундаментальных публикациях [62], [3], [37], [65], [36], [53], [47]. В этом ряду отметим труды [24], [16], [7], [35], [33], [2] основоположников теории ФДУ.

В пяти главах обзора (для пяти задач при разных $\mathcal{F}$) за счет погружения уравнения (1) из алгебры с традиционным (поточечным) умножением в алгебраическую систему со специальным умножением для решений соответствующих уравнений получены явные представления в форме Коши.

Алгебраической системой называется тройка $\langle \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{R} \rangle$, состоящая из

- носителя $\mathcal{A}$ (непустого множества);

- совокупности операций $\mathcal{O}$, определенных на элементах носителя;

- совокупности отношений $\mathcal{R}$, определенных между элементами носителя.

В настоящей работе носитель $\mathcal{A}$ (в зависимости от $\mathcal{F}$) состоит из функций (одной или нескольких переменных) или из функциональных рядов.

Совокупность $\mathcal{O}$ содержит три бинарные операции: стандартное сложение элементов $+$, стандартное умножение на скаляры $\cdot$ и специальное умножение (которое мы называем косым и обозначаем через $*$ или $\circ$), отличающееся от традиционного (поточечного) умножения. Поточечное умножение также допускается.

Совокупность $\mathcal{R}$ (такая, что $\operatorname{card}\mathcal{R} = 1$ или $\operatorname{card}\mathcal{R} = 2$ в зависимости от $\mathcal{F}$) содержит специальные бинарные интегральные отношения $xRy$ между элементами $x, y \in \mathcal{A}$. (Говорим $xRy$, если существует специальный $R$-интеграл $\displaystyle\int xRy$, обобщающий интеграл Римана–Стилтьеса $\displaystyle\int xdy$.) Интеграл Римана–Стилтьеса также допускается.

**1. Дифференциальные уравнения с линейным отклонением аргумента.** Пусть $\mu \in \mathbb{C}$, $|\,\mu\,| \leqslant 1$. В работах [82,102–104] исследована линейная система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) - A\,x(\mu t) = b(\mu t), \tag{2}$$

где $A$ — постоянная комплексная $n{\times}n$-матрица, $b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ — однозначная аналитическая в нуле функция. Семейство уравнений (2) входит в семейство векторных уравнений пантографа.

Предлагается специальный алгебраический аппарат для решения как данного уравнения, так и для более общего уравнения (3). Точнее, вводится понятие $\mu$-произведения двух аналитических в нуле функций $f$ и $g$, которое обозначается через $f * g$, и вместо уравнения (2) исследуется уравнение

$$\dot{x}(t) - A(\mu t) * x(\mu t) = b(\mu t), \tag{3}$$

в котором матрица $A$ и вектор $b$ состоят из элементов пространства $\mathcal{A}$ — пространства однозначных аналитических в нуле функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Другими словами, $A$ и $b$ состоят из элементов носителя $\mathcal{A}$ алгебраической системы $\langle \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{R} \rangle$, в которой совокупность $\mathcal{R}$ стандартна, а в $\mathcal{O}$ вместо поточечного умножения фигурирует $\mu$-умножение.

Уравнение (2) является частным случаем уравнения (3). Доказано существование фундаментальной матрицы $X(t)$ порядка $n$ для однородного уравнения (3). При $\mu \neq 0$ решение задачи, состоящей из уравнения (3) и начального условия $x(0) = x_0$, представимо в виде

$$x(t) = X(t) * \Big\{ X^{-1}(0)\, x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\, ds \Big\},$$

где $X^{-1}(t)$ — обратная матрица (показано, что матрица $X$ обратима в алгебре, порожденной $\mu$-умножением).

В заключительной части аннотации первой главы представлен краткий библиографический обзор. В основе исследований уравнений (2) и (3) лежит так называемое уравнение пантографа

$$\dot{x}(t) = p\, x(t) + a\, x(\mu t), \quad p, a, \mu \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad \mu \neq 1, \tag{4}$$

и его обобщения. Название уравнения предложено в статье [59] со ссылкой на прикладную работу [72], в которой получена математическая модель (4) динамики контактного провода электроснабжения подвижного состава (пантограф — это токоприемник локомотива). В двух более ранних работах (в теории чисел [70] и в астрофизике [5]) также фигурирует уравнение пантографа вида (4). В статье [48] показано, что при определенных условиях дифференциально-разностное уравнение $F'(x) = e^{\alpha x + \beta} F(x-1)$ сводится к уравнению (4). Следует отметить, что работа [72] стимулировала многочисленные исследования [61], [52], [55], [44], [68] уравнения (4). Исследования [5] получили свое развитие в статьях [23], [14]. В библиографии уместно отметить работы, посвященные отдельным обобщениям уравнения (4): в [50] исследовано асимптотическое поведение решений, в [9] показано существование почти периодических решений (истоки исследований заложены в [73]).

**2. Дифференциальные уравнения со степенным отклонением аргумента.** В работе [83] при $t, \mu, a, w \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$ исследовано скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - a\, x(\mu t^q) = b(t), \tag{5}$$

где $b$ — формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{C}$ ($b$ — элемент пространства-носителя $\mathcal{A}$). Решение $x$ также ищется в $\mathcal{A}$. Уравнение (5) имеет отклонение аргумента $F(t) = \mu t^q$, и мы называем его степенным отклонением. Для представления решений уравнения (5) применяются специальные алгебраические построения: для параметра $p \doteq q-1$ вводится понятие ассоциативного $(\mu, p)$-произведения двух рядов $f$ и $g$ из $\mathcal{A}$, которое обозначается через $f * g$. (Операцию $*$ мы включаем в алгебраическую систему $\langle\, \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$.) Доказано, что ряд

$$x(t) \doteq C(t,0)\, w + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big( C(t,\tau) * \int_0^s b(\xi)\, d\xi \Big)\Big|_{s=\tau} d\tau$$

является решением задачи, состоящей из уравнения (5) и начального условия $x(0) = w$. Через $C(t,\tau)$ обозначен формальный степенной ряд двух переменных, являющийся аналогом функции Коши обыкновенного дифференциального уравнения. Другими словами, если ряд $X(\cdot)$ — нетривиальное решение однородного уравнения (5), а $X^{-1}(\cdot)$ — обратный в смысле $(\mu, p)$-умножения ряд (он существует), то $C(t,\tau) \doteq X(t) * X^{-1}(\tau)$. Для ряда $C(t,\tau)$ справедливо явное представление

$$C(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m=n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}}\, \frac{a^n}{G_k(q)\, G_m(q)}\, \mu^{\ell_n(q)}\, t^{d_k(q)}\, \tau^{d_n(q)-d_k(q)} \Big],$$

где $d_n(q)$, $\ell_n(q)$, $G_n(q)$ — некоторые целочисленные последовательности. В [83] доказаны тождества:

$$C(s,s) \equiv 1, \qquad C(t,s) * C(s,\tau) \equiv C(t,\tau), \qquad \frac{\partial}{\partial t} C(t,\tau) \equiv a\, C(\mu t^q, \mu \tau^q).$$

Исследованию более общего уравнения $\dot{x}(t) - p\, x(t) - a\, x(\mu t^q) = b(t)$ посвящены работы [56], [79].

**3. Дифференциальные уравнения с несколькими отклонениями аргумента.** Пусть $\alpha, t \in K \doteq [a,b]$, $x, q_i, f \in \mathrm{C}(K;\mathbb{R})$, $F_i \in \mathrm{C}(K;K)$, $i = 1, \ldots, r$, — непрерывные функции, причем $q_i$ имеют ограниченное изменение. В соответствии с работами [84–87, 94, 95, 105, 106, 109] семейство уравнений

$$x(t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_\alpha^t x(F_i(\cdot))\, dq_i = f(t), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

допускает вложение в семейство Ф-интегральных (см. ниже) уравнений

$$x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x) = f(t). \tag{7}$$

Уместно отметить, что семейство уравнений (6) включает в себя начальную задачу для обобщенного скалярного уравнения пантографа

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r a_i(t)\, x\big(F_i(t)\big) = b(t). \tag{8}$$

Специфика уравнений (6) – (8) такова, что все отклоняющие функции определены на одном и том же отрезке $K$ и действуют из него в себя. Данное обстоятельство позволяет отказаться от задания начальных функций и от каких-либо дополнительных ограничений на отклоняющие функции.

Ф-интегральные операторы $x(t) \to \int_\alpha^t (dQ * x)$ и $y(t) \to \int_\alpha^t (y * dQ)$ ассоциированы с косым Ф-умножением $*$, действующим в специальной алгебре, порожденной полугруппой Ф (она, в свою очередь, порождена алгебраическими эндоморфизмами $\varphi_1, \ldots, \varphi_r : (\varphi_i x)(\cdot) = x(F_i(\cdot))$ ). Некоммутативное ассоциативное Ф-умножение функциональных рядов и Ф-интегралы Римана–Стилтьеса с функциональными рядами в качестве аргументов интегрирования опеределены в пространстве $\mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$.

Другими словами, носитель $\mathcal{A} \doteq \mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$ в алгебраической системе состоит из формальных функционально-степенных рядов, компоненты которых суть формы степени $k$ от некоммутирующих переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ с коэффициентами из $\mathrm{C}(\mathrm{K}^\ell;\mathbb{R})$. (Через $\Lambda$ обозначен язык в алфавите $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$.) Таким образом, в алгебраической системе $\langle\, \mathcal{A}, \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$, используется Ф-умножение $*$ и два отношения: говорим $du * v$ или $u * dv$, если существует Ф-интеграл $\int_\alpha^t (du * v)$ или $\int_\alpha^t (u * dv)$ соответственно.

Левый и правый Ф-интегралы Римана–Стилтьеса (если они существуют) и косое умножение связаны формулой интегрирования по частям:

$$\int_\alpha^\beta (du * v) + \int_\alpha^\beta (u * dv) = (u * v)\Big|_\alpha^\beta.$$

В рамках исследований приводится процедура построения фундаментального решения $X(\cdot)$ уравнения (7) (то есть решения уравнения (7), в котором $f(t) \equiv 1$ — единица алгебры $\mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$ с Ф-умножением). Относительно косого умножения $*$ функция $X(\cdot)$ обратима и порождает произведение $C(t,\tau) = X(t) * X^{-1}(\tau)$. При определенных условиях на параметры уравнения (7) функция $C(t,\tau)$ обладает всеми характерными свойствами функции Коши:

$$C(s,s) \equiv 1, \qquad C(t,s) * C(s,\tau) \equiv C(t,\tau),$$

$$C(t,\tau)-\int_\tau^t \big(dQ(s)*C(s,\tau)\big)\equiv 1,\qquad C(t,\tau)-\int_\tau^t \big(C(t,s)*dQ(s)\big)\equiv 1.$$

В терминах алгебраической системы получено представление общего решения уравнения (7):

$$x(t)=C(t,\alpha)*f(\alpha)+\int_\alpha^t \big(C(t,s)*df(s)\big).$$

Аннотацию третьей главы монографии завершаем кратким библиографическим обзором публикаций, посвященных однородному уравнению (8). В статьях [4], [77] акцент сделан на представление решений. В работах современных авторов [42], [22] исследуется устойчивость решений, в работе [36] обсуждается осцилляция решений, в [46] показано существование положительных решений, в [45], [63] изучается асимптотическое поведение решений.

**4. Импульсные уравнения.** Следуя [15, с. 143], импульсным уравнением мы называем уравнение

$$\dot x(t)=B\big(t,x(t)\big)\,\dot Q(t),\tag{9}$$

заданное в терминах обобщенных функций. Через $x$ и $Q$ обозначены соответственно $n$-мерная и $m$-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $B:\Omega\to\mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$. Считается, что левая и правая части уравнения определяют линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) в пространстве основных функций $D$, а само уравнение (9) понимается как математическая запись задачи нахождения таких прерывистых функций $x(\cdot)$, для которых при всех $\varphi\in D$ справедливо равенство $(\dot x,\varphi)=\big(B(\cdot,x)\,\dot Q,\varphi\big)$.

Зафиксируем отрезок $K\doteq[a,b]$ и через $\mathrm{G}\doteq\mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство прерывистых (см. [58, с. 16]) функций, то есть функций $x:K\to\mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ при всех $t\in(a,b]$ и $x(t+0)$ при всех $t\in[a,b)$. Пространство $\mathrm{G}$, наделенное естественной операцией умножения функций, является банаховой алгеброй по $\sup$-норме.

Прерывистые функции обладают тем свойством, что во всех точках $t\in K$ (кроме крайних) определены три значения $x(t-0)$, $x(t)$ и $x(t+0)$, что позволяет конструировать другие сопутствующие атрибуты функций и получать новые содержательные результаты. В рамках настоящей главы (см. статьи [88–90, 98–101]) мы определяем понятия присоединенного умножения и присоединенного интеграла, порождающие алгебраические системы $\langle\,\mathrm{G}^T,\mathcal{O},\mathcal{R}\,\rangle$, $\langle\,\Gamma,\mathcal{O},\mathcal{R}\,\rangle$ и $\langle\,\mathrm{BV},\mathcal{O},\mathcal{R}\,\rangle$ (определения множеств см. ниже).

Конечное или счетное множество $T\doteq\{\tau_1,\tau_2,\ldots\}$ попарно различных точек $\tau_k\in K$ будем называть разбиением отрезка $K\doteq[a,b]$, а совокупность всех разбиений отрезка $K$ обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в совокупность $\mathbb{T}(K)$, — оно является наименьшим элементом частичного порядка, определенного на множестве $\mathbb{T}(K)$ естественным образом: разбиение $T$ предшествует разбиению $S$, если $T \subseteq S$.

В алгебре $\mathrm{G}$ исследована параметрическая решетка $\{\,\mathrm{G}^T\,\}_{T\in\mathbb{T}(K)}$ подалгебр специального вида и подалгебра $\Gamma$, представляющая их пересечение. Она содержит в себе алгебру $\mathrm{BV}$ функций ограниченной вариации. В алгебре $\mathrm{G}^T$ определены проекторы $P_{\scriptscriptstyle T} : x \to x_{\scriptscriptstyle T}$ и $P^{\scriptscriptstyle T} : x \to x^{\scriptscriptstyle T}$. В алгебре $\Gamma$ [и в алгебре $\mathrm{BV}$] определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$. Исследованы вопросы существования интегралов Римана–Стилтьеса от функций-проекций для функций из алгебр $\mathrm{G}^T$, $\Gamma$ и $\mathrm{BV}$. Доказана полнота всех указанных алгебр (в каждой алгебре используется собственная норма). Получены соотношения между нормами.

В алгебре $\mathrm{G}^T$ вводятся понятия присоединенного умножения и присоединенного интеграла. Если $x, y \in \mathrm{G}^T$, то

$$x \cdot y \doteq x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T} - x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T} \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t x \cdot dy \doteq \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T}.$$

В алгебре $\Gamma$ [и в алгебре $\mathrm{BV}$] вводятся понятия присоединенного умножения и присоединенного интеграла. Если $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$], то

$$x \circ y \doteq x^c y^c - x_c y_c \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t x \circ dy \doteq \int_\alpha^t x^c dy^c - \int_\alpha^t x_c dy_c.$$

Присоединенные интегралы порождают бинарные интегральные отношения $x \cdot dy$ и $x \circ dy$ между элементами алгебр (то есть множества $\mathcal{R}$ в алгебраических системах $\langle\, \mathrm{G}^T, \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$, $\langle\, \Gamma, \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$, $\langle\, \mathrm{BV}, \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$).

Далее через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a, b)$ обозначаем алгебру прерывистых функций, определенных на интервале $K \doteq (a, b)$. Для любого $x \in \mathrm{G}$ определены обобщенная прерывистая функция $\varphi \to (x, \varphi)$ и обобщенная производная прерывистой функции $\varphi \to (x', \varphi)$. Присоединенные интегралы порождают присоединенные обобщенные производные прерывистых функций, соответственно $\varphi \to (\,\dot{x}, \varphi)^{\scriptscriptstyle T}$ и $\varphi \to (\,\mathring{x}, \varphi)$. Следовательно, определены три типа дифференциальных уравнений вида (9), заданных в терминах обобщенных прерывистых функций (для трех разных обобщенных производных).

Потенциальные возможности предложенных конструкций демонстрирует приводимая ниже теорема, в которой фигурирует обобщенная производная $\varphi \to (\,\mathring{z}, \varphi)$. В формулировке использованы следующие обозначения: $T(z)$ — не более чем счетное множество, состоящее из всех точек разрыва функции $z \in \mathrm{G}$; для любого $M \subseteq K$ алгебра $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[M]$ состоит из функций скачков $z : K \to \mathbb{C}$ таких, что $T(z) \subseteq M$.

**Теорема.** *Пусть* $\alpha \in K,\ Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}},\ A$ *— комплексная* $n \times n$*-матрица,* $X = \{x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\}$*. Для оператора* $\mathrm{V} : X^n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *такого, что* $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dQ$*, и для любого* $y \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство решений уравнения* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}x}, \varphi) \equiv (\overset{\circ}{y}, \varphi)$ *представимо в виде*

$$x(t) = e^{AQ^c(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\,dy^c\Big] \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[\,K\backslash T(Q)].$$

*Совокупность* $x(t) = e^{AQ^c(t)}\Big[\,c + \int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\,dy^c\Big],\ c \in \mathbb{C}^n$*, является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Другими словами, представления, фигурирующие в формулировке теоремы, можно считать решениями линейной импульсной системы с постоянными коэффициентами $\dot{x}(t) - A\,\dot{Q}(t)\,x(t) = \dot{y}(t)$, заданной в терминах присоединенных обобщенных функций (с производной $\varphi \to (\overset{\circ}{z}, \varphi)$ ).

Семейство всех непродолжаемых решений уравнения $\dot{x} = x$ имеет вид $x(t) = c\,e^t,\ t \in K$. *Утверждение теоремы расширяет наши возможности*:

$$(\,\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (x, \varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = h(t)\,e^t,\, t \in K, \quad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\,K].$$

Пример показывает, что имеется возможность формировать общее решение импульсной задачи, а после этого находить частные решения, удовлетворяющие краевым условиям, в том числе нелокальным.

В заключительной части аннотации четвертой главы представлен краткий библиографический обзор. Истоки исследований импульсных обыкновенных дифференциальных уравнений отражены в монографиях [29], [64], а актуальное состояние тематики обсуждается в работах [39], [38], [74], [36]. Отметим современные исследования импульсного уравнения пантографа [54], [40] и работы [15], [30] с альтернативной постановкой в терминах функций локально ограниченной вариации.

**5. Системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами.** В настоящей главе для постановки и решения импульсной задачи построена альтернативная алгебраическая система с квазиинтегральным отношением $x\Delta y$ между элементами носителя. Здесь решения импульсной задачи, записанной в квазиинтегральной форме, могут иметь общие точки разрыва с ядром системы квазиинтегральных уравнений (в отличие от решений, определенных в предыдущей главе).

Для двух прерывистых функций $x, y$, заданных на отрезке $[a, b]$, и специального параметра $\Delta$, названного дефектом, определено понятие квазиинтеграла $\int_a^b x\Delta y$. (Другими словами, определено бинарное отношение

$x\Delta y$; в работах [91–93, 96, 97, 107, 108] оно порождает алгебраическую систему $\langle\, \mathrm{G}[a,b], \mathcal{O}, \mathcal{R}\,\rangle$.) Если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то для любого дефекта существует квазиинтеграл, и все они равны между собой. Интеграл Перрона–Стилтьеса, если он существует, совпадает с одним из квазиинтегралов, где дефект определен специальным образом ($\Delta = \Delta_0$). Получены необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов, доказаны их основные свойства, в частности, аналог формулы интегрирования по частям.

Доказана теорема существования и единственности решения квазиинтегрального уравнения

$$x(t) - \lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t), \quad t \in [a,b], \tag{10}$$

с постоянной вещественной матрицей $A$. Ядро $Q$ системы — скалярная кусочно-непрерывная функция ограниченной вариации, компоненты векторов $x$ и $y$ — прерывистые функции, спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ — регулярное число. При определенных условиях квазиинтегральное уравнение (10) можно интерпретировать как импульсную задачу

$$\dot{x}(t) - \lambda A\, \dot{Q}(t)\, x(t) = \dot{y}(t), \quad x(\alpha) = y(\alpha).$$

Получено явное представление для решения однородного квазиинтегрального уравнения. Для абсолютно регулярного спектрального параметра определен аналог матрицы Коши, исследованы его свойства и получено явное представление для решения квазиинтегрального уравнения (10) в форме Коши. При определенных условиях для него справедлива формула

$$x(t) = C(t,\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t C(t,s)\Delta^* y(s).$$

(Отношение $x\Delta^* y$ называется двойственным к отношению $x\Delta y$.) Аналогичные результаты получены для сопряженного и союзных уравнений. Доказаны тождества:

$$C(s,s) \equiv E, \qquad C(t,s)\, C(s,\tau) \equiv C(t,\tau),$$

$$C(t,\tau) - \lambda A \int_\tau^t C(s,\tau)\, \Delta Q(s) \equiv E, \qquad C(t,\tau) - \lambda A \int_\tau^t C(t,s)\, \Delta^* Q(s) \equiv E.$$

**6. Актуальные задачи теории функционально-дифференциальных уравнений.** В теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) - A(t)\, x(t) = b(t)$ для матрицы Коши справедливо тождество

$$C(t,s)\, C(s,\tau) \equiv C(t,\tau), \tag{11}$$

играющее исключительную роль в теории динамических систем. Аналогичные тождества получены в анонсированных выше главах. Например, для уравнения (8) справедливо $C(t,s) * C(s,\tau) \equiv C(t,\tau)$. Другими словами, в уравнении (8) с «искривленным временем» за счет введения нового «искривленного» умножения (косого умножения $*$) восстановлено тождество (11), и мы полагаем, что и другие семейства линейных функционально-дифференциальных уравнений (1) имеют подобные перспективы (оператор $x \to \mathcal{F}x$ может иметь, вообще говоря, произвольную природу). Считаем актуальной задачей поиск новых косых умножений, ассоциированных с тем или иным линейным оператором $\mathcal{F}$, в том числе, заданным в терминах присоединенных обобщенных функций.

Мы придерживаемся следующей классификации семейств ФДУ. Согласно [3, с. 8] типичными представителями линейных ФДУ являются уравнение с отклоняющимся аргументом вида (8), интегро-дифференциальное уравнение и уравнение с распределенным запаздыванием с операторами

$$(\mathcal{F}x)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds \quad \text{и} \quad (\mathcal{F}x)(t) = \int_{-\infty}^t \big[\,d_sR(t,s)\big]\,x(s)$$

соответственно. Например, изучению вопросов устойчивости, осцилляции и асимптотики решений уравнений с распределенным запаздыванием посвящены работы [10], [41], [75]. Заметное место в теории ФДУ занимает уравнение с последействием [3, с. 64]; отметим работы [17], [19], [20], [13], [21], связанные с управлением уравнениями с последействием.

В рамках тематики уравнений нейтрального типа отметим исследования обобщенного уравнения пантографа (см., например, [59], [60], [49], [67]).

В работах [34], [51], [80] представлены еще два семейства функционально-дифференциальных уравнений: сингулярные и стохастические уравнения.

Теория временны́х шкал [43] унифицирует и расширяет теории дифференциальных ($x^{\Delta} = \dot{x}$) и разностных ($x^{\Delta} = \Delta x$) уравнений. В этом ряду отметим так называемые гибридные уравнения (например, в работе [31] изучается система, в которой одно уравнение разностное, а другое — ФДУ).

Относительно исследований функционально-дифференциальных уравнений высших порядков ограничимся указанием работ [12], [71], [1], связанных с обобщением уравнения пантографа .

Исследования функционально-дифференциальных уравнений в частных производных мы представляем фундаментальными трудами [76], [28].

В последнее десятилетие в зарубежных изданиях появилось внушительное количество работ, посвященных численному решению ФДУ того или иного вида (среди методов численного анализа отметим метод коллокаций, сплайн методы, $\theta$-методы, методы Рунге-Кутты, методы Галеркина и др.). Из отечественных источников отметим современную работу [26].

# ГЛАВА I. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

При фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \leqslant 1$, изучается линейная система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$\dot{x}(t) - A\,x(\mu t) = b(\mu t), \tag{i.1}$$

где $A$ — постоянная комплексная $n \times n$-матрица, $b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ — однозначная аналитическая в нуле функция. Семейство уравнений (i.1) входит в семейство векторных уравнений пантографа. Предлагается специальный алгебраический аппарат для решения как данного уравнения, так и более общего уравнения (i.2). Точнее, вводится понятие $\mu$-произведения двух аналитических в нуле функций $f$ и $g$, которое обозначается через $f * g$, и вместо уравнения (i.1) рассматривается уравнение

$$\dot{x}(t) - A(\mu t) * x(\mu t) = b(\mu t), \tag{i.2}$$

в котором матрица $A$ и вектор $b$ состоят из однозначных аналитических в нуле функций. Уравнение (i.1) является частным случаем уравнения (i.2).

В двух первых параграфах изучаются алгебраические свойства $\mu$-умножения, а непосредственному решению уравнения (i.2) посвящен § 3. В частности, там показано, что алгебраический гомоморфизм $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k\, \mu^{\binom{k}{2}} t^k$ (обозначим его $H_\mu$) во многих случаях позволяет свести процедуру решения системы (i.2) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Свойства оператора $H_\mu$ играют здесь центральную роль: на первом этапе с помощью обратного оператора мы переводим уравнение (i.2) в обыкновенное дифференциальное уравнение, решаем его каким-нибудь известным методом, а затем с помощью самого оператора полученное решение переводим в решение исходной системы (i.2). Данная процедура применима только в тех случаях, когда имеется возможность применения обратного оператора к оператору $H_\mu$. В общем же случае доказана теорема существования и единственности решения задачи, состоящей из уравнения (i.2) и начального условия

$$x(0) = x_0. \tag{i.3}$$

Доказано существование фундаментальной матрицы $X(t)$ порядка $n$ для однородного уравнения (i.2). При $\mu \neq 0$ решение задачи (i.2), (i.3) представимо в виде

$$x(t) = X(t) * \Big\{ X^{-1}(0)\, x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\, ds \Big\}, \tag{i.4}$$

где $X^{-1}(t)$ — обратная матрица (показано, что $X$ обратима в алгебре, порожденной $\mu$-умножением). Результаты главы опубликованы в [82,102–104].

## § 1 . Алгебра аналитических функций с $\mu$-умножением

**Утверждение 1.1.** *Если $\mu \in \mathbb{C}$, $|\,\mu\,| \leqslant 1$, комплексные степенные ряды*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad \text{и} \quad \sum_{m=0}^{\infty} g_m t^m \tag{1.1}$$

*сходятся в области $\Omega$, где $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{C}$, то в $\Omega$ абсолютно сходится ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k+m=n} f_k g_m\, \mu^{km} \Big)\, t^n\,. \tag{1.2}$$

Утверждение носит элементарный характер, поскольку ряд, составленный из модулей членов ряда (1.2), мажорируется произведением сходящихся в $\Omega$ рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big| \sum_{k+m=n} f_k g_m\, \mu^{km}\, t^n \Big| \leqslant \Big( \sum_{k=0}^{\infty} |\, f_k t^k\,| \Big) \Big( \sum_{m=0}^{\infty} |\, g_m t^m\,| \Big)\,.$$

Через $\mathcal{Q}$ обозначим линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, состоящее из однозначных аналитических в нуле функций комплексного переменного $t$. Для функций $f, g \in \mathcal{Q}$ существует окрестность нуля, в которой каждая из них разлагается в степенной ряд по степеням $t$. Пусть это ряды (1.1) соответственно. Тогда сходящийся ряд (1.2) однозначно определяет некоторую новую функцию $h \in \mathcal{Q}$, которую будем называть $\mu$*-произведением* функций $f$ и $g$ и писать

$$f * g = h \quad \text{или} \quad f(t) * g(t) = h(t).$$

Функции $f \in \mathcal{Q}$ и их степенные ряды в нуле (ростки аналитических функций) в дальнейшем будем отождествлять и писать

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \quad \text{или} \quad f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k.$$

Отметим, что если $\mu = 1$, то $\mu$-произведение совпадает с обычным произведением функций. Если $f(t) = c = \text{const}$, $g \in \mathcal{Q}$ и $|\,\mu\,| \leqslant 1$, то

$$f(t) * g(t) = f(t)\, g(t) = c\, g(t).$$

Это означает, в частности, что уравнение (i.1) входит в семейство (i.2).

**Предложение 1.1.** *Пространство $\mathcal{Q}$, наделенное операцией $\mu$-умножения функций, образует над полем $\mathbb{C}$ коммутативную ассоциативную алгебру (которую будем обозначать $\mathcal{Q}_\mu$) с единицей.*

В силу утверждения 1.1 $\mu$-произведение двух функций не выводит из $\mathcal{Q}$. Единицей является функция, тождественно равная 1. Для $f, g, h \in \mathcal{Q}$ выражения $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$ представляют один и тот же ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k+m+r=n} f_k g_m h_r \, \mu^{km+mr+rk} \Big) t^n,$$

что доказывает ассоциативность $\mu$-умножения. Проверка остальных аксиом алгебры носит тривиальный характер. □

Для комплексного $\lambda \neq 0$ введем в рассмотрение подпространство $\mathcal{Q}^\lambda \subseteq \mathcal{Q}$ функций $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ таких, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \, \lambda^{-\binom{k}{2}} t^k$ сходится в некоторой окрестности нуля. Очевидно, если $|\,\lambda\,| \geqslant 1$, то $\mathcal{Q}^\lambda = \mathcal{Q}$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$ таковы, что $\lambda \neq 0$, $|\,\mu\,| \leqslant |\,\lambda\,|$ и $|\,\mu\,| \leqslant 1$. Тогда пространство $\mathcal{Q}^\lambda$, наделенное операцией $\mu$-умножения, образует подалгебру (которую будем обозначать $\mathcal{Q}_\mu^\lambda$) алгебры $\mathcal{Q}_\mu$.*

Доказательство. Если $\gamma \in \mathbb{C}$ и $f, g \in \mathcal{Q}^\lambda$, то $f + g \in \mathcal{Q}^\lambda$ и $\gamma f \in \mathcal{Q}^\lambda$. Для того чтобы $\mu$-произведение $f * g$ также принадлежало пространству $\mathcal{Q}^\lambda$, необходима сходимость в окрестности нуля формального степенного ряда

$$\sigma \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k+m=n} f_k g_m \, \mu^{km} \Big) \lambda^{-\binom{n}{2}} t^n.$$

Это действительно так, поскольку справедлива цепочка равенств

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} f_k \, \lambda^{-\binom{k}{2}} g_m \, \lambda^{-\binom{m}{2}} \big( \tfrac{\mu}{\lambda} \big)^{km} t^n =$$

$$= \Big( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, \lambda^{-\binom{k}{2}} t^k \Big) * \Big( \sum_{m=0}^{\infty} g_m \, \lambda^{-\binom{m}{2}} t^m \Big),$$

в правой части которой стоит $\nu$-произведение сходящихся рядов, где $\nu \doteq \frac{\mu}{\lambda}$.

**Теорема 1.1.** *При $0 < |\lambda| \leqslant 1$, $|\mu| \leqslant |\lambda|$ алгебры $\mathcal{Q}_\mu^\lambda$ и $\mathcal{Q}_{\mu/\lambda}$ изоморфны.*

Доказательство. Определим отображение $H_\lambda : \mathcal{Q}_{\mu/\lambda} \to \mathcal{Q}_\mu^\lambda$, $f \to f_\lambda$, переводящее функцию $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ из алгебры $\mathcal{Q}_{\mu/\lambda}$ в функцию $f_\lambda \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k \, \lambda^{\binom{k}{2}} t^k$ из алгебры $\mathcal{Q}_\mu^\lambda$, и покажем, что $H_\lambda$ — алгебраический гомоморфизм. Равенства $(f+g)_\lambda = f_\lambda + g_\lambda$ и $(\gamma f)_\lambda = \gamma f_\lambda$ (где $\gamma \in \mathbb{C}$) тривиальны. Справедлива цепочка равенств

$$f_\lambda * g_\lambda \sim \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\, \lambda^{\binom{k}{2}} t^k\Big) * \Big(\sum_{m=0}^{\infty} g_m\, \lambda^{\binom{m}{2}} t^m\Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} f_k\, \lambda^{\binom{k}{2}} g_m\, \lambda^{\binom{m}{2}} \mu^{km} t^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k+m=n} f_k g_m \big(\tfrac{\mu}{\lambda}\big)^{km}\Big) \lambda^{\binom{n}{2}} t^n \sim (f*g)_\lambda,$$

в которой слева стоит $\mu$-произведение, а справа — $\nu$-произведение функций (где $\nu \doteq \frac{\mu}{\lambda}$ ). Таким образом, $H_\lambda$ — это гомоморфизм алгебр.

Равенство $\operatorname{Ker} H_\lambda = \{0\}$ очевидно. Прообразом произвольной функции $g \in \mathcal{Q}_\mu^\lambda$, $g \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k t^k$, является функция $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k\, \lambda^{-\binom{k}{2}} t^k$ (этот ряд сходится, поскольку $g \in \mathcal{Q}^\lambda$ ), следовательно, $\operatorname{Im} H_\lambda = \mathcal{Q}_\mu^\lambda$ и, таким образом, $H_\lambda$ — алгебраический изоморфизм.

**Следствие 1.1.** *При $0 < |\,\mu\,| \leqslant 1$ все алгебры $\mathcal{Q}_\mu^\mu$ изоморфны между собой, а также алгебре $\mathcal{Q}_1$ однозначных аналитических в нуле функций с естественным умножением. При этом алгебраический изоморфизм $H_\mu$ : $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_\mu^\mu$ является инъективным гомоморфизмом $H_\mu : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_\mu$ .*

Введем в рассмотрение линейное пространство $\mathcal{P}$ многочленов над $\mathbb{C}$. Ясно, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}^\mu \subseteq \mathcal{Q}$ для всех $\mu \neq 0$. Следовательно, справедливо

**Предложение 1.2.** *При $0 < |\,\mu\,| \leqslant 1$ пространство многочленов $\mathcal{P}$, наделенное операцией $\mu$-умножения, образует подалгебру $\mathcal{P}_\mu$ алгебры $\mathcal{Q}_\mu^\mu$.*

**Следствие 1.2.** *При $0 < |\,\mu\,| \leqslant 1$ все алгебры $\mathcal{P}_\mu$ изоморфны между собой и изоморфны алгебре $\mathcal{P}_1$, поэтому в $\mathcal{P}_\mu$ всякий многочлен разлагается в $\mu$-произведение линейных множителей.*

**Пример 1.1.** В алгебре $\mathcal{P}_\mu$ (при $\mu = \frac{1}{2}$) многочлен $f = t^2 - 28t + 96$, имеющий очевидные корни $t = 4$ и $t = 24$, представим в виде $\mu$-произведения $f = 2\,(\,t-6\,) * (\,t-8\,)$. Таким образом, несмотря на то, что значения $t = 6$ и $t = 8$ являются корнями $\mu$-сомножителей, они тем не менее не являются корнями $\mu$-произведения («не передаются по наследству»).

Элементарными функциями алгебры $\mathcal{Q}_\mu$ будем называть образы элементарных функций комплексного анализа при инъективном гомоморфизме

$H_\mu : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_\mu$. Напомним: при $\mu \neq 0$ имеет место равенство $\operatorname{Im} H_\mu = \mathcal{Q}_\mu^\mu$, поэтому все элементарные функции алгебры $\mathcal{Q}_\mu$ содержатся в $\mathcal{Q}_\mu^\mu$.

Функцию $t_\mu^k \doteq \mu^{\binom{k}{2}} t^k$, $k = 0, 1, \ldots$, назовем *степенной* функцией, а целые функции $\exp_\mu t \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu^{\binom{k}{2}} \dfrac{t^k}{k!}$,

$$\cos_\mu t \doteq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^{\binom{2k}{2}} \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin_\mu t \doteq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^{\binom{2k+1}{2}} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

назовем соответственно *экспонентой, косинусом и синусом* алгебры $\mathcal{Q}_\mu$. Перечисленные функции встречаются в работе [8] при изучении дифференциального уравнения $x^{(n)}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \, x^{(n-k)}(\mu^k t)$ с постоянными коэффициентами $a_k$ (то есть обобщенного уравнения пантографа). Равенства

$$\tfrac{d}{dt} \exp_\mu t = \exp_\mu \mu t, \qquad \tfrac{d}{dt} \cos_\mu t = -\sin_\mu \mu t, \qquad \tfrac{d}{dt} \sin_\mu t = \cos_\mu \mu t$$

носят элементарный характер (см. также пример 2.2). Таким образом, функция $\exp_\mu t$ является решением уравнения пантографа $\dot{x}(t) = x(\mu t)$, а функции $\cos_\mu t$, $\sin_\mu t$ — это решения уравнения пантографа $\ddot{x}(t) + \mu x(\mu^2 t) = 0$.

В работе [69] отмечается, что при $\mu \in (0,1)$ и $t \in \mathbb{R}$ все нули функции $\exp_\mu(-t)$ вещественны, положительны и различны ($0 < t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$), для всех $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $t_{n+1} > \mu^{-1} t_n$ и существует $n_0$ такое, что $t_{n+1} \leqslant \mu^{-2} t_n + 1$ для всех $n \geqslant n_0$. В [66] доказаны равенства

$$\tfrac{t_{n+1}}{t_n} = \tfrac{1}{\mu} \left( 1 + \tfrac{1}{n+1} \right) + o(n^{-2}), \quad \exists \, \gamma > 0 : \; t_n = \mu^{-n} n \left( \gamma + o(1) \right),$$

а в статье [81] доказано равенство $t_n = \mu^{1-n} n \left( 1 + \sigma(\mu) \, n^{-2} + o(n^{-2}) \right)$, $n \in \mathbb{N}$, где $\sigma(\mu) \doteq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sigma_k \mu^k$ — производящая функция, в которой $\sigma_k$ — это сумма всех положительных делителей числа $k$.

Формулы

$$t_\mu^k * t_\mu^m = t_\mu^{k+m},$$

$$\exp_\mu \alpha t * \exp_\mu \beta t = \exp_\mu (\alpha + \beta) \, t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

$$\exp_\mu it = \cos_\mu t + i \sin_\mu t, \quad t \in \mathbb{R},$$

являются «образами» известных формул комплексного анализа при гомоморфизме $H_\mu$. Подобным же образом получаем все «тригонометрические» тождества в $\mathcal{Q}_\mu$, например,

$$\cos_\mu t * \cos_\mu t + \sin_\mu t * \sin_\mu t = 1,$$

$$\sin_\mu 2t = 2\,\sin_\mu t * \cos_\mu t,$$
$$\cos_\mu 2t = \cos_\mu t * \cos_\mu t - \sin_\mu t * \sin_\mu t.$$

Первая формула отнюдь не означает, что при $t, \mu \in \mathbb{R}$ функции $\cos_\mu t$ и $\sin_\mu t$ ограничены (например, при $\mu = -1$ имеем равенства $\cos_{-1} t = \operatorname{ch} t$, $\sin_{-1} t = \operatorname{sh} t$ — гиперболические функции).

## § 2 . Алгебра формальных степенных рядов с $\mu$-умножением, ее обратимые элементы и обратимые элементы подалгебр

Для комплексных формальных степенных рядов

$$\alpha \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^k, \tag{2.1}$$

$$\beta \doteq \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m t^m \tag{2.2}$$

и для любого $\mu \in \mathbb{C}$ составим ряд $\gamma \doteq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Bigl( \sum\limits_{k+m=n} \alpha_k \beta_m \, \mu^{km} \Bigr) t^n$, который естественно назвать $\mu$-произведением рядов (2.1) и (2.2) и писать $\alpha * \beta = \gamma$. Пространство $\mathcal{R}$ формальных степенных рядов с операцией $\mu$-умножения образует над полем $\mathbb{C}$ коммутативную ассоциативную алгебру $\mathcal{R}_\mu$ с единицей, причем при $0 < |\,\mu\,| \leqslant 1$ имеют место включения $\mathcal{P}_\mu \subset \mathcal{Q}_\mu^\mu \subseteq \mathcal{Q}_\mu \subset \mathcal{R}_\mu$.

**Лемма 2.1.** *Пусть ряды* (2.1) *и* (2.2) *таковы, что* $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = \alpha_0^{-1}$,

$$\beta_m = \alpha_0^{-1} \sum_{p_1 + \ldots + p_k = m} (-\alpha_0)^{-k} \Bigl( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Bigr) \mu^{(m^2 - p_1^2 - \ldots - p_k^2)/2}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

*где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам* $(p_1, \ldots, p_k)$ *натуральных чисел таких, что* $p_1 + \ldots + p_k = m$. *Тогда* $\alpha * \beta = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение

$$\sigma_n \doteq \sum_{m=0}^{n} \alpha_{n-m} \beta_m \, \mu^{m(n-m)}, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

и докажем, что $\sigma_n = \delta_{n0}$. Очевидно, $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Пусть $n \geqslant 2$. Тогда

$$\sigma_n = \alpha_n \beta_0 +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m} \Bigl\{ \alpha_0^{-1} \sum_{p_1 + \ldots + p_k = m} (-\alpha_0)^{-k} \Bigl( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Bigr) \mu^{(m^2 - p_1^2 - \ldots - p_k^2)/2} \Bigr\} \mu^{m(n-m)} =$$

$$= \alpha_0^{-1} \Big\{ \alpha_n + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2-(n-m)^2)/2} \Big\}.$$

Выделив отдельно слагаемое при $m = n$, получим

$$\alpha_0\, \sigma_n = \alpha_n + \sigma' + \alpha_0 \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}, \qquad (2.3)$$

где через $\sigma'$ обозначена сумма

$$\sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{n-m} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2-(n-m)^2)/2}.$$

Заменив в $\sigma'$ переменную суммирования $m$ на $r = n - m$, получим

$$\sigma' = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{p_1+\ldots+p_k=n-r} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \alpha_r \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(n^2-r^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

Переходя от повторного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно, приходим к формуле

$$\sigma' = -\alpha_n + \sum_{r+p_1+\ldots+p_k=n} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \alpha_r \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(n^2-r^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

Наконец, введя обозначения $m = k+1$, $q_1 = r$, $q_2 = p_1, \ldots, q_{k+1} = p_k$, получим равенство

$$\sigma' = -\alpha_n + \sum_{q_1+\ldots+q_m=n} (-\alpha_0)^{-m+1} \Big( \prod_{i=1}^{m} \alpha_{q_i} \Big) \mu^{(n^2-q_1^2-\ldots-q_m^2)/2},$$

подставив которое в (2.3), имеем $\alpha_0\, \sigma_n = 0$. $\square$

Итак, при $\alpha_0 \neq 0$ ряд (2.1) обратим в $\mathcal{R}_\mu$, и обратным является ряд

$$\alpha_0^{-1} \Big\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-\alpha_0)^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} \alpha_{p_i} \Big) \mu^{(m^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}\, t^m \Big\}. \qquad (2.4)$$

Очевидно, если ряд (2.1) обратим, то $\alpha_0 \neq 0$. Поэтому справедлива

**Лемма 2.2.** *Формальный степенной ряд* (2.1) *обратим в алгебре* $\mathcal{R}_\mu$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_0 \neq 0$.

**Замечание 2.1.** При $\mu = 1$, то есть в случае обычного умножения, утверждение леммы хорошо известно. Более того, в этом случае из сходимости ряда (2.1) в некоторой окрестности нуля и условия $\alpha_0 \neq 0$ следует сходимость обратного ряда (2.4) в окрестности нуля.

Пусть теперь $|\mu| \leqslant 1$, и рассмотрим вопрос об обратимости функций в алгебре $\mathcal{Q}_\mu$. Обратную функцию будем обозначать $f^{-1}$.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $|\mu| \leqslant 1$. *Функция* $f$ *обратима в алгебре* $\mathcal{Q}_\mu$ *тогда и только тогда, когда* $f(0) \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения очевидна.

Достаточность. Для функции $f \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ имеем $f_0 = f(0) \neq 0$, следовательно, сходящийся ряд $|f_0| - \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|\, t^k$ имеет в алгебре $\mathcal{R}_\mu$ обратный ряд

$$|f_0|^{-1} \Big\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} |f_0|^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} |f_{p_i}| \Big) \mu^{(m^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}\, t^m \Big\}$$

(см. (2.4)). В силу замечания 2.1 этот ряд при $\mu = 1$ сходится в некоторой окрестности $\Omega$ нуля, причем сходится абсолютно, следовательно, ряд

$$f_0^{-1} \Big\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-f_0)^{-k} \Big( \prod_{i=1}^{k} f_{p_i} \Big) \mu^{(m^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}\, t^m \Big\} \tag{2.5}$$

абсолютно сходится в $\Omega$. Таким образом, ряд (2.5), обратный в алгебре $\mathcal{R}_\mu$ к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k \sim f$, сам принадлежит $\mathcal{Q}_\mu$, как только $f \in \mathcal{Q}_\mu$.

**Пример 2.1.** Функции $\exp_\mu \alpha t$ и $\exp_\mu(-\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, взаимно обратны в $\mathcal{Q}_\mu$. Взаимно обратными являются функции $f = 1 - t$ и $f^{-1} \sim \sum\limits_{m=0}^{\infty} \mu^{\binom{m}{2}} t^m$.

**Лемма 2.3.** *В алгебре* $\mathcal{Q}_\mu$ *справедливы формулы*

$$(f(t) * g(t))' = f'(t) * g(\mu t) + f(\mu t) * g'(t)\,, \tag{2.6}$$

$$(g^{-1}(t))' = -g'(t) * g^{-1}(\mu t) * g^{-1}(\mu t), \quad g(0) \neq 0\,. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\sigma_1$ и $\sigma_2$ обозначим левую и правую части равенства (2.6) соответственно. Тогда

$$\sigma_1 = (f(t) * g(t))' \sim \Big( \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k * \sum_{m=0}^{\infty} g_m t^m \Big)' =$$

$$= \Big( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} f_k g_m\, \mu^{km}\, t^n \Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \Big( \sum_{k+m=n+1} f_k g_m\, \mu^{km} \Big) t^n,$$

$$\sigma_2 = f'(t) * g(\mu t) + f(\mu t) * g'(t) \sim$$
$$\sim \sum_{r=0}^{\infty}(r{+}1)\, f_{r+1}\, t^r * \sum_{m=0}^{\infty} g_m\, \mu^m t^m + \sum_{k=0}^{\infty} f_k\, \mu^k t^k * \sum_{s=0}^{\infty}(s{+}1)\, g_{s+1} t^s =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{r+m=n} (r{+}1)\ f_{r+1} g_m\, \mu^{(r+1)m} + \sum_{k+s=n} (s{+}1)\, f_k g_{s+1}\, \mu^{(s+1)k} \Big)\, t^n.$$

Введя в первой внутренней сумме вместо $r$ переменную $k = r+1$, а во второй — вместо $s$ переменную $m = s+1$, получим

$$\sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big( \sum_{k+m=n+1} k f_k g_m\, \mu^{km} + \sum_{k+m=n+1} m f_k g_m\, \mu^{km} \Big)\, t^n,$$

поэтому $\sigma_1 = \sigma_2$. Для доказательства формулы (2.7) достаточно продифференцировать тождество $g(t) * g^{-1}(t) = 1$, применяя формулу (2.6).

**Лемма 2.4.** *Пусть* $f, g \in \mathcal{Q}$. *Если* $f'(t) = g(t)$, *то* $(f_\mu(t))' = g_\mu(\mu t)$.

Доказательство. Коэффициенты функций $f$ и $g$ связаны соотношением $(k{+}1)\, f_{k+1} = g_k$, $k = 0, 1, \ldots$, следовательно,

$$(f_\mu(t))' \sim \sum_{k=0}^{\infty}(k{+}1)\, f_{k+1}\, \mu^{\binom{k+1}{2}} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\, \mu^{\binom{k}{2}} (\mu t)^k \sim g_\mu(\mu t).$$

Другими словами, справедливо равенство

$$\mu \frac{d}{dt} f_\mu(t) = \Big( \frac{d}{dt} f(\mu t) \Big)_\mu. \tag{2.8}$$

**Пример 2.2.** Справедливы равенства: а) $\frac{d}{dt} t_\mu^n = n\, (\mu t)_\mu^{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$; б) $\frac{d}{dt} \exp_\mu t = \exp_\mu \mu t$; в) $\frac{d}{dt} \cos_\mu t = -\sin_\mu \mu t$; г) $\frac{d}{dt} \sin_\mu t = \cos_\mu \mu t$.

Отметим, что функции алгебры $\mathcal{Q}_\mu$ можно интегрировать обычным образом, однако при $\mu \in \mathbb{R}$ определенный интеграл от $\mu$-произведения вещественной функции вещественной переменной на себя может оказаться отрицательным, например, при $\mu = \frac{1}{2}$ справедливо соотношение

$$\int_0^1 \big(t - \tfrac{3}{4}\big) * \big(t - \tfrac{3}{4}\big)\, dt = -\tfrac{1}{48} < 0.$$

## § 3 . Представление решений линейных дифференциальных уравнений с линейным отклонением аргумента в терминах алгебры аналитических функций с $\mu$-умножением

Зафиксируем $\mu \in \mathbb{C}$, $0 < |\,\mu\,| \leqslant 1$, и рассмотрим уравнение (i.2), в котором $A^{ij}, b^i \in \mathcal{Q}$ для всех $i, j$, а операция $*$ — это $\mu$-умножение.

**3.1. Случай редукции уравнения к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению.** В настоящем пункте мы предполагаем, что все компоненты $A^{ij}$ и $b^i$ принадлежат алгебре $\mathcal{Q}^{\mu}_{\mu}$. Через $a(t)$ и $\beta(t)$ обозначим прообразы функций $A(t)$ и $b(t)$ при изоморфизме $H_\mu : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}^{\mu}_{\mu}$, то есть

$$a^{ij}_{\mu}(t) = A^{ij}(t), \quad \beta^i_\mu = b^i(t), \quad i,j \in N \doteq \{ 1, \ldots, n\} , \tag{3.1}$$

и составим уравнение $\dot{x}(t) - a(t)\, x(t) = \beta(t)$.

**Теорема 3.1.** *Пусть функция* $x = x(t)$ *— это решение задачи, состоящей из обыкновенного дифференциального уравнения* $\dot{x}(t) - a(t)\, x(t) = \beta(t)$ *и начального условия* (i.3), *тогда функция* $x_\mu = (H_\mu x)(t)$ *является решением задачи* (i.2), (i.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку все функции $a^{ij}$, $\beta^i$, $x^i$ принадлежат алгебре $\mathcal{Q}_1$ и $\dot{x}(t) - a(t)\, x(t) = \beta(t)$, то образы этих функций при изоморфизме $H_\mu$ связаны аналогично, то есть имеет место равенство $(\dot{x}(t))_\mu - a_\mu(t) * x_\mu(t) = \beta_\mu(t)$. Сделав замену переменной $t = \mu\tau$, получим

$$\mu^{-1}\Big(\frac{d}{d\tau}\, x(\mu\tau)\Big)_\mu - a_\mu(\mu\tau) * x_\mu(\mu\tau) = \beta_\mu(\mu\tau)\,,$$

поэтому в силу равенств (2.8), (3.1) справедливо равенство

$$\frac{d}{d\tau}\, x_\mu(\tau) - A(\mu\tau) * x_\mu(\mu\tau) = b(\mu\tau).$$

Доказательство завершает замечание, что $x_\mu(0) = x(0) = x_0$. $\square$

Итак, теорема 3.1 дает регулярный метод построения решения задачи (i.2), (i.3) при $A^{ij}, b^i \in \mathcal{Q}^{\mu}$. Он эффективен, например, в тех случаях, когда $A$ и $b$ состоят из многочленов, в частности, если $A$ — постоянная матрица, а $b^i$ — многочлены. Единственность решения доказана ниже в теореме 3.2.

**Пример 3.1.** 1) Функции

$$x^1(t) = \exp_\mu t * \cos_\mu t,$$

$$x^2(t) = \exp_\mu t * \sin_\mu t$$

являются решением задачи (i.2), (i.3), в которой $0 \neq |\,\mu\,| \leqslant 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Функции

$$x^1(t) = \exp_\mu 3t * \cos_\mu 2t - \exp_\mu 3t * \sin_\mu 2t,$$

$$x^2(t) = \exp_\mu 3t * \cos_\mu 2t + 3\, \exp_\mu 3t * \sin_\mu 2t$$

являются решением задачи (i.2), (i.3), в которой $0 \neq |\, \mu \,| \leqslant 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) Функции

$$x^1(t) = (t^2 + t + 1)_\mu * \exp_\mu 2t,$$
$$x^2(t) = (2t^2 + 1)_\mu * \exp_\mu 2t,$$
$$x^3(t) = (t^2 - t + 2)_\mu * \exp_\mu 2t$$

являются решением задачи (i.2), (i.3), в которой $0 \neq |\, \mu \,| \leqslant 1$ и

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4) Для уравнения $\dot{x}(t) - x(\mu t) = \mu^3 t^2$ имеем $A(t) \equiv 1$, $b(t) = \mu t^2$. Прообразы этих функций существуют: $a(t) \equiv 1$, $\beta(t) = t^2$. Общее решение уравнения $\dot{x} - x = t^2$ (являющегося уравнением-прообразом) имеет вид $x = Ce^{\,t} - (t^2 + 2t + 2)$, следовательно, общее решение исходного уравнения представимо в виде $x(t) = C \exp_\mu t - (t^2 + 2t + 2)_\mu$. Другими словами,

$$x(t) = C \exp_\mu t - \mu t^2 - 2t - 2.$$

5) К виду (i.2) сводится уравнение $\dot{x}(t) - A\, t^p\, x(\mu t) = b(t)$, в котором $A$ — постоянная $n \times n$-матрица, $b^i \in \mathcal{Q}$, $p \in \mathbb{N}$, $0 < |\, \mu \,| \leqslant 1$. Точнее, пусть $\lambda$ таково, что $\lambda^{p+1} = \mu$, тогда легко показать, что $t^p\, x(\mu t) = t^p * x(\lambda t)$, где $*$ — это $\lambda$-умножение. Следовательно, исходное уравнение принимает вид (i.2): $\dot{x}(t) - A\, t^p * x(\lambda t) = \beta(\lambda t)$, где $\beta(\lambda t) = b(t)$.

Приведенные примеры демонстрируют определенную регулярность метода: решив исходную задачу при $\mu = 1$, мы отображаем ее решение посредством гомоморфизма $H_\mu$, получая решение задачи (i.2), (i.3).

**3.2. Представление решений в общем случае.** Перейдем к исследованию общей ситуации, то есть к ситуации, когда прообразы для $A(\cdot)$ или для $b(\cdot)$ могут отсутствовать. Зафиксируем $r > 0$ и через $\mathcal{Q}(r)$ обозначим банахово пространство (изоморфное $\ell_1$), состоящее из тех функций $f \in \mathcal{Q}$, у которых соответствующие ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ сходятся в круге $|\, t \,| \leqslant r$. Норма в $\mathcal{Q}(r)$ определяется равенством

$$\|f\|_r \doteq \sum_{k=0}^{\infty} |\, f_k|\, r^k.$$

Через $\mathcal{Q}^n(r)$ и $\mathcal{Q}^{nm}(r)$ обозначим банаховы пространства векторов $x(\cdot)$ длины $n$ и матриц $A(\cdot)$ строения $n\times m$ соответственно с элементами из $\mathcal{Q}(r)$ и нормами

$$\|x\|_r \doteq \sum_{i=1}^{n} \|x^i\|_r \quad \text{и} \quad \|A\|_r \doteq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|A^{ij}\|_r.$$

**Утверждение 3.1.** *Если* $|\,\mu\,| \leqslant 1$, $A \in \mathcal{Q}^{nn}(r)$, $x \in \mathcal{Q}^n(r)$, *то*

$$A * x \in \mathcal{Q}^n(r) \quad \textit{и} \quad \|A * x\|_r \leqslant \|A\|_r \cdot \|x\|_r.$$

Утверждение носит очевидный характер, так как включения $f, g \in \mathcal{Q}(r)$ влекут включение $f * g \in \mathcal{Q}(r)$ и $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_r \cdot \|g\|_r$.

**Утверждение 3.2.** *Пусть* $|\mu| \leqslant 1$, $x \in \mathcal{Q}^n(r)$ *и* $y(t) \doteq \int_0^{\mu t} x(\tau)\,d\tau$. *Тогда*

$$y \in \mathcal{Q}^n(r) \quad \textit{и} \quad \|y\|_r \leqslant |\,\mu\,| \cdot r \cdot \|x\|_r.$$

Если $x^i \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k^i t^k$ — компонента вектора $x$, то для компоненты $y^i$

$$\|y^i\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |\,x_k^i|\, \frac{1}{k+1}\, |\,\mu\,|^{k+1}\, r^{k+1} \leqslant |\,\mu\,| \cdot r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |\,x_k^i|\, r^k = |\,\mu\,| \cdot r \cdot \|x^i\|_r.$$

**Утверждение 3.3.** *Для* $n\times n$*-матрицы* $A$ *и вектора* $b$ *длины* $n$ *с элементами из* $\mathcal{Q}$ *и для любого* $q > 0$ *существует* $r > 0$ *такое, что*

$$A \in \mathcal{Q}^{nn}(r), \quad b \in \mathcal{Q}^n(r) \quad \textit{и} \quad \|A\|_r \leqslant q/r.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует $\varrho > 0$ такое, что для всех $i, j \in N$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{ij} t^k \sim A^{ij}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} b_k^i t^k \sim b^i$ сходятся в круге $|\,t\,| < \varrho$. Следовательно, для любого $r \in (0, \varrho)$ имеем $A \in \mathcal{Q}^{nn}(r)$ и $b \in \mathcal{Q}^n(r)$. Кроме того, норма $\|A\|_r$ (как функция $r$) возрастает на интервале $(0, \varrho)$, а функция $q/r$ убывает. Следовательно, для малых $r$ справедливо неравенство $\|A\|_r \leqslant q/r$.

**Теорема 3.2.** *Задача* (i.2), (i.3), *в которой* $|\,\mu\,| \leqslant 1$ *и все компоненты матрицы* $A$ *порядка* $n$ *и вектора* $b$ *длины* $n$ *принадлежат* $\mathcal{Q}$, *имеет в* $\mathcal{Q}$ *единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\mu = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\mu \neq 0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} \big(A(\tau) * x(\tau) + b(\tau)\big)\,d\tau,$$

которое, очевидно, эквивалентно задаче (i.2), (i.3). Зафиксируем $q \in (0,1)$. В силу утверждения 3.3 существует $r > 0$ такое, что $A \in \mathcal{Q}^{nn}(r)$, $b \in \mathcal{Q}^n(r)$ и $\|A\|_r \leqslant q/r$. Зафиксируем это $r$ и введем в рассмотрение отображение $\mathcal{A}$, действующее на прямом произведении $\mathcal{Q}^n = \mathcal{Q} \times \ldots \times \mathcal{Q}$ по правилу

$$(\mathcal{A}x)(t) = x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} (A(\tau) * x(\tau) + b(\tau))\, d\tau.$$

Согласно утверждению 3.2 включение $x \in \mathcal{Q}^n(r)$ влечет $\mathcal{A}x \in \mathcal{Q}^n(r)$, причем если $x, y \in \mathcal{Q}^n(r)$, то справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y\|_r = \left\| \mu^{-1} \int_0^{\mu t} A(\tau) * (x(\tau) - y(\tau))\, d\tau \right\|_r \leqslant \\ \leqslant r \cdot \|A * (x - y)\|_r \leqslant r \cdot \|A\|_r \cdot \|x - y\|_r \leqslant q \cdot \|x - y\|_r. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Таким образом, поскольку $q < 1$, то $\mathcal{A}$ — сжимающее отображение банахова пространства $\mathcal{Q}^n(r)$ в себя. Следовательно, в $\mathcal{Q}^n(r)$ существует единственная функция $\varphi$ такая, что $\varphi = \mathcal{A}\varphi$. Существование решения задачи (i.2), (i.3) доказано.

Единственность. Предположим, что кроме $\varphi$ существует другая аналитическая в нуле функция $\psi \neq \varphi$, такая, что $\psi = \mathcal{A}\psi$. Существует $\varrho > 0$ такое, что $\psi \in \mathcal{Q}^n(\varrho)$. Понятно, что $\varrho < r$. Действительно, если бы $\varrho \geqslant r$, то $\psi \in \mathcal{Q}^n(r)$, что противоречит единственности решения уравнения $x = \mathcal{A}x$ в пространстве $\mathcal{Q}^n(r)$.

Поскольку $\varrho < r$, то включения $\varphi, b \in \mathcal{Q}^n(r)$ и $A \in \mathcal{Q}^{nn}(r)$ влекут включения $\varphi, b \in \mathcal{Q}^n(\varrho)$ и $A \in \mathcal{Q}^{nn}(\varrho)$. Кроме того, $\varrho \cdot \|A\|_\varrho < r \cdot \|A\|_r \leqslant q$. Наконец, отображение $\mathcal{A}$ переводит функции из $\mathcal{Q}^n(\varrho)$ в $\mathcal{Q}^n(\varrho)$. Следовательно, повторив выкладки (3.2), получим

$$\|\varphi - \psi\|_\varrho = \|\mathcal{A}\varphi - \mathcal{A}\psi\|_\varrho \leqslant \varrho \cdot \|A\|_\varrho \cdot \|\varphi - \psi\|_\varrho < q \cdot \|\varphi - \psi\|_\varrho,$$

что противоречит условию $q < 1$. □

Далее исследуем однородное уравнение (i.2), то есть уравнение

$$\dot{x}(t) = A(\mu t) * x(\mu t), \qquad (3.3)$$

в котором $|\,\mu\,| \leqslant 1$ и $A^{ij} \in \mathcal{Q}$, $i, j \in N$.

**Утверждение 3.4.** *Пусть функции $x^1(t), \ldots, x^m(t)$ являются решениями уравнения (3.3). Они линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы $x^1(0), \ldots, x^m(0)$.*

Необходимость. Предположим противное, то есть существуют константы $c_1, \ldots, c_m$, одновременно не равные нулю и такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x^j(0) = 0$. Очевидно, линейная комбинация $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j x^j(t)$ является решением уравнения (3.3), причем $x(0) = 0$, следовательно, в силу теоремы 3.2 справедливо $x(t) \equiv 0$. Противоречие. Обратное утверждение тривиально. $\square$

*Фундаментальной системой решений* уравнения (3.3) назовем линейно независимую систему функций $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, состоящую ровно из $n$ его решений.

**Утверждение 3.5.** *Фундаментальная система решений однородного уравнения* (3.3) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $n$ линейно независимых векторов $x_0^1, \ldots, x_0^n$ и для каждого $j \in N$ рассмотрим задачу, состоящую из уравнения (3.3) и начального условия $x(0) = x_0^j$. Пусть $x^j(t)$ — решения этих задач, причем $x^j(0) = x_0^j$, следовательно, векторы $x^1(0), \ldots, x^n(0)$ линейно независимы. Остается воспользоваться утверждением 3.4.

**Утверждение 3.6.** *Пусть* $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ *— фундаментальная система решений уравнения* (3.3), *а* $x(t)$ *— произвольное решение этого уравнения. Тогда существуют постоянные* $c_1, \ldots, c_n$ *такие, что* $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x^j(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы $x^1(0), \ldots, x^n(0)$ образуют базис пространства $\mathbb{C}^n$. Разложим вектор $x(0)$ по этому базису: $x(0) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x^j(0)$. Таким образом, две функции $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x^j(t)$ и $x(t)$ являются решением уравнения (3.3) с общим начальным условием, следовательно, они равны. $\square$

Зафиксируем фундаментальную систему решений $x^1(t), ..., x^n(t)$ уравнения (3.3) и составим матрицу $X(t) = \big(x^{ij}(t)\big)$ порядка $n$, где через $x^{ij}(t)$ обозначена $i$-ая компонента вектора $x^j(t)$. Будем называть $X(t)$ *фундаментальной матрицей* уравнения (3.3). Далее, введем в рассмотрение функцию

$$W^{\mu}(t) \doteq \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)}\, x^{1,\pi(1)}(t) * \ldots * x^{n,\pi(n)}(t),$$

где суммирование ведется по всем подстановкам $\pi$ из симметрической группы $S_n$, а $\operatorname{inv}(\pi)$ — это число инверсий в $\pi$. Очевидно, $W^\mu(t)$ — определитель фундаментальной матрицы $X(t)$ в алгебре $\mathcal{Q}_\mu$. Кроме того, справедливо $W^\mu(0) = W^1(0)$, где $W^1(t)$ — обычный определитель матрицы $X(t)$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $x^1(t), \dots, x^n(t)$ — решения уравнения* (3.3). *Они образуют фундаментальную систему решений этого уравнения тогда и только тогда, когда определитель $W^\mu(t)$ обратим в алгебре $\mathcal{Q}_\mu$.*

Действительно, в силу утверждения 3.4 функции $x^1(t), \dots, x^n(t)$ образуют фундаментальную систему решений тогда и только тогда, когда линейно независимы векторы $x^1(0), \dots, x^n(0)$, что равносильно условию $W^1(0) \neq 0$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию $W^\mu(0) \neq 0$. Доказательство завершает ссылка на теорему 2.1. $\square$

Вернемся к неоднородной задаче (i.2), (i.3) при $\mu \neq 0$. Очевидно, если функция $x^0(t)$ является решением (i.2), то всякое другое решение $x(t)$ этого уравнения представимо в виде $x(t) = x^0(t) + X(t)\, C$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения (3.3), а $C$ — вектор констант.

Будем искать решение $x^0(t)$ в виде $x^0(t) = X(t) * C(t)$ с неизвестным вектором $C(t)$. Подставляя $x^0(t)$ в (i.2), получим

$$\dot X(t) * C(\mu t) + X(\mu t) * \dot C(t) - A(\mu t) * X(\mu t) * C(\mu t) = b(\mu t).$$

Поскольку $\dot X(t) = A(\mu t) * X(\mu t)$, то $X(\mu t) * \dot C(t) = b(\mu t)$. Согласно лемме 3.1 определитель матрицы $X(\mu t)$ в алгебре $\mathcal{Q}_\mu$, равный $W^\mu(\mu t)$, обратим в $\mathcal{Q}_\mu$, следовательно, существует матрица $X^{-1}(\mu t)$ и

$$C(t) = \int_0^t X^{-1}(\mu\tau) * b(\mu\tau)\, d\tau = \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\, ds.$$

Таким образом, поскольку $X(t)\, C = X(t) * C$, то

$$x(t) = X(t) * \Big\{ C + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\, ds \Big\},$$

и мы окончательно получаем решение задачи (i.2), (i.3) в виде

$$x(t) = X(t) * \Big\{ X^{-1}(0)\, x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\, ds \Big\}. \tag{i.4}$$

**Замечание 3.1.** К уравнению (i.1) заменой $t = \tau + \frac{\gamma}{1-\mu}$ сводится уравнение $\dot x(t) = A\, x(\mu t + \gamma) + b(t)$, где $\gamma, \mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \leqslant 1$, $\mu \neq 1$, а $b$ — аналитическая в точке $\frac{\gamma}{1-\mu}$ вектор-функция.

# ГЛАВА II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

В работе [83] при $t, \mu, a, w \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{N}$ изучается скалярное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - a\,x(\mu t^q) = b(t), \tag{ii.1}$$

где $b$ — формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Решение $x$ также ищется в пространстве формальных степенных рядов. Уравнение (ii.1) имеет отклонение аргумента $F(t) = \mu t^q$, и мы называем его *степенным отклонением.* Для представления решений уравнения (ii.1) применяются специальные алгебраические построения: для $p \doteq q-1$ вводится понятие ассоциативного $(\mu, p)$-произведения двух формальных степенных рядов $f$ и $g$, которое обозначается через $f * g$. Доказано, что ряд

$$x(t) \doteq C(t,0)\,w + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big(C(t,\tau) * \int_0^s b(\xi)\,d\xi\Big)\Big|_{s=\tau} d\tau \tag{ii.2}$$

является единственным решением задачи, состоящей из уравнения (ii.1) и начального условия $x(0) = w$. Через $C(t,\tau)$ обозначен формальный степенной ряд, являющийся аналогом функции Коши обыкновенного дифференциального уравнения. Другими словами, если $X(\cdot)$ — нетривиальное решение однородного уравнения (ii.1), а $X^{-1}(\cdot)$ — обратный в смысле $(\mu, p)$-умножения ряд, то $C(t,\tau) \doteq X(t) * X^{-1}(\tau)$. Для $C(t,\tau)$ имеет место явная формула

$$C(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m=n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}}\, \frac{a^n}{G_k(q)\,G_m(q)}\, \mu^{\ell_n(q)}\, t^{d_k(q)}\, \tau^{d_n(q)-d_k(q)} \Big], \tag{ii.3}$$

где $d_n(q)$, $\ell_n(q)$, $G_n(q)$ — некоторые целочисленные последовательности.

## § 4 . Алгебра формальных кратных степенных рядов с косым умножением

Для мультииндекса $\alpha \doteq (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ с целочисленными неотрицательными составляющими $\alpha_i$ и вектора $t \doteq (t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{C}^r$ используем обозначения $|\,\alpha\,| \doteq \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ и $t^\alpha \doteq t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r}$. Через $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_r]$ обозначим линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, состоящее из формальных кратных степенных рядов $\sum\limits_{\alpha} f_\alpha t^\alpha$, трактуемых следующим образом:

$$\sum_{\alpha} f_\alpha t^\alpha \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[ \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha t^\alpha \Big] = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[ \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r=k} f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r}\, t_1^{\alpha_1} \cdots t_r^{\alpha_r} \Big]. \tag{4.1}$$

Внутреннее суммирование конечно и осуществляется по всем мультииндексам $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ таким, что $|\,\alpha\,| = k$. Числа $f_\alpha = f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_r} \in \mathbb{C}$ занумерованы $r$ индексами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, каждый из которых независимо от остальных пробегает множество целых неотрицательных чисел. Таким образом, за счет группировки слагаемых в (4.1) в конечные группы по принципу одинаковой суммарной степени у слагаемых мы превращаем кратный ряд $\sum\limits_\alpha f_\alpha t^\alpha$ в простой ряд, и в дальнейшем выражение $\sum\limits_\alpha f_\alpha t^\alpha$ используется лишь для обозначения правой части формулы (4.1). Более того, можно отождествлять это выражение с последовательностью $\Big\{ \sum\limits_{|\alpha|=k} f_\alpha t^\alpha \Big\}_{k=0}^{\infty}$.

Зафиксируем $\mu \in \mathbb{C}$, целое $p \geqslant 0$ и определим в $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_r]$ косое умножение $*$, исходя из следующего правила умножения одночленов:

$$t^\alpha * t^\beta \doteq \mu^{|\alpha|\,|\beta|}\, t^{\,\alpha+\beta\,(1+p\,|\alpha|)}, \tag{4.2}$$

где мультииндекс $\alpha + \beta\,(1 + p\,|\alpha|)$ состоит из компонент $\alpha_i + \beta_i\,(1 + p\,|\alpha|)$. Называя операцию $*$ $(\mu, p)$-умножением, распространим ее на ряды:

$$\sum_\alpha f_\alpha t^\alpha * \sum_\beta g_\beta t^\beta \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{|\alpha|+|\beta|+p\,|\alpha|\,|\beta|=n} f_\alpha\, g_\beta\, \mu^{|\alpha|\,|\beta|}\, t^{\,\alpha+\beta\,(1+p\,|\alpha|)} \Big], \tag{4.3}$$

где внутреннее суммирование конечно и ведется по всем таким упорядоченным парам $(\alpha, \beta)$ мультииндексов, что $|\,\alpha\,| + |\,\beta\,| + p\,|\,\alpha\,|\,|\,\beta\,| = n$. Обозначив ряды в (4.3) через $f, g$ и $h$ соответственно, пишем

$$f(t_1, \ldots, t_r) * g(t_1, \ldots, t_r) = h(t_1, \ldots, t_r), \quad f(t) * g(t) = h(t) \quad \text{или} \quad f * g = h.$$

В терминах последовательностей $(\mu, p)$-умножение означает, что упорядоченной паре последовательностей $\Big\{ \sum\limits_{|\alpha|=k} f_\alpha t^\alpha \Big\}_{k=0}^{\infty}$ и $\Big\{ \sum\limits_{|\beta|=m} g_\beta t^\beta \Big\}_{m=0}^{\infty}$ ставится в соответствие третья последовательность

$$\Big\{ \sum_{|\alpha|+|\beta|+p\,|\alpha|\,|\beta|=n} f_\alpha\, g_\beta\, \mu^{|\alpha|\,|\beta|}\, t^{\,\alpha+\beta\,(1+p\,|\alpha|)} \Big\}_{n=0}^{\infty}.$$

Отметим некоторые частные случаи определений (4.2) и (4.3). При $r = 1$ имеем $t^\alpha * t^\beta = \mu^{\alpha\beta}\, t^{\,\alpha+\beta+p\alpha\beta}$. Если к тому же $p = 0$, то получим $\mu$-умножение из главы 1: $t^\alpha * t^\beta = \mu^{\alpha\beta}\, t^{\alpha+\beta}$. Если еще и $\mu = 1$, то имеем обычное умножение рядов. Умножение $*$ в пространстве $\mathcal{R}[t]$ (то есть при $r = 1$) может быть записано в более привычном виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k * \sum_{m=0}^{\infty} g_m t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} f_k\, g_m\, \mu^{km} \Big]\, t^n, \tag{4.4}$$

а при $p \neq 0$ справедлива запись

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k * \sum_{m=0}^{\infty} g_m t^m = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{(1+pk)\,(1+pm)\,=\,1+pn} f_k\, g_m\, \mu^{km} \Big]\, t^n .$$

Внутреннее суммирование в формулах ведется по всем упорядоченным парам $(k, m)$ целых неотрицательных чисел таких, что $k + m + pkm = n$ или $(1 + pk)\,(1 + pm) = 1 + pn$ соответственно. Отметим, что для любого $n$ множество таких пар не пусто, например, пары $(0, n)$ и $(n, 0)$ всегда удовлетворяют этим условиям. В частности, при $n = 0$ внутренняя сумма состоит всего из одного слагаемого, соответствующего паре $(0, 0)$.

При $r = 2$ в пространстве $\mathcal{R}[t, \tau]$ $(\mu, p)$-произведение двух рядов, каждый из которых зависит только от одной переменной, имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k * \sum_{m=0}^{\infty} g_m \tau^m = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} f_k\, g_m\, \mu^{km}\, t^k\, \tau^{m\,(1+pk)} \Big]. \tag{4.5}$$

Любопытно выглядит формула (4.3) при $\mu = 0$:

$$f(t_1, \ldots, t_r) * g(t_1, \ldots, t_r) =$$

$$= f(0, \ldots, 0)\, g(t_1, \ldots, t_r) \,+\, f(t_1, \ldots, t_r)\, g(0, \ldots, 0) - f(0, \ldots, 0)\, g(0, \ldots, 0).$$

Числа $f(0, \ldots, 0)$ и $g(0, \ldots, 0)$ — это свободные члены рядов $f$ и $g$ соответственно. Если $f(t_1, \ldots, t_r) \equiv c = \mathrm{const}$ (то есть все коэффициенты ряда $f$, кроме, может быть, свободного, равны 0), то

$$f(t_1, \ldots, t_r) * g(t_1, \ldots, t_r) = f(t_1, \ldots, t_r)\, g(t_1, \ldots, t_r) = c\, g(t_1, \ldots, t_r)$$

для всех $g \in \mathcal{R}[t_1, \ldots, t_r]$, $\mu \in \mathbb{C}$ и целых $p \geqslant 0$. В частности, при $c = 1$ имеем ряд $f(t_1, \ldots, t_r) \equiv 1$, играющий роль левой единицы относительно $(\mu, p)$-умножения (он же является и правой единицей).

**Предложение 4.1.** *Пространство $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_r]$, наделенное операцией $(\mu, p)$-умножения, образует над полем $\mathbb{C}$ ассоциативную алгебру (которую будем обозначать $\mathcal{R}_{\mu,p}[t_1, \ldots, t_r]$) с единицей .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.3) $(\mu, p)$-произведение двух рядов не выводит из $\mathcal{R}[t_1, \ldots, t_r]$. Роль левой и правой единицы выполняет ряд, тождественно равный 1. Легко проверить, что $(\mu, p)$-произведения одночленов $\big(t^\alpha * t^\beta\big) * t^\gamma$ и $t^\alpha * \big(t^\beta * t^\gamma\big)$ равны одному и тому же выражению $\mu^\ell\, t^\delta$, где

$$\ell \doteq |\alpha|\,|\beta| + |\beta|\,|\gamma| + |\gamma|\,|\alpha| + p\,|\alpha|\,|\beta|\,|\gamma|,$$

$$\delta \doteq \alpha + \beta\,(1 + p\,|\alpha|) + \gamma\,(1 + p\,|\alpha|)\,(1 + p\,|\beta|),$$

что доказывает ассоциативность $(\mu, p)$-умножения. Проверка остальных аксиом алгебры (кроме коммутативности) тривиальна.

**Замечание 4.1.** Алгебра $\mathcal{R}_{\mu,p}[t_1,\ldots,t_r]$ коммутативна при $r=1$, а при $r>1$ коммутативность имеет место только для $p=0$.

**Замечание 4.2.** Наряду с формулами (4.4) и (4.5) отметим еще одно соотношение. В силу ассоциативности $(\mu,p)$-умножения в пространстве $\mathcal{R}[t,\tau,s]$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k * \sum_{m=0}^{\infty} g_m \tau^m * \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{(k,m,j)\in D_n} f_k\, g_m\, h_j\, \mu^{km+mj+jk+pkmj}\, t^k\, \tau^{m\,(1+pk)}\, s^{j\,(1+pk)\,(1+pm)} \Big], \qquad (4.6)$$

где $D_n$ — это (конечное) множество упорядоченных троек $(k,m,j)$ целых неотрицательных чисел таких, что $k+m\,(1+pk)+j\,(1+pk)\,(1+pm)=n$, а при $p\neq 0$ справедлива запись $(1+pk)\,(1+pm)\,(1+pj)=1+pn$.

**Теорема 4.1.** *Формальный степенной ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ *обратим в алгебре* $\mathcal{R}_{\mu,p}[t]$ *тогда и только тогда, когда* $f_0\neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $f=\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k t^k$ и рассмотрим произвольный ряд $g=\sum\limits_{m=0}^{\infty} g_m t^m$ с неопределенными коэффициентами $g_m$. Попытаемся найти эти коэффициенты, исходя из условия, что $(\mu,p)$-произведение рядов $f$ и $g$ есть ряд, тождественно равный 1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} f_k\, g_m\, \mu^{km} \Big]\, t^n \equiv 1.$$

Это тождество имеет место тогда и только тогда, когда разрешима бесконечная система уравнений

$$\begin{cases} f_0\, g_0 = 1, \\ f_0\, g_n + \sum\limits_{\substack{k+m+pkm=n \\ m<n}} f_k\, g_m\, \mu^{km} = 0, \quad n=1,2,\ldots, \end{cases} \qquad (4.7)$$

следовательно, ряд $f$ обратим тогда и только тогда, когда $f_0\neq 0$. При этом коэффициенты $g_n$ обратного ряда $g$ последовательно определяются из соотношений (4.7).

## § 5 . Представление решений линейных дифференциальных уравнений со степенным отклонением аргумента в терминах алгебры формальных кратных степенных рядов с косым умножением

Зафиксируем комплексные числа $\mu, a, w$, целое неотрицательное число $p$ и пусть $q \doteq p+1$. Определим, далее, целочисленные последовательности $\{\, d_n(q)\}$, $\{\, \ell_n(q)\}$ и $\{\, G_n(q)\}$, в которых

$$d_0(q) \doteq 0, \quad \ell_0(q) \doteq 0, \quad G_0(q) \doteq 1,$$

$$d_n(q) \doteq \sum_{j=0}^{n-1} q^j, \quad \ell_n(q) \doteq \sum_{i=0}^{n-1} d_i(q), \quad G_n(q) \doteq \prod_{i=1}^{n} d_i(q), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $d_n(1) = n$, $\ell_n(1) = \binom{n}{2}$ и $G_n(1) = n!$, и при всех $n \in \mathbb{N}$

$$d_n(q) = 1 + q\, d_{n-1}(q), \quad \ell_n(q) = \ell_{n-1}(q) + d_{n-1}(q), \quad G_n(q) = G_{n-1}(q)\, d_n(q). \tag{5.1}$$

**Предложение 5.1.** *Формальный степенной ряд*

$$x(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{G_k(q)}\, \mu^{\ell_k(q)}\, t^{d_k(q)} \tag{5.2}$$

*удовлетворяет уравнению* $\dot{x}(t) = a\, x(\mu t^q)$ .

Действительно, в силу (5.1) имеет место цепочка равенств

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(q)\, \frac{a^k}{G_k(q)}\, \mu^{\ell_k(q)}\, t^{d_k(q)-1} =$$

$$= a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{G_{k-1}(q)}\, \mu^{\ell_{k-1}(q)}\, \big(\mu t^q\big)^{d_{k-1}(q)} = a\, x(\mu t^q)\, .$$

**Пример 5.1.** При $q = 2$ и $n \geqslant 1$ имеем $d_n(2) = 2^n{-}1$, $\ell_n(2) = 2^n{-}1{-}n$, $G_n(2) = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2^n{-}1)$, следовательно, ряд

$$x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2^k - 1)}\, \mu^{2^k-1-k}\, t^{2^k-1} =$$

$$= 1 + a\, t + \frac{a^2}{1 \cdot 3}\, \mu\, t^3 + \frac{a^3}{1 \cdot 3 \cdot 7}\, \mu^4\, t^7 + \dots$$

является решением уравнения $\dot{x}(t) = a\, x(\mu t^2)$. Утверждение легко проверить и непосредственно. Отметим еще, что ряд сходится при $|\, \mu t\,| \leqslant 1$ .

Заметим,что в предложении 5.1 равенство $\dot{x}(t) = a\,x(\mu t^q)$ понимается как равенство образов двух операторов $\mathcal{D}, \mathcal{F} : \mathcal{R}[t] \to \mathcal{R}[t]$, действующих в пространстве $\mathcal{R}[t]$ по правилу $(\mathcal{D}x)(t) = \dot{x}(t)$ и $(\mathcal{F}x)(t) = a\,x(\mu t^q)$. Поэтому мы можем ничего не говорить о сходимости ряда (5.2), хотя легко проверить, что этот ряд сходится в окрестности нуля.

**Замечание 5.1.** При $q = 1$ ряд (5.2) имеет вид $x(t) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\, \mu^{\binom{k}{2}}\, t^k$, и он удовлетворяет уравнению $\dot{x}(t) = a\,x(\mu t)$. Это утверждение нам хорошо известно: в соответствии с примером 2.2 из главы 1 имеет место равенство

$$\tfrac{d}{dt} \exp_\mu(at) = a\, \exp_\mu(\mu a t).$$

**Следствие 5.1.** *Формальный степенной ряд* $x(t) \doteq w \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{G_k(q)}\, \mu^{\ell_k(q)} t^{d_k(q)}$ *является единственным решением задач*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a\,x(\mu t^q) \\ x(0) = w \end{cases} \quad \text{и} \quad x(t) - a\int_0^t x(\mu s^q)\, ds = w \tag{5.3}$$

(*единственность решения доказана ниже в теореме* 5.3).

**Утверждение 5.1.** *При целых неотрицательных* $k$ *и* $m$ *справедливо*

$$d_k(q) + d_m(q) + p\, d_k(q)\, d_m(q) = d_{k+m}(q),$$
$$\ell_k(q) + \ell_m(q) + d_k(q)\, d_m(q) = \ell_{k+m}(q). \tag{5.4}$$

Доказательство. При $q > 1$ справедливы легко проверяемые равенства $d_n(q) = \frac{q^n-1}{q-1}$ и $\ell_n(q) = \frac{q^n-1-pn}{(q-1)^2}$, следовательно,

$$\begin{aligned} &d_k(q) + d_m(q) + p\, d_k(q)\, d_m(q) = \\ &\qquad = \frac{q^k-1}{q-1} + \frac{q^m-1}{q-1} + p\,\frac{q^k-1}{q-1}\,\frac{q^m-1}{q-1} = \frac{q^{k+m}-1}{q-1} = d_{k+m}(q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ell_k(q) + \ell_m(q) + d_k(q)\, d_m(q) = \\ &\qquad = \frac{q^k-1-pk}{(q-1)^2} + \frac{q^m-1-pm}{(q-1)^2} + \frac{q^k-1}{q-1}\,\frac{q^m-1}{q-1} = \\ &\qquad\qquad = \frac{q^{k+m}-1-p\,(k+m)}{(q-1)^2} = \ell_{k+m}(q), \end{aligned}$$

а при $q = 1$ (то есть при $p = 0$) равенства (5.4) очевидны:

$$d_k(1) + d_m(1) + p\, d_k(1)\, d_m(1) = k + m = d_{k+m}(1),$$
$$\ell_k(1) + \ell_m(1) + d_k(1)\, d_m(1) = \binom{k}{2} + \binom{m}{2} + km = \binom{k+m}{2} = \ell_{k+m}(1).$$

**Теорема 5.1.** *Формальные степенные ряды*

$$x(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{G_k(q)}\, \mu^{\ell_k(q)}\, t^{d_k(q)} \quad \text{и} \quad y(t) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m}{G_m(q)}\, q^{\binom{m}{2}}\, \mu^{\ell_m(q)}\, t^{d_m(q)} \qquad (5.5)$$

*взаимно обратны в алгебре* $\mathcal{R}_{\mu,p}[t]$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $(\mu, p)$-произведение $x(t) * y(t)$ через $z(t)$, тогда в соответствии с определением (4.4) имеет место равенство

$$z(t) = \sum_{N=0}^{\infty} \Big[ \sum_{(k,m)\in D_N} \frac{a^k}{G_k(q)}\, \mu^{\ell_k(q)}\, \frac{(-a)^m}{G_m(q)}\, q^{\binom{m}{2}}\, \mu^{\ell_m(q)}\, \mu^{d_k(q) d_m(q)} \Big]\, t^N,$$

где через $D_N$ обозначено (конечное) множество упорядоченных пар $(k, m)$ целых неотрицательных чисел таких, что $d_k(q) + d_m(q) + p\, d_k(q)\, d_m(q) = N$ . В силу утверждения 5.1 это означает, что $d_{k+m}(q) = N$ , поэтому для всех $N$ справедливо одно из двух равенств: если индекс $N$ представим в виде $N = d_n(q)$ для некоторого $n = 0, 1, \ldots$ , то $D_N = \{(k, m) : \, k + m = n\}$ , а в противном случае $D_N = \varnothing$ . Следовательно, в силу (5.4) имеем

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \sum_{k+m=n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}}\, \frac{G_n(q)}{G_k(q) G_m(q)} \Big\}\, \frac{a^n}{G_n(q)}\, \mu^{\ell_n(q)}\, t^{d_n(q)} \,.$$

Обозначим выражение, стоящее в фигурных скобках, через $\sigma_n(q)$ и рассмотрим его в случае, когда $q$ есть степень простого числа:

$$\sigma_n(q) = \sum_{k+m=n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}}\, \frac{\prod_{i=1}^{n} (q^i - 1)}{\prod_{i=1}^{k} (q^i - 1)\, \prod_{i=1}^{m} (q^i - 1)} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}} \binom{n}{m}_q .$$

Числа $\binom{n}{m}_q$ называются коэффициентами Гаусса (см., например,[1], с. 120) и определяют количество подпространств размерности $m$ в $n$-мерном векторном пространстве над конечным полем $GF(q)$, содержащим $q$ элементов ( $q$ является степенью простого числа). В этом случае справедливо равенство $\sigma_n(q) = \delta_{n0}$ , получающееся из соотношения

$$(\xi - 1)\,(\xi - q) \ldots (\xi - q^{n-1}) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m\, q^{\binom{m}{2}} \binom{n}{m}_q\, \xi^{n-m} \qquad (5.6)$$

при $\xi = 1$ (при $q = 1$ равенство (5.6) превращается в бином Ньютона).

[1] **Сачков В.Н.** Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982. 384 с.

Так как многочлены (как многочлены переменной $q$) в равенстве (5.6) равны для всех $q$, являющихся степенью простого числа, то они тождественно равны. Следовательно, $\sigma_n(q) = \delta_{n0}$ для всех $q$, поэтому

$$z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n0} \frac{a^n}{G_n(q)} \mu^{\ell_n(q)} t^{d_n(q)} \equiv 1.$$

**Следствие 5.2.** *При* $q = 1$ (*то есть при* $p = 0$) *в алгебре* $\mathcal{R}_{\mu,0}[t]$ *взаимно обратными являются ряды* (*см.* (5.5) *и пример* 2.1)

$$x(t) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \mu^{\binom{k}{2}} t^k = \exp_\mu at \quad \text{\textit{и}} \quad y(t) \doteq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m}{m!} \mu^{\binom{m}{2}} t^m = \exp_\mu(-at).$$

Запишем ряд (5.2), являющийся решением уравнения $\dot{x}(t) = a\,x(\mu t^q)$, в виде $X(t) \doteq \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k t^k$ без явного указания значений $x_k$. Имеет место равенство формальных степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} k x_k t^{k-1} = a \sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k t^{qk} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k x_k t^k = a \sum_{k=0}^{\infty} x_k \mu^k t^{1+qk}. \tag{5.7}$$

Введем, далее, в рассмотрение ряд $Y(t) \doteq \sum\limits_{m=0}^{\infty} y_m t^m$, обратный к ряду $X(t)$ в алгебре $\mathcal{R}_{\mu,p}[t]$, то есть $X(t) * Y(t) \equiv 1$. Другими словами, $X(t)$ и $Y(t)$ — это ряды (5.5). Согласно (4.4) справедливы равенства

$$\sum_{k+m+pkm=n}^{\infty} x_k y_m \mu^{km} = \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{5.8}$$

**Определение 5.1.** *Рядом Коши* уравнения $\dot{x}(t) = a\,x(\mu t^q)$ называется формальный степенной ряд из алгебры $\mathcal{R}_{\mu,p}[t,\tau]$

$$C(t,\tau) \doteq X(t) * Y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} x_k y_m \mu^{km} t^k \tau^{m(1+pk)} \Big], \tag{5.9}$$

где $X(\cdot)$ — нетривиальное решение этого уравнения, а $Y(\cdot) \doteq X^{-1}(\cdot)$ — ряд, обратный к $X(\cdot)$ относительно $(\mu, p)$-умножения. Ряд $X(\cdot)$ называется *фундаментальным.*

В соответствии с определениями (5.9), (5.5) и (4.5) справедливо равенство

$$C(t,\tau) = X(t) * Y(\tau) =$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty} \Big[ \sum_{(k,m)\in D_N} (-1)^m q^{\binom{m}{2}} \frac{a^{k+m}}{G_k(q)\,G_m(q)} \mu^{\ell_{k+m}(q)} t^{d_k(q)} \tau^{d_m(q)\,(1+p\,d_k(q))} \Big],$$

где через $D_N$ обозначено множество

$$D_N \doteq \big\{(k,m)\colon\ d_k(q)+d_m(q)+p\,d_k(q)\,d_m(q)=N\big\} = \\ = \big\{(k,m)\colon\ d_{k+m}(q)=N\big\}.$$

Для величин $\ell_{k+m}(q)$ и $d_{k+m}(q)$ применили равенства (5.4). Если индекс $N$ не представим в виде $N=d_n(q)$ для некоторого $n=0,1,\dots$, то $D_N=\varnothing$, следовательно, для Ряда Коши имеет место явное представление

$$C(t,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k+m=n}(-1)^m\,q^{\binom{m}{2}}\,\frac{a^n}{G_k(q)\,G_m(q)}\,\mu^{\ell_n(q)}\,t^{d_k(q)}\,\tau^{d_n(q)-d_k(q)}\Big]. \quad \text{(ii.3)}$$

**Пример 5.2.** При $q=2$ ряд Коши имеет вид

$$C(t,\tau)=1+a\,(t-\tau)+\frac{a^2\mu}{3}\,(t^3-3t\tau^2+2\tau^3)+ \\ +\frac{a^3\mu^4}{21}\,(t^7-7t^3\tau^4+14t\tau^6-8\tau^7)+\dots.$$

Следующие свойства ряда (5.9) очевидны:
1) $C(s,s)\equiv 1$;
2) в алгебре $\mathcal{R}_{\mu,p}[t,\tau,s]$ справедливо равенство $C(t,s)*C(s,\tau)=C(t,\tau)$;
3) в алгебре $\mathcal{R}_{\mu,p}[t,\tau]$ ряды $C(t,\tau)$ и $C(\tau,t)$ — взаимно обратны.

**Теорема 5.2.** *В пространстве $\mathcal{R}[t,\tau]$ имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,C(t,\tau)=a\,C(\mu t^q,\mu\tau^q).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (5.9) и (5.7) в алгебре $\mathcal{R}_{\mu,p}[t,\tau]$ справедлива цепочка равенств

$$t\,\frac{\partial}{\partial t}\,C(t,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{k+m+pkm=n}k\,x_k\,y_m\,\mu^{km}\,t^k\,\tau^{m\,(1+pk)}\Big]= \\ =\sum_{k=0}^{\infty}kx_kt^k*\sum_{m=0}^{\infty}y_m\tau^m=a\sum_{k=0}^{\infty}x_k\,\mu^k t^{1+qk}*\sum_{m=0}^{\infty}y_m\tau^m= \\ =a\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{(k,m)\in D_n}x_k\,\mu^k\,y_m\,\mu^{(1+qk)\,m}\,t^{1+qk}\,\tau^{m\,(1+p\,(1+qk))}\Big],$$

где $D_n$ — это конечное множество упорядоченных пар $(k,m)$ целых неотрицательных чисел таких, что $1+qk+m\,(1+p\,(1+qk))=n$ или, равносильно,

$q\,(k+m+pkm) = n-1$. Очевидно, $D_0 = \varnothing$, поэтому суммирование можно вести, начиная с номера $n=1$, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\,C(t,\tau) = a\,\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\sum_{q(k+m+pkm)=n-1} x_k\,y_m\,\mu^{km}\,(\mu t^q)^k\,(\mu\tau^q)^{m\,(1+pk)}\Big].$$

Воспользовались равенством $q=p+1$ и по-иному сгруппировали переменные $\mu$, $t$ и $\tau$. Если $n\not\equiv 1 \bmod q$, то во внутренней сумме слагаемых нет, следовательно, остаются только те индексы $n$, для которых выполнено равенство $n\equiv 1 \bmod q$, поэтому, сделав замену $n = 1+Nq$, $N=0,1,\ldots$, окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\,C(t,\tau) = a\,\sum_{N=0}^{\infty}\Big[\sum_{k+m+pkm=N} x_k\,y_m\,\mu^{km}\,(\mu t^q)^k\,(\mu\tau^q)^{m\,(1+pk)}\Big] = a\,C(\mu t^q,\mu\tau^q).$$

**Теорема 5.3.** *При любом $b\in\mathcal{R}[t]$ формальный степенной ряд*

$$x(t) \doteq C(t,0)\,w + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big(C(t,\tau) * \int_0^s b(\xi)\,d\xi\Big)\Big|_{s=\tau} d\tau \qquad \text{(ii.2)}$$

*является единственным решением задачи $\dot{x}(t) - a\,x(\mu t^q) = b(t)$, $x(0)=w$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b(\xi) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} b_j\xi^j$ и $f(s) \doteq \int_0^s b(\xi)\,d\xi$, то имеет место равенство $f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j s^j$, в котором $f_0 = 0$ и $f_j = \frac{1}{j}\,b_{j-1}$ при $j\in\mathbb{N}$. В соответствии с (4.6) в алгебре $\mathcal{R}[t,\tau,s]$ справедлива цепочка

$$C(t,\tau) * f(s) = X(t) * Y(\tau) * f(s) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{(k,m,j)\in D_n\\ j\neq 0}} x_k\,y_m\,f_j\,\mu^{ki+mj}\,t^k\,\tau^{m\,(1+pk)}\,s^{j\,(1+pk)\,(1+pm)}\Big], \qquad (5.10)$$

где использованы обозначения $i \doteq m+j+pmj$ ($i$ зависит от $m$ и от $j$) и

$$D_n \doteq \big\{(k,m,j):\ k + m\,(1+pk) + j\,(1+pk)\,(1+pm) = n\big\} =$$
$$= \big\{(k,m,j):\ k+i+pki = n\big\}. \qquad (5.11)$$

Дополнительное условие $j\neq 0$ написано лишь для удобства. Над обеими частями равенства (5.10) выполним следующие действия: продифференцируем по $s$, подставим $\tau$ вместо переменной $s$ и проинтегрируем по $\tau$, тогда

$$z(t) \doteq \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big(C(t,\tau) * f(s)\Big)\Big|_{s=\tau} d\tau =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[\sum_{\substack{(k,m,j)\in D_n\\ j\neq 0}} \tfrac{j\,(1+pm)}{i}\,x_k\,y_m\,f_j\,\mu^{ki+mj}\,t^{k+i\,(1+pk)}\Big]. \qquad (5.12)$$

Заметим, что поскольку $j \neq 0$, то $i \neq 0$, поэтому дробь корректна. Для производной $\dot z(t)$ справедливо равенство $\dot z(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$, где

$$\sigma_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{\substack{(k,m,j)\in D_n \\ j\neq 0}} \tfrac{k\,j\,(1+pm)}{i}\, x_k\, y_m\, f_j\, \mu^{ki+mj}\, t^{k+i\,(1+pk)-1} \Big],$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{(k,m,j)\in D_n} j\,(1+pk)\,(1+pm)\, x_k\, y_m\, f_j\, \mu^{ki+mj}\, t^{k+i\,(1+pk)-1} \Big].$$

Во втором равенстве мы сняли ограничение $j \neq 0$.

В следующей цепочке используется равенство (5.8):

$$t\,\sigma_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} (1+pk)\,(1+pm)\, x_k\, y_m\, \mu^{km} \Big]\, t^n \, * \, \sum_{j=0}^{\infty} j\, f_j\, t^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{k+m+pkm=n} x_k\, y_m\, \mu^{km} \Big] (1+pn)\, t^n \, * \, \sum_{j=0}^{\infty} j\, f_j\, t^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n0}\, (1+pn)\, t^n \, * \, \sum_{j=0}^{\infty} j\, f_j\, t^j = \sum_{j=0}^{\infty} j\, f_j\, t^j,$$

следовательно, справедливо $\sigma_2(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j\, f_j\, t^{j-1} = \dot f(t) = b(t)$.

В аналогичной цепочке

$$t\,\sigma_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, x_k\, t^k \, * \, \sum_{i=1}^{\infty} \Big[ \sum_{\substack{m+j+pmj=i \\ j\neq 0}} \tfrac{j\,(1+pm)}{i}\, y_m\, f_j\, \mu^{mj} \Big]\, t^i =$$

$$= a \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, \mu^k\, t^{1+qk} \, * \, \sum_{i=1}^{\infty} \Big[ \sum_{\substack{m+j+pmj=i \\ j\neq 0}} \tfrac{j\,(1+pm)}{i}\, y_m\, f_j\, \mu^{mj} \Big]\, t^i =$$

$$= a \sum_{n=0}^{\infty} \Big[ \sum_{\substack{(k,m,j)\in S_n \\ j\neq 0}} x_k\, \mu^k\, \tfrac{j\,(1+pm)}{i}\, y_m\, f_j\, \mu^{mj}\, \mu^{(1+qk)\,i} \Big]\, t^n$$

использовано равенство (5.7). Обозначения $i \doteq m+j+pmj$ и

$$S_n \doteq \big\{ \, (k,m,j) : \, 1 + qk + i\,(1 + p\,(1+qk)) = n \, \big\}$$

позволяют написать, что $S_n = \big\{ \, (k,m,j) : \, q\,(k + i + pki) = n-1 \, \big\}$. Следовательно, поскольку $S_n = \varnothing$ для любого $n$ такого, что $n \not\equiv 1 \bmod q$, то, сделав замену $n = 1 + Nq$, $N = 0, 1, \ldots$, получим равенство $S_{1+Nq} = D_N$ (см. формулы (5.11)), поэтому

$$\sigma_1(t) = a \sum_{N=0}^{\infty} \Big[ \sum_{\substack{(k,m,j)\in D_N \\ j\neq 0}} \tfrac{j\,(1+pm)}{i}\, x_k\, y_m\, f_j\, \mu^{ki+mj}\, (\mu t^q)^{k+i+pki} \Big].$$

Таким образом, $\sigma_1(t) = a\, z(\mu t^q)$ (см. (5.12)), поэтому ряд $z(t)$ является решением начальной задачи $\dot z(t) = a\, z(\mu t^q) + b(t)$, $z(0) = 0$. Если ряд $x(t)$ — это какое-нибудь решение задачи $\dot x(t) = a\, x(\mu t^q) + b(t)$, $x(0) = w$, то ряд $u(t) \doteq x(t) - z(t)$ является, очевидно, решением задачи (5.3) и, следовательно, в соответствии со следствием 5.1 и определением 5.1 справедливо равенство $u(t) = X(t)\, w = C(t, 0)\, w$, поэтому

$$x(t) = u(t) + z(t) = C(t, 0)\, w + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big( C(t, \tau) * \int_0^s b(\xi)\, d\xi \Big)\Big|_{s=\tau} d\tau\,.$$

Единственность. Если $x^1, x^2 \in \mathcal{R}[t]$ — два решения исходной задачи, то ряд $x(t) \doteq x^1(t) - x^2(t)$ является решением задачи (5.3), в которой $w = 0$. Другими словами, его коэффициенты удовлетворяют тождеству (5.7), а свободный коэффициент $x_0 = 0$. Это означает, что имеет место рекурсия

$$(k{+}1)\, x_{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \not\equiv 0 \mod q, \\ a\, x_{k/q}\, \mu^{k/q} & \text{при} \quad k \equiv 0 \mod q, \end{cases} \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

с начальным условием $x_0 = 0$. Следовательно, все $x_k = 0$, поэтому $x^1 = x^2$. Теорема полностью доказана.

**Следствие 5.3.** *Для любого $f \in \mathcal{R}[t]$ формальный степенной ряд*

$$x(t) \doteq C(t, 0)\, f(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big( C(t, \tau) * f(s) \Big)\Big|_{s=\tau} d\tau$$

*является единственным решением уравнения* $x(t) - a \int_0^t x(\mu s^q) ds = f(t)$.

# ГЛАВА III. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТА

Пусть $\alpha, t \in K \doteq [a,b]$, $x, q_i, f \in \mathrm{C}(K;\mathbb{R})$, $F_i \in \mathrm{C}(K;K)$, $i=1,\ldots,r$, — непрерывные функции, причем $q_i$ имеют ограниченное изменение. Семейство уравнений с отклонениями $F_i: K \to K$

$$x(t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_{\alpha}^{t} x(F_i(\cdot))\, dq_i = f(t), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \tag{iii.1}$$

вложимо в семейство Ф-интегральных уравнений

$$x(t) - \int_{\alpha}^{t} (dQ * x) = f(t), \tag{iii.2}$$

где оператор $x(t) \to \displaystyle\int_{\alpha}^{t} (dQ * x)$ связан с умножением $*$, действующим в специальной алгебре, порожденной полугруппой Ф, порожденной, в свою очередь, алгебраическими эндоморфизмами $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$: $(\varphi_i x)(\cdot) = x(F_i(\cdot))$.

Семейство уравнений (iii.1) включает в себя начальную задачу для обобщенного скалярного уравнения пантографа

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, x\big(F_i(t)\big) = b(t). \tag{iii.3}$$

Специфика уравнений (iii.1) – (iii.3) такова, что все отклоняющие функции определены на одном и том же отрезке $K$ и действуют из него в себя. Данное обстоятельство позволяет отказаться от задания начальных функций и от каких-либо дополнительных ограничений на отклоняющие функции.

Косое Ф-умножение $*$ функциональных рядов (некоммутативное ассоциативное умножение) и Ф-интеграл Римана–Стилтьеса с функциональными рядами в качестве аргументов интегрирования опеределены в пространстве $\mathrm{C}(K^{\ell};\mathbb{R})[\Lambda]$. Его элементы — это формальные функционально-степенные ряды, компоненты которых суть формы степени $k$ от некоммутирующих переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ с коэффициентами из $\mathrm{C}(\mathrm{K}^{\ell};\mathbb{R})$. Ф-интегралы и косое умножение связаны формулой интегрирования по частям.

Приводится процедура построения фундаментального решения $X(\cdot)$ уравнения (iii.2) (то есть решения уравнения (iii.2), в котором $f = e$ — единица алгебры $\mathrm{C}(K^{\ell};\mathbb{R})[\Lambda]$ с Ф-умножением). Относительно косого умножения $*$ функция $X(\cdot)$ обратима и порождает произведение $C(t,\tau) = X(t) * X^{-1}(\tau)$. При определенных условиях на параметры уравнения (iii.2) функция $C(t,\tau)$ обладает всеми характерными свойствами функции Коши. Например,

$$C(t,s) * C(s,\tau) = C(t,\tau). \tag{iii.4}$$

Для специальных ядер $Q$ определено понятие сопряженного уравнения

$$y(\tau) + \int_{\alpha}^{\tau} (y * dQ) = g(\tau). \tag{iii.5}$$

Для таких ядер единственное решение уравнения (iii.2) (в случае выполнения условий $\alpha = F_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, r$) допускает одно из двух представлений

$$x(t) = f(t) - \int_{\alpha}^{t} \big(d_s C(t,s) * f(s)\big) =$$
$$= C(t,\alpha) * f(\alpha) + \int_{\alpha}^{t} \big(C(t,s) * df(s)\big), \tag{iii.6}$$

а единственное решение уравнения (iii.5) при любом $\alpha \in K$ имеет вид

$$y(\tau) = g(\tau) - \int_{\alpha}^{\tau} \big(g(s) * d_s C(s,\tau)\big) =$$
$$= g(\alpha) * C(\alpha,\tau) + \int_{\alpha}^{\tau} \big(dg(s) * C(s,\tau)\big). \tag{iii.7}$$

При малых $\lambda_i$ доказана сходимость рядов (iii.6), (iii.7).

Таким образом, в задаче с «искривленным» временем за счет введения специального «искривленного» умножения $*$ восстановлено тождество (iii.4), играющее центральную роль в теории динамических систем. Следует также отметить, что, несмотря на то, что скалярное уравнение (i.1) и уравнение (ii.1) — это частные случаи уравнений (iii.3) и (iii.1), исследование данных уравнений имеет самостоятельное значение. В первом случае наличие гомоморфизма $H_\mu$ позволяет в ряде случаев свести процедуру решения системы (i.2) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а во втором — имеется явное представление (ii.3) для функции Коши.

Результаты главы опубликованы в работах [84–87, 94, 95, 105, 106, 109].

## § 6 . Алгебра функциональных рядов с Ф-умножением

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и $\ell \in \mathbb{N}$. Через $\mathrm{C} \doteq \mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})$ обозначим алгебру (над полем $\mathbb{R}$) непрерывных функций $x : K^\ell \to \mathbb{R}$. Непрерывные функции $F_i : K \to K$ (называем их *базисными*) порождают в алгебре C эндоморфизмы $\varphi_i$ (которые также называем *базисными*):

$$\varphi_i : \ x(t_1, \dots, t_\ell) \to x(F_i(t_1), \dots, F_i(t_\ell)), \qquad i = 1, \dots, r.$$

Зафиксируем алфавит $L = \{\lambda_i\}_{i=1}^r$, состоящий из $r$ независимых символов $\lambda_i$, каждый из которых коммутирует со всеми элементами алгебры C (между собой символы $\lambda_i$, вообще говоря, не коммутируют), и пусть

$\Lambda$ — язык в алфавите $L$. Например, при $r = 2$ имеем $L = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $\Lambda = \{\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^2, \lambda_1\lambda_2, \lambda_2\lambda_1, \lambda_2^2, \dots\}$, где $\varepsilon$ — пустое слово.

Каждому $\lambda_i$ поставим в соответствие эндоморфизм $\varphi_i$, $i = 1, \dots, r$. Это соответствие индуцирует взаимно-однозначное соответствие между языком $\Lambda$ и полугруппой $\Phi$, состоящей из всевозможных суперпозиций базисных эндоморфизмов $\varphi_i$. Именно, слову $\lambda \in \Lambda$,

$$\lambda \doteq \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_k}, \qquad i_s \in \{1, \dots, r\}, \qquad s = 1, \dots, k,$$

ставится в соответствие эндоморфизм $\varphi^\lambda \doteq \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\dots\varphi_{i_k}$. При этом пустому слову $\varepsilon$ ставится в соответствие тождественный эндоморфизм $\varphi^\varepsilon = E$. Очевидно, $\varphi^{\lambda\mu}x = \varphi^\lambda(\varphi^\mu x)$ для любых $x \in \mathrm{C}$ и $\lambda, \mu \in \Lambda$ (выражение $\lambda\mu$ обозначает конкатенацию слов $\lambda$ и $\mu$).

Через $\mathrm{C}[\Lambda] \doteq \mathrm{C}(K^\ell; \mathbb{R})[\Lambda]$ обозначим линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, состоящее из выражений вида $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in \mathrm{C}$, трактуемых следующим образом:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \Big[ \sum_{\lambda\in\Lambda:\ |\lambda|=k} \lambda x_\lambda \Big] =$$

$$= \varepsilon x_\varepsilon(\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,r\}^k} \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}\, x_{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}(\cdot). \quad (6.1)$$

Другими словами, элементы пространства $\mathrm{C}[\Lambda]$ — это формальные функционально-степенные ряды (6.1), компоненты которых суть формы степени $k$ от некоммутирующих переменных $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ с коэффициентами из $\mathrm{C}$ (внутреннее суммирование в (6.1) ведется по всем словам $\lambda \in \Lambda$, длина $|\lambda|$ которых равна $k$, количество таких слов равно $r^k$). В связи с подобной интерпретацией пространства $\mathrm{C}[\Lambda]$ будем называть его пространством формальных функционально-степенных рядов, а выражения $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$ — формальными функционально-степенными рядами (или, короче, *функциональными рядами*).

Будем использовать обозначения: если $\lambda \doteq \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_k}$ — произвольное слово языка $\Lambda$, то через $F^\lambda(\cdot) \doteq F_{i_k}(F_{i_{k-1}}(\dots F_{i_1}(\cdot)\dots))$ обозначим суперпозицию базисных функций, а через $x^{[\lambda]}$ — образ элемента $x \in \mathrm{C}$ при действии эндоморфизма $\varphi^\lambda \doteq \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\dots\varphi_{i_k}$. Другими словами,

$$x^{[\lambda]}(t_1, \dots, t_\ell) \doteq x(F^\lambda(t_1), \dots, F^\lambda(t_\ell)).$$

$\Phi$-*произведением* рядов $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$ и $\sum\limits_{\mu\in\Lambda} \mu y_\mu$ из пространства $\mathrm{C}(K^\ell; \mathbb{R})[\Lambda]$ называется ряд из $\mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$, определенный правой частью формулы

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\lambda x_\lambda * \sum_{\mu\in\Lambda}\mu y_\mu = \sum_{\nu\in\Lambda}\nu\sum_{\lambda\mu=\nu}x_\lambda y_\mu^{[\lambda]}$$

(внутреннее суммирование в правой части ведется по всем таким парам $(\lambda,\mu)\in\Lambda^2$, что конкатенация $\lambda\mu$ равна $\nu$). Бинарная операция $*$ называется Ф-*умножением.*

**Предложение 6.1.** *Пространство* $\mathrm{C}[\Lambda]$, *наделенное операцией* Ф-*умножения, образует над полем* $\mathbb{R}$ *ассоциативную алгебру* (*которую будем обозначать* $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]\doteq\mathrm{C}_\Phi(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$) *с единицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для рядов $x\doteq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda x_\lambda$, $y\doteq\sum\limits_{\mu\in\Lambda}\mu y_\mu$, $z\doteq\sum\limits_{\nu\in\Lambda}\nu z_\nu$ произведения $x*y$ и $y*z$ равны

$$\sum_{\varrho\in\Lambda}\varrho\sum_{\lambda\mu=\varrho}x_\lambda\, y_\mu^{[\lambda]} \quad \text{и} \quad \sum_{\varrho\in\Lambda}\varrho\sum_{\mu\nu=\varrho}y_\mu\, z_\nu^{[\mu]}$$

соответственно, поэтому

$$\begin{aligned}(x*y)*z &= \sum_{\sigma\in\Lambda}\sigma\sum_{\varrho\nu=\sigma}\ \sum_{\lambda\mu=\varrho}x_\lambda\, y_\mu^{[\lambda]}\, z_\nu^{[\varrho]} = \\ &= \sum_{\sigma\in\Lambda}\sigma\sum_{\lambda\mu\nu=\sigma}x_\lambda\, y_\mu^{[\lambda]}\, z_\nu^{[\lambda\mu]} = \sum_{\sigma\in\Lambda}\sigma\sum_{\lambda\varrho=\sigma}x_\lambda\sum_{\mu\nu=\varrho}y_\mu^{[\lambda]}\, z_\nu^{[\lambda\mu]} = \\ &= \sum_{\sigma\in\Lambda}\sigma\sum_{\lambda\varrho=\sigma}x_\lambda\Big(\sum_{\mu\nu=\varrho}y_\mu\, z_\nu^{[\mu]}\Big)^{[\lambda]} = x*(y*z),\end{aligned}$$

что доказывает ассоциативность Ф-умножения. Проверка аксиом дистрибутивности тривиальна. Ряд $e\doteq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda\delta_{\lambda\varepsilon}$ играет роль левой и правой единицы алгебры $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ (где $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера: если $\lambda,\mu\in\Lambda$ и $\lambda=\mu$, то $\delta_{\lambda\mu}=1$, а если $\lambda\neq\mu$, то $\delta_{\lambda\mu}=0$).

**Теорема 6.1.** *Ряд* $x\doteq\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda x_\lambda$ *обратим в алгебре* $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ *тогда и только тогда, когда коэффициент* $x_\varepsilon$ *обратим в алгебре* $\mathrm{C}$ (*что равносильно условию* $x_\varepsilon(t)\neq 0$ *для всех* $t\in K^\ell$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $x*y=e$ (где $y\doteq\sum\limits_{\mu\in\Lambda}\mu y_\mu$) имеет место тогда и только тогда, когда при всех $\nu\in\Lambda$ выполнено равенство

$$x_\varepsilon\, y_\nu + \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu\\ \lambda\neq\varepsilon}}x_\lambda y_\mu^{[\lambda]} = \delta_{\nu\varepsilon},$$

поэтому правая обратимость ряда $x$ равносильна обратимости функции $x_\varepsilon$ в С. Левый обратный ряд $z \doteq \sum\limits_{\nu\in\Lambda} \nu z_\nu$ получается из системы уравнений

$$z_\nu x_\varepsilon^{[\,\nu\,]} + \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu \\ \mu\neq\varepsilon}} z_\lambda x_\mu^{[\,\lambda\,]} = \delta_{\nu\varepsilon}, \quad \nu \in \Lambda, \tag{6.2}$$

(очевидно, в алгебре С функции $x_\varepsilon$ и $x_\varepsilon^{[\,\nu\,]}$ обратимы или нет одновременно), причем в силу ассоциативности алгебры $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ ряды $y$ и $z$ совпадают.

**Лемма 6.1.** *Ряд* $x \doteq \varepsilon + \sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\varepsilon}} \lambda x_\lambda$ *обратим в алгебре* $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$. *Обратный ряд имеет вид*

$$x^{-1} = \varepsilon + \sum_{\substack{\mu\in\Lambda \\ \mu\neq\varepsilon}} \mu \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_k = \mu} \prod_{i=1}^{k} \big( - x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\,]} \big), \tag{6.3}$$

*где внутреннее суммирование ведется по всем упорядоченным наборам* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *непустых слов* $\alpha_i \in \Lambda$ *таких, что* $\alpha_1 \ldots \alpha_k = \mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i = 1$ полагаем $\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} = \varepsilon$. Заметим также, что $x_\varepsilon = 1$, поэтому $x_\varepsilon^{[\,\mu\,]} = 1$ для любого $\mu \in \Lambda$. Индукцией по $m$, где $m = |\,\mu\,|$, покажем, что коэффициенты $z_\mu$ обратного ряда (такого, что $z * x = e$) представимы в виде

$$z_\mu = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_k = \mu} \prod_{i=1}^{k} \big( - x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\,]} \big), \quad \mu \neq \varepsilon. \tag{6.4}$$

При $m = 1$ формула (6.4) следует из (6.2) (так как $z_\varepsilon = 1$). Зафиксируем $\mu \in \Lambda$, $|\,\mu\,| = m > 1$, и предположим истинность (6.4) для всех слов меньшей длины. Тогда из (6.2) следуют равенства

$$z_\mu x_\varepsilon^{[\,\mu\,]} + z_\varepsilon x_\mu^{[\,\varepsilon\,]} = - \sum_{\substack{\lambda\nu=\mu \\ \lambda\neq\varepsilon,\ \nu\neq\varepsilon}} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_k = \lambda} \prod_{i=1}^{k} \big( - x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\,]} \big)\, x_\nu^{[\,\lambda\,]} =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda\nu=\mu \\ \lambda\neq\varepsilon,\ \nu\neq\varepsilon}} \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_k = \lambda} \big( - x_\nu^{[\,\lambda\,]} \big) \prod_{i=1}^{k} \big( - x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\,]} \big) =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_k \nu = \mu \\ \nu \neq \mu}} \big( - x_\nu^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_k\,]} \big) \prod_{i=1}^{k} \big( - x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}\,]} \big).$$

В последнем равенстве мы перешли от повторного суммирования к суммированию по всем непустым словам одновременно. Введя обозначения $\alpha_{k+1} = \nu$ и $n = k+1$, получим равенства

$$z_\mu = -x_\mu^{[\,\varepsilon\,]} + \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1} = \mu \\ \alpha_{k+1} \neq \mu}} \prod_{i=1}^{k+1} \big( -x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}\,]} \big) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_n = \mu} \prod_{i=1}^{n} \big( -x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}\,]} \big).$$

**Замечание 6.1.** В случае $r=1$ имеем $L = \{\,\lambda\,\}$, $\Lambda = \{\,\varepsilon, \lambda, \lambda\lambda, \lambda\lambda\lambda, \dots\}$, поэтому можно считать, что $\Lambda = \{\,\lambda^k\,\}_{k=0}^{\infty}$, а ряды (6.1) принимают вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k$. Следовательно, в силу леммы 6.1 степенные ряды $1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^k a_k$ и $1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^m \sum\limits_{p_1+\ldots+p_r=m} \prod\limits_{i=1}^{r} a_{p_i}$ с числовыми коэффициентами взаимно обратны в смысле естественного умножения степенных рядов.

## § 7 . Ф-интеграл Римана–Стилтьеса с функциональными рядами в качестве аргументов интегрирования, ассоциированный с Ф-умножением

**Определение 7.1.** Пусть $i \in \{\,1, \dots, \ell\,\}$, $E \subseteq K$ и $u, v \in \mathrm{C}_\Phi(K^\ell; \mathbb{R})[\Lambda]$.

Если для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$ существуют интегралы $\int_E (u_\lambda \cdot d_i v_\mu^{[\,\lambda\,]})$, то ряд

$$\int_E (u * d_i v) \doteq \sum_{\nu \in \Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu = \nu} \int_E (u_\lambda \cdot d_i v_\mu^{[\,\lambda\,]}) \tag{7.1}$$

называется *левым* Ф-*интегралом ряда* $u$ *по ряду* $v$ (*по* $i$*-ой переменной*).

Если для всех $\lambda, \mu \in \Lambda$ существуют интегралы $\int_E (d_i u_\lambda \cdot v_\mu^{[\,\lambda\,]})$, то ряд

$$\int_E (d_i u * v) \doteq \sum_{\nu \in \Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu = \nu} \int_E (d_i u_\lambda \cdot v_\mu^{[\,\lambda\,]}) \tag{7.2}$$

называется *правым* Ф-*интегралом ряда* $v$ *по ряду* $u$ (*по* $i$*-ой переменной*).

**7.1. Свойства Ф-интегралов.** Каждый из Ф-интегралов (7.1) и (7.2) линеен по каждому из аргументов и удовлетворяет свойству аддитивности (если, конечно, все входящие в формулу Ф-интегралы существуют).

**Утверждение 7.1.** *Из существования одного из* Ф*-интегралов* $\int_\alpha^\beta (u * d_i v)$ *или* $\int_\alpha^\beta (d_i u * v)$ *следует существование другого и равенство*

$$\int_\alpha^\beta (u * d_i v) + \int_\alpha^\beta (d_i u * v) = (u * v)\,\Big|_\alpha^\beta. \tag{7.3}$$

(*Значения* $\alpha$ *и* $\beta$ *подставляются вместо переменной* $t_i$.)

Одновременное существование Ф-интегралов (7.1) и (7.2) следует из одновременного существования интегралов $\int_\alpha^\beta (u_\lambda \cdot d_i v_\mu^{[\lambda]})$ и $\int_\alpha^\beta (d_i u_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]})$, а равенство (7.3) следует из формулы интегрирования по частям, справедливой для интегралов Римана–Стилтьеса.

**Утверждение 7.2.** *Если ряды* $u, v \in \mathrm{C}_\Phi(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$ *таковы, что коэффициенты* $u_\lambda$ *ряда* $u$ *имеют ограниченное изменение по переменной* $t_i$, *то для любого сегмента* $E \subseteq K$ Ф*-интегралы* (7.1) *и* (7.2) *существуют.*

Доказательство сводится к замечанию, что все коэффициенты Ф-интеграла $\int_E (d_i u * v)$, то есть суммы $\sum_{\lambda\mu=\nu} \int_E (d_i u_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]})$, существуют, поскольку функции $u_\lambda$ имеют ограниченное изменение по переменной $t_i$, а все функции $v_\mu^{[\lambda]}$ непрерывны[2], с. 216.

**Утверждение 7.3.** *Если ряды* $u, v, w \in \mathrm{C}_\Phi(K;\mathbb{R})[\Lambda]$ *таковы, что коэффициенты* $u_\lambda$ *ряда* $u$ *имеют ограниченное изменение, то для любого* $E \subseteq K$

$$\int_E (du(s) * (v(s) * w(\tau))) = \int_E (du * v) * w(\tau),$$

$$\int_E (u(s) * d_s(v(s) * w(\tau))) = \int_E (u * dv) * w(\tau).$$

Доказательство. Заметим, что Ф-умножение и Ф-интегрирование в левых частях формул осуществляются в алгебре $\mathrm{C}_\Phi(K^2;\mathbb{R})[\Lambda]$, а в правых частях — в алгебре $\mathrm{C}_\Phi(K;\mathbb{R})[\Lambda]$. Ряды $v(s) * w(\tau)$ и $\int_E (du * v)$ равны

$$\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\mu\nu=\varrho} v_\mu(s)\, w_\nu^{[\mu]}(\tau) \quad \text{и} \quad \sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_E \big(du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]}\big)$$

соответственно. Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\int_E \big(du(s) * (v(s) * w(\tau))\big) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} \int_E \Big(du_\lambda(s) \cdot \sum_{\mu\nu=\varrho} v_\mu^{[\lambda]}(s)\, (w_\nu^{[\mu]})^{[\lambda]}(\tau)\Big) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_E \big(du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]}\big)\, w_\nu^{[\lambda\mu]}(\tau) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_E \big(du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]}\big)\, w_\nu^{[\varrho]}(\tau) = \int_E (du * v) * w(\tau).$$

Второе равенство справедливо в силу (7.3).

[2] **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

**Замечание 7.1.** Формулы позволяют выносить за знак Ф-интегралов ряд, не зависящий от переменной интегрирования и записанный справа. В то же время легко показать, что ряды $\int_E \big((u(t)*v(s))*dw(s)\big)$ и $u(t)*\int_E (v*dw)$, вообще говоря, различны.

**7.2. Вложение линейных дифференциальных уравнений с несколькими отклонениями аргумента в семейство Ф-интегральных уравнений.** Предваряя доказательство вложения, приведем пример решения обобщенного уравнения пантографа.

**Пример 7.1.** Пусть $t \in K \doteq [-1,1]$, $|\mu_i| \leqslant 1$, $i = 1,\dots,r$. Решение уравнения с линейными отклонениями аргумента

$$x(t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_0^t x(\mu_i s)\, ds = 1, \quad x \in \mathrm{C}(K;\mathbb{R}),$$

представимо в виде

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i^k \Big) \frac{t^n}{n!}, \quad t \in K.$$

Действительно, подставив $x(\cdot)$ в исходное уравнение, получим

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_0^t x(\mu_i s)\, ds = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mu_j^k \Big) \frac{\mu_i^n s^n}{n!}\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i^n \Big) \Big( \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \mu_j^k \Big) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \lambda_i t + \sum_{m=2}^{\infty} \Big( \prod_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i^k \Big) \frac{t^m}{m!} = x(t) - 1$$

(заменили переменную суммирования $n$ на $m = n+1$ и объединили сомножители). Ниже мы убедимся, что $x(\cdot)$ — единственное решение уравнения.

Заметим еще, что решение $x : K \to \mathbb{R}$ продолжимо до целой аналитической функции. Наконец, решение представимо в формате (6.1):

$$x(t) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(i_1,\dots,i_n) \in \{1,\dots,r\}^n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \Big( \prod_{k=1}^{n} \mu_{i_k}^{k-1} \frac{t^n}{n!} \Big).$$

Зафиксируем ряд $Q \in \mathrm{C}_\Phi[\Lambda] \doteq \mathrm{C}_\Phi(K;\mathbb{R})[\Lambda]$, компоненты которого имеют ограниченное изменение. Согласно утверждению 7.2 для любых $\alpha, t \in K$ существует Ф-интеграл $(\mathcal{Q}x)(t) \doteq \int_\alpha^t (dQ * x)$, каков бы ни был ряд $x \in \mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$.

Справедливо включение $\mathcal{Q}x \in \mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ (более того, компоненты ряда $\mathcal{Q}x$ имеют ограниченное изменение), следовательно, мы можем приступить к исследованию уравнения (iii.2), в котором $f \in \mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$. В развернутой форме уравнение имеет вид

$$\sum_{\nu\in\Lambda} \nu x_\nu(t) - \sum_{\nu\in\Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu=\nu} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) = \sum_{\nu\in\Lambda} \nu f_\nu(t),$$

что равносильно системе $x_\nu(t) - \sum\limits_{\lambda\mu=\nu} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) = f_\nu(t), \;\; \nu \in \Lambda,$ или

$$\begin{aligned}
&x_\varepsilon(t) - \int_\alpha^t (dQ_\varepsilon \cdot x_\varepsilon) = f_\varepsilon(t), \\
&x_\nu(t) - \int_\alpha^t (dQ_\varepsilon \cdot x_\nu) = f_\nu(t) + \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu \\ \lambda\neq\varepsilon}} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}), \quad \nu \neq \varepsilon.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

При $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$ система имеет рекуррентный характер (так как интеграл в левой части (7.4) равен нулю), а при $Q_\varepsilon \neq \mathrm{const}$ она состоит из интегральных уравнений. В обоих случаях система однозначно разрешима, поэтому уравнение (iii.2) имеет единственное решение. Далее считаем $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$.

В частном случае, когда $Q(\cdot) \doteq \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i\, q_i(\cdot)$, в представлении (6.1) для ядра $Q$ имеем равенства $Q_{\lambda_i} = q_i$ и $Q_\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, поэтому для произвольного слова $\nu \in \Lambda$ вида $\nu \doteq \lambda_i\, \omega$ справедливо

$$\sum_{\substack{\lambda\mu=\nu \\ \lambda\neq\varepsilon}} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) = \sum_{\substack{\lambda\mu=\lambda_i\omega \\ \lambda\neq\varepsilon}} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) = \int_\alpha^t (dQ_{\lambda_i} \cdot x_\omega^{[\lambda_i]}) = \int_\alpha^t x_\omega(F_i(\cdot))\, dq_i.$$

Следовательно, система (7.4) принимает вид

$$\begin{aligned}
&x_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t), \\
&x_{\lambda_i\omega}(t) = f_{\lambda_i\omega}(t) + \int_\alpha^t x_\omega(F_i(\cdot))\, dq_i, \quad (i,\omega) \in \{1, \ldots, r\} \times \Lambda.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Предположив, что ряды $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$ и $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda f_\lambda$ сходятся в метрике пространства $\mathrm{C}$ (полагая, что в соответствии с интерпретацией (6.1) вместо символов $\lambda_i$ подставляются числовые значения $\xi_i \in \mathbb{R}$ такие, что $|\xi_1| + \ldots + |\xi_r| < \delta$) и возможна перемена порядка суммирования и интегрирования, из системы

(7.5) получаем равенство

$$x_\varepsilon(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\omega\in\Lambda}\lambda_i\omega\, x_{\lambda_i\omega}(t)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\int_\alpha^t\Bigl(\sum_{\omega\in\Lambda}\omega\, x_\omega(F_i(\cdot))\Bigr)\,dq_i=$$

$$=f_\varepsilon(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{\omega\in\Lambda}\lambda_i\omega\, f_{\lambda_i\omega}(t)$$

или

$$\tilde x(t)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\int_\alpha^t\tilde x(F_i(\cdot))\,dq_i=\tilde f(t),$$

где $\tilde x \doteq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda x_\lambda$, $\tilde f \doteq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\lambda f_\lambda$ — суммы рядов. Таким образом, всякое уравнение (iii.1) вложимо в семейство Φ-интегральных уравнений (iii.2).

## § 8 . Аналог функции Коши для линейного дифференциального уравнения с несколькими отклонениями аргумента, заданного в алгебре функциональных рядов с Φ-умножением

**8.1. Ряд Коши Φ-интегрального уравнения и его свойства.** Пусть в уравнении (iii.2) $f=e$, то есть $f_\nu(t)=\delta_{\nu\varepsilon}$, а коэффициенты ряда $Q$ непрерывны и имеют ограниченное изменение, причем $Q_\varepsilon=\mathrm{const}$. Через $X(t)$ обозначим решение этого уравнения. Другими словами,

$$X(t)-\int_\alpha^t(dQ*X)=e$$

(в пункте 7.2 мы показали существование и единственность решения). В силу (7.4) справедливо $X_\varepsilon=f_\varepsilon=1$, а в силу теоремы 6.1 ряд $X(t)$ обратим в алгебре $\mathrm{C}_\Phi(K;\mathbb{R})[\Lambda]$: существует ряд $Y(t)$ такой, что

$$X(t)*Y(t)=e=Y(t)*X(t).$$

**Определение 8.1.** *Рядом Коши* Φ-интегрального уравнения (iii.2) называется ряд из алгебры $\mathrm{C}_\Phi(K^2;\mathbb{R})[\Lambda]$, определенный равенством

$$C(t,\tau)\doteq X(t)*Y(\tau).$$

Очевидно, $C(s,s)=e$, в алгебре $\mathrm{C}_\Phi(K^3;\mathbb{R})[\Lambda]$ справедливо тождество $C(t,s)*C(s,\tau)=C(t,\tau)$, а ряды $C(t,\tau)$ и $C(\tau,t)$ взаимно обратны в алгебре $\mathrm{C}_\Phi(K^2;\mathbb{R})[\lambda]$. Следующие два свойства менее тривиальны: $C(\alpha,\tau)=Y(\tau)$, а если $\alpha=F_i(\alpha)$ при всех $i=1,\dots,r$, то $C(t,\alpha)=X(t)$. Действительно, в силу (7.4) имеем $X_\lambda(\alpha)=\delta_{\lambda\varepsilon}$, следовательно, $Y_\mu(\alpha)=\delta_{\mu\varepsilon}$ и

$$C(t,\tau)\,\Big|_{t=\alpha}=\sum_{\nu\in\Lambda}\nu\sum_{\lambda\mu=\nu}X_\lambda(\alpha)\,Y_\mu(F^\lambda(\tau))=\sum_{\nu\in\Lambda}\nu Y_\nu(\tau)=Y(\tau)\,,$$

$$C(t,\tau)\Big|_{\tau=\alpha} = \sum_{\nu\in\Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu=\nu} X_\lambda(t)\, Y_\mu(F^\lambda(\alpha)) =$$

$$= \sum_{\nu\in\Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu=\nu} X_\lambda(t)\, Y_\mu(\alpha) = \sum_{\nu\in\Lambda} \nu X_\nu(t) = X(t)\,.$$

**Теорема 8.1.** *Ряд Коши удовлетворяет тождеству*

$$C(t,\tau) - \int_\tau^t \big(dQ(s) * C(s,\tau)\big) = e.$$

Действительно, поскольку $X(t) - \int_\alpha^t (dQ * X) = e$, то в соответствии с утверждением 7.3 справедлива цепочка равенств

$$\int_\tau^t \big(dQ(s) * C(s,\tau)\big) = \int_\tau^t \big(dQ(s) * (X(s) * Y(\tau))\big) = \int_\tau^t (dQ * X) * Y(\tau) =$$

$$= \Big( \int_\alpha^t (dQ * X) - \int_\alpha^\tau (dQ * X)\Big) * Y(\tau) = \big(X(t) - X(\tau)\big) * Y(\tau) = C(t,\tau) - e\,.$$

**Замечание 8.1.** Развернутая форма тождества имеет рекуррентный вид

$$C_\varepsilon(t,\tau) = 1, \qquad C_\nu(t,\tau) = \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu\\ \lambda\neq\varepsilon}} \int_\tau^t \big(dQ_\lambda(s)\cdot C_\mu(F^\lambda(s), F^\lambda(\tau))\big), \quad \nu \neq \varepsilon,$$

поэтому (непрерывные) функции $C_\nu(t,\tau)$ имеют ограниченное изменение по первой переменной. Другими словами, при фиксированном $\tau \in K$ сечение $C_\nu(\cdot,\tau)$ имеет ограниченную вариацию, однако в общем случае сечение $C_\nu(t,\cdot)$ при фиксированном $t \in K$ может иметь неограниченное изменение. Например, при $r = 1$ в соответствии с замечанием 6.1 ядро $Q$ и ряд Коши $C$ имеют вид $\sum_{k=0}^\infty \lambda^k Q_k$ и $\sum_{k=0}^\infty \lambda^k C_k$ соответственно: если $K = [-1,1]$, $Q_1(t) = t$, $Q_2(t) = 0$, $F(t) = t\cos(\pi/2t)$ при $t \neq 0$ и $F(0) = 0$, то $F : K \to K$ — непрерывная функция неограниченной вариации. Справедливо $C_1(t,\tau) = t - \tau$, поэтому

$$C_2(t,\tau) = \int_\tau^t \big(ds \cdot C_1(F(s), F(\tau))\big) = \int_\tau^t F(s)\, ds + F(\tau)\,(\tau - t)$$

— функция неограниченной вариации по $\tau$.

**8.2. Сходимость решений Ф-интегральных уравнений.** Обозначим через $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda] \doteq \tilde{\mathrm{C}}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$ подпространство в $\mathrm{C}[\Lambda]$, состоящее из рядов $x \doteq \sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in \mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})$, таких, что степенной ряд

$$\sum_k \theta^k N_k(x), \qquad N_k(x) \doteq \max_{\lambda\colon |\lambda|=k} \|x_\lambda\|,$$

сходится при малых $\theta$ (существует $\delta \doteq \delta(x) > 0$ такое, что при $|\,\theta\,| < \delta$ ряд сходится). Это условие эквивалентно сходимости ряда $\sum\limits_k |\,\theta\,|^k N_k(x)$ в той же окрестности.

Аналогично определим подпространство $\mathrm{C\tilde{B}V}[\Lambda] \doteq \mathrm{C\tilde{B}V}(K;\mathbb{R})[\Lambda]$, состоящее из тех рядов $x \doteq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$, $x_\lambda \in \mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})$, что ряд $\sum\limits_k \theta^k M_k(x)$ (где $M_k(x) \doteq \max_{\lambda\colon\, |\lambda|=k} \|x_\lambda\|_{\mathrm{BV}}$) сходится при малых $\theta$. Через $\mathrm{CBV} \doteq \mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})$ обозначено пространство непрерывных функций $x : K \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации, а

$$\|x\| \doteq \max_{(t_1,\dots,t_\ell)\in K^\ell} |\,x(t_1,\dots,t_\ell)\,| \quad \text{и} \quad \|x\|_{\mathrm{BV}} \doteq |x(a)| + \operatorname*{Var}_K x$$

— нормы в $\mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})$ и $\mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})$ соответственно. Очевидно, $\|x^{[\lambda]}\| \leqslant \|x\|$ для любых $x \in \mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})$ и $\lambda \in \Lambda$. Так как при $\ell = 1$ для любого слова $\lambda$ длины $k$ справедливо $\|x_\lambda\| \leqslant \|x_\lambda\|_{\mathrm{BV}} \leqslant M_k(x)$, то $N_k(x) \leqslant M_k(x)$, поэтому

$$\mathrm{C\tilde{B}V}(K;\mathbb{R})[\Lambda] \subset \mathrm{\tilde{C}}(K;\mathbb{R})[\Lambda].$$

Зафиксируем ряд $x \doteq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$ и величины $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,r$. Пусть $\theta \doteq |\,\xi_1| + \dots + |\,\xi_r|$. Если ряд $\sum\limits_k \theta^k N_k(x)$ сходится, то ряд $x$ (как функциональный ряд с элементами из пространства $\mathrm{C}(K^\ell;\mathbb{R})$) абсолютно и равномерно на $K^\ell$ сходится. Действительно, подставив в элементы формулы (6.1) вместо символов $\lambda_i$ значения $\xi_i$, имеем

$$\Big|\sum_{(i_1,\dots,i_k)} \xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_k}\cdot x_{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}(t_1,\dots,t_\ell)\Big| \leqslant \Big(\sum_{(i_1,\dots,i_k)} |\,\xi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\xi_{i_k}|\Big)\cdot N_k(x) = \theta^k N_k(x).$$

Таким образом, элементы пространства $\mathrm{\tilde{C}}(K^\ell;\mathbb{R})[\Lambda]$ — это сходящиеся ряды: существует $\delta \doteq \delta(x) > 0$ такое, что для любых $(\xi_1,\dots,\xi_r) \in \mathbb{R}^r$ таких, что $|\,\xi_1| + \dots + |\,\xi_r| < \delta$, ряд (6.1), в который вместо символов $\lambda_i$ подставлены значения $\xi_i$, сходится абсолютно и равномерно на $K^\ell$.

Если $x, y \in \mathrm{\tilde{C}}[\Lambda]$, то $x * y \in \mathrm{\tilde{C}}[\Lambda]$. Действительно, для любого слова $\nu$ длины $n$ имеет место цепочка неравенств

$$\|\sum_{\lambda\mu=\nu} x_\lambda y_\mu^{[\lambda]}\| \leqslant \sum_{\lambda\mu=\nu} \|x_\lambda\|\cdot\|y_\mu\| \leqslant \sum_{k+m=n} N_k(x)\cdot N_m(y),$$

следовательно, $N_n(x*y) \leqslant \sum_{k+m=n} N_k(x)\cdot N_m(y)$, а при малых $\theta$ имеем

$$\sum_n |\,\theta\,|^n N_n(x*y) \leqslant \Big(\sum_k |\,\theta\,|^k N_k(x)\Big)\cdot\Big(\sum_m |\,\theta\,|^m N_m(y)\Big) < \infty.$$

Включения $\gamma x,\, x+y \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ очевидны (где $\gamma \in \mathbb{R}$), поэтому подмножество $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ замкнуто относительно операций алгебры $\mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ и само является алгеброй (обозначим ее через $\tilde{\mathrm{C}}_\Phi[\Lambda]$).

**Лемма 8.1.** *Если* $x \in \tilde{\mathrm{C}}_\Phi[\Lambda],\ y \in \mathrm{C}_\Phi[\Lambda]$ *и* $x * y = e$, *то* $y \in \tilde{\mathrm{C}}_\Phi[\Lambda]$.

Доказательство. В соответствии с теоремой 6.1 коэффициент $x_\varepsilon$ обратим в алгебре $\mathrm{C}$.

1. Предположим, что $x_\varepsilon = 1$. Если $x \doteq \varepsilon + \sum\limits_{\substack{\lambda\in\Lambda \\ \lambda\neq\varepsilon}} \lambda x_\lambda$, то в силу леммы 6.1 ряд $y$ имеет вид (6.3). Так как $x \in \tilde{\mathrm{C}}_\Phi[\Lambda]$, то взаимно обратные числовые ряды $1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\,\theta\,|^k N_k(x)$ и

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} |\,\theta\,|^m \sum_{p_1+\dots+p_k=m} \prod_{i=1}^{k} N_{p_i}(x) \tag{8.1}$$

сходятся при малых $\theta$ (см. замечание 6.1 и[3], с. 210). Для любого слова $\mu$ длины $m \geqslant 1$ справедливо

$$\Big\| \sum_{\alpha_1\dots\alpha_k=\mu} \prod_{i=1}^{k} (-x_{\alpha_i}^{[\,\alpha_1\dots\alpha_{i-1}\,]}) \Big\| \leqslant \sum_{\alpha_1\dots\alpha_k=\mu} \prod_{i=1}^{k} \|\, x_{\alpha_i}\| \leqslant \sum_{p_1+\dots+p_k=m} \prod_{i=1}^{k} N_{p_i}(x),$$

где $p_i = |\alpha_i|$, следовательно,

$$N_m(y) \leqslant \sum_{p_1+\dots+p_k=m} \prod_{i=1}^{k} N_{p_i}(x)$$

для всех $m = 1, 2, \dots$ . Кроме того, $N_0(y) = 1$. Поэтому ряд (8.1) мажорирует ряд $1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} |\,\theta\,|^m N_m(y)$, следовательно, $y \in \tilde{\mathrm{C}}_\Phi[\Lambda]$.

2. Пусть $x_\varepsilon$ — произвольная обратимая функция. Если $u_\lambda = \delta_{\lambda\varepsilon} x_\varepsilon$, $\lambda \in \Lambda$, $v_\mu = x_\varepsilon^{-1} x_\mu$, $\mu \in \Lambda$, $u \doteq \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lambda u_\lambda$ и $v \doteq \sum\limits_{\mu\in\Lambda} \mu v_\mu$, то

$$u * v = \sum_{\nu\in\Lambda} \nu \sum_{\lambda\mu=\nu} \delta_{\lambda\varepsilon} x_\varepsilon v_\mu^{[\lambda]} = \sum_{\nu\in\Lambda} \nu x_\varepsilon v_\nu = x,$$

поэтому $x^{-1} = v^{-1} * u^{-1}$. При этом обратные ряды $u^{-1}$ и $v^{-1}$ существуют и принадлежат алгебре $\tilde{\mathrm{C}}_F[\lambda]$ (для первого ряда это очевидно, а второй попадает под условия пункта 1).

---

[3] **Маркушевич А.И.** Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 416 с.

**Лемма 8.2.** *Пусть* $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$. *Оператор* $\mathcal{Q} : \mathrm{C}[\Lambda] \to \mathrm{C}[\Lambda]$, *определенный формулой* $(\mathcal{Q}x)(t) \doteq \int_\alpha^t (dQ * x)$, *действует из* $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ *в* $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

Доказательство. Если $x \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$, то при всех $\nu \in \Lambda$ ($|\nu| = n$) справедливы неравенства

$$\Big\| \sum_{\lambda\mu=\nu} \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) \Big\| \leqslant \sum_{\lambda\mu=\nu} \Big\| \int_\alpha^t (dQ_\lambda \cdot x_\mu^{[\lambda]}) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\lambda\mu=\nu} \operatorname{Var} Q_\lambda \cdot \|x_\mu\| \leqslant \sum_{k+m=n} M_k(Q) \cdot N_m(x),$$

$$N_n(\mathcal{Q}x) \leqslant \sum_{k+m=n} M_k(Q) \cdot N_m(x),$$

$$\sum_n |\,\theta\,|^n N_n(\mathcal{Q}x) \leqslant \Big(\sum_k |\,\theta\,|^k M_k(Q)\Big) \cdot \Big(\sum_m |\,\theta\,|^m N_m(x)\Big) < \infty$$

— произведение сходящихся (при малых $\theta$) рядов, поэтому $\mathcal{Q}x \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

**Теорема 8.2.** *Пусть* $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$, $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$, $f \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$. *Если* $x$ — *решение уравнения* (iii.2), *то есть* $x(t) - \int_\alpha^t (dQ * x) = f(t)$, *то* $x \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

Доказательство. Так как $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$, то в соответствии с (7.4) справедливо равенство $\|x_\varepsilon\| = \|f_\varepsilon\|$, а для любого слова $\nu$ длины 1 имеем $\|x_\nu\| \leqslant \|f_\nu\| + \|Q_\nu\|_{\mathrm{BV}} \cdot \|x_\varepsilon\| \leqslant N_1(f) + M_1(Q) \cdot N_0(x)$, поэтому $N_0(x) = N_0(f)$, $N_1(x) \leqslant N_1(f) + M_1(Q) \cdot N_0(f)$. На основе этих соотношений индукцией по $n$ докажем оценку $N_n(x) \leqslant \sum\limits_{k+m=n} a_k\, N_m(f)$, где

$$a_0 \doteq 1, \qquad a_k \doteq \sum_{p_1+\ldots+p_s=k} \prod_{i=1}^{s} M_{p_i}(Q), \quad k \in \mathbb{N}.$$

В соответствии с (7.4) для любого слова $\nu$ длины $n > 1$ справедливо

$$\|x_\nu\| \leqslant \|f_\nu\| + \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu \\ \lambda\neq\varepsilon}} \|Q_\lambda\|_{\mathrm{BV}} \cdot \|x_\mu\| \leqslant N_n(f) + \sum_{\substack{k+m=n \\ k\neq 0}} M_k(Q) \cdot N_m(x),$$

$$N_n(x) \leqslant N_n(f) + \sum_{\substack{k+m=n \\ k\neq 0}} M_k(Q) \cdot N_m(x) \leqslant$$

$$\leqslant a_0\, N_n(f) + \sum_{\substack{k+m=n \\ k\neq 0}} M_k(Q) \sum_{r+q=m} a_r\, N_q(f) = a_0\, N_n(f) + \sum_{\substack{k+r+q=n \\ k\neq 0}} M_k(Q)\, a_r\, N_q(f) =$$

$$= a_0\, N_n(f) + \sum_{\substack{m+q=n \\ m\neq 0}} \Big[ \sum_{\substack{k+r=m \\ k\neq 0}} M_k(Q)\, a_r \Big] N_q(f).$$

Обозначим выражение, стоящее в квадратных скобках, через $\sigma_m$. Тогда

$$\sigma_m = M_m(Q) + \sum_{\substack{k+r=m\\ k\neq 0,\, r\neq 0}} M_k(Q)\, a_r = M_m(Q) + \sum_{\substack{k+r=m\\ k\neq 0,\, r\neq 0}} M_k(Q) \sum_{p_1+\ldots+p_s=r} \prod_{i=1}^{s} M_{p_i}(Q) =$$

$$= M_m(Q) + \sum_{\substack{k+p_1+\ldots+p_s=m\\ k<m}} M_k(Q) \prod_{i=1}^{s} M_{p_i}(Q) = a_m,$$

что и доказывает индукционный переход. Таким образом, при малых $\theta$

$$\sum_n |\,\theta\,|^n N_n(x) \leqslant \Big(\sum_k |\,\theta\,|^k a_k\Big) \cdot \Big(\sum_m |\,\theta\,|^m N_m(f)\Big) =$$

$$= \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} |\,\theta\,|^k M_k(Q)\Big)^{-1} \Big(\sum_m |\,\theta\,|^m N_m(f)\Big) < \infty\,.$$

Последнее равенство справедливо в силу замечания 6.1. Сходимость второго ряда в последнем произведении имеет место в силу включения $f \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$, а сходимость первого ряда следует из включения $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$ и из сходимости при малых $\theta$ обратного ряда (см. комментарии к формуле (8.1)).

**Замечание 8.2.** Для уравнения (iii.1), обобщением которого является уравнение (iii.2) с ядром $Q(\cdot) \doteq \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, q_i(\cdot)$, включение $f \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ в (iii.2) автоматически влечет за собой включение $x \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

**Замечание 8.3.** Пусть $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$. Поскольку $C(t,\tau) = X(t) * Y(\tau)$, $X \in \tilde{\mathrm{C}}(K;\mathbb{R})[\Lambda]$, а в соответствии с леммой 8.1 справедливо $Y \in \tilde{\mathrm{C}}(K;\mathbb{R})[\Lambda]$, то $C(t,\tau) \in \tilde{\mathrm{C}}(K^2;\mathbb{R})[\Lambda]$. Покажем, что при фиксированном $\tau \in K$ имеет место включение $z(\cdot) \doteq C(\cdot,\tau) \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$. Действительно, в соответствии с замечанием 8.1 для любого непустого слова $\nu \in \Lambda$ длины $n$ справедливо

$$\operatorname{Var} z_\nu \leqslant \sum_{\substack{\lambda\mu=\nu\\ \lambda\neq\varepsilon}} \operatorname{Var} Q_\lambda \cdot \|C_\mu\| \leqslant \sum_{\lambda\mu=\nu} \|Q_\lambda\|_{\mathrm{BV}} \cdot \|C_\mu\| \leqslant \sum_{k+m=n} M_k(Q)\cdot N_m(C),$$

$$M_n(z) = \max_{\nu\colon |\,\nu|=n} \|z_\nu\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \max_{\nu\colon |\,\nu|=n} \big(\|z_\nu\| + \operatorname{Var} z_\nu\big) \leqslant N_n(C) + \sum_{k+m=n} M_k(Q)\cdot N_m(C).$$

Оценка верна и при $n=0$, следовательно, при малых $\theta$ справедливо

$$\sum_n |\,\theta\,|^n M_n(z) \leqslant \sum_n |\,\theta\,|^n N_n(C) + \Big(\sum_k |\,\theta\,|^k M_k(Q)\Big)\Big(\sum_m |\,\theta\,|^m N_m(C)\Big) < \infty\,.$$

Наша ближайшая цель — описание класса ядер $Q$, для которых при всех $t \in K$ справедливо включение $C(t,\cdot) \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$ и, как следствие, имеет место представление (9.2) для решений Ф-интегральных уравнений.

**8.3. Дополнительные утверждения о Ф-интегралах и Ф-интегральных уравнениях.** В предыдущих пунктах мы имели дело с таким ядром $Q$ Ф-интегрального уравнения (iii.2), что $Q_\lambda \in \mathrm{CBV} \doteq \mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})$, то есть все $Q_\lambda$ суть непрерывные функции ограниченной вариации. Через $\mathrm{CB\Phi} \doteq \mathrm{CB\Phi}(K;\mathbb{R})$ обозначим подпространство в CBV, состоящее из тех $x : K \to \mathbb{R}$, что $x^{[\lambda]} \doteq x(F^\lambda(\cdot)) \in \mathrm{CBV}$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Легко показать, что $\mathrm{CB\Phi} = \mathrm{CBV}$ для любого семейства непрерывных кусочно-монотонных функций $F_i : K \to K$, $i = 1,\ldots,r$ (см. приведенный ниже пример 9.1).

**Утверждение 8.1.** *Если* $[\alpha,\beta] \subseteq K$, $F\colon K \to K$, $u, u(F(\cdot)) \in \mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})$, $v \in \mathrm{C}(K;\mathbb{R})$, *то*

$$\int\limits_{F(\alpha)}^{F(\beta)} (du\cdot v) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(du(F(\cdot))\cdot v(F(\cdot))\big) \quad \text{и} \quad \int\limits_{F(\alpha)}^{F(\beta)} (u\cdot dv) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(F(\cdot))\cdot dv(F(\cdot))\big).$$

Формулы называются формулами замены переменной в интеграле Римана–Стилтьеса, а их доказательство основывается на сравнении интегральных сумм и проводится традиционно.

**Утверждение 8.2.** *Если* $\alpha \in K$, $u \in \mathrm{CB\Phi}$, $v \in \mathrm{C}$, $w(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t (du\cdot v)$, *то* $w \in \mathrm{CB\Phi}$.

Справедливо включение $w \in \mathrm{CBV}$ (см. утверждение 7.2). Без ограничения общности считаем, что $\alpha < t$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ справедливо включение $u^{[\lambda]} = u(F^\lambda(\cdot)) \in \mathrm{CBV}$, следовательно, в силу утверждения 8.1 для произвольного разбиения $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$ имеет место цепочка

$$\sum_{m=1}^{n} \big|w(F^\lambda(s_m)) - w(F^\lambda(s_{m-1}))\big| = \sum_{m=1}^{n} \Big|\int_{F^\lambda(s_{m-1})}^{F^\lambda(s_m)} (du\cdot v)\Big| =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \Big|\int_{s_{m-1}}^{s_m} (du^{[\lambda]}\cdot v^{[\lambda]})\Big| \leqslant \operatorname*{Var}_K u^{[\lambda]} \cdot \|v\|.$$

□

Через $\mathrm{CBV}[\Lambda] \doteq \mathrm{CBV}(K;\mathbb{R})[\Lambda]$ и $\mathrm{CB\Phi}[\Lambda] \doteq \mathrm{CB\Phi}(K;\mathbb{R})[\Lambda]$ обозначим подпространства в $\mathrm{C}[\Lambda]$, состоящие из рядов $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda} \lambda x_\lambda$ таких, что $x_\lambda \in \mathrm{CBV}$ и $x_\lambda \in \mathrm{CB\Phi}$ соответственно.

**Утверждение 8.3.** *Пусть* $\alpha, \beta \in K,\ u, v, w \in \mathrm{C}[\Lambda]$. *Тогда*

1) *если* $u \in \mathrm{CBV}[\Lambda]$, *то* $\displaystyle\int_\alpha^\beta \Big(d\int_\alpha^t (du * v) * w(t)\Big) = \int_\alpha^\beta \Big(du * (v * w)\Big)$;

2) *если* $v \in \mathrm{CB\Phi}[\Lambda]$, *то* $\displaystyle\int_\alpha^\beta \Big(u(t) * d\int_\alpha^t (dv * w)\Big) = \int_\alpha^\beta \Big(d\int_\alpha^t (u * dv) * w(t)\Big)$;

3) *если* $w \in \mathrm{CB\Phi}[\Lambda]$, *то* $\displaystyle\int_\alpha^\beta \Big(u(t) * d\int_\alpha^t (v * dw)\Big) = \int_\alpha^\beta \Big((u * v) * dw\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Все интегралы существуют (утверждение 8.2).

1. Выражения $\displaystyle\int_\alpha^t (du * v)$ и $v * w$ равны $\displaystyle\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_\alpha^t (du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]})$ и $\displaystyle\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\mu\nu=\varrho} v_\mu\, w_\nu^{[\mu]}$ соответственно, следовательно,

$$\int_\alpha^\beta \Big(d\int_\alpha^t (du * v) * w(t)\Big) = \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big(d\sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_\alpha^t (du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]}) \cdot w_\nu^{[\varrho]}(t)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big(d\int_\alpha^t (du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]}) \cdot w_\nu^{[\lambda\mu]}(t)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big(du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]} \cdot w_\nu^{[\lambda\mu]}\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} \int_\alpha^\beta \left(du_\lambda \cdot \Big(\sum_{\mu\nu=\varrho} v_\mu\, w_\nu^{[\mu]}\Big)^{[\lambda]}\right) = \int_\alpha^\beta \Big(du * (v * w)\Big).$$

2. Выражения $\displaystyle\int_\alpha^t (v * dw)$ и $\displaystyle\int_\alpha^t (du * v)$ равны

$$\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\mu\nu=\varrho} \int_\alpha^t (v_\mu \cdot dw_\nu^{[\mu]}) \quad \text{и} \quad \sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_\alpha^t (du_\lambda \cdot v_\mu^{[\lambda]})$$

соответственно, поэтому в силу утверждения 8.1 справедливы равенства

$$\int_\alpha^\beta \Big(u(t) * d\int_\alpha^t (dv * w)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} \int_\alpha^\beta \left(u_\lambda(t) \cdot d\sum_{\mu\nu=\varrho} \Big[\int_{F^\lambda(\alpha)}^{F^\lambda(t)} (dv_\mu \cdot w_\nu^{[\mu]}) + \int_\alpha^{F^\lambda(\alpha)} (dv_\mu \cdot w_\nu^{[\mu]})\Big]\right) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big(u_\lambda(t) \cdot d\sum_{\mu\nu=\varrho} \int_\alpha^t (dv_\mu^{[\lambda]} \cdot w_\nu^{[\lambda\mu]})\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big( u_\lambda \cdot dv_\mu^{[\lambda]} \cdot w_\nu^{[\lambda\mu]} \Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big( d \sum_{\lambda\mu=\varrho} \int_\alpha^t ( u_\lambda \cdot dv_\mu^{[\lambda]} ) \cdot w_\nu^{[\varrho]}(t) \Big) = \int_\alpha^\beta \big(d \int_\alpha^t (u * dv) * w(t)\big).$$

3. Выражения $\displaystyle\int_\alpha^t (v * dw)$ и $u * v$ равны $\displaystyle\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\mu\nu=\varrho} \int_\alpha^t (v_\mu \cdot dw_\nu^{[\mu]})$ и $\displaystyle\sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\lambda\mu=\varrho} u_\lambda\, v_\mu^{[\lambda]}$ соответственно, следовательно, в силу второй формулы из утверждения 8.1 имеет место цепочка равенств

$$\int_\alpha^\beta \Big(u(t) * d \int_\alpha^t (v * dw)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} \int_\alpha^\beta \left( u_\lambda(t) \cdot d \sum_{\mu\nu=\varrho} \Big[ \int_{F^\lambda(\alpha)}^{F^\lambda(t)} \big(v_\mu \cdot dw_\nu^{[\mu]}\big) + \int_\alpha^{F^\lambda(\alpha)} \big(v_\mu \cdot dw_\nu^{[\mu]}\big) \Big] \right) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big( u_\lambda(t) \cdot d \int_\alpha^t \big( v_\mu^{[\lambda]} \cdot dw_\nu^{[\lambda\mu]} \big) \Big) = \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \big( u_\lambda\, v_\mu^{[\lambda]} \cdot dw_\nu^{[\lambda\mu]} \big)$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \int_\alpha^\beta \Big( \sum_{\lambda\mu=\varrho} u_\lambda\, v_\mu^{[\lambda]} \cdot dw_\nu^{[\varrho]} \Big) = \int_\alpha^\beta \big((u * v) * dw\big).$$

$\square$

Пусть в (iii.2) $Q \in \text{СВФ}[\Lambda]$, $Q_\varepsilon = \text{const}$. Если $C(t,\tau)$ — ряд Коши этого уравнения, то справедлива не только теорема 8.1, но и приводимая ниже теорема 8.3. Ее доказательство опирается на утверждение 8.3 и формулы

$$\int_\alpha^\beta (dX * Y) = \int_\alpha^\beta dQ \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta (X * dY) = -\int_\alpha^\beta dQ, \tag{8.2}$$

справедливые для всех $\alpha, \beta \in K$. Напомним, что $X$ — это решение уравнения $X(t) - \displaystyle\int_\alpha^t (dQ * X) = e$, $Y = X^{-1}$, $X(t) * Y(\tau) = C(t,\tau)$. *Справедливы включения* $X, Y \in \text{СВФ}[\Lambda]$. Действительно, в силу (7.4) и утверждения 8.2 включения $Q_\nu \in \text{СВФ}$ влекут включения $X_\nu \in \text{СВФ}$, причем $X_\varepsilon = 1$, а включения $Y_\nu \in \text{СВФ}$ следуют из системы уравнений $X_\varepsilon Y_\nu + \displaystyle\sum_{\substack{\lambda\mu=\nu\\ \lambda\neq\varepsilon}} X_\lambda Y_\mu^{[\lambda]} = \delta_{\nu\varepsilon}$ (так как $X(t) * Y(t) = e$). Таким образом, в силу первой формулы из утверждения 8.3 справедлива цепочка равенств

$$\int_\alpha^\beta (dX * Y) = \int_\alpha^\beta \Big(d \int_\alpha^s (dQ * X) * Y(s)\Big) = \int_\alpha^\beta \big(dQ * (X * Y)\big) = \int_\alpha^\beta dQ\,,$$

а вторая формула (8.2) следует из (7.3) и тождества $X(t) * Y(t) = e$.

**Теорема 8.3.** *Если в уравнении* (iii.2) $Q \in \mathrm{СВФ}[\Lambda]$, $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$, *то ряд Коши удовлетворяет тождеству* $C(t,\tau) - \int_\tau^t \big(C(t,s) * dQ(s)\big) = e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу третьей формулы из утверждения 8.3

$$\int_\tau^t \big(C(t,s) * dQ(s)\big) =$$

$$= \int_\tau^t \left(C(t,s) * d_s \int_\tau^s dQ\right) = - \int_\tau^t \left(C(t,s) * d_s \int_\tau^s (X * dY)\right) =$$

$$= - \int_\tau^t \big((C(t,s) * X(s)) * dY(s)\big) = - \int_\tau^t \big(X(t) * dY(s)\big) =$$

$$= -X(t) * Y(t) + X(t) * Y(\tau) = -e + C(t,\tau).$$

## § 9 . Представление решений линейных дифференциальных уравнений с несколькими отклонениями аргумента в терминах Ф-умножения и Ф-интеграла в форме Коши

Справедливо равенство $C(\alpha,\tau) = Y(\tau)$, поэтому если в тождество из теоремы 8.3 вместо $t$ подставить $\alpha$, то получим $Y(\tau) + \int_\alpha^\tau (Y * dQ) = e$. Таким образом, у нас есть все основания для того, чтобы говорить, что при $Q \in \mathrm{СВФ}[\Lambda]$ и $f, g \in \mathrm{C}[\Lambda]$ Ф-интегральные уравнения (iii.2) и

$$y(\tau) + \int_\alpha^\tau (y * dQ) = g(\tau) \qquad \text{(iii.5)} = (9.1)$$

являются *сопряженными* или образуют *пару сопряженных уравнений.*

**9.1. Представление решений пары сопряженных Ф-интегральных уравнений.** Справедлива

**Теорема 9.1.** *Если в уравнениях* (iii.2) *и* (iii.5) $Q \in \mathrm{СВФ}[\Lambda]$, $Q_\varepsilon = \mathrm{const}$, $f, g \in \mathrm{C}[\Lambda]$, *то* (*единственное*) *решение уравнения* (iii.2) (*в случае, если* $\alpha = F_i(\alpha)$, $i = 1, \ldots, r$) *допускает одно из двух представлений*

$$x(t) = f(t) - \int_\alpha^t \big(d_s C(t,s) * f(s)\big) =$$

$$= C(t,\alpha) * f(\alpha) + \int_\alpha^t \big(C(t,s) * df(s)\big), \quad \text{(iii.6)} = (9.2)$$

*а* (*единственное*) *решение уравнения* (iii.5) *при любом* $\alpha \in K$ *имеет вид*

$$y(\tau) = g(\tau) - \int_\alpha^\tau \big(g(s) * d_s C(s,\tau)\big) =$$

$$= g(\alpha) * C(\alpha,\tau) + \int_\alpha^\tau \big(dg(s) * C(s,\tau)\big). \quad \text{(iii.7)} = (9.3)$$

*Умножение в формулах осуществляется в алгебре* $\mathrm{C}_\Phi(K^2;\mathbb{R})[\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой 8.3 справедлива бесконечная система

$$C_\varepsilon(t,\tau)=1,\qquad C_\nu(t,\tau)=\sum_{\substack{\lambda\mu=\nu\\ \mu\neq\varepsilon}}\int_\tau^t\big(C_\lambda(t,s)\cdot dQ_\mu(F^\lambda(s))\big),\quad \nu\neq\varepsilon,$$

поэтому при фиксированном $t\in K$ коэффициенты $C_\nu(t,\cdot)$ имеют ограниченное изменение и, следовательно, Ф-интегралы в (9.2) существуют. Существование Ф-интегралов в (9.3) имеет место в силу замечания 8.1. Существование и единственность решения уравнения (iii.2) обсуждались в комментариях к системе (7.4), а существование и единственность решения уравнения (iii.5) = (9.1) имеют место в силу аналогичных рассуждений.

Докажем первую формулу (9.3) (вторая следует из нее в соответствии с (7.3)). Подставив правую часть первой формулы (9.3) в Ф-интеграл уравнения (9.1), получим равенство $\displaystyle\int_\alpha^\tau(y*dQ)=\int_\alpha^\tau(g*dQ)+\sigma$, где

$$\sigma\doteq-\int_\alpha^\tau\Big(\int_\alpha^s\big(g(\xi)*d_\xi C(\xi,s)\big)*dQ(s)\Big)=-\int_\alpha^\tau\Big(\int_\alpha^s\big(g*dX\big)*Y(s)*dQ(s)\Big).$$

Воспользовались равенством $\displaystyle\int_E\big(u(s)*d_s(v(s)*w(\tau))\big)=\int_E(u*dv)*w(\tau)$, которое справедливо в силу утверждения 7.3. Из третьей формулы утверждения 8.3 и уравнения (9.1) следует, что

$$\sigma=-\int_\alpha^\tau\Big(\int_\alpha^s\big(g*dX\big)*d\int_\alpha^s\big(Y*dQ\big)\Big)=\int_\alpha^\tau\Big(\int_\alpha^s\big(g*dX\big)*dY(s)\Big).$$

В силу первой формулы (8.2), второй формулы из утверждения 8.3 и формулы интегрирования по частям (7.3) справедливы цепочки равенств

$$\int_\alpha^\tau(g*dQ)=\int_\alpha^\tau\Big(g(s)*d\int_\alpha^s(dX*Y)\Big)=\int_\alpha^\tau\Big(d\int_\alpha^s(g*dX)*Y(s)\Big),$$

$$\int_\alpha^\tau(y*dQ)=\int_\alpha^\tau(g*dQ)+\sigma=$$

$$=\int_\alpha^\tau\Big(d\int_\alpha^s(g*dX)*Y(s)\Big)+\int_\alpha^\tau\Big(\int_\alpha^s(g*dX)*dY(s)\Big)=$$

$$=\int_\alpha^s(g*dX)*Y(s)\Big|_\alpha^\tau=$$

$$=\int_\alpha^\tau(g*dX)*Y(\tau)=\int_\alpha^\tau\big(g(s)*d_sC(s,\tau)\big)=g(\tau)-y(\tau),$$

что доказывает представление (9.3).

Предваряя доказательство формул (9.2), покажем равенство

$$\int_{\alpha}^{t} \big(d_s C(t,s) * f(s)\big) = X(t) * \int_{\alpha}^{t} \big(dY * f\big), \tag{9.4}$$

по поводу которого уместно вспомнить замечание 7.1, в соответствии с которым ряд, не зависящий от переменной интегрирования и записанный слева, нельзя, вообще говоря, выносить за знак Ф-интеграла. Однако в условиях теоремы имеет место цепочка равенств

$$\int_{\alpha}^{t} \big(d_s C(t,s) * f(s)\big) = \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \int_{\alpha}^{t} \big(d_s C_{\varrho}(t,s) \cdot f_{\nu}^{[\varrho]}(s)\big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\varrho\nu=\sigma} \int_{\alpha}^{t} \Big(d_s \sum_{\lambda\mu=\varrho} X_{\lambda}(t)\, Y_{\mu}^{[\lambda]}(s) \cdot f_{\nu}^{[\varrho]}(s)\Big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} X_{\lambda}(t) \int_{\alpha}^{t} \big(dY_{\mu}^{[\lambda]} \cdot f_{\nu}^{[\lambda\mu]}\big).$$

В силу утверждения 8.1, дополнительных условий $\alpha = F_i(\alpha)$, $i = 1,\ldots,r$, и равенства $\int_{\alpha}^{t}\big(dY * f\big) = \sum_{\varrho\in\Lambda} \varrho \sum_{\mu\nu=\varrho} \int_{\alpha}^{t} \big(dY_{\mu} \cdot f_{\nu}^{[\mu]}\big)$ следует, что

$$\int_{\alpha}^{t} \big(d_s C(t,s) * f(s)\big) = \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\mu\nu=\sigma} X_{\lambda}(t) \int_{F^{\lambda}(\alpha)}^{F^{\lambda}(t)} \big(dY_{\mu} \cdot f_{\nu}^{[\mu]}\big) =$$

$$= \sum_{\sigma\in\Lambda} \sigma \sum_{\lambda\varrho=\sigma} X_{\lambda}(t) \sum_{\mu\nu=\varrho} \int_{\alpha}^{F^{\lambda}(t)} \big(dY_{\mu} \cdot f_{\nu}^{[\mu]}\big) = X(t) * \int_{\alpha}^{t} \big(dY * f\big),$$

что и требовалось в формуле (9.4).

Подставив правую часть первой формулы (9.2) в Ф-интеграл уравнения (iii.2), получим равенство $\int_{\alpha}^{t}(dQ * x) = \int_{\alpha}^{t}(dQ * f) + \sigma$, где

$$\sigma \doteq -\int_{\alpha}^{t} \Big(dQ(s) * \int_{\alpha}^{s} \big(d_{\xi} C(s,\xi) * f(\xi)\big)\Big) = -\int_{\alpha}^{t} \Big(dQ(s) * X(s) * \int_{\alpha}^{s} (dY * f)\Big)$$

(воспользовались формулой (9.4)). В силу первой формулы утверждения 8.3

$$\sigma = -\int_{\alpha}^{t} \Big(d \int_{\alpha}^{s} (dQ * X) * \int_{\alpha}^{s} (dY * f)\Big) = -\int_{\alpha}^{t} \Big(dX(s) * \int_{\alpha}^{s} (dY * f)\Big).$$

В силу второй формулы (8.2), второй формулы из утверждения 8.3 и формулы интегрирования по частям (7.3) справедливы цепочки равенств

$$\int_{\alpha}^{t} (dQ * f) = -\int_{\alpha}^{t} \Big(d \int_{\alpha}^{s} (X * dY) * f(s)\Big) = -\int_{\alpha}^{t} \Big(X(s) * d\int_{\alpha}^{s} (dY * f)\Big),$$

$$\int_\alpha^t (dQ*x) = \int_\alpha^t (dQ*f) + \sigma =$$
$$= -\int_\alpha^t \Big(X(s) * d\int_\alpha^s (dY*f)\Big) - \int_\alpha^t \Big(dX(s) * \int_\alpha^s (dY*f)\Big) =$$
$$= -X(s) * \int_\alpha^s (dY*f)\,\Big|_\alpha^t =$$
$$= -X(t) * \int_\alpha^t (dY*f) = -\int_\alpha^t \Big(d_sC(t,s) * f(s)\Big).$$

Предпоследнее равенство справедливо в силу условий $\alpha = F_i(\alpha)$, а последнее — в силу (9.4). Таким образом, $\displaystyle\int_\alpha^t (dQ*x) = x(t) - f(t)$. Вторая формула (9.2) является следствием первой.

**9.2. Сходимость решений пары сопряженных Φ-интегральных уравнений.** Обозначим через $\mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda] \doteq \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi(K;\mathbb{R})[\Lambda]$ подпространство в $\mathrm{CB}\Phi[\Lambda]$, состоящее из таких рядов $x \doteq \displaystyle\sum_{\mu\in\Lambda} \mu x_\mu$, $x_\mu \in \mathrm{CB}\Phi$, что сходимость при малых $\theta$ числового ряда $\displaystyle\sum_k \theta^k \alpha_k$ влечет сходимость в некоторой окрестности нуля ряда $\displaystyle\sum_n \theta^n \sum_{k+m=n} |\,\alpha_k\,| \cdot M_m^k(x)$, где
$$M_m^k(x) \doteq \max_{\substack{\lambda:\ |\lambda|=k\\ \mu:\ |\mu|=m}} \|x_\mu^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}}.$$

Очевидно, $M_m^0(x) = M_m(x)$ и $\mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda] \subseteq \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$. Для достаточно широкого класса отклоняющих функций имеет место равенство $\mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda] = \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$.

**Пример 9.1.** Если все отклоняющие функции $F_1, \dots, F_r$ непрерывны и кусочно-монотонны, то $\mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda] = \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$.

Действительно. Обозначим через $p_i$ число интервалов монотонности функции $F_i$, и пусть $p = \max\limits_i p_i$. Индукцией по $k$ легко показать, что для любых $z \in \mathrm{CB}\Phi$ и $\lambda \in \Lambda$ ($|\lambda| = k$) справедливо неравенство
$$\operatorname{Var} z^{[\lambda]} \leqslant p^k \operatorname{Var} z + 2\,(\,p^k - 1\,)\,\|z\|,$$
поэтому $\|z^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}} \leqslant 3p^k \|z\|_{\mathrm{BV}}$. Следовательно, для любых $x \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\mathrm{V}[\Lambda]$ и $\mu \in \Lambda$ ($|\mu| = m$) имеем
$$\|x_\mu^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}} \leqslant 3p^k M_m(x), \qquad M_m^k(x) \leqslant 3p^k M_m(x),$$
$$\sum_n |\,\theta\,|^n \sum_{k+m=n} |\alpha_k| \cdot M_m^k(x) \leqslant 3\Big(\sum_k |\,\theta\,|^k p^k |\alpha_k|\Big) \cdot \Big(\sum_m |\,\theta\,|^m M_m(x)\Big) < \infty$$
при малых $\theta$ (в силу сходимости ряда $\displaystyle\sum_k \theta^k \alpha_k$). Значит, $x \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$.

**Лемма 9.1.** *Если* $x, y \in \mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$, *то* $x * y \in \mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включения $x, y \in \mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$ и сходимость ряда $\sum\limits_k \theta^k \alpha_k$ влекут при малых $\theta$ оценки

$$\sum_r |\,\theta\,|^r \sum_{k+m=r} |\alpha_k| \cdot M_m^k(x) < \infty,$$

$$\sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{r+n=s} \Big( \sum_{k+m=r} |\alpha_k| \cdot M_m^k(x) \Big) \cdot M_n^r(y) < \infty.$$

Для произвольных слов $\lambda \in \Lambda$ длины $k$ и $\varrho \in \Lambda$ длины $r$ имеем

$$\Big\| \sum_{\mu\nu=\varrho} x_\mu^{[\lambda]} y_\nu^{[\lambda\mu]} \Big\|_{\mathrm{BV}} \leqslant 2 \sum_{\mu\nu=\varrho} \|x_\mu^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}} \cdot \|y_\nu^{[\lambda\mu]}\|_{\mathrm{BV}} \leqslant 2 \sum_{m+n=r} M_m^k(x) \cdot M_n^{k+m}(y),$$

$$M_r^k(x * y) \leqslant 2 \sum_{m+n=r} M_m^k(x) \cdot M_n^{k+m}(y),$$

$$\sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+r=s} |\alpha_k| \cdot M_r^k(x * y) \leqslant 2 \sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+m+n=s} |\alpha_k| \cdot M_m^k(x) \cdot M_n^{k+m}(y) < \infty,$$

поэтому $x * y \in \mathrm{C}\hat{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$.

**Лемма 9.2.** *Если* $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$, *то* $\Phi$*-интегральные операторы* $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ : $\mathrm{C}[\Lambda] \to \mathrm{C}[\Lambda]$ *такие, что* $(\mathcal{Q}x)(t) \doteq \int_\alpha^t (dQ * x)$ *и* $(\mathcal{Q}'y)(\tau) \doteq \int_\tau^\alpha (y * dQ)$, *действуют из* $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ *в* $\tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оператора $\mathcal{Q}$ утверждение уже доказано (см. лемму 8.2). Для любого слова $\nu$ длины $n$ справедливо

$$\Big\| \sum_{\lambda\mu=\nu} \int_\tau^\alpha (y_\lambda \cdot dQ_\mu^{[\lambda]}) \Big\| \leqslant \sum_{\lambda\mu=\nu} \|y_\lambda\| \cdot \|Q_\mu^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \sum_{k+m=n} N_k(y) \cdot M_m^k(Q),$$

поэтому $N_n(\mathcal{Q}'y) \leqslant \sum\limits_{k+m=n} N_k(y) \cdot M_m^k(Q)$. Условие $y \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ означает, что ряд $\sum\limits_k \theta^k N_k(y)$ сходится при малых $\theta$, а поскольку $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$, то

$$\sum_n |\,\theta\,|^n N_n(\mathcal{Q}'y) \leqslant \sum_n |\,\theta\,|^n \sum_{k+m=n} N_k(y) \cdot M_m^k(Q) < \infty, \qquad \mathcal{Q}'y \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda].$$

**Лемма 9.3.** *Пусть* $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$, $Q_\varepsilon \equiv \mathrm{const}$. *Для решения* $\Phi$*-интегрального уравнения* $X(t) - \int_\alpha^t (dQ * X) = e$ *справедливо включение* $X \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение эквивалентно рекурсии

$$X_\varepsilon(t)=1, \qquad X_\varrho(t)=\sum_{\substack{\mu\nu=\varrho\\ \mu\neq\varepsilon}}\int_\alpha^t (dQ_\mu\cdot X_\nu^{[\mu]}), \quad \varrho\neq\varepsilon,$$

следовательно, для произвольных слов $\lambda,\varrho\in\Lambda$, $|\lambda|=k$, $|\varrho|=r\geqslant 1$, справедливы равенства

$$X_\varrho^{[\lambda]}(t)=\sum_{\mu\nu=\varrho}\int_\alpha^{F^\lambda(t)}(dQ_\mu\cdot X_\nu^{[\mu]})=$$

$$=\sum_{\mu\nu=\varrho}\int_\alpha^{F^\lambda(\alpha)}(dQ_\mu\cdot X_\nu^{[\mu]})+\sum_{\mu\nu=\varrho}\int_{F^\lambda(\alpha)}^{F^\lambda(t)}(dQ_\mu\cdot X_\nu^{[\mu]}).$$

Первое слагаемое равно $\mathrm{const}$. Во втором слагаемом для любых $\lambda,\mu\in\Lambda$ справедливо включение $Q_\mu^{[\lambda]}\in\mathrm{BV}$ (в силу включения $Q\in\mathrm{C\tilde{B}\Phi}[\Lambda]$), а так как $X_\nu^{[\mu]}\in\mathrm{C}$, то в соответствии с утверждением 8.1 имеет место равенство $X_\varrho^{[\lambda]}(t)=\mathrm{const}+\sum\limits_{\mu\nu=\varrho}\int_\alpha^t(dQ_\mu^{[\lambda]}\cdot X_\nu^{[\lambda\mu]})$, следовательно,

$$\mathrm{Var}\,X_\varrho^{[\lambda]}\leqslant\sum_{\mu\nu=\varrho}\mathrm{Var}\int_\alpha^t(dQ_\mu^{[\lambda]}\cdot X_\nu^{[\lambda\mu]})\leqslant\sum_{\mu\nu=\varrho}\mathrm{Var}\,Q_\mu^{[\lambda]}\cdot\|X_\nu\|. \tag{9.5}$$

Введем в рассмотрение величину

$$V_m^k(Q)\doteq\max_{\substack{\lambda:\ |\lambda|=k\\ \mu:\ |\mu|=m}}\mathrm{Var}\,Q_\mu^{[\lambda]}.$$

Ясно, что $V_m^k(Q)\leqslant M_m^k(Q)$, поэтому условие $Q\in\mathrm{C\tilde{B}\Phi}[\Lambda]$ означает, что если ряд $\sum\limits_k\theta^k\alpha_k$ сходится при малых $\theta$, то ряды

$$\sum_r|\,\theta\,|^r\sum_{k+m=r}|\alpha_k|\cdot M_m^k(Q)\quad\text{и}\quad\sum_r|\,\theta\,|^r\sum_{k+m=r}|\alpha_k|\cdot V_m^k(Q)$$

тоже сходятся. Из (9.5) следуют неравенства $V_r^k(X)\leqslant\sum\limits_{m+n=r}V_m^k(Q)\cdot N_n(X)$, следовательно, при малых $\theta$ имеем

$$\sum_s|\,\theta\,|^s\sum_{k+r=s}|\alpha_k|\cdot V_r^k(X)\leqslant\sum_s|\,\theta\,|^s\sum_{k+m+n=s}|\alpha_k|\cdot V_m^k(Q)\cdot N_n(X)=$$

$$=\sum_s|\,\theta\,|^s\sum_{r+n=s}\Big(\sum_{k+m=r}|a_k|\cdot V_m^k(Q)\Big)N_n(X)=$$

$$=\Big(\sum_r|\,\theta\,|^r\sum_{k+m=r}|\alpha_k|\cdot V_m^k(Q)\Big)\cdot\Big(\sum_n|\,\theta\,|^n\cdot N_n(X)\Big)<\infty.$$

Неравенство $\|X_\varrho^{[\lambda]}\|_{\mathrm{BV}} \leqslant \|X_\varrho\| + \operatorname{Var} X_\varrho^{[\lambda]}$ влечет $M_r^k(X) \leqslant N_r(X) + V_r^k(X)$, поэтому

$$\sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+r=s} |\alpha_k| \cdot M_r^k(X) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+r=s} |\alpha_k| \cdot N_r(X) + \sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+r=s} |\alpha_k| \cdot V_r^k(X) =$$

$$= \Big( \sum_k |\,\theta\,|^k |\alpha_k| \Big) \cdot \Big( \sum_r |\,\theta\,|^r N_r(X) \Big) + \sum_s |\,\theta\,|^s \sum_{k+r=s} |\alpha_k| \cdot V_r^k(X) < \infty,$$

следовательно, $X \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$.

**Теорема 9.2.** *Пусть* $Q \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$, $Q_\varepsilon \equiv \mathrm{const}$, $f, g \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$. *Для решений уравнений* (iii.2) *и* (iii.5) *справедливы включения* $x, y \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $x \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ уже доказано (см. теорему 8.2). Для решения уравнения из леммы 9.3 имеет место включение $X \in \mathrm{C}\tilde{\mathrm{B}}\Phi[\Lambda]$. Так как $X_\varepsilon \equiv 1$, то ряд $X$ обратим, причем в силу леммы 8.1 имеет место включение $X^{-1} \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$. В силу теоремы 9.1 и утверждения 7.3 справедливы равенства

$$y(\tau) = g(\tau) + \int_\tau^\alpha (g(s) * d_s(X(s) * X^{-1}(\tau))) = g(\tau) + \int_\tau^\alpha (g * dX) * X^{-1}(\tau).$$

Таким образом, в силу леммы 9.2 включение $g \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ влечет включения $\int_\tau^\alpha (g * dX) \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$ и $y \in \tilde{\mathrm{C}}[\Lambda]$.

# ГЛАВА IV. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ УРАВНЕНИЙ

Следуя [15, с. 143], *импульсным* мы называем уравнение

$$\dot{x}(t) = B\big(t, x(t)\big)\,\dot{Q}(t), \tag{iv.1}$$

заданное в терминах обобщенных функций. Через $x$ и $Q$ обозначены соответственно $n$-мерная и $m$-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $B:\Omega \to \mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{C}^n$. Считается, что левая и правая части уравнения определяют линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) в пространстве основных функций $D$, а само уравнение (iv.1) понимается как математическая запись задачи нахождения таких *прерывистых* функций $x(\cdot)$, для которых при всех $\varphi \in D$ справедливо равенство $(\dot{x},\varphi) = \big(B(\cdot,x)\,\dot{Q},\varphi\big)$.

Непрерывные функции $x: K \to \mathbb{C}$, где $K$ — это отрезок или интервал, обладают достаточно высокой степенью регулярности («порядка»), заключающейся в том, что близость аргументов влечет близость значений непрерывной функции. «Не слишком разрывные» *прерывистые* функции тоже обладают хорошей регулярностью (в англоязычной литературе они так и называются — regulated functions, то есть упорядоченные функции). Они обладают тем свойством, что во всех точках $t \in K$ (кроме крайних) определены три значения $x(t-0)$, $x(t)$ и $x(t+0)$, что позволяет конструировать другие сопутствующие атрибуты функций и получать новые результаты.

Совокупность $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}[a,b]$ *прерывистых* функций, то есть функций $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ при всех $t \in (a,b]$ и $x(t+0)$ при всех $t \in [a,b)$, является банаховой алгеброй по sup-норме.

В алгебре $\mathrm{G}$ исследована параметрическая решетка $\big\{\,\mathrm{G}^T\,\big\}_{T\in\mathbb{T}(K)}$ подалгебр специального вида и подалгебра $\Gamma$, представляющая их пересечение. Она содержит в себе алгебру $\mathrm{BV}$ функций ограниченной вариации. В алгебре $\mathrm{G}^T$ определены проекторы $P_{\scriptscriptstyle T} : x \to x_{\scriptscriptstyle T}$ и $P^{\scriptscriptstyle T} : x \to x^{\scriptscriptstyle T}$. В алгебре $\Gamma$ [и в $\mathrm{BV}$] определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$. Исследованы вопросы существования интегралов Римана–Стилтьеса от функций-проекций функций алгебр $\mathrm{G}^T$, $\Gamma$ и $\mathrm{BV}$. Доказана полнота алгебр (в каждой алгебре используется собственная норма). Получены соотношения между нормами.

В алгебре $\mathrm{G}^T$ вводятся понятия присоединенного умножения и присоединенного интеграла. Если $x, y \in \mathrm{G}^T$, то

$$x\cdot y \doteq x^{\scriptscriptstyle T}y^{\scriptscriptstyle T} - x_{\scriptscriptstyle T}y_{\scriptscriptstyle T} \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t x\cdot dy \doteq \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T}dy^{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T}dy_{\scriptscriptstyle T}.$$

В алгебре $\Gamma$ [и в $\mathrm{BV}$] вводятся понятия присоединенного умножения и присоединенного интеграла. Если $x, y \in \Gamma$ [или $x, y \in \mathrm{BV}$], то

$$x \circ y \doteq x^c y^c - x_c y_c \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t x \circ dy \doteq \int_\alpha^t x^c dy^c - \int_\alpha^t x_c dy_c.$$

Далее через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a, b)$ обозначаем алгебру *прерывистых* функций, определенных на интервале $K \doteq (a, b)$. Для любого $x \in \mathrm{G}$ определены обобщенная прерывистая функция $(x, \varphi)$ и обобщенная производная прерывистой функции $(x', \varphi)$. Присоединенные интегралы порождают присоединенные обобщенные производные прерывистых функций, соответственно $(\dot{x}, \varphi)^\tau$ и $(\overset{\circ}{x}, \varphi)$. Следовательно, определены 3 типа дифференциальных уравнений вида (iv.1), заданных в терминах обобщенных прерывистых функций.

Потенциальные возможности предложенных конструкций демонстрирует теорема 18.2. *Пусть* $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $A$ *— комплексная* $n \times n$ *-матрица,* $X = \{x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\}$. *Для оператора* $\mathrm{V} : X^n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *такого, что* $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t Ax\, dQ$, *и для любого* $y \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство решений уравнения* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\overset{\circ}{y}, \varphi)$ *представимо в виде*

$$x(t) = e^{AQ^c(t)} \Big[ h(t) + \int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\, dy^c \Big] \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[\, K \backslash T(Q)].$$

*Совокупность* $x(t) = e^{AQ^c(t)} \Big[ c + \displaystyle\int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\, dy^c \Big]$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Использованы обозначения: $T(x)$ — не более чем счетное множество, состоящее из всех точек разрыва функции $x \in \mathrm{G}$; для любого $M \subseteq K$ алгебра $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[M]$ состоит из функций скачков $x : K \to \mathbb{C}$ таких, что $T(x) \subseteq M$.

Результаты главы опубликованы в работах [88–90, 98–101].

## § 10 . Банахова алгебра $\mathrm{G}[a, b]$ прерывистых функций

**10.1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения.** Зафиксируем отрезок $K \doteq [a, b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}[a, b] \doteq \mathrm{G}(K; \mathbb{C})$ обозначим пространство *прерывистых* (см. [58, с. 16]) функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t - 0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t-0} x(\tau)$ при всех $t \in (a, b]$ и $x(t + 0) \doteq \lim\limits_{\tau \to t+0} x(\tau)$ при всех $t \in [a, b)$. Пространство $\mathrm{G}$, наделенное естественной операцией умножения функций, является алгеброй над полем $\mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем называть $\mathrm{G}$ как пространством, так и алгеброй. Через $\mathrm{G}_L$ обозначим подпространство (подалгебру) в $\mathrm{G}$, состоящее из тех функций, что $x(t - 0) = x(t)$ при $t \in (a, b]$ и $x(a + 0) = x(a)$. Симметричное подпространство (подалгебра) $\mathrm{G}_R$ состоит из тех функций, что $x(t+0) = x(t)$ при $t \in [a,b)$ и $x(b-0) = x(b)$. Функции из $\mathrm{G}_{\scriptscriptstyle L}$ будем называть непрерывными слева, а функции из $\mathrm{G}_{\scriptscriptstyle R}$ — непрерывными справа прерывистыми функциями. Через $\mathrm{G}_0$ обозначим пространство (алгебру) таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{\, t \in K : |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ состоит из конечного числа точек.

Функция $x : K \to \mathbb{C}$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$, что на каждом интервале $(\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k = 1, \ldots, n$, функция $x$ тождественно равна константе $c_k \in \mathbb{C}$. Очевидно, всякая ступенчатая функция — прерывистая. Более того, имеет место

**Утверждение 10.1.** (См. [58, с. 16].) *Для функции* $x\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *следующие утверждения эквивалентны*:

1) $x \in \mathrm{G}[a,b]$;

2) $x$ *есть равномерный* (*на* $[a,b]$) *предел последовательности ступенчатых функций*;

3) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует разбиение* $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ *такое, что при всех* $k = 1, \ldots, n$ *справедливо* $\sup\limits_{\tau, s \,\in\, (\tau_{k-1}, \tau_k)} |x(s) - x(\tau)| < \varepsilon$.

Третий пункт означает, что колебание функции $x$ на каждом интервале $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ не превышает $\varepsilon$. Справедливы следствия утверждения 10.1:

1) *равномерный предел последовательности прерывистых функций есть функция прерывистая*;

2) *если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *то* $x$ *ограничена и измерима, а само пространство* $\mathrm{G}[a,b]$ *банахово по норме* $\|x\| \doteq \sup\limits_{t \,\in\, [a,b]} |x(t)|$ (*более того,* $\mathrm{G}[a,b]$ *является банаховой алгеброй*) *и является замыканием пространства ступенчатых функций по* sup-*норме.*

**Утверждение 10.2.** (См. [58, с. 17].)

1. *Для любых* $x \in \mathrm{G}[a,b]$ *и* $\varepsilon > 0$ *множества*

$$\bigl\{\, t \in (a,b] : \ |x(t-0) - x(t)| \geqslant \varepsilon \bigr\} \quad \textit{и} \quad \bigl\{\, t \in [a,b) : \ |x(t+0) - x(t)| \geqslant \varepsilon \bigr\}$$

*состоят из конечного числа точек.*

2. *Множество* $T(x)$, *состоящее из всех точек разрыва прерывистой функции* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, *не более чем счетно.*

Имеет место диаграмма включения функциональных пространств, определенных на отрезке $[a,b]$ (отношение включения обозначаем стрелкой):

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{AC} & \to & \mathrm{CBV} & \to & \mathrm{C} & \to & \mathrm{KC} & & \\ & & & \searrow & & & & \searrow & \\ & & & & \mathrm{BV} & & \to & & \mathrm{G} \to \mathrm{R} \to \mathrm{L}\,, \end{array} \tag{10.1}$$

где AC, C, KC — пространства абсолютно непрерывных, непрерывных и кусочно-непрерывных функций соответственно, R и L — пространства интегрируемых по Риману и интегрируемых по Лебегу функций соответственно, BV — пространство функций ограниченной вариации, $\mathrm{CBV} \doteq \mathrm{BV} \cap \mathrm{C}$. Все включения в диаграмме строгие. Приведем подтверждающие примеры.

**Пример 10.1.** Пусть функция $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(t) = t\left\{\frac{1}{t}\right\}$ при $t \neq 0$ (выражение $\{\sigma\}$ обозначает дробную часть $\sigma \in \mathbb{R}$), $x(0) = 0$. Если $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,]$, $k = 1, 2, \ldots$, то имеем $x(t) = 1 - kt$, следовательно, $x$ непрерывна слева, разрывна справа в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$, то есть $T(x) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, и имеет неограниченное изменение (скачки функции образуют гармонический ряд). Таким образом, $x \in \mathrm{G}[0,1]$, $x \notin \mathrm{BV}[0,1]$, $x \notin \mathrm{KC}[0,1]$.

**Пример 10.2.** Пусть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что $x(t) = (-1)^{[1/t]}$ при $t \neq 0$ (выражение $[\,\sigma\,]$ обозначает целую часть числа $\sigma \in \mathbb{R}$), $x(0) = 0$. Если $t \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,]$, $k = 1, 2, \ldots$, то $x(t) = (-1)^k$, следовательно, функция $x$ ограничена и разрывна в нуле и в точках $\tau_k = \frac{1}{k+1}$. Значит, $x \in \mathrm{R}[0,1]$, однако $x \notin \mathrm{G}[0,1]$ (так как нет предела $x(0+)$).

Если $x \in \mathrm{G}[a,b]$, то согласно [27] первообразная $y(t) \doteq \displaystyle\int_a^t x(s)ds$ есть регулярно гладкая функция, другими словами, $y \in \mathrm{RS}[a,b]$. В работе также показано, что $\mathrm{RS} \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}_{L} \approx \mathbb{R} \times \mathrm{G}_{R}$ и $\mathrm{KC}^{(1)} \subset \mathrm{RS} \subset \mathrm{Lip}$, то есть пространство регулярно гладких функций заключено между пространством кусочно-гладких и липшицевых функций. Следует еще отметить, что RS является замыканием пространства кусочно-линейных функций по липшицевой норме (одномерной норме Гёльдера).

Прерывистые функции можно интегрировать не только в смысле Римана, но и в более расширительном смысле: в смысле Римана–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса [18], в квазиинтегральном смысле [91, 92]. Приведем формулировку для интеграла Римана–Стилтьеса [11].

**Утверждение 10.3.** *Для любых $x \in \mathrm{G}[a,b]$ и $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$ интегралы Римана–Стилтьеса $\displaystyle\int_a^b xdy$ и $\displaystyle\int_a^b y\,dx$ существуют и справедливы оценки*

$$\left|\int_a^b xdy\right| \leqslant \|x\| \cdot \operatorname*{Var}_K y \qquad \text{и} \qquad \left|\int_a^b xdy\right| \leqslant \sup_{t\in(a,b)} |x(t)| \cdot \operatorname*{Var}_K y.$$

Справедливы следующие следствия утверждения 10.3.

1. *Если последовательность $\{\,x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}[a,b]$, сходится по* sup*-норме к (прерывистой) функции $x \in \mathrm{G}[a,b]$, а $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, то*

$$\lim_n \int_a^b x_n dy = \int_a^b xdy.$$

2. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, *а последовательность* $\{\, y_n\}$ *такова, что* $y_n \in \mathrm{CBV}[a,b]$ *и* $\operatorname*{Var}_K (y_n - y) \underset{n}{\to} 0$, *то*

$$\lim_n \int_a^b x dy_n = \int_a^b x dy.$$

3. *Если* $x \in \mathrm{G}[a,b]$, $y \in \mathrm{CBV}[a,b]$, $z(t) \doteq \int_\alpha^t x dy$, $t \in [a,b]$ *(где точка* $\alpha \in [a,b]$ *фиксирована), то* $z \in \mathrm{CBV}[a,b]$. *В частности, если* $y \in \mathrm{AC}[a,b]$, *то* $z \in \mathrm{AC}[a,b]$.

**Теорема 10.1.** *Пусть* $A$ *— комплексная* $n \times n$*-матрица,* $q \in \mathrm{CBV}[a,b]$. *Для* $\alpha \in [a,b]$ *и вектор-функций* $x, y \in \mathrm{G}^n[a,b]$ *справедливо*

$$y(t) = x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dq \iff x(t) = y(t) - \int_\alpha^t \left[\, d\, e^{A(q(t)-q(s))}\,\right] y(s)$$
$$\iff x(t) = e^{Aq(t)} \Big[ e^{-Aq(\alpha)}\, y(\alpha) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy \Big]. \quad (10.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ввести обозначение $z \doteq e^{-Aq(\cdot)}\, x$, то из первого равенства следуют цепочки

$$y(t) = e^{Aq(t)}\, z(t) - \int_\alpha^t A e^{Aq(\cdot)} z\, dq =$$
$$= e^{Aq(t)}\, z(t) - \int_\alpha^t \left[\, d\, e^{Aq(\cdot)}\,\right] z = e^{Aq(\alpha)}\, z(\alpha) + \int_\alpha^t e^{Aq(\cdot)}\, dz,$$

$$z(t) - z(\alpha) = \int_\alpha^t dz = \int_\alpha^t e^{-Aq(s)}\, d\Big( \int_\alpha^s e^{Aq(\cdot)}\, dz \Big) = \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy.$$

Возвращаясь к исходной переменной $x$ (с учетом $x(\alpha) = y(\alpha)$), получаем третье равенство. (Процедура доказательства обратима: из третьего равенства легко получается первое.) Эквивалентность второго и третьего равенств следуют из формулы интегрирования по частям.

### 10.2. Банаховы подалгебры $\mathrm{G}_0[a,b]$, $\mathrm{G}_L[a,b]$ и $\mathrm{G}_R[a,b]$.

**Утверждение 10.4.** *Для функции* $x : [a,b] \to \mathbb{C}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

a) $x \in \mathrm{G}_0$;
b) $x \in \mathrm{G}$ *и* $x(t-0) = 0$ *для всех* $t \in (a,b]$;
c) $x \in \mathrm{G}$ *и* $x(t+0) = 0$ *для всех* $t \in [a,b)$;
d) $x \in \mathrm{G}$ *и* $\int_\tau^t x(s)\, ds = 0$ *для всех* $\tau, t \in [a,b]$;
e) $x \in \mathrm{G}$ *и* $\int_\tau^t x dy = 0$ *для всех* $\tau, t \in [a,b]$ *и любых* $y \in \mathrm{CBV}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равносильность утверждений $a) - d)$ показана в [58, с. 19], а импликация $e) \Rightarrow d)$ тривиальна.

$a) \Rightarrow e)$. Зафиксируем $\tau, t \in [a,b]$ (считаем $\tau < t$), функцию $y \in \mathrm{CBV}$ и $\varepsilon > 0$. Точки $\tau$, $t$ и все точки конечного множества $\bigl\{s \in [\tau,t] : |x(s)| \geqslant \varepsilon\bigr\}$ порождают такое разбиение $\tau = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t$, что $|x(s)| < \varepsilon$ для всех $s \in (s_{k-1}, s_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\Bigl|\int_\tau^t xdy\,\Bigr| \leqslant \sum_{k=1}^n \Bigl|\int_{s_{k-1}}^{s_k} xdy\,\Bigr| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^n \operatorname*{Var}_{[s_{k-1},s_k]} y = \varepsilon \operatorname*{Var}_{[\tau,t]} y\,,$$

поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\displaystyle\int_\tau^t xdy = 0.$

**Пример 10.3.** Примером прерывистой функции из $\mathrm{G}_0$ служит функция Римана, то есть функция $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ такая, что $x = \frac{1}{n}$ в каждой не равной нулю рациональной точке $r = \frac{m}{n}$ $(m \neq 0)$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая рациональная дробь, и $x = 0$ во всех остальных точках отрезка $[0,1]$. Эта функция разрывна во всех нетривиальных рациональных точках, а в иррациональных точках она непрерывна.

**Утверждение 10.5.** (См. [58, с. 20].) 1. *Пространства* $\mathrm{G}_0$, $\mathrm{G}_L$ *и* $\mathrm{G}_R$ *замкнуты в* $\mathrm{G}$ *относительно* sup-*нормы и, следовательно, банаховы.*

2. *Произвольная функция* $x \in \mathrm{G}$ *единственным образом представима в виде суммы* $x = x_L + x_0$ *двух функций* $x_L \in \mathrm{G}_L$ *и* $x_0 \in \mathrm{G}_0$. *Симметричное представление* $x = x_R + x_0$, *где* $x_R \in \mathrm{G}_R$, $x_0 \in \mathrm{G}_0$, *также имеет место.*

В процессе доказательства утверждения 10.5 в [58] устанавливается, что $\mathrm{G}_L \cap \mathrm{G}_0 = \{0\}$. Таким образом, пространство $\mathrm{G}$ представимо в виде прямой суммы двух замкнутых подпространств: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_L \oplus \mathrm{G}_0$ или $\mathrm{G} = \mathrm{G}_R \oplus \mathrm{G}_0$. При этом операторы $\mathrm{P}, \mathrm{Q} : \ \mathrm{G} \to \mathrm{G}$,

$$\mathrm{P} :\, x(t) \to x_L(t) \doteq \begin{cases} x(a+0), & t = a, \\ x(t-0), & t \in (a,b], \end{cases}$$

$$\mathrm{Q} :\, x(t) \to x_R(t) \doteq \begin{cases} x(t+0), & t \in [a,b), \\ x(b-0), & t = b, \end{cases}$$

обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{Im}\mathrm{P} = \mathrm{G}_L, \quad \operatorname{Ker}\mathrm{P} = \mathrm{G}_0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_R, \quad \operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_0,$$
$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}, \quad \mathrm{PQ} = \mathrm{P}, \quad \mathrm{QP} = \mathrm{Q}, \quad \mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}. \qquad (10.3)$$

Проекторы $\mathrm{P}$ и $\mathrm{Q}$ непрерывны по sup-норме, что следует из неравенств

$$\|\mathrm{P}x\| \leqslant \|x\| \quad \text{и} \quad \|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|x\| \qquad \forall\, x \in \mathrm{G}. \qquad (10.4)$$

В частности, $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{Q}x\|$ для всех $x \in \mathrm{G}$. Действительно, в соответствии с (10.3) и (10.4) имеем $\|\mathrm{P}x\| = \|\mathrm{PQ}x\| \leqslant \|\mathrm{Q}x\|$, и аналогично $\|\mathrm{Q}x\| \leqslant \|\mathrm{P}x\|$.

*Если* $x \in \mathrm{G}_0$, *а* $y \in \mathrm{G}$, *то* $xy = yx \in \mathrm{G}_0$. Действительно, при $y(t) \equiv 0$ утверждение очевидно, если же $y(t) \not\equiv 0$, то $\|y\| > 0$, поэтому множество $\{ t \in K : |x(t)\, y(t)| \geqslant \varepsilon \} \subseteq \{ t \in K : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{\|y\|} \}$ конечно при любом $\varepsilon > 0$, то есть $xy \in \mathrm{G}_0$. Таким образом, $\mathrm{G}_0$ является двусторонним идеалом в $\mathrm{G}$, причем если функции $x, y \in \mathrm{G}$ считать эквивалентными $(x \sim y)$ при $x - y \in \mathrm{G}_0$, то $\mathrm{G}_L \approx \mathrm{G}/\mathrm{G}_0 \approx \mathrm{G}_R$. Другими словами, в каждом классе эквивалентности имеются ровно одна непрерывная слева и ровно одна непрерывная справа прерывистые функции ($x \sim \mathrm{P}x \sim \mathrm{Q}x$). Заметим также, что операторы $\mathrm{P}$ и $\mathrm{Q}$ являются эндоморфизмами алгебры $\mathrm{G}$, а их ядро $\operatorname{Ker}\mathrm{P} = \operatorname{Ker}\mathrm{Q} = \mathrm{G}_0$ является двусторонним идеалом этой алгебры.

## § 11 . Подалгебры $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$ алгебры $\mathrm{G}[a,b]$

**11.1. Параметрическая решетка алгебр $\mathrm{G}^T[a,b]$ и алгебра $\Gamma[a,b]$.** Конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* отрезка $K \doteq [a,b]$, а совокупность всех разбиений отрезка $K$ обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в совокупность $\mathbb{T}(K)$, — оно является наименьшим элементом частичного порядка, определенного на множестве $\mathbb{T}(K)$ естественным образом: разбиение $T$ предшествует разбиению $S$, если $T \subseteq S$.

Зафиксируем $T \in \mathbb{T}(K)$. Для функции $x \in \mathrm{G}$ определены скачки

$$x_k^- \doteq x(\tau_k - 0) - x(\tau_k), \quad x_k^+ \doteq x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) \quad \forall\, \tau_k \in T. \tag{11.1}$$

(Полагаем по определению: $x_k^- = 0$, если окажется, что $a = \tau_k$ для некоторого $k$, и $x_k^+ = 0$, если окажется, что $b = \tau_k$ для некоторого $k$.)

Через $\lceil x \rceil_T$ обозначим ряд (и его сумму, если ряд сходится)

$$\lceil x \rceil_T \doteq \sum_{\tau_k \in T} (|x_k^-| + |x_k^+|), \tag{11.2}$$

а через $\mathrm{G}^T \doteq \mathrm{G}^T[a,b]$ обозначим совокупность всех тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_T$ сходится. Поскольку $T$ — не более чем счетное множество, то ряд $\lceil x \rceil_T$ трактуется естественным образом: $|x_1^-| + |x_1^+| + |x_2^-| + |x_2^+| + \ldots$. Относительно естественных операций сложения и умножения $\mathrm{G}^T$ является алгеброй над полем $\mathbb{C}$. Действительно, если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то справедливы равенства

$$u_k^- = \lambda x_k^-, \quad u_k^+ = \lambda x_k^+, \quad v_k^- = x_k^- + y_k^-, \quad v_k^+ = x_k^+ + y_k^+,$$

$$w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y(\tau_k - 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k),$$

$$w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y(\tau_k + 0) - x(\tau_k)\, y(\tau_k), \tag{11.3}$$

поэтому $w_k^- = x(\tau_k - 0)\, y_k^- + x_k^-\, y(\tau_k), \quad w_k^+ = x(\tau_k + 0)\, y_k^+ + x_k^+\, y(\tau_k),$

$$\lceil u \rceil_T = |\lambda| \cdot \lceil x \rceil_T < \infty, \quad \lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T < \infty,$$

$$\lceil w \rceil_T \leqslant \|x\| \cdot \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \cdot \|y\| < \infty.$$

Следовательно, $u, v, w \in \mathrm{G}^T$.

Если $T$ — конечное множество, то справедливо равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$, в частности, $\mathrm{G}^{\varnothing} = \mathrm{G}$. Всякая функция ограниченной вариации принадлежит $\mathrm{G}^T$, каково бы ни было $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, если $x \in \mathrm{BV}$ и $S \doteq T \cap T(x)$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in T \backslash S$, следовательно, $\lceil x \rceil_T = \lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty$, поэтому $x \in \mathrm{G}^T$. Таким образом, для любого $T$ справедливо $\mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}$, а так как любая непрерывная функция, имеющая неограниченное изменение, принадлежит $\mathrm{G}^T$, то первое включение — строгое. Более того, между $\mathrm{BV}$ и $\mathrm{G}^T$ заключено пространство $\Gamma \doteq \Gamma[a, b]$, состоящее из тех функций $x \in \mathrm{G}$, что ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится. Примером функции из $\mathrm{G}$, не принадлежащей $\Gamma$, служит функция из примера 10.1. Так же как это сделано для пространств $\mathrm{G}^T$ (см. (11.3)), доказывается, что $\Gamma$ — это алгебра. Действительно, если $T \doteq T(x) \cup T(y)$, то

$$T(u) \subseteq T(x), \quad T(v) \subseteq T, \quad T(w) \subseteq T,$$

$$\lceil u \rceil_{T(u)} = |\lambda|\, \lceil x \rceil_{T(x)} < \infty,$$

$$\lceil v \rceil_{T(v)} = \lceil v \rceil_T \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil y \rceil_T = \lceil x \rceil_{T(x)} + \lceil y \rceil_{T(y)} < \infty,$$

$$\lceil w \rceil_{T(w)} = \lceil w \rceil_T \leqslant \|x\|\, \lceil y \rceil_T + \lceil x \rceil_T \|y\| = \|x\|\, \lceil y \rceil_{T(y)} + \lceil x \rceil_{T(x)} \|y\| < \infty.$$

Заметим, что $\mathrm{KC} \subset \Gamma$ и $\mathrm{BV} \subset \Gamma$, поэтому имеет место диаграмма включения подалгебр алгебры $\mathrm{G}$ прерывистых функций (см. (10.1)):

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{CBV} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
& & \mathrm{BV} & \to \ \Gamma & \to & \left\{ \mathrm{G}^T \right\}_{T \in \mathbb{T}(K)} & \to \ \mathrm{G}.
\end{array} \tag{11.4}$$

Относительно решетки алгебр $\{ \mathrm{G}^T \}$ в зависимости от параметра $T \in \mathbb{T}(K)$ отметим следующее. Назовем разбиения $T$ и $S$ *эквивалентными* ($T \sim S$), если их симметрическая разность конечна, то есть $\operatorname{card}(T \Delta S) < \infty$. Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ очевидны, а транзитивность следует из известного тождества $T \Delta S = (T \Delta R)\, \Delta\, (R \Delta S)$. Очевидно, все конечные разбиения эквивалентны между собой.

**Лемма 11.1.** *Пусть* $T, S \in \mathbb{T}(K)$.

1. *Если* $S \subseteq T$, *то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$.
2. $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *тогда и только тогда, когда* $T \sim S$.
3. *Если* $U = T \cup S$, *то* $\mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S = \mathrm{G}^U$.
4. *Если* $V = T \cap S$, *то* $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. При $x \in \mathrm{G}^T$ и $S \subseteq T$ справедливы неравенства $\lceil x \rceil_S \leqslant \lceil x \rceil_T < \infty$, поэтому $x \in \mathrm{G}^S$.

2. Пусть $T \sim S$, то есть разбиение $T \Delta S$ конечно. Справедливо тождество $T \Delta S = Q \cup R$, где $Q \doteq T \backslash S$, $R \doteq S \backslash T$, следовательно, очевидное равенство $\lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_R = \lceil x \rceil_S + \lceil x \rceil_Q$ и конечность множеств $Q$ и $R$ означают, что ряды $\lceil x \rceil_T$ и $\lceil x \rceil_S$ сходятся или расходятся одновременно.

Обратно. Если $T$ и $S$ не эквивалентны, то, по крайней мере, одно из разбиений $Q$ или $R$ бесконечно. Допустим, что это $Q$. Тогда функция $x$, у которой $x(\tau_k) = \frac{1}{k}$ при $\tau_k \in Q$ и $x(t) = 0$ при $t \in K \backslash Q$, принадлежит $\mathrm{G}^S$, но не принадлежит $\mathrm{G}^T$. Действительно, включение $x \in \mathrm{G}_0$ очевидно, поэтому в силу утверждения 10.4 справедливо $x(\tau_k - 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap (a, b]$ и $x(\tau_k + 0) = 0$ при $\tau_k \in S \cap [a, b)$. Кроме того, $x(\tau_k) = 0$ для всех $\tau_k \in S$, следовательно, $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in S$, поэтому $x \in \mathrm{G}^S$. С другой стороны, $\lceil x \rceil_T \geqslant \lceil x \rceil_Q = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, поэтому $x \notin \mathrm{G}^T$.

3. Включения $T \subseteq U$ и $S \subseteq U$ влекут $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T$ и $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^S$, следовательно, $\mathrm{G}^U \subseteq \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$. Если же $x \in \mathrm{G}^T \cap \mathrm{G}^S$, то $x \in \mathrm{G}^T$ и $x \in \mathrm{G}^S$, поэтому $\lceil x \rceil_T < \infty$ и $\lceil x \rceil_S < \infty$, а так как $\lceil x \rceil_U \leqslant \lceil x \rceil_T + \lceil x \rceil_S < \infty$, то $x \in \mathrm{G}^U$.

4. Поскольку $V \subseteq T$ и $V \subseteq S$, то $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^V$ и $\mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$, следовательно, $\mathrm{G}^T \cup \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^V$.

**Лемма 11.2.** *Имеет место равенство* $\Gamma = \bigcap\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $\Gamma \subseteq \bigcap\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$ справедливо в силу включений $\Gamma \subset \mathrm{G}^T$. Если $x \in \bigcap\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для всех $T$, в частности, $x \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, то есть ряд $\lceil x \rceil_{T(x)}$ сходится, поэтому $x \in \Gamma$.

□

**11.2. Декомпозиция элементов алгебр $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$.** Функция Хевисайда $\theta(t) \doteq \begin{cases} 0 \ , & t \leqslant 0, \\ 1 \ , & t > 0, \end{cases}$ и произвольная точка $\tau \in K$ порождают ступенчатые функции $\xi_\tau(t) \doteq -\theta(\tau - t)$ и $\eta_\tau(t) \doteq \theta(t - \tau)$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: если $\tau = 0 \in K$, то $\xi(\cdot) \doteq \xi_0(\cdot)$ и $\eta(\cdot) \doteq \eta_0(\cdot)$, а если $\tau = \tau_k \in T$, то $\xi_k(\cdot) \doteq \xi_{\tau_k}(\cdot)$ и $\eta_k(\cdot) \doteq \eta_{\tau_k}(\cdot)$ :

$$\xi_k(t) = \begin{cases} -1 \ , & t < \tau_k, \\ 0 \ , & t \geqslant \tau_k, \end{cases} \qquad \eta_k(t) = \begin{cases} 0 \ , & t \leqslant \tau_k, \\ 1 \ , & t > \tau_k. \end{cases}$$

Хорошо известно, что для всякой функции $x : K \to \mathbb{C}$, непрерывной в точке $\tau \in K$, и для любых $\alpha, \beta \in K$ существуют интегралы Римана–Стилтьеса

$\int_\alpha^\beta x d\xi_\tau$ и $\int_\alpha^\beta x d\eta_\tau$, причем

$$\int_\alpha^\beta x d\xi_\tau = x(\tau)\int_\alpha^\beta d\xi_\tau \quad \text{и} \quad \int_\alpha^\beta x d\eta_\tau = x(\tau)\int_\alpha^\beta d\eta_\tau. \tag{11.5}$$

В дальнейшем мы будем иметь дело в основном с интегралами Римана–Стилтьеса и оговаривать название интеграла не будем.

*Для любых $\alpha \in K$ и $x \in \mathrm{G}^T$ функциональный ряд*

$$x_{\scriptscriptstyle T}(t) \doteq x_{\scriptscriptstyle T}(t,\alpha) \doteq -\sum_{\tau_k\in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \tag{11.6}$$

*абсолютно и равномерно на $K$ сходится,* так как

$$\sum_{\tau_k\in T}\Big| x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k\Big| + \sum_{\tau_k\in T}\Big| x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k\Big| \leqslant \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T} < \infty.$$

Сумму ряда будем обозначать так же, как и сам ряд, — через $x_{\scriptscriptstyle T}(t)$. В случае $T = \varnothing$ полагаем $x_{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 0$. В соответствии с[4], с. 336, функции вида (11.6) будем называть *функциями скачков.* Там же отмечается, что $x_{\scriptscriptstyle T} \in \mathrm{BV}$ и

$$\operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle T} = \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T}. \tag{11.7}$$

Здесь и в дальнейшем через $\operatorname{Var} y$ обозначаем полную вариацию функции $y$ на отрезке $K$. Наряду с (11.6) определена функция

$$x^{\scriptscriptstyle T}(t) \doteq x^{\scriptscriptstyle T}(t,\alpha) \doteq x(t) - x_{\scriptscriptstyle T}(t), \tag{11.8}$$

также зависящая от параметра $\alpha$. В дальнейшем мы считаем, что точка $\alpha \in K$ фиксирована, поэтому зависимость от $\alpha$ в обозначении функций $x_{\scriptscriptstyle T}$ и $x^{\scriptscriptstyle T}$ чаще всего будет отсутствовать. Заметим также, что ряд (11.6) более правильно следовало бы писать в виде

$$-\sum_{\tau_k\in T\cap(a,b]} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k \;+ \sum_{\tau_k\in T\cap[a,b)} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k,$$

подчеркивая его независимость от левого скачка функции $x$ в точке $a$ и от правого скачка в точке $b$, однако в соответствии с соглашением в (11.1) мы полагаем $x_k^- = 0$ при $\tau_k = a$ и $x_k^+ = 0$ при $\tau_k = b$, и в дальнейшем используем запись (11.6).

Поскольку $x_{\scriptscriptstyle T} \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T$, то $x^{\scriptscriptstyle T} \in \mathrm{G}^T$. Более того, в силу представления (11.6) справедливы равенства $(x_{\scriptscriptstyle T})_k^- = x_k^-$ и $(x_{\scriptscriptstyle T})_k^+ = x_k^+$, поэтому $(x^{\scriptscriptstyle T})_k^- =$

[4] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

$(x^T)^+_k = 0$ (см. (11.8)). Последнее равенство означает, в частности, что $x^T$ непрерывна в каждой точке разбиения $T$. Таким образом, *имеет место декомпозиция* $x = x^T + x_T$ *функций* $x \in \mathrm{G}^T$ *и справедливы равенства*

$$\lceil x_T \rceil_T = \lceil x \rceil_T < \infty, \quad \lceil x^T \rceil_T = 0,$$

$$(x_T)_T = x_T, \quad (x_T)^T = 0, \quad (x^T)_T = 0, \quad (x^T)^T = x^T. \tag{11.9}$$

Кроме того, легко показать, что *если* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^S$, *то*

$$(x_T)_S = x_{T\cap S}, \quad (x_T)^S = x_{T\setminus S}, \quad (x^T)_S = x_{S\setminus T}, \quad (x^T)^S = x^{T\cup S}. \tag{11.10}$$

Действительно, согласно лемме 11.1 справедливо $x, y \in \mathrm{G}^{T\cup S}$, поэтому все функции в формулах (11.10) определены. Если $z \doteq x_T$, $Q \doteq T\setminus S$, $P \doteq T\cap S$, $R \doteq S\setminus T$, то $x_T = x_Q + x_P$ и

$$(x_T)_S = z_S = z_P + z_R = (x_Q + x_P)_P + (x_T)_R = (x_P)_P = x_P = x_{T\cap S}.$$

Остальные формулы (11.10) легко выводятся из первой.

Одновременно мы выяснили, что *операторы*

$$P_T : x \to x_T \quad \textit{и} \quad P^T : x \to x^T$$

*являются проекторами в* $\mathrm{G}^T$. Образ $\operatorname{Im} P^T$ состоит из функций, непрерывных в каждой точке $\tau_k \in T$, а ядро $\operatorname{Ker} P^T$ состоит из функций скачков

$$-\sum_{\tau_k\in T} g_k \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} h_k \int_\alpha^t d\eta_k, \qquad \sum_{\tau_k\in T}(|g_k| + |h_k|) < \infty,$$

причем если $\tau_k = a$, то $g_k = 0$, а если $\tau_k = b$, то $h_k = 0$. Эти же пространства являются соответственно ядром и образом другого оператора, то есть

$$\operatorname{Ker} P_T = \operatorname{Im} P^T \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} P_T = \operatorname{Ker} P^T.$$

**Замечание 11.1.** Если $x \in \Gamma$ [или если $x \in \mathrm{BV}$], то для всех $T$, таких, что $T \supseteq T(x)$, справедливо $x_T = x_{T(x)}$ и $x^T = x^{T(x)}$, причем $x^T \in \mathrm{C}$ [соответственно $x^T \in \mathrm{CBV}$]. Введя обозначения $x_c \doteq x_{T(x)}$ и $x^c \doteq x^{T(x)}$, обнаруживаем, что представление (11.8) при $x \in \mathrm{BV}$ совпадает с известной декомпозицией Лебега функции ограниченной вариации на сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков: $x = x^c + x_c$. Таким образом, *в пространстве* $\Gamma$ [*или в* $\mathrm{BV}$] *определены проекторы*

$$P_c : x \to x_c \qquad P^c : x \to x^c, \qquad x = x^c + x_c.$$

Кроме того, в BV имеет место известное равенство $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$.

**11.3. Проекторы алгебр** $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ **и** $\mathrm{BV}[a,b]$**.** Если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$, то в силу формул (11.3) справедливо $u_{{}_T} = \lambda x_{{}_T}$, $u^{{}^T} = \lambda x^{{}^T}$, $v_{{}_T} = x_{{}_T} + y_{{}_T}$, $v^{{}^T} = x^{{}^T} + y^{{}^T}$, а для нахождения формул для проекций $w_{{}_T}$ и $w^{{}^T}$ следует доказать ряд вспомогательных утверждений.

**Утверждение 11.1.** *При* $k \neq m$ *справедливы формулы*

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m,$$

$$\int_\alpha^t d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m$$

*и при всех* $k$

$$\Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big]^2 = -\big(1 + 2\xi_k(\alpha)\big) \int_\alpha^t d\xi_k, \qquad \Big[\int_\alpha^t d\eta_k\Big]^2 = \big(1 - 2\eta_k(\alpha)\big) \int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_k = -\eta_k(\alpha) \int_\alpha^t d\xi_k - \xi_k(\alpha) \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Левая часть первой формулы равна

$$\int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^t d\xi_k\Big] d\xi_m = \int_\alpha^t \Big[\int_s^t d\xi_k + \int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s) =$$
$$= \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_m\Big] d\xi_k(s) + \int_\alpha^t \Big[\int_\alpha^s d\xi_k\Big] d\xi_m(s).$$

В последнем равенстве мы поменяли порядок интегрирования у первого слагаемого. Обе подынтегральные функции непрерывны в точках $\tau_k$ и $\tau_m$ соответственно, и нам остается лишь сослаться на формулы (11.5).

Вторая и третья формулы доказываются аналогично. Последние три формулы проверяются непосредственно, опираясь на тождества $\xi_k^2 = -\xi_k$, $\eta_k^2 = \eta_k$ и $\xi_k \eta_k = 0$ соответственно.

**Утверждение 11.2.** *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$ *и ограниченная функция* $x : K \to \mathbb{C}$ *непрерывна во всех точках* $\tau_k \in T$. *Для любой функции скачков*

$$y(\tau) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} y_k^- \int_\alpha^\tau d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} y_k^+ \int_\alpha^\tau d\eta_k, \qquad \sum_{\tau_k \in T} (|y_k^-| + |y_k^+|) < \infty,$$

*существует интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^t x dy$ $\big(\doteq z(t)\big)$, *и он равен функции скачков*:

$$z(t) = -\sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k, \quad t \in K.$$

Утверждение справедливо в силу (11.5), а согласно утверждению 10.3 имеет место следствие: *если* $x \in \mathrm{G}$, $y \in \mathrm{BV}$ *таковы, что* $T(x) \cap T(y) = \varnothing$, *то существует интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^t x dy$, *причем*

$$\int_\alpha^t xdy = \int_\alpha^t xdy^c - \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T(y)} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

**Лемма 11.3.** *Если* $x, y \in \mathrm{G}^T$, *то интегралы* $\displaystyle\int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T}, \int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T}, \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T}$ *и* $\displaystyle\int_\alpha^t y_{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T}$ *существуют и справедливо*

$$\big(xy\big)_{\scriptscriptstyle T}(t) = x_{\scriptscriptstyle T}(t) y_{\scriptscriptstyle T}(t) + \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T},$$

$$\big(xy\big)^{\scriptscriptstyle T}(t) = x^{\scriptscriptstyle T}(t) y^{\scriptscriptstyle T}(t) + \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y_{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T}. \qquad (11.11)$$

Доказательство. Формулы из утверждения 11.1 имеют более компактный вид (через $\delta_{km}$ обозначен символ Кронекера):

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m = -\delta_{km} \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m,$$

$$\int_\alpha^t d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m = \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m,$$

$$\int_\alpha^t d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m = \delta_{km} \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m.$$

В следующей цепочке равенств фигурируют абсолютно и равномерно сходящиеся (на $K$) функциональные ряды, поэтому все операции корректны, а суммирование ведется по разбиению $T$ (и мы пишем $\displaystyle\sum_k$ вместо $\displaystyle\sum_{\tau_k \in T}$):

$$\sigma \doteq x_{\scriptscriptstyle T}(t)\, y_{\scriptscriptstyle T}(t) =$$

$$= \Big[-\sum_k x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k\Big]\Big[-\sum_m y_m^- \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \int_\alpha^t d\eta_m\Big] =$$

$$= \sum_{k,m} x_k^- y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\xi_k \; + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\xi_m\Big] - \sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$- \sum_{k,m} x_k^- y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\xi_k \; + \int_\alpha^{\tau_m} d\xi_k \int_\alpha^t d\eta_m\Big] -$$

$$
-\sum_{k,m} x_k^+ y_m^- \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_m \int_\alpha^t d\eta_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\xi_m\Big] +
$$

$$
+\sum_{k,m} x_k^+ y_m^+ \Big[\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_m \int_\alpha^t d\eta_k \ + \int_\alpha^{\tau_m} d\eta_k \int_\alpha^t d\eta_m\Big] + \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.
$$

Приведя подобные члены, имеем равенства

$$
\sigma = -\sum_k x_k^- \left[y(\tau_k) - y^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k)\right] \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ \left[y(\tau_k) - y^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k)\right] \int_\alpha^t d\eta_k -
$$

$$
-\sum_k x_k^- y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k x_k^+ y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k -
$$

$$
-\sum_m y_m^- \left[x(\tau_m) - x^{\scriptscriptstyle T}(\tau_m)\right] \int_\alpha^t d\xi_m + \sum_m y_m^+ \left[x(\tau_m) - x^{\scriptscriptstyle T}(\tau_m)\right] \int_\alpha^t d\eta_m =
$$

$$
= \sigma_1 - \sum_k \left[\, x_k^- y_k^- + x_k^- y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^- \right] \int_\alpha^t d\xi_k +
$$

$$
+\sum_k \left[\, x_k^+ y_k^+ + x_k^+ y(\tau_k) + x(\tau_k) y_k^+ \right] \int_\alpha^t d\eta_k = \sigma_1 + \big(xy\big)_{\scriptscriptstyle T}(t),
$$

где через $\sigma_1$ обозначена функция

$$
\sigma_1 \doteq \sum_k x_k^- y^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k) \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k x_k^+ y^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k) \int_\alpha^t d\eta_k +
$$

$$
+ \sum_k y_k^- x^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k) \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k y_k^+ x^{\scriptscriptstyle T}(\tau_k) \int_\alpha^t d\eta_k.
$$

Приведя еще раз подобные члены (в силу непрерывности функций $x^{\scriptscriptstyle T}$ и $y^{\scriptscriptstyle T}$ в точках $\tau_k \in T$ справедливо утверждение 11.2), получаем

$$
\sigma_1 = \int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} d\Big[\sum_k x_k^- \xi_k - \sum_k x_k^+ \eta_k\Big] + \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} d\Big[\sum_k y_k^- \xi_k - \sum_k y_k^+ \eta_k\Big] =
$$

$$
= -\int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T}.
$$

Одновременно мы доказали существование интегралов.

Сравнивая начало и конец цепочки для $\sigma$, получаем первое равенство (11.11). Что касается второго, то в силу формулы интегрирования по частям и равенств $x_{\scriptscriptstyle T}(\alpha) = y_{\scriptscriptstyle T}(\alpha) = 0$ для его доказательства достаточно сложить левые и правые части формул (11.11) и получить тождество. $\square$

Итак, если $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, $u = \lambda x$, $v = x+y$, $w = xy$, то $u, v, w \in \mathrm{G}^T$,

$$u_{\scriptscriptstyle T} = \lambda x_{\scriptscriptstyle T}, \quad u^{\scriptscriptstyle T} = \lambda x^{\scriptscriptstyle T}, \quad v_{\scriptscriptstyle T} = x_{\scriptscriptstyle T} + y_{\scriptscriptstyle T}, \quad v^{\scriptscriptstyle T} = x^{\scriptscriptstyle T} + y^{\scriptscriptstyle T},$$

$$w_{\scriptscriptstyle T}(t) = x_{\scriptscriptstyle T}(t)\, y_{\scriptscriptstyle T}(t) + \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T},$$

$$w^{\scriptscriptstyle T}(t) = x^{\scriptscriptstyle T}(t)\, y^{\scriptscriptstyle T}(t) + \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y_{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T}.$$

Аналогичным образом связаны проекции функций из $\Gamma$ и из BV. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \Gamma$ [*или* $x, y \in \mathrm{BV}$], $u = \lambda x$, $v = x + y$, $w = xy$. *Тогда* $x^c, y^c, w^c \in \mathrm{C}$ [ *соответственно* $x^c, y^c, w^c \in \mathrm{CBV}$] (*см. замечание* 11.1) *и*

$$u_c = \lambda x_c, \quad u^c = \lambda x^c, \quad v_c = x_c + y_c, \quad v^c = x^c + y^c,$$

$$w_c(t) = x_c(t)\, y_c(t) + \int_\alpha^t x^c dy_c + \int_\alpha^t y^c dx_c\,,$$

$$w^c(t) = x^c(t)\, y^c(t) + \int_\alpha^t x_c dy^c + \int_\alpha^t y_c dx^c.$$

**11.4. Интегралы Римана–Стилтьеса от функций-проекций функций алгебр** $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ **и** $\mathrm{BV}[a,b]$**.** В предыдущем пункте доказано существование интегралов Римана–Стилтьеса от некоторых проекций элементов алгебр $\mathrm{G}^T[a,b]$, $\Gamma[a,b]$ и $\mathrm{BV}[a,b]$. Приведем следствия леммы 11.3.

1. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Если существует один из интегралов*

$$\int_K x_{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K y_{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K x dy_{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K y_{\scriptscriptstyle T} dx, \quad \int_K x_{\scriptscriptstyle T} dy, \quad \int_K y dx_{\scriptscriptstyle T}, \tag{11.12}$$

*то существуют все остальные, а первая формула* (11.11) *принимает вид*

$$\big(xy\big)_{\scriptscriptstyle T}(t) = \int_\alpha^t x dy_{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y dx_{\scriptscriptstyle T}. \tag{11.13}$$

*Если существует один из интегралов*

$$\int_K x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K y^{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K x dy^{\scriptscriptstyle T}, \quad \int_K y^{\scriptscriptstyle T} dx, \quad \int_K x^{\scriptscriptstyle T} dy, \quad \int_K y dx^{\scriptscriptstyle T}, \tag{11.14}$$

*то существуют все остальные, а вторая формула* (11.11) *принимает вид*

$$\big(xy\big)^{\scriptscriptstyle T}(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t x dy^{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y dx^{\scriptscriptstyle T}. \tag{11.15}$$

Докажем формулу (11.15). Допустим, например, что существует интеграл $\int_K x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T}$, тогда существуют интегралы $\int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T}$ и $\int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T}$, причем

$\int_{\alpha}^{t} x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} + \int_{\alpha}^{t} y^{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T} = x^{\scriptscriptstyle T}(t) y^{\scriptscriptstyle T}(t) - x^{\scriptscriptstyle T}(\alpha) y^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)$. В силу леммы 11.3 существуют интегралы $\int_{\alpha}^{t} x dy^{\scriptscriptstyle T}$ и $\int_{\alpha}^{t} y dx^{\scriptscriptstyle T}$, а с учетом последнего равенства второе тождество (11.11) трансформируется в (11.15). Формула (11.13) доказывается аналогично (здесь применяем равенства $x_{\scriptscriptstyle T}(\alpha) = y_{\scriptscriptstyle T}(\alpha) = 0$).

2. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$. *Если существует интеграл* $\int_K x dy$, *то существует еще тринадцать интегралов: интеграл* $\int_K y dx$ *и интегралы* (11.12) *и* (11.14).

Существование интеграла $\int_K y dx$ хорошо известно. Поскольку существует интеграл $\int_K x dy$, то согласно[5], с. 117, одна из функций $x$ или $y$ непрерывна во всякой точке $t \in K$, то есть $T(x) \cap T(y) = \varnothing$. Если $S \doteq T \cap T(y)$, то, очевидно, $y_{\scriptscriptstyle T} = y_{\scriptscriptstyle S}$, а функция $x$ непрерывна в каждой точке $\tau_k \in S$. В силу леммы 11.3 существует интеграл $\int_K x dy_{\scriptscriptstyle S}$, а вместе с ним интегралы $\int_K x dy_{\scriptscriptstyle T}$, $\int_K x dy^{\scriptscriptstyle T}$ и другие интегралы (11.12) и (11.14).

3. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $x, y \in \mathrm{G}^T$, *тогда*

$$(x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T})_{\scriptscriptstyle T} = x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T}, \quad (x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T})^{\scriptscriptstyle T} = 0, \quad (x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T})_{\scriptscriptstyle T} = 0, \quad (x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T})^{\scriptscriptstyle T} = x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T}.$$

Равенства следуют из формул (11.11) и (11.9).

4. *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $\int_K x dy$, *тогда*

$$\int_{\alpha}^{t} x dy = \int_{\alpha}^{t} x dy^{\scriptscriptstyle T} - \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^- \int_{\alpha}^{t} d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x(\tau_k)\, y_k^+ \int_{\alpha}^{t} d\eta_k.$$

Равенство следует из утверждения 11.2.

Аналогичные утверждения справедливы для проекций элементов алгебр $\Gamma[a, b]$ и $\mathrm{BV}[a, b]$.

5. *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [*или* $x, y \in \mathrm{BV}$]. *Если существует один из интегралов*

$$\int_K x_c dy_c, \quad \int_K y_c dx_c, \quad \int_K x dy_c, \quad \int_K y_c dx, \quad \int_K x_c dy, \quad \int_K y dx_c, \qquad (11.16)$$

*то существуют остальные интегралы* (11.16) *и*

$$\big(xy\big)_c(t) = \int_{\alpha}^{t} x dy_c + \int_{\alpha}^{t} y dx_c.$$

[5] **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.

*Если существует один из интегралов*

$$\int_K x^c dy^c, \quad \int_K y^c dx^c, \quad \int_K x dy^c, \quad \int_K y^c dx, \quad \int_K x^c dy, \quad \int_K y dx^c, \qquad (11.17)$$

*то существуют остальные интегралы* (11.17) *и*

$$\big(xy\big)^c(t) = x(\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t x dy^c + \int_\alpha^t y dx^c.$$

*Если существует интеграл* $\displaystyle\int_K x dy$, *то существует еще тринадцать интегралов: интеграл* $\displaystyle\int_K y dx$ *и интегралы* (11.16), (11.17).

6. *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [ *или* $x, y \in \mathrm{BV}$ ]. *Тогда*

$$(x_c y_c)_c = x_c y_c, \quad (x_c y_c)^c = 0, \quad (x^c y^c)_c = 0, \quad (x^c y^c)^c = x^c y^c.$$

## § 12 . Полнота алгебры $\mathrm{G}^T[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_T$

Поскольку $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ при $\operatorname{card} T < \infty$, то $\mathrm{G}^T$ — полное пространство, однако, как показывает следующий пример, при счетном $T$ пространство $\mathrm{G}^T$ не замкнуто в $\mathrm{G}$ по sup-норме

$$\|x\| \doteq \sup_{t \in K} |x(t)|. \qquad (12.1)$$

**Пример 12.1.** Функция $x \in \mathrm{G}[0, 1]$ такая, что $x(0) = 0$ и $x(t) = t\,\{\, \frac{1}{t}\, \}$ при $t \neq 0$, является предельной (по норме (12.1)) для последовательности

$$x_n(t) \doteq \begin{cases} \quad 0 \quad , & t \in [\,0, \frac{1}{n}\,], \\ t\,\{\, \frac{1}{t}\, \} \ , & t \in (\,\frac{1}{n}, 1\,], \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

прерывистых функций. Поскольку функции $x_n$ имеют конечное число точек разрыва, то $x_n \in \mathrm{G}^T$ для любого $T$. В частности, $x_n \in \mathrm{G}^T$ для $T \doteq T(x)$, в то время как $x \notin \mathrm{G}^T$ (см. пример 10.1), следовательно, пространство $\mathrm{G}^T$ не является полным по норме (12.1).

Таким образом, решетка пространств $\big\{\mathrm{G}^T\big\}_{T \in \mathbb{T}(K)}$ содержит как полные, так и неполные пространства. Ниже мы покажем, что пространство $\mathrm{G}^T$ будет полным, если ввести норму

$$\|x\|_T \doteq \|x^T\| + \lceil x \rceil_T = \|x^T\| + \operatorname{Var} x_T. \qquad (12.2)$$

Проверка аксиом нормы (12.2) не составляет труда. Более важно то, что норма (12.1) входит в семейство (12.2), — это имеет место при $T = \varnothing$. Заметим также, что в соответствии с формулой (11.8) функция $x^T$ зависит от выбора точки $\alpha \in K$, то есть $x^T(\cdot) = x^T(\cdot, \alpha)$, поэтому и норма (12.2) зависит от $\alpha$, то есть $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_T^\alpha$.

**Лемма 12.1.** *Пусть* $T, S \in \mathbb{T}(K)$.

1. *Если* $S \subseteq T$, *то* $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ *и* $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$ *для любого* $x \in \mathrm{G}^T$.

2. *Для любого* $x \in \mathrm{G}^T$ *имеет место неравенство* $\|x\| \leqslant \|x\|_T$.

3. *Если* $T \sim S$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ *и в пространстве* $\mathrm{G}^T$ $(= \mathrm{G}^S)$ *нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|_S$ *эквивалентны.*

4. *Для любых* $\alpha, \beta \in K$ *нормы* $\|\cdot\|_T^\alpha$ *и* $\|\cdot\|_T^\beta$ *эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Включение $\mathrm{G}^T \subseteq \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 11.1. Пусть $x \in \mathrm{G}^T$. В силу представления (11.8) имеет место равенство

$$x^S(t) = x^T(t) + x_{T\setminus S}(t), \tag{12.3}$$

следовательно, $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x \rceil_{T\setminus S}$, $t \in K$, поэтому $|x^S(t)| + \lceil x \rceil_S \leqslant |x^T(t)| + \lceil x \rceil_T \leqslant \|x\|_T$. Поскольку последняя оценка справедлива при всех $t \in K$, то $\|x\|_S \leqslant \|x\|_T$.

2. Неравенство $\|x\| \leqslant \|x\|_T$ следует из первого пункта при $S = \varnothing$.

3. Равенство $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ доказано в лемме 11.1. Если $R \doteq T \cap S$, то в соответствии с первым пунктом леммы $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S \subseteq \mathrm{G}^R$ и для любого $x \in \mathrm{G}^T$ имеют место равенства вида (12.3): $x^R(t) = x^T(t) + x_{T\setminus R}(t)$, $x^R(t) = x^S(t) + x_{S\setminus R}(t)$. Вычитая одно из другого, получаем, что при всех $t \in K$ справедливо $|x^S(t)| \leqslant |x^T(t)| + \lceil x \rceil_{T\Delta S}$, поэтому $\|x^S\| \leqslant \|x^T\| + \lceil x \rceil_{T\Delta S}$, следовательно, выражая $\|x^S\|$ и $\|x^T\|$ через $\|x\|_S$ и $\|x\|_T$ по формуле (12.2), получаем

$$\|x\|_S \leqslant \|x\|_T + 2\lceil x \rceil_{S\setminus R} = \|x\|_T + 2\lceil x \rceil_{S\setminus T} \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|_T + 8\,\|x\| \cdot \operatorname{card}(S\setminus T) \leqslant \big(1 + 8\operatorname{card}(S\setminus T)\big) \cdot \|x\|_T.$$

Мы воспользовались неравенствами $|x_k^-| \leqslant 2\,\|x\|$ и $|x_k^+| \leqslant 2\,\|x\|$. Аналогично получается симметричное неравенство $\|x\|_T \leqslant \big(1 + 8\operatorname{card}(T\setminus S)\big) \cdot \|x\|_S$.

4. Через $x^T(t,\alpha)$ и $x^T(t,\beta)$ обозначим функции вида (11.8), подчеркивая их зависимость от точек $\alpha$ и $\beta$. В соответствии с (11.6) следующие соотношения носят элементарный характер:

$$x_T(t,\alpha) = x_T(t,\beta) + x_T(\beta,\alpha), \quad x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta) = x_T(\alpha,\beta),$$
$$\big|x^T(t,\alpha) - x^T(t,\beta)\big| \leqslant \lceil x \rceil_T, \quad \big\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\big\| \leqslant \big\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\big\| + \lceil x \rceil_T,$$
$$\big\|x\,\big\|_T^\alpha = \big\|x^T(\,\cdot\,,\alpha)\big\| + \lceil x \rceil_T \leqslant \big\|x^T(\,\cdot\,,\beta)\big\| + 2\,\lceil x \rceil_T \leqslant 2\,\big\|x\big\|_T^\beta.$$

Аналогично $\|x\|_T^\beta \leqslant 2\,\|x\|_T^\alpha$, что и доказывает эквивалентность данных норм.

**Следствие 12.1.** *Если* $\operatorname{card} T < \infty$, *то* $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}$ *и нормы* $\|\cdot\|_T$ *и* $\|\cdot\|$ *эквивалентны в* $\mathrm{G}$.

Достаточно взять $S = \varnothing$ в третьем пункте леммы.

**Замечание 12.1.** При счетном $T$ нормы $\|\cdot\|_T$ и $\|\cdot\|$ не являются эквивалентными в пространстве $\mathrm{G}^T$. Например, семейство функций $x_n$ из $\mathrm{G}[0,1]$ таких, что $x_n(t) = 0$ при $t \in [\,0, \frac{1}{n}\,]$ и $x_n(t) = \{\,\frac{1}{t}\,\}$ при $t \in [\,\frac{1}{n}, 1\,]$, вне множества $T \doteq \{\,\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ разрывов не имеет. Очевидно, $\|x_n\| = 1$ при всех $n \geqslant 2$. С другой стороны, каждая из функций $x_n$ принадлежит $\mathrm{G}^T$, так как имеет конечное число точек разрыва (их количество равно $n-1$). Более того, все $x_n$ непрерывны слева, а правые скачки равны по 1, поэтому какое бы $\gamma > 0$ мы не взяли, найдется такая функция $x_n$ из семейства, что $\|x_n\|_T > \gamma$. Это означает, что не существует такого $\gamma > 0$, что неравенство $\|x\|_T \leqslant \gamma\,\|x\|$ выполнено для всех $x \in \mathrm{G}^T$.

**Замечание 12.2.** $\|x\| \leqslant \|x\|_T \leqslant \|x\| + 2\,\lceil x \rceil_T$ для любого $x \in \mathrm{G}^T$.

Первое неравенство мы уже доказали. Что касается второго, то в силу (12.2) и (11.8) справедлива цепочка

$$\|x\|_T = \|x^T\| + \lceil x \rceil_T \leqslant \|x\| + \|x_T\| + \lceil x \rceil_T \leqslant \|x\| + \operatorname{Var} x_T + \lceil x \rceil_T = \|x\| + 2\,\lceil x \rceil_T .$$

**Теорема 12.1.** *Алгебра* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенная нормой* $\|\cdot\|_T$, *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей.*

Доказательство. При конечном $T$ утверждение очевидно в силу следствия 12.1. Пусть $T$ счетно и $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathrm{G}^T$ по норме $\|\cdot\|_T$, то есть $\|x_m - x_n\|_T \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$. Если $y_n \doteq (x_n)^T$ и $z_n \doteq (x_n)_T$, то $x_n = y_n + z_n$, $z_n(\alpha) = 0$, и согласно замечанию 12.2 и определению (12.2) справедливо

$$\|x_m - x_n\| \underset{m,n}{\longrightarrow} 0, \quad \|y_m - y_n\| \underset{m,n}{\longrightarrow} 0, \quad \|z_m - z_n\|_{\mathrm{BV}} = \operatorname{Var}(z_m - z_n) \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$$

(применяем норму $\|x\|_{\mathrm{BV}} = |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x$). В силу полноты пространств $\{\,\mathrm{G}, \|\cdot\|\}$ и $\{\mathrm{BV}, \|\cdot\|_{\mathrm{BV}}\}$ существуют $x, y \in \mathrm{G}$ и $z \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^T$ такие, что

$$\|x_n - x\| \underset{n}{\to} 0, \quad \|y_n - y\| \underset{n}{\to} 0, \quad \|z_n - z\|_{\mathrm{BV}} \underset{n}{\to} 0, \quad \|z_n - z\| \underset{n}{\to} 0.$$

Так как $\|z_n - (x-y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \underset{n}{\to} 0$, то $x - y = z$. Функция $y$ является пределом равномерно сходящейся последовательности $\{\,y_n\}$ непрерывных в точках $\tau_k \in T$ функций, поэтому она непрерывна в этих точках, следовательно, $y_k^- = y_k^+ = 0$, $x_k^- = z_k^-$ и $x_k^+ = z_k^+$. Таким образом, $\lceil x \rceil_T = \lceil z \rceil_T < \infty$, то есть $x \in \mathrm{G}^T$, поэтому $y \in \mathrm{G}^T$, $x_T = z_T$ и $x^T = y + z^T$.

Так как $z_n^T = 0$, то $z^T = 0$. Действительно, если $w_n \doteq z - z_n$, то $w_n \in \mathrm{BV}$ и справедливо $\operatorname{Var} w_n = \operatorname{Var}(w_n)^c + \operatorname{Var}(w_n)_c$. Поскольку $z_n \rightrightarrows z$ и все функции $z_n$ непрерывны в точках множества $K \backslash T$, то и функции $z, w_n$

непрерывны в этих точках. Тем самым, $T(w_n) \subseteq T$ и справедлива цепочка равенств $(w_n)^c = (w_n)^{\scriptscriptstyle T} = z^{\scriptscriptstyle T} - z_n^{\scriptscriptstyle T} = z^{\scriptscriptstyle T}$, следовательно,

$$\operatorname{Var} z^{\scriptscriptstyle T} + \operatorname{Var}(w_n)_c = \operatorname{Var}(w_n)^c + \operatorname{Var}(w_n)_c = \operatorname{Var} w_n = \operatorname{Var}(z - z_n) \underset{n}{\to} 0,$$

поэтому $\operatorname{Var} z^{\scriptscriptstyle T} = 0$ и, очевидно, $z^{\scriptscriptstyle T} = 0$, $x^{\scriptscriptstyle T} = y$, $x_{\scriptscriptstyle T} = z$. Таким образом, $(x_n - x)^{\scriptscriptstyle T} = y_n - y$ и $(x_n - x)_{\scriptscriptstyle T} = z_n - z$, следовательно,

$$\|x_n - x\|_{\scriptscriptstyle T} = \|y_n - y\| + \operatorname{Var}(z_n - z) \underset{n}{\to} 0.$$

Роль единицы играет функция, тождественно равная 1 на $[a, b]$. Коммутативность очевидна, поэтому остается показать непрерывность умножения по норме $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T}$ относительно, например, первой переменной. Действительно, если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и $w = xy$, то $w \in \mathrm{G}^T$ и в соответствии с замечанием 12.2 и леммой 12.1 справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|xy\|_{\scriptscriptstyle T} = \|w\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|w\| + 2\lceil w\rceil_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \\ \leqslant \|xy\| + 2\|x\|\lceil y\rceil_{\scriptscriptstyle T} + 2\lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T}\|y\| \leqslant 5\|x\|_{\scriptscriptstyle T}\|y\|_{\scriptscriptstyle T}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

следовательно, условие $\|x_n - x\|_{\scriptscriptstyle T} \underset{n}{\to} 0$ влечет $\|x_n y - xy\|_{\scriptscriptstyle T} \underset{n}{\to} 0$.

## § 13 . Полнота алгебры $\Gamma[a, b]$ по норме $\|\cdot\|_{\Gamma}$

Легко проверить, что $\Gamma$ — нормированное пространство по норме

$$\|x\|_{\Gamma} \doteq \sup_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x\|_{\scriptscriptstyle T} \quad (13.1)$$

и для любых $x \in \Gamma$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ имеют место оценки

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|x\|_{\Gamma} \leqslant \|x\| + 2\lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T(x)} = \|x\| + 2 \operatorname{Var} x_c. \quad (13.2)$$

В соответствии с (12.2) норма $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T}$ зависит от выбора точки $\alpha \in K$, то есть $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T} = \|\cdot\|^{\alpha}_{\scriptscriptstyle T}$, причем в силу леммы 12.1 нормы $\|\cdot\|^{\alpha}_{\scriptscriptstyle T}$ и $\|\cdot\|^{\beta}_{\scriptscriptstyle T}$ эквивалентны. Таким образом, норма $\|\cdot\|_{\Gamma}$ зависит от $\alpha$, то есть $\|\cdot\|_{\Gamma} = \|\cdot\|^{\alpha}_{\Gamma}$, и нетрудно показать, что для любых $\alpha, \beta \in K$ нормы $\|\cdot\|^{\alpha}_{\Gamma}$ и $\|\cdot\|^{\beta}_{\Gamma}$ эквивалентны.

**Лемма 13.1.** *Для любого $x \in \Gamma$ справедливо равенство*

$$\|x\|_{\Gamma} = \|x^c\| + \operatorname{Var} x_c. \quad (13.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 11.1 доказательство формулы (13.3) сводится к доказательству равенства $\|x\|_{\Gamma} = \|x\|_{\scriptscriptstyle T}$, где $T \doteq T(x)$. Если $S \in \mathbb{T}(K)$ и $P \doteq T \cap S$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ для любого $\tau_k \in S \backslash P$, а так как $x \in \Gamma \subset \mathrm{G}^T$, то $\|x\|_{\scriptscriptstyle S} = \|x^{\scriptscriptstyle S}\| + \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle S} = \|x^{\scriptscriptstyle S}\| + \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle P}$,

$$x^{\scriptscriptstyle S}(t) = x(t) - x_{\scriptscriptstyle S}(t) = x(t) - x_{\scriptscriptstyle P}(t) = x^{\scriptscriptstyle T}(t) + x_{\scriptscriptstyle T\backslash P}(t),$$

следовательно, $\|x^{\scriptscriptstyle S}\| \leqslant \|x^{\scriptscriptstyle T}\| + \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T\backslash P}$ и $\|x\|_{\scriptscriptstyle S} \leqslant \|x^{\scriptscriptstyle T}\| + \lceil x\rceil_{\scriptscriptstyle T}$, то есть для любого $S$ справедливо $\|x\|_{\scriptscriptstyle S} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle T}$, поэтому $\|x\|_{\Gamma} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle T}$.

Обратное неравенство очевидно.

**Теорема 13.1.** *Алгебра* $\Gamma[a,b]$, *наделенная нормой* $\|\cdot\|_\Gamma$, *является коммутативной банаховой алгеброй с единицей.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$, $x_n \in \Gamma$, — фундаментальная последовательность, то есть $\|x_m - x_n\|_\Gamma \underset{m,n}{\longrightarrow} 0$. В силу (13.1) эта последовательность является фундаментальной в каждом из банаховых пространств $\mathrm{G}^T$, $T \in \mathbb{T}(K)$, по соответствующей норме $\|\cdot\|_T$. Это означает, что для любого $T$ существует функция $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$ такая, что $\|x_n - x^{(T)}\|_T \underset{n}{\to} 0$, а в силу замечания 12.2 имеем $\|x_n - x^{(T)}\| \underset{n}{\to} 0$. Таким образом, все предельные функции $x^{(T)}$ совпадают между собой, то есть $x^{(T)} = x$ для любого $T$. Поскольку $x^{(T)} \in \mathrm{G}^T$, то $x \in \mathrm{G}^T$ для любого $T$, поэтому в силу леммы 11.2 имеем $x \in \Gamma$, и нам остается доказать, что $\|x_n - x\|_\Gamma \underset{n}{\to} 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N$, что при $m,n > N$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ выполнено $\|x_m - x_n\|_T < \varepsilon$, следовательно, при $m \to \infty$ имеем $\|x - x_n\|_T \leqslant \varepsilon$, поэтому $\|x_n - x\|_\Gamma = \sup\limits_{T\in\mathbb{T}(K)} \|x_n - x\|_T \leqslant \varepsilon$.

В силу (12.4) и леммы 11.2 имеем $\|xy\|_\Gamma \leqslant 5\,\|x\|_\Gamma\,\|y\|_\Gamma$, откуда следует непрерывность умножения в $\Gamma$. □

Пространство $\mathrm{BV}[a,b]$ с нормой

$$\|x\|_{\mathrm{BV}} \doteq |x(\alpha)| + \operatorname*{Var}_{[a,b]} x \tag{13.4}$$

также является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Это утверждение хорошо известно для нормы (13.4), в которой $\alpha = a$, а для остальных норм отметим, что в семействе (13.4), зависящем от параметра $\alpha \in [a,b]$, все нормы эквивалентны между собой. Напомним также, что в соответствии с комментариями к формуле (11.8) мы работаем с фиксированным $\alpha$.

**Лемма 13.2.** *Если* $x \in \mathrm{BV}$, *то при любом* $T \in \mathbb{T}(K)$

$$\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^T + \operatorname{Var} x_T, \tag{13.5}$$

*в частности,* $\operatorname{Var} x = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c$ *для компонент Лебегова разложения.*

Доказательство. Вторая часть утверждения хорошо известна (см. замечание 11.1). Пусть $Q \doteq T \setminus T(x)$, $P \doteq T \cap T(x)$, $R \doteq T(x) \setminus T$. Поскольку $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in Q$, то $x_T = x_P$ и $x^T = x^P$. Если $z \doteq x_P$ и $y \doteq x^P$, то $T(z) = P$ и $T(y) = R$. Согласно (11.10) имеем

$$z_c = z_{T(z)} = (x_P)_P = x_P, \quad y_c = y_{T(y)} = (x^P)_R = x_{R\setminus P} = x_R,$$

$$z^c = z^{T(z)} = (x_P)^P = 0, \quad y^c = y^{T(y)} = (x^P)^R = x^{P\cup R} = x^{T(x)} = x^c,$$

$$\operatorname{Var} x^{\scriptscriptstyle T} + \operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle T} = \operatorname{Var} y + \operatorname{Var} z = \operatorname{Var} y^c + \operatorname{Var} y_c + \operatorname{Var} z^c + \operatorname{Var} z_c =$$
$$= \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle R} + \operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle P} = \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_{\scriptscriptstyle R} + \lceil x \rceil_{\scriptscriptstyle P} = \operatorname{Var} x^c + \lceil x \rceil_{\scriptscriptstyle T(x)} =$$
$$= \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle T(x)} = \operatorname{Var} x^c + \operatorname{Var} x_c = \operatorname{Var} x.$$

**Лемма 13.3.** *Если* $x \in \mathrm{BV}$, *то при всех* $T \in \mathbb{T}(K)$

$$\|x\| \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle \Gamma} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle \mathrm{BV}}. \tag{13.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два неравенства уже доказаны, что касается третьего, то достаточно показать, что $\|x\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle \mathrm{BV}}$ для любого $T \in \mathbb{T}(K)$. Действительно, в соответствии с леммой 13.2 и равенством $x^{\scriptscriptstyle T}(\alpha) = x(\alpha)$ справедлива цепочка равенств

$$\|x\|_{\scriptscriptstyle \mathrm{BV}} - \|x\|_{\scriptscriptstyle T} = |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x - \|x^{\scriptscriptstyle T}\| - \operatorname{Var} x_{\scriptscriptstyle T} =$$
$$= |x(\alpha)| + \operatorname{Var} x^{\scriptscriptstyle T} - \|x^{\scriptscriptstyle T}\| = |x^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)| + \operatorname{Var} x^{\scriptscriptstyle T} - \|x^{\scriptscriptstyle T}\| = \|x^{\scriptscriptstyle T}\|_{\scriptscriptstyle \mathrm{BV}} - \|x^{\scriptscriptstyle T}\|$$

с неотрицательной правой частью. Значит, $\|x\|_{\scriptscriptstyle \Gamma} = \sup\limits_{T \in \mathbb{T}(K)} \|x\|_{\scriptscriptstyle T} \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle \mathrm{BV}}$. $\square$

Подводя итог, можем сказать, что вторая строка диаграммы (11.4) состоит из коммутативных банаховых алгебр с единицей, причем каждая из алгебр полна по своей норме, — это соответственно нормы (13.4), (13.1), (12.2) и (12.1). Кроме того, если $x \in \mathrm{BV}$, то справедливы неравенства (13.6); если $x \in \Gamma$, то выполнены неравенства (13.2); если $x \in \mathrm{G}^T$, то $\|x\| \leqslant \|x\|_{\scriptscriptstyle T}$ (см. замечание 12.2). Хорошо известно, что пространства C и CBV из диаграммы (11.4) также полны, каждое по своей норме.

## § 14 . Присоединенное умножение и присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебре $\mathrm{G}^T[a,b]$

**14.1. Присоединенное умножение, порожденное элементами декомпозиций и базовыми операциями алгебры** $\mathrm{G}^T[a,b]$. В силу леммы 11.3 проекторы $P_{\scriptscriptstyle T} : x \to x_{\scriptscriptstyle T}$ и $P^{\scriptscriptstyle T} : x \to x^{\scriptscriptstyle T}$ являются эндоморфизмами пространства $\mathrm{G}^T$, но не являются эндоморфизмами алгебры $\mathrm{G}^T$. Они будут таковыми, если в $\mathrm{G}^T$ ввести новую операцию умножения.

**Определение 14.1.** Если $x, y \in \mathrm{G}^T$, то функция $z \doteq x \cdot y \doteq x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T} - x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T}$ называется *присоединенным произведением* функций $x$ и $y$, а операция «$\cdot$» называется *присоединенным умножением* в $\mathrm{G}^T$. Легко убедиться в истинности равенств $x \cdot y = x^{\scriptscriptstyle T} y + x y^{\scriptscriptstyle T} - xy = xy - x_{\scriptscriptstyle T} y - x y_{\scriptscriptstyle T}$.

Прежде всего отметим, что функции $x_{\scriptscriptstyle T}$ и $x^{\scriptscriptstyle T}$ зависят от параметра $\alpha$ (см. (11.8)), то есть $x_{\scriptscriptstyle T} = x_{\scriptscriptstyle T}(t, \alpha)$ и $x^{\scriptscriptstyle T} = x^{\scriptscriptstyle T}(t, \alpha)$, поэтому и $z$ из определения 14.1 зависит от $\alpha$, то есть $z = z(t, \alpha)$. Это означает, что в $\mathrm{G}^T$ определено целое семейство различных присоединенных умножений, зависящих от

$\alpha$. Более того, в соответствии с пунктом 2 леммы 11.1 равенство $\mathrm{G}^S = \mathrm{G}^T$ равносильно тому, что $S \sim T$, поэтому в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S)$ определены разные присоединенные умножения, зависящие от параметра $S \sim T$. Таким образом, в пространстве $\mathrm{G}^T$ (когда разбиение $T$ фиксировано) имеется двупараметрическое семейство различных присоединенных умножений, зависящих как от точки $\alpha \in K$, так и от разбиения $S \sim T$.

Термин «присоединенное умножение» мы позаимствовали из теории ассоциативных колец и алгебр, где присоединенное умножение определяется равенством $x \circ y \doteq x + y + xy$ и строится из базовых операций сложения и умножения исходного кольца [алгебры] $R$. В книге[6], с. 368, такое умножение называется звездным. Иногда присоединенное умножение определяется как $x \circ y \doteq x + y - xy$. Относительно новой операции кольцо [алгебра] $R$ ассоциативно и имеет единицу, роль которой выполняет нулевой элемент (легко проверить, что $x \circ 0 = x = 0 \circ x$). Последнее обстоятельство и отсутствие дистрибутивности (например, имеет место равенство $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z - x$) не позволяют рассматривать самостоятельную алгебраическую систему $< R, +, \circ >$ [соответственно $< R, +, \circ, \cdot >$], как кольцо [алгебру], хотя операция присоединенного умножения и выполняет существенную роль в теории. Ниже мы увидим, что присоединенное умножение из определения 14.1, весьма похожее на классическое присоединенное умножение (имеем $x \cdot y = x^{T} y + x y^{T} - xy$), лишено отмеченных недостатков.

**Лемма 14.1.** *Если* $T \in \mathbb{T}(K)$, $x, y \in \mathrm{G}^T$ *и* $\lambda \in \mathbb{C}$, *то*

$$(\lambda x)_{T} = \lambda x_{T}, \quad (\lambda x)^{T} = \lambda x^{T}, \quad (x + y)_{T} = x_{T} + y_{T}, \quad (x + y)^{T} = x^{T} + y^{T},$$

$$(x \cdot y)_{T} = x_{T} \cdot y_{T}, \quad (x \cdot y)^{T} = x^{T} \cdot y^{T}.$$

Доказательство. Равенства $x_{T} \cdot y_{T} = -x_{T} y_{T}$ и $x^{T} \cdot y^{T} = x^{T} y^{T}$ очевидны из определения 14.1 и формул (11.9), а в силу третьего следствия в пункте 11.4 из § 11 справедливы цепочки равенств

$$(x \cdot y)_{T} = (x^{T} y^{T} - x_{T} y_{T})_{T} = -x_{T} y_{T} = x_{T} \cdot y_{T},$$

$$(x \cdot y)^{T} = (x^{T} y^{T} - x_{T} y_{T})^{T} = x^{T} y^{T} = x^{T} \cdot y^{T}.$$

**Лемма 14.2.** *Для любых* $x, y \in \mathrm{G}^T$ *существуют интегралы* $\int_\alpha^t x_{T} dy^{T}$, $\int_\alpha^t y_{T} dx^{T}$, $\int_\alpha^t y^{T} dx_{T}$, $\int_\alpha^t x^{T} dy_{T}$ *и справедливы равенства*

$$x(t)\, y(t) = x^{T}(t)\, y^{T}(t) + \int_\alpha^t x_{T} dy^{T} + \int_\alpha^t y_{T} dx^{T} + \big(xy\big)_{T}(t),$$

[6] **Ван дер Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Наука, 1976. 648 с.

$$x(t)\cdot y(t)=x^{\scriptscriptstyle T}(t)\,y^{\scriptscriptstyle T}(t)+\int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T}dy_{\scriptscriptstyle T}+\int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T}dx_{\scriptscriptstyle T}-\big(xy\big)_{\scriptscriptstyle T}(t).$$

Первая формула доказана в лемме 11.3, а что касается второй, то для ее доказательства достаточно сложить левые и правые части обеих формул.

**Теорема 14.1.** *Пространство* $\mathrm{G}^T[a,b]$, *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй* (*вообще говоря, без единицы*). *Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_{\scriptscriptstyle T}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ассоциативность присоединенного умножения следует из формул, приведенных в доказательстве леммы 14.1:

$$(x\cdot y)\cdot z=(x\cdot y)^{\scriptscriptstyle T}z^{\scriptscriptstyle T}-(x\cdot y)_{\scriptscriptstyle T}z_{\scriptscriptstyle T}=x^{\scriptscriptstyle T}y^{\scriptscriptstyle T}z^{\scriptscriptstyle T}+x_{\scriptscriptstyle T}y_{\scriptscriptstyle T}z_{\scriptscriptstyle T},$$

$$x\cdot(y\cdot z)=x^{\scriptscriptstyle T}(y\cdot z)^{\scriptscriptstyle T}-x_{\scriptscriptstyle T}(y\cdot z)_{\scriptscriptstyle T}=x^{\scriptscriptstyle T}y^{\scriptscriptstyle T}z^{\scriptscriptstyle T}+x_{\scriptscriptstyle T}y_{\scriptscriptstyle T}z_{\scriptscriptstyle T}.$$

Аксиомы коммутативности и дистрибутивности очевидны. При $T=\varnothing$ имеем $x\cdot y=xy$, поэтому в $\mathrm{G}^T$ (при $T=\varnothing$ ) единицей является функция $e(t)$, тождественно равная 1 на $[a,b]$. Пусть $T\neq\varnothing$.

А. Если $\alpha\in T$, то функция $e(t)\doteq 1+\int_\alpha^t d\xi_\alpha-\int_\alpha^t d\eta_\alpha$ является единицей алгебры $\mathrm{G}^T$. Действительно, справедливо $e(t)=\begin{cases}0\ ,\ t\neq\alpha,\\ 1\ ,\ t=\alpha,\end{cases}$ поэтому $e_k^-=e_k^+=-\delta_{km}$ для всех $\tau_k\in T$, где через $m$ обозначен тот индекс, для которого $\alpha=\tau_m$. Следовательно, $e_{\scriptscriptstyle T}(t)=\int_\alpha^t d\xi_\alpha-\int_\alpha^t d\eta_\alpha$, $e^{\scriptscriptstyle T}(t)\equiv 1$. Для любого $x\in\mathrm{G}^T$ справедливо равенство $(xe)(t)=x(\alpha)e(t)$, поэтому $(xe)_{\scriptscriptstyle T}(t)=x(\alpha)e_{\scriptscriptstyle T}(t)$ , а в силу леммы 14.2 (а также формул (11.5) и равенств $x^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)=x(\alpha)$ ) справедлива цепочка равенств

$$x(t)\cdot e(t)=x^{\scriptscriptstyle T}(t)+\int_\alpha^t dx_{\scriptscriptstyle T}+\int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T}de_{\scriptscriptstyle T}-(xe)_{\scriptscriptstyle T}(t)=$$
$$=x(t)+x(\alpha)\int_\alpha^t d\xi_\alpha-x(\alpha)\int_\alpha^t d\eta_\alpha-x(\alpha)e_{\scriptscriptstyle T}(t)=x(t).$$

Далее функцию $e(t)$ мы называем *импульсной единицей.*

Б. Пусть $\alpha\notin T$. Тогда

$$\text{либо } T_{\scriptscriptstyle L}\doteq\{\,\tau_k\in T:\tau_k<\alpha\}\neq\varnothing,\quad\text{либо } T_{\scriptscriptstyle R}\doteq\{\,\tau_k\in T:\tau_k>\alpha\}\neq\varnothing.$$

1. Если $T_{\scriptscriptstyle L}=\varnothing$, то $T_{\scriptscriptstyle R}\neq\varnothing$ и определена величина $\varrho\doteq\inf T_{\scriptscriptstyle R}$.

Если $\varrho\in T_{\scriptscriptstyle R}$, то функция $e(t)\doteq 1-\int_\alpha^t d\xi_\varrho=\begin{cases}1\ ,\ t<\varrho,\\ 0\ ,\ t\geqslant\varrho,\end{cases}$ является единицей алгебры $\mathrm{G}^T$. Действительно, для всех $\tau_k\in T$ имеют место равенства

$e_k^- = \delta_{km}$ и $e_k^+ = 0$, где через $m$ обозначен тот индекс, для которого $\varrho = \tau_m$. Следовательно, $e_{\scriptscriptstyle T}(t) = -\int_\alpha^t d\xi_\varrho$ и $e^{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 1$. Для любого $x \in \mathrm{G}^T$ справедливо $(xe)(t) = \begin{cases} x(t) & , \ t < \varrho, \\ 0 & , \ t \geqslant \varrho, \end{cases}$ поэтому $(xe)_m^- = x(\varrho - 0)$, $(xe)_m^+ = 0$, $(xe)_k^- = (xe)_k^+ = 0$ для всех $k \neq m$, $(xe)_{\scriptscriptstyle T}(t) = -x(\varrho - 0)\int_\alpha^t d\xi_\varrho$ и

$$x(t) \cdot e(t) = x^{\scriptscriptstyle T}(t) + \int_\alpha^t dx_{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} de_{\scriptscriptstyle T} - (xe)_{\scriptscriptstyle T}(t) =$$
$$= x(t) - x^{\scriptscriptstyle T}(\varrho)\int_\alpha^t d\xi_\varrho + x(\varrho - 0)\int_\alpha^t d\xi_\varrho = x(t).$$

Воспользовались равенством $x^{\scriptscriptstyle T}(\varrho) = x(\varrho - 0)$, которое имеет место в силу следующих обстоятельств. Так как $\alpha < \varrho = \tau_m < \tau_k$ при всех $k \neq m$, то

$$x_{\scriptscriptstyle T}(\varrho) = -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int_\alpha^\varrho d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int_\alpha^\varrho d\eta_k =$$
$$= -\big(x(\tau_m - 0) - x(\tau_m)\big)\big(\xi_m(\varrho) - \xi_m(\alpha)\big) = x(\varrho) - x(\varrho - 0).$$

Если $\varrho \notin T_{\scriptscriptstyle R}$, то в пространстве $\mathrm{G}^T$ единицы нет. Предположим противное, то есть существует $e \in \mathrm{G}^T$ такое, что для всех $x \in \mathrm{G}^T$ справедливо $x = x \cdot e = x^{\scriptscriptstyle T} e + x e^{\scriptscriptstyle T} - xe$. В частности, если $x(t) \equiv 1$, то $x^{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 1$, поэтому $e^{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 1$. Таким образом, для любого $x \in \mathrm{G}^T$ имеем $(x - x^{\scriptscriptstyle T})e = 0$.

Пусть $\tau > \varrho$. Так как $\varrho$ — наибольшая из нижних границ $T_{\scriptscriptstyle R}$, то существует $\tau_m \in T_{\scriptscriptstyle R}$ такое, что $\alpha \leqslant \varrho < \tau_m < \tau$. Если $x(t) \doteq M\int_\alpha^t d\eta_m$, то $x^{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 0$, следовательно, $\left[M\int_\alpha^\tau d\eta_m\right] e(\tau) = 0$ или $Me(\tau) = 0$. В силу произвольности $M$ имеем $e(\tau) = 0$. Таким образом, $e(\tau) = 0$ для всех $\tau > \varrho$. Это означает, в частности, что $e(\tau_k - 0) = e(\tau_k) = e(\tau_k + 0) = 0$ для всех $\tau_k \in T_{\scriptscriptstyle R} = T$, следовательно, $e^{\scriptscriptstyle T}(t) = e(t)$, поэтому $e^{\scriptscriptstyle T}(t) = 0$ для всех $t > \varrho$, что противоречит тождеству $e^{\scriptscriptstyle T}(t) \equiv 1$.

2. Случай $T_{\scriptscriptstyle L} \neq \varnothing$, $T_{\scriptscriptstyle R} = \varnothing$ симметричен. Здесь определена величина $\lambda \doteq \sup T_{\scriptscriptstyle L}$, и если $\lambda \notin T_{\scriptscriptstyle L}$, то в $\mathrm{G}^T$ единицы нет, а если $\lambda \in T_{\scriptscriptstyle L}$, то единицей является функция

$$e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\eta_\lambda = \begin{cases} 0 & , \ t \leqslant \lambda, \\ 1 & , \ t > \lambda. \end{cases}$$

3. Наконец, если $T_{\scriptscriptstyle L} \neq \varnothing$, $T_{\scriptscriptstyle R} \neq \varnothing$, то определены величины $\lambda \doteq \sup T_{\scriptscriptstyle L}$ и $\varrho \doteq \inf T_{\scriptscriptstyle R}$. Если $\lambda \notin T_{\scriptscriptstyle L}$ или $\varrho \notin T_{\scriptscriptstyle R}$, то в $\mathrm{G}^T$ единицы нет, а в противном

случае (то есть если $\lambda \in T_{_L}$ и $\varrho \in T_{_R}$) единицей является функция

$$e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\eta_\lambda - \int_\alpha^t d\xi_\varrho = \begin{cases} 1 \ \ , \ \ t \in (\lambda, \varrho), \\ 0 \ \ , \ \ t \notin (\lambda, \varrho). \end{cases}$$

Доказательство пунктов 2 и 3 аналогично доказательству пункта 1.

Осталось доказать непрерывность присоединенного умножения по норме $\|\cdot\|_{_T}$ относительно, например, первой переменной. В силу (12.4) для любых $x, y \in \mathrm{G}^T$ имеем

$$\tfrac{1}{5}\,\big\|x \cdot y\big\|_{_T} = \tfrac{1}{5}\,\big\|x^{^T} y^{^T} - x_{_T} y_{_T}\big\|_{_T} \leqslant \|x^{^T}\|_{_T}\,\|y^{^T}\|_{_T} + \|x_{_T}\|_{_T}\,\|y_{_T}\|_{_T} =$$

$$= \|x^{^T}\|\,\|y^{^T}\| + \lceil x \rceil_{_T} \lceil y \rceil_{_T} \leqslant \big(\|x^{^T}\| + \lceil x \rceil_{_T}\big)\big(\|y^{^T}\| + \lceil y \rceil_{_T}\big) = \|x\|_{_T}\,\|y\|_{_T},$$

следовательно, условие $\|x_n - x\|_{_T} \underset{n}{\to} 0$ влечет $\big\|x_n \cdot y - x \cdot y\big\|_{_T} \underset{n}{\to} 0$.

**Теорема 14.2.** *Каждый из операторов $P_{_T} : x \to x_{_T}$ и $P^{^T} : x \to x^{^T}$ является эндоморфизмом алгебры $\mathrm{G}^T$ с присоединенным умножением. Образ $\operatorname{Im} P_{_T}$ $(= \operatorname{Ker} P^{^T})$ и ядро $\operatorname{Ker} P_{_T}$ $(= \operatorname{Im} P^{^T})$ являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы $P_{_T}$ и $P^{^T}$ являются непрерывными ортогональными (относительно присоединенного умножения) проекторами.*

Первая часть утверждения составляет содержание леммы 14.1. Поскольку проекторы $P_{_T}$ и $P^{^T}$ связаны равенством $P_{_T} + P^{^T} = \mathrm{I}$, то $\operatorname{Im} P_{_T} = \operatorname{Ker} P^{^T}$ и $\operatorname{Ker} P_{_T} = \operatorname{Im} P^{^T}$. Включение $x \in \operatorname{Im} P_{_T}$ равносильно тому, что $x_{_T} = x$, следовательно, для любого $y \in \mathrm{G}^T$ справедливо $x \cdot y = -x_{_T} y_{_T}$, а в силу равенства $(x_{_T} y_{_T})_{_T} = x_{_T} y_{_T}$ из третьего следствия пункта 11.4 (§ 11) имеем $x \cdot y \in \operatorname{Im} P_{_T}$, то есть $\operatorname{Im} P_{_T}$ — двусторонний идеал в $\mathrm{G}^T$. Для ядра $\operatorname{Ker} P_{_T}$ доказательство аналогично. Равенство $x^{^T} \cdot y_{_T} = 0$ носит элементарный характер, поэтому $P_{_T}$ и $P^{^T}$ — ортогональные проекторы. Для доказательства их непрерывности достаточно показать замкнутость $\operatorname{Im} P_{_T}$ и $\operatorname{Ker} P_{_T}$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in \mathrm{G}^T$, сходится к $x \in \mathrm{G}^T$ по норме $\|\cdot\|_{_T}$, тогда выполнено $\|(x_n)^{^T} - x^{^T}\| + \operatorname{Var}\big((x_n)_{_T} - x_{_T}\big) \underset{n}{\longrightarrow} 0$. Если все $x_n \in \operatorname{Im} P_{_T}$, то $(x_n)^{^T} = 0$, поэтому $\|x^{^T}\| = 0$, $x^{^T} = 0$, $x \in \operatorname{Im} P_{_T}$. Если же $x_n \in \operatorname{Ker} P_{_T}$, то $(x_n)_{_T} = 0$, поэтому $\operatorname{Var} x_{_T} = 0$, а так как $x_{_T}(\alpha) = 0$, то $x_{_T} = 0$ и $x \in \operatorname{Ker} P_{_T}$. Итак, $\operatorname{Im} P_{_T}$ и $\operatorname{Ker} P_{_T}$ — замкнутые пространства,

$$\mathrm{G}^T = \operatorname{Im} P_{_T} \oplus \operatorname{Ker} P_{_T} = \operatorname{Im} P^{^T} \oplus \operatorname{Ker} P^{^T},$$

а $P_{_T}$ и $P^{^T}$ — непрерывные проекторы[7], с. 151.

[7] **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 448 с.

**14.2. Присоединенный интеграл в алгебре $\mathrm{G}^T[a,b]$, ассоциированный с присоединенным умножением.**

**Определение 14.2.** Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ и $x, y \in \mathrm{G}^T$. Если существует интеграл $\displaystyle\int_K xdy$, то функция

$$\int_\alpha^t x \cdot dy \doteq \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T} \tag{14.1}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* (*Римана–Стилтьеса*) функции $x$ по функции $y$.

Прежде всего отметим, что определение корректно, поскольку из существования интеграла $\displaystyle\int_K xdy$ следует существование интеграла $\displaystyle\int_\alpha^t xdy$, а в соответствии со вторым следствием из пункта 11.4 (§ 11) оба интеграла в правой части (14.1) существуют. Как и в случае присоединенного умножения (см. комментарии к определению 14.1) в пространстве $\mathrm{G}^T (= \mathrm{G}^S$ при $S \sim T)$ определено двупараметрическое семейство различных присоединенных интегралов функции $x$ по функции $y$, зависящих от точки $\alpha \in K$ и от разбиения $S \sim T$. При $T = \varnothing$ имеем $\displaystyle\int_\alpha^t x \cdot dy = \int_\alpha^t xdy$, поэтому интеграл Римана–Стилтьеса также является присоединенным интегралом. Комментарии к определению 14.2 закончим замечанием, что присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

**Утверждение 14.1.** *Пусть $x, y \in \mathrm{G}^T$. Существование одного из интегралов $\displaystyle\int_\alpha^t x \cdot dy$ или $\displaystyle\int_\alpha^t y \cdot dx$ влечет существование другого и равенство*

$$\int_\alpha^t x \cdot dy + \int_\alpha^t y \cdot dx = x \cdot y \Big|_\alpha^t.$$

Существование присоединенных интегралов следует из существования соответствующих интегралов Римана–Стилтьеса, а цепочка равенств

$$\int_\alpha^t x \cdot dy + \int_\alpha^t y \cdot dx = \int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t y^{\scriptscriptstyle T} dx^{\scriptscriptstyle T} - \int_\alpha^t y_{\scriptscriptstyle T} dx_{\scriptscriptstyle T} =$$

$$= x^{\scriptscriptstyle T} y^{\scriptscriptstyle T} \Big|_\alpha^t - x_{\scriptscriptstyle T} y_{\scriptscriptstyle T} \Big|_\alpha^t = x \cdot y \Big|_\alpha^t$$

справедлива в силу формулы интегрирования по частям.

**Утверждение 14.2.** *Если $x, y \in \mathrm{G}^T$ и существует присоединенный интеграл $z(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t x \cdot dy$, то $z \in \mathrm{G}^T$, $z_{\scriptscriptstyle T}(t) = -\displaystyle\int_\alpha^t x_{\scriptscriptstyle T} dy_{\scriptscriptstyle T}$ и $z^{\scriptscriptstyle T}(t) = \displaystyle\int_\alpha^t x^{\scriptscriptstyle T} dy^{\scriptscriptstyle T}$.*

Первый интеграл в правой части (14.1) является функцией, непрерывной во всех точках разбиения $T$, а второй является функцией скачков со скачками в $T$, что и доказывает утверждение.

**Утверждение 14.3.** *Пусть функции* $x, y, z \in \mathrm{G}^T$ *и существует интеграл* $w(t) \doteq \int_\alpha^t y \cdot dz$. *Интегралы* $\int_\alpha^t x \cdot dw$ *и* $\int_\alpha^t (x \cdot y) \cdot dz$ *существуют или нет одновременно. Если они существуют, то*

$$\int_\alpha^t x(s) \cdot d\Big( \int_\alpha^s y \cdot dz\Big) = \int_\alpha^t (x \cdot y) \cdot dz. \tag{14.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу утверждения 14.2 справедливо $w \in \mathrm{G}^T$, $w_{_T}(t) = -\int_\alpha^t y_{_T} dz_{_T}$, $w^{_T}(t) = \int_\alpha^t y^{_T} dz^{_T}$, поэтому для левой и правой частей (14.2) (обозначим их $\sigma_1$ и $\sigma_2$) имеем

$$\sigma_1 = \int_\alpha^t x^{_T} dw^{_T} - \int_\alpha^t x_{_T} dw_{_T} =$$

$$= \int_\alpha^t x^{_T}(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y^{_T} dz^{_T}\Big) + \int_\alpha^t x_{_T}(s)\, d\Big(\int_\alpha^s y_{_T} dz_{_T}\Big) = \int_\alpha^t x^{_T} y^{_T} dz^{_T} + \int_\alpha^t x_{_T} y_{_T} dz_{_T},$$

$$\sigma_2 = \int_\alpha^t (x^{_T} y^{_T} - x_{_T} y_{_T}) \cdot dz = \int_\alpha^t x^{_T} y^{_T} dz^{_T} + \int_\alpha^t x_{_T} y_{_T} dz_{_T}.$$

Последнее равенство справедливо в сответствии с заключительными комментариями к лемме 11.3. ☐

Нашей ближайшей целью является перенесение полученных результатов на пространства $\Gamma$ и $\mathrm{BV}$, где в соответствии с замечанием 11.1 определены проекторы $P_c : x \to x_c$ и $P^c : x \to x^c$.

## § 15 . Присоединенное умножение и присоединенный интеграл Римана–Стилтьеса в алгебрах $\Gamma[a, b]$ и $\mathrm{BV}[a, b]$

**Определение 15.1.** Пусть $x, y \in \Gamma$ [или BV], тогда прерывистая функция $z \doteq x \circ y \doteq x^c y^c - x_c y_c$ называется *присоединенным произведением* функций $x$ и $y$, а операция « $\circ$ » называется *присоединенным умножением* в $\Gamma$ [или в BV]. Легко проверить, что $x \circ y = x^c y + x y^c - xy = xy - x_c y - x y_c$.

Так же, как и в случае присоединенного произведения « $\cdot$ », правило вычисления присоединенного произведения « $\circ$ » зависит от параметра $\alpha \in K$.

**Лемма 15.1.** *Если* $x, y \in \Gamma$ [*или* BV] *и* $\lambda \in \mathbb{C}$, *то*

$$(\lambda x)_c = \lambda x_c, \quad (\lambda x)^c = \lambda x^c, \quad (x + y)_c = x_c + y_c, \quad (x + y)^c = x^c + y^c,$$

$$(x \circ y)_c = x_c \circ y_c, \quad (x \circ y)^c = x^c \circ y^c.$$

**Лемма 15.2.** *Для любых* $x, y \in \Gamma$ [*или* BV] *существуют интегралы* $\int_\alpha^t x_c dy^c$, $\int_\alpha^t y_c dx^c$, $\int_\alpha^t y^c dx_c$, $\int_\alpha^t x^c dy_c$ *и справедливы равенства*

$$x(t)y(t) = x^c(t)y^c(t) + \int_\alpha^t x_c dy^c + \int_\alpha^t y_c dx^c + (xy)_c(t),$$

$$x(t) \circ y(t) = x^c(t)y^c(t) + \int_\alpha^t x^c dy_c + \int_\alpha^t y^c dx_c - (xy)_c(t).$$

Утверждения следуют из включений $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}^T$ и лемм 14.1 и 14.2, для этого достаточно взять в качестве $T$ разбиение $T(x) \cup T(y)$, тогда

$$T(\lambda x) \subseteq T, \quad T(x+y) \subseteq T, \quad T(xy) \subseteq T,$$

$$x_c = x_{_T}, \quad y_c = y_{_T}, \quad (\lambda x)_c = (\lambda x)_{_T}, \quad (x+y)_c = (x+y)_{_T}, \quad (xy)_c = (xy)_{_T}.$$

**Теорема 15.1.** *Пространство* $\Gamma$ [*или* BV], *наделенное операцией присоединенного умножения, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей. Она является банаховой по норме* $\|\cdot\|_\Gamma$ [*соответственно по норме* $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$]. *Единицей алгебры является импульсная единица.*

Нетривиальным здесь является лишь существование единицы, роль которой выполняет функция $e(t) \doteq 1 + \int_\alpha^t d\xi_\alpha - \int_\alpha^t d\eta_\alpha$. Если $x \in \Gamma$ [или BV] и $T \doteq T(x) \cup \{\alpha\}$, то $x, e \in \mathrm{G}^T$, $\alpha \in T$ и

$$x \circ e = x^c e^c - x_c e_c = x^{T(x)} e^{T(e)} - x_{_{T(x)}} e_{_{T(e)}} = x^T e^T - x_{_T} e_{_T} = x\,.$$

Последнее равенство справедливо в силу пункта А теоремы 14.1.

**Теорема 15.2.** *Каждый из операторов* $P_c : x \to x_c$, $P^c : x \to x^c$ *является эндоморфизмом алгебры* $\Gamma$ [*или* BV] *с присоединенным умножением. Образ* $\operatorname{Im} P_c$ ($= \operatorname{Ker} P^c$) *и ядро* $\operatorname{Ker} P_c$ ($= \operatorname{Im} P^c$) *являются двусторонними идеалами алгебры. Операторы* $P_c$ *и* $P^c$ *являются непрерывными ортогональными* (*относительно присоединенного умножения*) *проекторами.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.2.

**Определение 15.2.** Пусть $x, y \in \Gamma$ [или BV]. Если существует интеграл $\int_K x dy$, то функция

$$\int_\alpha^t x \circ dy \doteq \int_\alpha^t x^c dy^c - \int_\alpha^t x_c dy_c \tag{15.1}$$

называется *неопределенным присоединенным интегралом* (*Римана–Стилтьеса*) функции $x$ по функции $y$.

Определение корректно, поскольку из существования $\int_K xdy$ следует существование интеграла $\int_\alpha^t xdy$, а в соответствии с пятым следствием пункта 11.4 (§ 11) оба интеграла в правой части (15.1) существуют. Как и в случае присоединенного интеграла (14.1) семейство различных присоединенных интегралов (15.1) зависит от параметра $\alpha \in K$. Присоединенный интеграл линеен по каждому аргументу.

**Утверждение 15.1.** *Пусть* $x, y \in \Gamma$ [ *или* $\mathrm{BV}$ ]. *Существование одного из интегралов* $\int_\alpha^t x \circ dy$ *или* $\int_\alpha^t y \circ dx$ *влечет существование другого и равенство*

$$\int_\alpha^t x \circ dy + \int_\alpha^t y \circ dx = x \circ y\,\Big|_\alpha^t.$$

**Утверждение 15.2.** *Если* $x, y \in \Gamma$ [ *или* $\mathrm{BV}$ ] *и существует присоединенный интеграл* $z(t) \doteq \int_\alpha^t x \circ dy$, *то* $z \in \Gamma$ [*соответственно* $z \in \mathrm{BV}$ ] *и справедливы равенства* $z_c(t) = -\int_\alpha^t x_c dy_c$ *и* $z^c(t) = \int_\alpha^t x^c dy^c$.

**Утверждение 15.3.** *Пусть* $x, y, z \in \Gamma$ [ *или* $\mathrm{BV}$ ] *и существует интеграл* $w(t) \doteq \int_\alpha^t y \circ dz$. *Интегралы* $\int_\alpha^t x \circ dw$ *и* $\int_\alpha^t (x \circ y) \circ dz$ *существуют или нет одновременно. Если интегралы существуют, то*

$$\int_\alpha^t x(s) \circ d\Big( \int_\alpha^s y \circ dz\Big) = \int_\alpha^t (x \circ y) \circ dz.$$

Справедливость утверждений следует из включений $\mathrm{BV} \subset \Gamma \subset \mathrm{G}^T$ и утверждений 14.1–14.3: в качестве $T$ следует взять разбиение $T(x) \cup T(y)$ или $T(x) \cup T(y) \cup T(z)$.

## § 16 . Обобщенные прерывистые функции

**16.1. Прерывистые функции, заданные на интервале.** Зафиксируем интервал $K \doteq (a, b)$ (ограниченный или неограниченный) и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}(a, b)$ обозначим пространство [ алгебру ] *прерывистых* функций, то есть функций $x : K \to \mathbb{C}$, обладающих конечными пределами $x(t-0)$ и $x(t+0)$ при всех $t \in K$. Через $\mathrm{G}_{_L} \doteq \mathrm{G}_{_L}(a, b)$ [ через $\mathrm{G}_{_R} \doteq \mathrm{G}_{_R}(a, b)$] обозначим подпространство в $\mathrm{G}$, состоящее из непрерывных слева [ справа ] прерывистых функций. Через $\mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}(a, b)$ обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathrm{G}_0[\alpha,\beta]$.

Аналогично второму пункту утверждения 10.5 справедливо утверждение о том, что всякая функция $x \in \mathrm{G}$ единственным образом представима в виде суммы $x = x_L + x_0$ двух функций $x_L \in \mathrm{G}_L$ и $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$. Симметричное представление $x = x_R + x_0$, где $x_R \in \mathrm{G}_R$, $x_0 \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}$, также имеет место. При этом операторы $\mathrm{P} : x(t) \to x_L(t) \doteq x(t-0)$ и $\mathrm{Q} : x(t) \to x_R(t) \doteq x(t+0)$ являются проекторами в $\mathrm{G}$.

Аналог диаграммы (10.1) имеет вид (смысл пространств понятен):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{C} \to \mathrm{KC}^{\mathrm{loc}} & & \\ & & & \searrow & & \searrow & \\ & & & & \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} & \to & \mathrm{G} \to \mathrm{R}^{\mathrm{loc}} \to \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}. \end{array}$$

Функции $x, y \in \mathrm{G}(a,b)$ будем называть *эквивалентными* ($x \sim y$), если $x - y \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$. Это равносильно тому, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функции-сужения $x, y : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ эквивалентны в пространстве $\mathrm{G}[\alpha,\beta]$. Легко проверить, что *если непрерывная функция* $f(\cdot)$ *действует из* $\mathbb{C}$ *в* $\mathbb{C}$, *то эквивалентность* $x \sim y$ *влечет эквивалентность* $f(x(\cdot)) \sim f(y(\cdot))$. Действительно, включения $f(x(\cdot)), f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a,b)$ очевидны. Если $z \doteq x - y$, то $z \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$ и $z(t-0) = 0$ для любого $t \in K$, а так как $x(t-0)$ и $y(t-0)$ существуют, то $x(t-0) = y(t-0)$. Если $\tau \to t-0$, то $x(\tau) \to x(t-0)$ и $y(\tau) \to y(t-0)$, а поскольку $f$ непрерывна, то $f(x(\tau)) \to f(x(t-0))$ и $f(y(\tau)) \to f(y(t-0))$. Таким образом, $w(\tau) \doteq f(x(\tau)) - f(y(\tau)) \to 0$, то есть $w(t-0) = 0$ при $t \in K$, поэтому $w \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a,b)$. Остается лишь напомнить, что $f(x(\cdot)), f(y(\cdot)) \in \mathrm{G}(a,b)$.

Конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ будем называть *разбиением* интервала $K$, а совокупность всех разбиений $K$ обозначим через $\mathbb{T}(K)$. Пустое множество мы также включаем в совокупность $\mathbb{T}(K)$. Через $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ [через $\Gamma^{\mathrm{loc}}$] обозначим пространство таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ принадлежит пространству $\mathrm{G}^S[\alpha,\beta]$ [соответственно $\Gamma[\alpha,\beta]$], где $S \doteq T \cap [\alpha,\beta]$.

**16.2. Обобщенные прерывистые функции и обобщенные производные прерывистых функций.** Пространство $D \doteq D(a,b)$, состоящее из финитных функций пространства $\mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(a,b)$, будем называть пространством *основных* функций. В нем определено понятие сходящейся последовательности: будем говорить, что последовательность основных функций $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in D$, сходится к основной функции $\varphi \in D$ (и писать $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$), если у всех функций $\varphi_n$ и $\varphi$ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и

$$\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n]{} 0.$$

**Пример 16.1.** Если $K = \mathbb{R}$, последовательность $\{\gamma_n\}$, $\gamma_n \in \mathbb{C}$, такова, что $\gamma_n \to 0$, $\tau > 0$, $\varphi_n(t) = \gamma_n (1 - |\frac{t}{\tau}|)$ при $|t| \leqslant \tau$ и $\varphi_n(t) = 0$ при $|t| \geqslant \tau$, то $\varphi_n \xrightarrow{D} 0$. Здесь $[\alpha, \beta]$ — любой отрезок, содержащий в себе отрезок $[-\tau, \tau]$, а предельная функция $\varphi(t) \equiv 0$.

Через $D'$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов $\ell : D(a, b) \to \mathbb{C}$ (непрерывность означает, что сходимость последовательности функций $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ влечет сходимость $(\ell, \varphi_n) \xrightarrow[n]{} (\ell, \varphi)$), а его элементы назовем *обобщенными* функциями (*распределениями*).

Функция $x \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$ порождает обобщенную функцию $\ell_x \in D'$, заданную через интеграл Лебега: $(\ell_x, \varphi) = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)x(t)\,dt$. Линейность функционала $\ell_x$ очевидна, а непрерывность следует в силу следующего обстоятельства. Если $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$, то у функций $\varphi_n$ и $\varphi$ есть общий носитель $[\alpha, \beta] \subset K$ и $\operatorname*{Var}_{[\alpha,\beta]} (\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n]{} 0$. Поскольку $x \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$, то функция $y(t) = \int_\alpha^t x(s)\,ds$ абсолютно непрерывна на $[\alpha, \beta]$, а в соответствии с[2], с. 249, и вторым следствием утверждения 10.3 справедливо

$$\begin{aligned}(\ell_x, \varphi_n) = (\mathrm{L})\int_K \varphi_n(t)x(t)\,dt = (\mathrm{L})\int_\alpha^\beta \varphi_n(t)x(t)\,dt = \\ = \int_\alpha^\beta \varphi_n\,dy = -\int_\alpha^\beta y\,d\varphi_n \xrightarrow[n]{} -\int_\alpha^\beta y\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \varphi\,dy = \\ = (\mathrm{L})\int_\alpha^\beta \varphi(t)x(t)\,dt = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)x(t)\,dt = (\ell_x, \varphi).\end{aligned}$$

Если $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то $x$ почти всюду дифференцируема, причем $x' \in \mathrm{L}^{\mathrm{loc}}$ и справедливо $(\ell_{x'}, \varphi) = (\mathrm{L})\int_K \varphi(t)\,x'(t)\,dt = \int_K \varphi\,dx$. Последний интеграл существует не только для абсолютно непрерывных функций $x \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, но и для любой прерывистой функции $x \in \mathrm{G}$, и это наблюдение дает нам основание ввести следующее обозначение: $(\ell_{x'}, \varphi) = \int_K \varphi\,dx$, $x \in \mathrm{G}$ (доказательство непрерывности этого функционала во многом повторяет доказательство непрерывности функционала $\varphi \to (\ell_x, \varphi)$). Более того, работая в дальнейшем только с прерывистыми функциями $x \in \mathrm{G}$, мы вместо обозначений

[2] **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

$(\ell_x, \varphi)$ и $(\ell_{x'}, \varphi)$ будем использовать обозначения

$$(x, \varphi) \doteq \int_K \varphi(t)\, x(t)\, dt \quad \text{и} \quad (x', \varphi) \doteq \int_K \varphi\, dx, \tag{16.1}$$

называя функционалы *обобщенной прерывистой функцией* и *обобщенной производной прерывистой функции* соответственно.

Заметим, что первый из интегралов (16.1), вообще говоря, лебегов, но при $x \in \mathrm{G}$ он совпадает с римановым интегралом. Отметим также следующее обстоятельство. Так как $(x, \varphi) = (y', \varphi)$, где $y(t) = \displaystyle\int_\alpha^t x(s)\, ds$, то имеет место следующая диаграмма включения семейств функционалов (16.1):

$$\{\, \varphi \to (x, \varphi)\,\}_{x \in \mathrm{G}} \ \subset\ \{\, \varphi \to (y', \varphi)\,\}_{y \in \mathrm{G}} \ \subset\ D'.$$

Другими словами, всякая обобщенная прерывистая функция является обобщенной производной от некоторой другой прерывистой функции, причем включения в диаграмме — строгие. В истинности последнего утверждения легко убедиться, показав, что $\delta$-функция $\varphi \to \varphi(0)$ принадлежит второму, но не принадлежит первому семейству.

**Теорема 16.1.** *Пусть $x \in \mathrm{G}(a, b)$. Равенство $(x, \varphi) = 0$ имеет место при всех $\varphi \in D(a, b)$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}}(a, b)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть равенство $(x, \varphi) = 0$ выполнено при всех $\varphi \in D$. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset K$ и какую-нибудь функцию $\varphi \in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha, \beta]$. В силу утверждения 10.5 для функции-сужения $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ имеет место представление $x = x_L + x_0$, где $x_L \in \mathrm{G}_L[\alpha, \beta]$, $x_0 \in \mathrm{G}_0[\alpha, \beta]$. Согласно заключительному утверждению в § 10 произведение $\varphi x_0$ принадлежит $\mathrm{G}_0[\alpha, \beta]$, следовательно, в силу утверждения 10.4 имеем $(x_0, \varphi) = 0$. Тем самым $(x_L, \varphi) = 0$ и, в частности, справедливо равенство $(x_L, \overline{\varphi}) = 0$, следовательно, $(x_L, \operatorname{Re}\varphi) = 0$. Таким образом, для любой функции $\varphi \in D$, носитель которой принадлежит $[\alpha, \beta]$, имеем

$$(\operatorname{Re} x_L, \operatorname{Re}\varphi) = 0 \quad \text{и} \quad (\operatorname{Im} x_L, \operatorname{Re}\varphi) = 0. \tag{16.2}$$

Допустим, что существует $t \in (\alpha, \beta]$ такое, что $\operatorname{Re} x_L(t) \neq 0$ (можно считать $\operatorname{Re} x_L(t) > 0$). Поскольку $\operatorname{Re} x_L \in \mathrm{G}_L[\alpha, \beta]$, то существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{Re} x_L(\tau) > 0$ для всех $\tau$ из полуинтервала $(t - \delta,\, t\,] \subseteq (\alpha, \beta]$. Если функция $\varphi \in D$ такова, что $\operatorname{Re}\varphi(\tau) > 0$ при $\tau \in (t - \delta,\, t)$ и $\operatorname{Re}\varphi(\tau) = 0$ при $\tau \notin (t - \delta,\, t)$, то $(\operatorname{Re} x_L, \operatorname{Re}\varphi) > 0$, что противоречит (16.2). Таким образом, $\operatorname{Re} x_L(t) = 0$ для любого $t \in (\alpha, \beta]$, следовательно, $\operatorname{Re} x_L(t) \equiv 0$.

Аналогично $\operatorname{Im} x_{_L}(t) \equiv 0$, поэтому $x_{_L}(t) \equiv 0$, а сужение функции $x$ на отрезок $[\alpha, \beta]$ совпадает с функцией $x_{_0}$ из пространства $\mathrm{G}_{_0}[\alpha, \beta]$. Поскольку последнее утверждение справедливо для любого отрезка $[\alpha, \beta]$, то $x \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$.

Достаточность. Если $x \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi \in D$ прерывистая функция $y = \varphi x$ финитна, причем в силу заключительного утверждения в § 10 справедливо включение $y \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$. Наконец, согласно утверждению 10.4 имеет место равенство

$$(x, \varphi) = \int_K y(t)\, dt = 0.$$

**Теорема 16.2.** *Пусть* $x \in \mathrm{G}(a, b)$. *Равенство* $(x', \varphi) = 0$ *имеет место при всех* $\varphi \in D(a, b)$ *тогда и только тогда, когда* $x \sim \mathrm{const}$.

Доказательство. Необходимость. Функция, тождественно равная 1, порождает функционал $(1, \varphi) = \displaystyle\int_K \varphi(s)\, ds$. Покажем, что равенство $(1, \varphi) = 0$ выполнено для тех и только тех основных функций $\varphi \in D$, для которых функция $\psi(t) \doteq \displaystyle\int_a^t \varphi(s)\, ds$ также принадлежит пространству $D$. О функции $\psi$ можно сказать следующее. Включение $\psi \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ очевидно, более того, $\psi \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$. Кроме того, если $[\alpha, \beta] \subset K$ — какой-нибудь отрезок, содержащий носитель функции $\varphi$, то $\psi(t) = 0$ для любого $t < \alpha$ и $\psi(t)$ есть величина постоянная при $t > \beta$ (если обозначить ее через $c$, то, очевидно, $c = (1, \varphi)$ ). Таким образом, если $(1, \varphi) = 0$, то $c = 0$, следовательно, $\psi$ финитна и поэтому $\psi \in D$, и, наоборот, если $\psi \in D$, то $\psi$ финитна, $c = 0$ и $(1, \varphi) = 0$.

Зафиксируем функцию $\varphi_0$ такую, что $(1, \varphi_0) = 1$, произвольную функцию $\varphi \in D$, и пусть $c \doteq (1, \varphi)$. Если $\varphi_1 = \varphi - c\,\varphi_0$, то $(1, \varphi_1) = 0$, следовательно, функция $\psi_1(t) \doteq \displaystyle\int_a^t \varphi_1(s)\, ds$ принадлежит $D$. Поскольку $\psi_1 \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, то справедлива цепочка равенств

$$(x, \varphi_1) = \int_K \varphi_1(t) x(t)\, dt = \int_K x\, d\psi_1 = -\int_K \psi_1 dx = -(x', \psi_1) = 0,$$

поэтому $(x, \varphi) = c\,(x, \varphi_0) = (x, \varphi_0)\,(1, \varphi)$. Таким образом, для любого $\varphi \in D$ имеем $\big(x - (x, \varphi_0),\, \varphi\big) = 0$, поэтому в соответствии с теоремой 16.1 справедливо включение $x - (x, \varphi_0) \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$ и, следовательно, $x \sim \mathrm{const}$.

Достаточность. Если $x(t) = c + x_{_0}(t)$, $c \in \mathbb{C}$, $x_{_0} \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$, то для любого $\varphi \in D$ справедливо $(x', \varphi) = \displaystyle\int_K \varphi\, dx_{_0} = -\int_K x_{_0} d\varphi$, а поскольку $x_{_0} \in \mathrm{G}_{_0}^{\mathrm{loc}}$, то в силу утверждения 10.4 имеем $(x', \varphi) = 0$.

## § 17 . Присоединенные обобщенные производные прерывистых функций

Каноническая теорема 16.2 применима при решении дифференциальных уравнений, заданных в терминах обобщенных прерывистых функций. В соответствии с этой теоремой произвольная функция $x \in \mathrm{G}$ порождает в $D \doteq D(a,b)$ функционал $x' : D \to \mathbb{C}$ вида (16.1), причем $(x', \varphi) = 0$ при всех $\varphi \in D$ тогда и только тогда, когда $x \sim \mathrm{const}$.

**17.1. Канонические дифференциальные уравнения, заданные в терминах присоединенных обобщенных прерывистых функций.** Зафиксируем разбиение $T \in \mathbb{T}(K)$. Для любых $x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ (см. определение этого пространства в пункте 16.1) и $\varphi \in D$ существует присоединенный интеграл (14.1), поэтому определен линейный непрерывный функционал

$$( \dot{x}, \varphi) \doteq ( \dot{x}, \varphi)^{T} \doteq \int_K \varphi \cdot dx. \tag{17.1}$$

Поскольку $\varphi$ непрерывна, то $\varphi_{T} = 0$, поэтому

$$( \dot{x}, \varphi) = \int_K \varphi \cdot dx = \int_K \varphi \, dx^{T},$$

а тождество $(\dot{x}, \varphi) \equiv 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $x^{T} \sim \mathrm{const}$. (Напомним, что при $T = \varnothing$ имеем $\dot{x} = x'$.)

Для функций $x$ из $\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$] и произвольных $\varphi \in D$ существует присоединенный интеграл $\displaystyle\int_K \varphi \circ dx$, понимаемый в смысле определения 15.2, поэтому в $D'$ определен функционал

$$( \overset{\circ}{x}, \varphi) \doteq \int_K \varphi \circ dx. \tag{17.2}$$

В силу непрерывности функций $\varphi$ справедливо

$$( \overset{\circ}{x}, \varphi) = \int_K \varphi \circ dx = \int_K \varphi \, dx^{c},$$

а тождество $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $x^{c} \sim \mathrm{const}$ (поэтому $x^{c} = \mathrm{const}$). Полученные результаты удобно свести в следующую сопоставительную таблицу.

Таблица 1

| Пространство | $x \in \mathrm{G}$ | $x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ | $x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}\,[\,x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\,]$ |
|---|---|---|---|
| Уравнение | $(\,x', \varphi) \equiv 0$ | $(\,\dot{x}, \varphi)^T \equiv 0$ | $(\,\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv 0$ |
| Решение | $x \sim \mathrm{const}$ | $x^T \sim \mathrm{const}$ | $x^c = \mathrm{const}$ |
| Общее решение | $x(t) = c + r(t)$ <br> $\forall c \in \mathbb{C}$ <br> $\forall r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0$ | $x(t) = h(t) + r(t)$ <br> $\forall h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ <br> $\forall r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[T]$ | $x(t) = h(t)$ <br> $\forall h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ |

В последней строке таблицы 1 использованы следующие обозначения: $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)$ — пространство [ алгебра ] таких функций $x : K \to \mathbb{C}$, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset K$ функция-сужение $x : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ является функцией скачков. Функции из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ также будем называть *функциями скачков.* Для любого $M \subseteq K$ пространство [ алгебра ] $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[M] \doteq \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}(K)[M]$ состоит из тех функций $x \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$, что $T(x) \subseteq M$, а $\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[M] \doteq \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0(K)[M]$ состоит из тех $x \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0$, что $x(t) = 0$ для всех $t \in M$ (что равносильно тому, что $x$ непрерывна в точках $M$ ).

Заметим, что если $T = \varnothing$, то для функций $h$ из $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ выполнено $T(h) = \varnothing$, то есть $h(t) = \mathrm{const}$, поэтому $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing] \approx \mathbb{C}$, и в дальнейшем мы будем отождествлять $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\varnothing]$ и $\mathbb{C}$. Кроме того, $\mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[\varnothing] = \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0$, поэтому целесообразно включить вторую колонку таблицы 1 в третью. В пользу такого объединения можно также добавить равенства $x^T = x$ и $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}} = \mathrm{G}$, справедливые при $T = \varnothing$, и комментарии к определению 14.2, в соответствии с которыми при $T = \varnothing$ справедливо $\displaystyle\int_\alpha^t x \cdot dy = \int_\alpha^t x\,dy$ и поэтому $(\dot{x}, \varphi)^{\varnothing} = (x', \varphi)$ при всех $x \in \mathrm{G}$ и $\varphi \in D$.

Заметим также, что в соответствии с определениями (11.6) и (11.8) справедливо равенство $x^T(t, \alpha) - x^T(t, \beta) = \mathrm{const}$, поэтому функционалы (17.1) и (17.2) не зависят от параметра $\alpha \in K$.

Пусть, далее, $T \in \mathbb{T}(K)$ и $f \in \mathrm{G}$ — произвольная функция. Уравнение $(\dot{x}, \varphi)^T \equiv (f, \varphi)$ для $x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ равносильно следующему:

$$\int_K \varphi \cdot dx \equiv \int_K \varphi(t) f(t)\,dt =$$

$$= \int_K \varphi(t)\,d\Big(\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big) = \int_K \varphi(t) \cdot d\Big(\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big). \qquad (17.3)$$

Последнее равенство справедливо в силу непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\displaystyle\int_\alpha^t f(s)\,ds$. Следовательно, справедливо $\Big[x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t f(s)\,ds\Big]^T \sim \mathrm{const}$, поэтому $x(t) = \displaystyle\int_\alpha^t f(s)\,ds + h(t) + r(t)$, где $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, $r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_0[T]$. Если присоединенная производная понимается в смысле определения (17.2), а

$x \in \Gamma^{\text{loc}}$ [или $x \in \text{BV}^{\text{loc}}$ ], то решениями уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (f, \varphi)$ являются функции $x(t) = \displaystyle\int_\alpha^t f(s)\,ds + h(t)$, $h \in \text{H}^{\text{loc}}$. Другими словами, семейство «первообразных» функции $f$, понимаемых в смысле присоединенных распределений, существенно расширяется: вместо констант к интегралам прибавляются функции скачков и, возможно, функции из $\text{G}_0^{\text{loc}}$. Полученные результаты удобно свести в следующую сопоставительную таблицу.

Таблица 2

| Пространство | $x \in \text{G}$ | $x \in \text{G}_{\text{loc}}^T$ | $x \in \Gamma^{\text{loc}}$ [ $x \in \text{BV}^{\text{loc}}$ ] |
|---|---|---|---|
| Уравнение | $(x', \varphi) \equiv (f, \varphi)$ | $(\dot{x}, \varphi)^T \equiv (f, \varphi)$ | $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (f, \varphi)$ |
| Первообразная $x(t) =$ | $c + r(t) + \int_\alpha^t f(s)\,ds$ $\forall c \in \mathbb{C}$ $\forall r \in \text{G}_0^{\text{loc}}$ | $h(t) + r(t) + \int_\alpha^t f(s)\,ds$ $\forall h \in \text{H}^{\text{loc}}[T]$ $\forall r \in \text{G}_0^{\text{loc}}[T]$ | $h(t) + \int_\alpha^t f(s)\,ds$ $\forall h \in \text{H}^{\text{loc}}$ |

Заметим, что такие же решения мы получим, если $f \in \text{L}^{\text{loc}}$, однако мы работаем лишь с прерывистыми функциями.

**17.2. Дифференциальные уравнения, заданные в терминах присоединенных обобщенных прерывистых функций.** Пусть $X \subseteq \text{G}$ — произвольное подмножество. Каковы бы ни были $T \in \mathbb{T}(K)$, оператор $\text{V} : X \to \text{G}_{\text{loc}}^T$ и функция $x \in X$, они порождают в $D$ функционал $\varphi \to \int_K \varphi \cdot d\text{V}x$. В дальнейшем для этого функционала будем применять обозначение $\dot{\text{V}}x$, то есть

$$(\dot{\text{V}}x, \varphi) \doteq (\dot{\text{V}}x, \varphi)^T \doteq \int_K \varphi \cdot d\text{V}x. \tag{17.4}$$

Оператор $\text{V} : X \to \Gamma^{\text{loc}}$ [или $\text{V} : X \to \text{BV}^{\text{loc}}$ ] и произвольная функция $x \in X$ порождают в $D$ линейный непрерывный функционал $\overset{\circ}{\text{V}}x$ вида (17.2)

$$(\overset{\circ}{\text{V}}x, \varphi) \doteq \int_K \varphi \circ d\text{V}x. \tag{17.5}$$

Для таких $\text{V}$ и $x$ определены оба функционала (17.5) и (17.4). В соответствии с комментариями к таблице 1 семейство (17.4) содержит функционал $((\text{V}x)', \varphi)$, соответствующий разбиению $T = \varnothing$.

Заметим, что если $X = \text{CBV}^{\text{loc}}$ и $\text{V}x = x$, то все решения, приведенные в таблице 1, «схлопываются» в одно общее решение $x(t) = \text{const}$, что согласуется с решением классического уравнения $x' = 0$ и с равенством $(\overset{\circ}{x}, \varphi) = (\dot{x}, \varphi)^T$, справедливым для любых непрерывных $x$ и $T \in \mathbb{T}(K)$.

Если $X = C$, то присоединенная производная определена в $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ и в $\Gamma^{\mathrm{loc}}$, — здесь также $x(t) = \mathrm{const}$. Если $X = \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}_{L}$ — пространство [алгебра] непрерывных слева функций локально ограниченной вариации (легко проверить равенство $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}_{L} = \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{G}_{L}$), то решения $x(t) = \mathrm{const}$ остаются лишь для первого уравнения, а во втором и третьем случае решениями являются непрерывные слева функции скачков $x(t) = h(t)$ (соответственно $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \cap \mathrm{G}_{L}$ и $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{G}_{L}$).

Обобщая данные таблицы 1 на произвольный оператор $\mathrm{V}$ с областью задания $X$, справедливо утверждать, что для уравнений $\dot{\mathrm{V}}x = 0$ и $\mathring{\mathrm{V}}x = 0$ имеет место таблица 3. Отметим, что в последней строке таблицы 1 приведены все решения соответствующих уравнений, а в последней строке таблицы 3 выписаны лишь совокупности уравнений, эквивалентные этим уравнениям.

Таблица 3

| Пространство | $\mathrm{V}x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$ | $\mathrm{V}x \in \Gamma^{\mathrm{loc}}\ \big[\mathrm{V}x \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\big]$ |
|---|---|---|
| Уравнение | $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv 0$ | $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv 0$ |
| Эквивалентное уравнение | $(\mathrm{V}x)^{T} \sim \mathrm{const}$ | $(\mathrm{V}x)^{c} = \mathrm{const}$ |
| Эквивалентная система | $\begin{cases} (\mathrm{V}x)^{T}(t) = c + r(t) \\ x \in X \end{cases}$ $\forall c \in \mathbb{C}\ \ \forall r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}$ | $\begin{cases} (\mathrm{V}x)^{c}(t) = c \\ x \in X \end{cases}$ $\forall c \in \mathbb{C}$ |

В заключительной части параграфа приведем

**Пример 17.1.** Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$ (допускается, что $T = \varnothing$), $\alpha \in K$, $X = \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$, $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t x\,dq$. В частном случае, когда $q \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$, справедливо $(\mathrm{V}x)(t) = x(t) - \int_\alpha^t q'(s)x(s)\,ds$ и $(\mathrm{V}x)' = x' - q'x$, поэтому уравнение $((\mathrm{V}x)', \varphi) \equiv 0$ равносильно уравнению $(x', \varphi) \equiv (q'x, \varphi)$ или $x' = q'x$.

Уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv 0$ эквивалентно уравнению $(\mathrm{V}x)^{T} \sim \mathrm{const}$, или

$$x(t) - \int_\alpha^t x\,dq = v(t) + r(t) \quad \forall\, v \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0}[T],$$

а в силу (10.2) и утверждения 10.4 справедливо

$$x(t) = \Big[ v(\alpha)\, e^{-q(\alpha)} + \int_\alpha^t e^{-q(s)}\, dv(s) \Big]\, e^{q(t)} + r(t).$$

Через $h$ обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках. Очевидно, она является функцией скачков и $h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$. Легко проверить, что отображение $v \to h$ является биекцией $\mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$, поэтому всякое решение уравнения

$(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$ представимо в виде $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ через произвольные $h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]$ и $r\in \mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T]$. Если $T=\varnothing$, то согласно комментариям к таблице 1 справедливо $x(t)=c\,e^{q(t)}+r(t)$.

Если $X=\Gamma^{\mathrm{loc}}$ [или $X=\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$], то уравнение $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$ равносильно уравнению $(\mathrm{V}x)^{c}=\mathrm{const}$, или

$$x(t)-\int_{\alpha}^{t}x\,dq=v(t)\quad \forall\, v\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}.$$

Повторив выкладки, получим, что $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$, где $h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$. Таким образом, имеет место

Таблица 4

| Пространство | $x\in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}}$ | $x\in\Gamma^{\mathrm{loc}}\,\big[\,x\in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}\,\big]$ |
|---|---|---|
| Уравнение | $(\dot{\mathrm{V}}x,\varphi)^{\scriptscriptstyle T}\equiv 0$ | $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi)\equiv 0$ |
| Общее решение | $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}+r(t)$ $\forall h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T]\ \ \forall r\in \mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T]$ | $x(t)=h(t)\,e^{q(t)}$ $\forall h\in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}$ |

## § 18 . Представление решений линейных импульсных систем с постоянными коэффициентами, заданных в терминах присоединенных обобщенных прерывистых функций

Следуя [15, с. 143], *импульсным* мы называем уравнение

$$\dot{x}(t)=B\big(t,x(t)\big)\,\dot{Q}(t),\tag{iv.1}$$

заданное в терминах обобщенных функций. Через $x$ и $Q$ обозначены соответственно $n$-мерная и $m$-мерная векторные функции, а матричнозначная функция $B:\,\Omega\to\mathbb{C}^{n\times m}$ задана в области $\Omega\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{C}^{n}$. Считается, что левая и правая части уравнения определяют линейные непрерывные функционалы (обобщенные функции) в пространстве основных функций $D$, а само уравнение понимается как математическая запись задачи нахождения тех $x$, для которых при всех $\varphi\in D$ справедливо равенство $(\dot{x},\varphi)=\big(B(\cdot,x)\,\dot{Q},\varphi\big)$.

С позиций присоединенных распределений появляется еще два «импульсных» уравнения $\dot{\mathrm{V}}x=0$ и $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x=0$, где оператор $\mathrm{V}:X^{n}\to \mathrm{G}^{n}$ имеет вид $(\mathrm{V}x)(t)\doteq x(t)-\displaystyle\int_{\alpha}^{t}B(s,x(s))\,dQ(s)$. ( Отметим, что первое уравнение — это семейство уравнений, зависящее от параметра $T$. ) Здесь $X\subseteq \mathrm{G}$, компоненты вектора $Q$ принадлежат $\mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, а $B$ — непрерывная функция. В рамках работы мы ограничиваемся достаточно простым случаем таких уравнений, их прототипом служит система обыкновенных дифференциальных уравнений $x' = Q'Ax$, где $A$ — постоянная квадратная матрица, $Q \in \mathrm{AC}^{\mathrm{loc}}$ — скалярная функция. Краткий обзор других уравнений приведен в § 19.

Пусть $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ (допускается $T = \varnothing$ и $T(Q) = \varnothing$), $A$ — комплексная $n \times n$-матрица, $X = \big\{\, x \in \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing \big\}$. Для оператора $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dQ$, действующего из $X^n$ в $\mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}$ (в прямое произведение $\mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}} \times \ldots \times \mathrm{G}^T_{\mathrm{loc}}$), и любого $y \in \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{G}^{T(Q),\,n}_{\mathrm{loc}} = \mathrm{G}^{T \cup T(Q),\,n}_{\mathrm{loc}}$ (см. лемму 11.1) определено уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv (\dot y, \varphi)^T$ или $\dot{\mathrm{V}}x = \dot y$.

Заметим, что в силу следствия к утверждению 11.2 оператор $\mathrm{V}$ определен корректно. Отметим также, что в семейство уравнений $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv (\dot y, \varphi)^T$ входит уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^T \equiv (f, \varphi)^T$, где $f$ — произвольная прерывистая векторная функция. Дело в том, что в соответствии с (17.3) справедливо равенство $(f, \varphi)^T = (\dot y, \varphi)^T$, где $y(t) \doteq \int_\alpha^t f(s)\, ds$.

Уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot y$ равносильно совокупности уравнений (см. таблицу 3)

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^T - y^T = \gamma + \varrho \\ x \in X^n \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C}^n \ \ \forall\, \varrho \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}.$$

В силу уравнения функция $\varrho$ непрерывна в точках множества $T$ (так как там непрерывны функции $(\mathrm{V}x)^T$ и $y^T$), поэтому $\varrho \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,n}[T]$. Пусть

$$P \doteq T \cap T(Q), \quad R \doteq T(Q) \backslash T, \quad S \doteq T \backslash T(Q), \quad U \doteq T \cup T(Q).$$

Так как $y^U + y_U = y = y^T + y_T$, то $y^T = y^U + y_U - y_T = y^U + y_R$. Справедливо $Q = Q^c + Q_c = Q^c + Q_{T(Q)} = q + Q_R + Q_P$, где $q \doteq Q^c \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$, поэтому

$$\gamma + \varrho(t) + y^U(t) + y_R(t) = \Big[\, x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dq - \int_\alpha^t Ax\, dQ_R - \int_\alpha^t Ax\, dQ_P \Big]^T =$$

$$= x(t) - x_T(t) - \int_\alpha^t Ax\, dq - \int_\alpha^t Ax\, dQ_R + \Big[ \int_\alpha^t Ax\, dQ_R \Big]_T - \Big[ \int_\alpha^t Ax\, dQ_P \Big]^T.$$

Два последних слагаемых равны нулю (см. формулы (11.10)), следовательно, уравнения из совокупности принимают вид

$$x(t) - \int_\alpha^t Ax\, dq = y^U(t) + \Big[\, y_R(t) + \int_\alpha^t Ax\, dQ_R \Big] + \big[\, x_T(t) + \gamma \,\big] + \varrho(t). \quad (18.1)$$

Согласно утверждению 11.2 функции, стоящие в квадратных скобках, являются функциями скачков, причем если обозначить их через $u$ и $v$ соответственно, то $u \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[R]$ и $v \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T]$. Все функции (кроме $v$), входящие в (18.1), непрерывны во всех точках $t \in P$, поэтому и $v$ непрерывна там, то есть $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$. Следовательно, совокупность уравнений превращается в совокупность систем

$$\begin{cases} x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dq = y^{\scriptscriptstyle U}(t) + u(t) + v(t) + \varrho(t) \\ u(t) = y_{\scriptscriptstyle R}(t) + \int_\alpha^t Ax\,dQ_{\scriptscriptstyle R} \qquad\qquad \forall\, v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\; \forall\, \varrho \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[T]\,. \\ x \in X^n \end{cases} \tag{18.2}$$

Все функции (кроме $u$ и $\varrho$), входящие в первое уравнение (18.2), непрерывны во всех точках $t \in R$, поэтому функция $z \doteq u + \varrho$ (а вместе с ней и $z_{\scriptscriptstyle L}$, напомним, что $z_{\scriptscriptstyle L}(t) = z(t-0)$) также непрерывна в точках разбиения $R$. В соответствии с пунктом 16.1 имеет место представление $u = u_{\scriptscriptstyle L} + u_{\scriptscriptstyle 0}$, где $u_{\scriptscriptstyle L} \in \mathrm{G}_{\scriptscriptstyle L}^n$, $u_{\scriptscriptstyle 0} \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}$. Так как $u \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[R]$, то $u_{\scriptscriptstyle L} \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[R]$ и $u_{\scriptscriptstyle 0} \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[K \backslash R]$. Так как $u_{\scriptscriptstyle L} = z_{\scriptscriptstyle L}$, а $z_{\scriptscriptstyle L}$ непрерывна во всех точках множества $R$, то $u_{\scriptscriptstyle L}(t)$ — вектор-константа ($= u_{\scriptscriptstyle L}(\alpha)$), следовательно, $u(t) = u_{\scriptscriptstyle L}(\alpha) + u_{\scriptscriptstyle 0}(t)$, то есть $u$ — это функция, эквивалентная вектор-константе ($u \sim c \in \mathbb{C}^n$).

Если $\vartheta(\cdot) \doteq u_{\scriptscriptstyle L}(\alpha) + v(\cdot)$ (легко убедиться, что $\vartheta \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$) и $r \doteq u_{\scriptscriptstyle 0} + \varrho$ (функция $r$, очевидно, непрерывна в точках разбиения $T$), то первое уравнение (18.2) принимает вид $x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dq = y^{\scriptscriptstyle U}(t) + \vartheta(t) + r(t)$. В силу последнего уравнения функция $r$ непрерывна во всех точках разбиения $T(Q)$, поэтому $r \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[\,T \cup T(Q)] = \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[U]$. Таким образом, уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dq = y^{\scriptscriptstyle U}(t) + \vartheta(t) + r(t) \qquad \forall\, \vartheta \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[U]\,, \\ x \in Y^n \end{cases}$$

где $Y^n \doteq \Big\{ x \in X^n \;\Big|\; y_{\scriptscriptstyle R}(t) + \int_\alpha^t Ax\,dQ_{\scriptscriptstyle R} \sim c \in \mathbb{C}^n \Big\}$ — линейное многообразие. Согласно (10.2) каждое уравнение совокупности эквивалентно уравнению

$$x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)}\Big[ e^{-Aq(\alpha)}\big( y^{\scriptscriptstyle U}(\alpha) + \vartheta(\alpha)\big) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,d\vartheta \Big] + r(t), \tag{18.3}$$

где $\Phi(t) \doteq \int_\alpha^t e^{A[\,q(t)-q(s)\,]}\,dy^{\scriptscriptstyle U}(s)$ — функция, зависящая лишь от исходных параметров. Через $h$ обозначим функцию, стоящую в квадратных скобках (18.3). Отображение $\vartheta \to h$ является биекцией $\mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S]$, поэтому уравнение $\dot{\mathrm{V}}x = \dot{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t) + e^{Aq(t)}\,h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[S] \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}_{0,\,n}^{\mathrm{loc}}[U]\,. \\ x \in Y^n \end{cases}$$

Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{U}\,\Big] + r(t) \quad \forall h \in \mathrm{H}\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U],$$

где через $\mathrm{H}$ обозначено линейное многообразие

$$\mathrm{H} \doteq \Big\{h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]\ \Big|\ y_{R}(t) + \int_\alpha^t A\,\big[\,\Phi(s) + e^{Aq(s)}h(s)\,\big]\,dQ_{R}(s) \sim \mathrm{const}\,\Big\} =$$

$$= \Big\{h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]\ \Big|\ y_{R}(t) + \int_\alpha^t Ae^{Aq(s)}\Big[\,h(s) + \int_\alpha^s e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{U}\Big]\,dQ_{R}(s) \sim \mathrm{const}\,\Big\}.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 18.1.** *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $A$ *— комплексная* $n{\times}n$*-матрица,* $X = \big\{x \in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\big\}$. *Для оператора*

$$\mathrm{V} :\ X^n \to \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}, \qquad (\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dQ,$$

*и для любого* $y \in \mathrm{G}^{T\,\cup\,T(Q),\,n}_{\mathrm{loc}}$ *уравнение* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv (\,\dot y, \varphi)^{T}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\mathrm{H} \neq \varnothing$, *где*

$$\mathrm{H} \doteq \Big\{\,h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S]\ \Big|\ y_{R}(t) + \int_\alpha^t Ae^{Aq(s)}\Big[\,h(s) + \int_\alpha^s e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{U}\Big]\,dQ_{R}(s) \sim \mathrm{const}\,\Big\},$$

$$S \doteq T\backslash T(Q), \qquad R \doteq T(Q)\backslash T, \qquad U \doteq T \cup T(Q), \qquad q \doteq Q^{c}.$$

*При* $\mathrm{H} \neq \varnothing$ *общим решением уравнения является многообразие*

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{U}\,\Big] + r(t) \quad \forall h \in \mathrm{H}\ \ \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[U].$$

**Следствие 18.1.** *Если в условиях теоремы* 18.1 *справедливо* $T \supseteq T(Q)$, *то общим решением уравнения* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv (\,\dot y, \varphi)^{T}$ *является многообразие*

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{T}\,\Big] + r(t) \quad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T\backslash T(Q)] \quad \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T]\,.$$

Действительно, так как $T \supseteq T(Q)$, то $U = T$, $R = \varnothing$, $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T\backslash T(Q)]$.

Понятно, что если в условиях следствия 18.1 справедливо $T \supseteq T(y)$, то общим решением уравнения $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{T} \equiv (\,\dot y, \varphi)^{T}$ является многообразие

$$x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{c}\Big] + r(t) \quad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T\backslash T(Q)] \quad \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{0,\,n}[T]\,,$$

а совокупность $x(t) = e^{Aq(t)}\Big[\,c + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\,dy^{c}\Big]$, $c \in \mathbb{C}^{\,n}$, является семейством всех непрерывных решений уравнения.

В соответствии с цепочкой (17.3) для любого $f \in \mathrm{G}^n$ справедливо равенство $(f, \varphi)^{T} = (\,\dot y, \varphi)^{T}$, где $y(t) \doteq \int_\alpha^t f(s)\,ds$, следовательно, имеет место

**Следствие 18.2.** *Пусть* $T \in \mathbb{T}(K)$, $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $A$ *— комплексная* $n\times n$*-матрица,* $X = \bigl\{x \in \mathrm{G}^{T}_{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\bigr\}$. *Для оператора*

$$\mathrm{V} :\, X^n \to \mathrm{G}^{T,\,n}_{\mathrm{loc}}, \qquad (\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dQ,$$

*и для любого* $f \in \mathrm{G}^n$ *уравнение* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{\scriptscriptstyle T} \equiv (\,f, \varphi)^{\scriptscriptstyle T}$ *разрешимо тогда и только тогда, когда* $\mathrm{H} \neq \varnothing$, *где*

$$\mathrm{H} \doteq \Bigl\{\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[S] \;\Bigm|\; \int_\alpha^t A e^{Aq(s)} \Bigl[\, h(s) + \int_\alpha^s e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\,d\tau \,\Bigr]\, dQ_{\scriptscriptstyle R}(s) \sim \mathrm{const} \,\Bigr\},$$

$$S \doteq T \backslash T(Q), \qquad R \doteq T(Q) \backslash T, \qquad q \doteq Q^c.$$

*При* $\mathrm{H} \neq \varnothing$ *общим решением уравнения является многообразие*

$$x(t) = e^{Aq(t)} \Bigl[\, h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\,d\tau \,\Bigr] + r(t) \quad \forall h \in \mathrm{H} \;\; \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{\scriptscriptstyle 0,\,n}[U].$$

Понятно, что $\mathrm{H} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $Q(\tau_k - 0) = Q(\tau_k + 0)$ для всех $\tau_k \in R$ (то есть все разрывы $Q$ в точках $\tau_k \in R$ — устранимые).

**Следствие 18.3.** *Если в условиях следствия* 18.2 *справедливо* $T \supseteq T(Q)$, *то общим решением уравнения* $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{\scriptscriptstyle T} \equiv (\,f, \varphi)^{\scriptscriptstyle T}$ *является многообразие*

$$x(t) = e^{Aq(t)} \Bigl[\, h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\,d\tau \,\Bigr] + r(t) \quad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[T \backslash T(Q)] \quad \forall\, r \in \mathrm{G}^{\mathrm{loc}}_{\scriptscriptstyle 0,\,n}[T],$$

*а совокупность* $x(t) = e^{Aq(t)} \Bigl[\, c + \int_\alpha^t e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\,d\tau \,\Bigr]$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

**Теорема 18.2.** *Пусть* $\alpha \in K$, $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $A$ *— комплексная* $n\times n$*-матрица,* $X = \bigl\{x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : T(x) \cap T(Q) = \varnothing\bigr\}$. *Для оператора*

$$\mathrm{V} : X^n \to \Gamma^{\mathrm{loc}}_n, \qquad (\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_\alpha^t Ax\,dQ,$$

*и для любого* $y \in \Gamma^{\mathrm{loc}}_n$ *семейство решений уравнения* $(\mathring{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\mathring{y}, \varphi)$ *представимо в виде*

$$x(t) = e^{AQ^c(t)} \Bigl[\, h(t) + \int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\, dy^c \,\Bigr] \quad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}_n[\, K \backslash T(Q)].$$

*Совокупность* $x(t) = e^{AQ^c(t)} \Bigl[\, c + \int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\, dy^c \,\Bigr]$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение $\overset{\circ}{\mathrm{V}}x = \overset{\circ}{y}$ равносильно совокупности уравнений

$$\begin{cases} (\mathrm{V}x)^c - y^c = \gamma \\ x \in X^n \end{cases} \qquad \forall\, \gamma \in \mathbb{C}^n.$$

Так как $Q = q + Q_c$, $q \doteq Q^c \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}$ и $\Big[\displaystyle\int_\alpha^t Ax\, dQ_c\Big]^c = 0$, то каждое из уравнений имеет вид $x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t Ax\, dq = y^c(t) + \big[\, x_c(t) + \gamma\,\big]$. Функция, стоящая в квадратных скобках (обозначим ее $v$), является функцией скачков, то есть $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}$. Все функции (кроме $v$), входящие в уравнение, непрерывны во всех точках $t \in T(Q)$, поэтому и $v$ непрерывна там, то есть $v \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$. Согласно (10.2) уравнение эквивалентно (учитывая, что введенное ниже отображение $v \to h$ является биекцией $\mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)]$ )

$$x(t) = e^{Aq(t)} \Big\{ \underbrace{\Big[ e^{-Aq(\alpha)}\big(y^c(\alpha) + v(\alpha)\big) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)} dv \Big]}_{h(t)} + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)} dy^c \Big\} =$$

$$= e^{Aq(t)} \Big[\, h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\cdot)}\, dy^c \Big].$$

Второе утверждение теоремы очевидным образом следует из первого.

**Следствие 18.4.** *Если к условиям теоремы* 18.2 *добавлено* $f \in \mathrm{G}^n$, *то общим решением уравнения* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x, \varphi) \equiv (\, f, \varphi)$ *является многообразие*

$$x(t) = e^{Aq(t)} \Big[\, h(t) + \int_\alpha^t e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\, d\tau \Big] \quad \forall\, h \in \mathrm{H}_n^{\mathrm{loc}}[K \backslash T(Q)],$$

*а совокупность* $x(t) = e^{Aq(t)} \Big[\, c + \displaystyle\int_\alpha^t e^{-Aq(\tau)} f(\tau)\, d\tau \Big]$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

**Пример 18.1.** При любом $\mu$ линейная комбинация $Q \doteq (1-\mu)\,\xi + \mu\,\eta$ функций $\xi$ и $\eta$ (см. пункт 11.2) порождает $\delta$-функцию $\varphi \to \varphi(0)$, так как

$$(Q', \varphi) = \int_K \varphi\, dQ = (1-\mu) \int_K \varphi\, d\xi + \mu \int_K \varphi\, d\eta = \varphi(0).$$

Другими словами, $Q' = \delta$ для любого $\mu$. Если $(\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t x\, dQ$, то при любом $T \in \mathbb{T}(K)$ уравнение $(\dot{\mathrm{V}}x, \varphi)^{\scriptscriptstyle T} \equiv 0$ можно интерпретировать как импульсное уравнение $\dot{x} = \delta(t)\, x$. Здесь мы имеем $n = 1$, $A = 1$, $y = 0$, $T(Q) = \{0\}$ и $q = \mathrm{const}$.

1. Если $0 \in T$, то множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[\,T \backslash \{0\}] \quad \forall\, r \in \mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[\,T].$$

Константы, и только они, являются непрерывными решениями уравнения.

2. Если $0 \notin T$, то $U = T \cup \{0\}$, $S = T$, $R = \{0\}$ и

$$\mathrm{H} = \Big\{\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \;\Big|\; \int_{\alpha}^{t} e^{q(\cdot)} h\, dQ \sim \mathrm{const} \Big\} = \big\{\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[T] \;\big|\; h(0) = 0 \big\},$$

а множество всех решений уравнения имеет вид

$$x(t) = h(t) + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H} \quad \forall\, r \in \mathrm{G}_{0}^{\mathrm{loc}}[T \cup \{0\}].$$

Единственным непрерывным решением при $0 \notin T$ является $x = 0$.

3. Общим решением уравнения $(\mathring{\mathrm{V}} x, \varphi) \equiv 0$ является совокупность непрерывных в нуле функций скачков $x = h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}}[K \backslash \{0\}]$, а непрерывные решения уравнения — это функции-константы.

## § 19 . Краткий обзор утверждений об импульсных уравнениях, заданных в терминах присоединенных обобщенных прерывистых функций

Исследование уравнений $(\dot{V} x, \varphi) \equiv (\dot{y}, \varphi)$ и $(\mathring{\mathrm{V}} x, \varphi) \equiv (\mathring{y}, \varphi)$ имеет определенные перспективы. Приведем без доказательства ряд примеров.

1. В работе [25] доказано утверждение, обобщающее теорему 18.2.

**Утверждение 19.1.** *Пусть* $\alpha \in K$ , $Q$ *— квадратная матрица порядка* $n$ *с элементами* $Q_{ij} \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$ , $\mathrm{X}_i \doteq \{\, x \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : \bigcup\limits_{k} T(Q_{ki}) \cap T(x) = \varnothing \big\}$ *для всех* $i$. *Для оператора*

$$V : \mathrm{X}_1 \times \ldots \times \mathrm{X}_n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}, \qquad (\mathrm{V}x)(t) \doteq x(t) - \int_{\alpha}^{t} [\, dQ\,]\, x, \tag{19.1}$$

*и для любого вектор-столбца* $y \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство всех решений уравнения* $(\mathring{\mathrm{V}} x, \varphi) \equiv (\mathring{y}, \varphi)$ *представимо в виде*

$$x(t) = C(t, \alpha)\, h(t) + \int_{\alpha}^{t} C(t, s)\, dy^{c}(s), \tag{19.2}$$

*где компоненты* $h_i$ *вектор-столбца* $h$ *таковы, что* $h_i \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{X}_i$ . *Совокупность* $x(t) = C(t, \alpha) \Big[\, c + \int_{\alpha}^{t} C(\alpha, s)\, dy^{c}(s) \Big]$, $c \in \mathbb{C}^{\,n}$ , *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

Матрица $C(t,\tau)$ в представлении (19.2) называется *матрицей Коши* (в работе [25] приведена процедура ее явного построения). Она обладает всеми характерными свойствами матрицы Коши системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$C(s,s) \equiv E$;

$C(t,s)\,C(s,\tau) = C(t,\tau)$;

$C(t,\tau)$ и $C(\tau,t)$ — взаимно обратны;

$C(t,\tau) - \displaystyle\int_\tau^t [\,dQ^c(s)]\,C(s,\tau) = E \quad$ и $\quad C(t,\tau) - \displaystyle\int_\tau^t C(t,s)\,dQ^c(s) = E.$

Кроме того, для сопряженного уравнения имеет место

**Утверждение 19.2.** *Пусть* $\alpha \in K$, $Q$ *— квадратная матрица порядка* $n$ *с элементами* $Q_{ij} \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}$, $\mathrm{Y}_j \doteq \{\, y \in \Gamma^{\mathrm{loc}} : \bigcup\limits_k T(Q_{jk}) \cap T(y) = \varnothing \}$ *для всех* $j$. *Для оператора*

$$V:\ \mathrm{Y}_1 \times \ldots \times \mathrm{Y}_n \to \Gamma_n^{\mathrm{loc}}, \qquad (\mathrm{V}y)(\tau) \doteq y(\tau) + \int_\alpha^\tau y\,dQ,$$

*и для любой вектор-строки* $x \in \Gamma_n^{\mathrm{loc}}$ *семейство всех решений уравнения* $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}y,\varphi) \equiv (\overset{\circ}{x},\varphi)$ *представимо в виде*

$$y(\tau) = h(\tau)\,C(\alpha,\tau) + \int_\alpha^\tau [\,dx^c(s)\,]\,C(s,\tau),$$

*где компоненты* $h_j$ *вектор-строки* $h$ *таковы, что* $h_j \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \cap \mathrm{Y}_j$. *Совокупность* $y(\tau) = \left[\, c + \displaystyle\int_\alpha^\tau [\,dx^c(s)\,]\,C(s,\alpha) \right] C(\alpha,\tau)$, $c \in \mathbb{C}^n$, *является семейством всех непрерывных решений уравнения.*

2. Обобщением оператора (19.1) является $(\mathrm{V}x)(t) \doteq B(t)x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t [\,dQ\,]\,x$, где $B$ — функциональная квадратная матрица порядка $n$. Поскольку $B$ может быть необратимой, то уравнения $(\dot{V}x,\varphi) \equiv (\dot{y},\varphi)$ и $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi) \equiv (\overset{\circ}{y},\varphi)$ принято называть *сингулярными.* Приведем пример из работы [99].

Легко проверить, что решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases}$ являются функции $x_1(t) = x_2(t) = c\,e^t$, $t \in K$ (при любом $c \in \mathbb{C}$), поэтому не всякая начальная задача разрешима. В то же время, уравнение $(\overset{\circ}{\mathrm{V}}x,\varphi) \equiv 0$, заданное в терминах присоединенных распределений через оператор $(\mathrm{V}x)(t) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t x(s)\,ds$, разрешимо (здесь $X = \Gamma^{\mathrm{loc}}$, $\mathrm{V}: X^2 \to \Gamma_2^{\mathrm{loc}}$). Его общее решение (см. [99]) имеет вид

$$x_1(t) = h(t)\,e^t, \quad x_2(t) = h(t)\,e^t + r(t) \qquad \forall\, h \in \mathrm{H}^{\mathrm{loc}} \quad \forall\, r \in \mathrm{G}_0^{\mathrm{loc}} \cap \Gamma^{\mathrm{loc}}.$$

В частности, каковы бы ни были $(t_0, x_{10}, x_{20}) \in K \times \mathbb{C}^2$, функции

$$x_1(t) = \begin{cases} x_{10}\, e^{t-t_0}, & t \leqslant t_0, \\ x_{20}\, e^{t-t_0}, & t > t_0, \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} x_{10}\, e^{t-t_0}, & t < t_0, \\ x_{20}\, e^{t-t_0}, & t \geqslant t_0, \end{cases}$$

являются решением системы и таковы, что $x_1(t_0) = x_{10}$, $x_2(t_0) = x_{20}$.

3. В работах [29, с. 10], [64, с. 4] определены уравнения с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. В примере [29, с. 13] (см. также [64, с. 5]) отмечено, что в рамках импульсной тематики задача $\dot{x} = 1+x^2$, $x(0) = 0$, имеет периодическое решение $x(t) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \{ \frac{4}{\pi} t \}$, $t \in \mathbb{R}$. Эта же функция является одним из решений уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (1+x^2, \varphi)$. [Заметим, что в рамках теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача имеет единственное непродолжаемое решение $x(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.] Уравнения $(\overset{\circ}{x}, \varphi) \equiv (\mathcal{F}x, \varphi)$ также имеют периодические решения (см. [99]):

1) $x(t) = \frac{1}{\varepsilon+1-\{t\}}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{F}x \doteq x^2$, $\varepsilon > 0$;

2) $x(t) = (1-\{t\})^2$, $t \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{F}x \doteq -2\sqrt{x}$;

3) $x(t) = 1-\{t\}$, $t \in \mathbb{R}$, если $\mathcal{F}x \doteq 1$ при $x < 0$, $\mathcal{F}x \doteq \gamma$ при $x = 0$, $\mathcal{F}x \doteq -1$ при $x > 0$.

Последнее уравнение относится к дискуссионной тематике дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [32]: при $\gamma = 0$ нетривиальные непродолжаемые решения уравнения имеют вид $x(t) = \pm \begin{cases} c - t, & t \leqslant c, \\ 0, & t \geqslant c, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, а при $\gamma \neq 0$ непродолжаемые решения: $x(t) = \pm (c-t)$, $t \in (-\infty, c)$.

# ГЛАВА V. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КВАЗИИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для двух прерывистых функций $x, y$, заданных на отрезке $[a,b]$, и специального параметра $\Delta$, названного дефектом, определено понятие квазиинтеграла $\displaystyle\int_a^b x\Delta y$. (Другими словами, определено бинарное отношение $x\Delta y$.) Если существует интеграл Римана–Стилтьеса, то для любого дефекта существует квазиинтеграл, и все они равны между собой. Интеграл Перрона–Стилтьеса, если он существует, совпадает с одним из квазиинтегралов, где дефект определен специальным образом ($\Delta = \Delta_0$). Приведены необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов, доказаны их основные свойства, в частности, аналог формулы интегрирования по частям.

Доказана теорема существования и единственности решения квазиинтегрального уравнения

$$x(t) - \lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t), \quad t \in [a,b], \tag{v.1}$$

с постоянной вещественной матрицей $A$. Ядро $Q$ системы — скалярная кусочно-непрерывная функция ограниченной вариации, компоненты векторов $x$ и $y$ — прерывистые функции, спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ — регулярное число. При определенных условиях квазиинтегральное уравнение (v.1) можно интерпретировать как импульсную задачу

$$\dot{x}(t) - \lambda A\,\dot{Q}(t)\,x(t) = \dot{y}(t), \quad x(\alpha) = y(\alpha). \tag{v.2}$$

Получено явное представление для решения однородного квазиинтегрального уравнения. Для абсолютно регулярного спектрального параметра определен аналог матрицы Коши, исследованы его свойства и получено явное представление для решения квазиинтегрального уравнения в форме Коши. Аналогичные результаты получены для сопряженного и союзных уравнений.

Результаты главы опубликованы в работах [91–93, 96, 97, 107, 108].

## § 20 . Бинарное отношение «квазиинтеграл Римана–Стилтьеса» в алгебре прерывистых функций

Зафиксируем отрезок $K \doteq [a,b]$ и через $\mathrm{G} \doteq \mathrm{G}[a,b]$ обозначим пространство прерывистых функций (см. пункт 10.1). В соответствии с пунктом 11.1 конечное или счетное множество $T \doteq \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ попарно различных точек $\tau_k \in K$ называем разбиением отрезка $K$, а совокупность всех разбиений $K$ обозначаем через $\mathbb{T}(K)$. Согласно утверждению 10.2 множество $T(x)$, состоящее из всех точек разрыва произвольной функции $x \in \mathrm{G}$, не более чем счетно. Другими словами, $T(x) \in \mathbb{T}(K)$ для всех $x \in \mathrm{G}$. Для фиксированных $x \in \mathrm{G}$ и $T \in \mathbb{T}(K)$ определены величины (11.1), (11.2) и $x_k \doteq x(\tau_k)$.

В пункте 11.1 определены алгебры $\mathrm{G}^T \doteq \mathrm{G}^T[a,b]$ и $\Gamma \doteq \Gamma[a,b]$, а в пункте 11.2 для всех $x \in \mathrm{G}^T$ определены проекции $x_{\scriptscriptstyle T}$ и $x^{\scriptscriptstyle T}$ (для всех $x \in \Gamma$ определены проекции $x_c$ и $x^c$). Для любых $x \in \mathrm{G}^T$ функциональный ряд

$$x_{\scriptscriptstyle T}(t) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k \qquad (11.6) = (20.1)$$

абсолютно и равномерно на $K$ сходится ($x_{\scriptscriptstyle T}$ является функцией скачков).

**20.1. Семейство квазиинтегралов — аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса в алгебре прерывистых функций.** Через $\Omega$ обозначим пространство функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(0) = 0$. Пару функций $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$ называем *дефектом*, а $\Omega^2$ — *пространством дефектов.*

Для $\varphi \in \Omega$ через $\varphi^*$ обозначим функцию $\varphi^*(h) \doteq h - \varphi(h)$. Очевидно, $\varphi^*(0) = 0$, $\varphi^* \in \Omega$ и $\varphi^{**} = \varphi$. Дефект $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ будем называть *двойственным* к дефекту $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$.

Подпространство $\Omega_c \doteq \{\, \varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = O(h) \text{ при } h \to 0 \,\}$ состоит из тех функций $\varphi \in \Omega$, для которых существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\,\varphi(h)\,| \leqslant C|\,h\,|$ при $|\,h\,| \leqslant \delta$. Очевидно, включение $\varphi \in \Omega_c$ влечет включение $\varphi^* \in \Omega_c$ и, следовательно, пара двойственных дефектов $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ принадлежит или не принадлежит $\Omega_c^2$ одновременно.

Подпространство $\Omega_\ell \doteq \{\, \varphi \in \Omega \mid \varphi(h) = \mu h \,\}$ состоит из линейных функций. Очевидно, если $\varphi \in \Omega_\ell$, то $\varphi^* \in \Omega_\ell$ и, следовательно, двойственная пара $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*, \psi^*)$ принадлежит или не принадлежит $\Omega_\ell^2$ одновременно.

Зафиксируем $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$. Через $\mathbb{T}(x\Delta y)$ обозначим множество всех разбиений $T \in \mathbb{T}(K)$ таких, что:

1) $y \in \mathrm{G}^T$;

2) существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^{\scriptscriptstyle T}$;

3) абсолютно сходится ряд $\displaystyle\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y) \doteq -\sum_{\tau_k \in T} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in T} \Psi_k$, где

$$\Phi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k \doteq \begin{vmatrix} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

Ряд $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ и его сумму (если она существует) мы обозначаем одним и тем же символом. В тех случаях, когда есть необходимость указания зависимости введенных объектов от $\alpha$ и $\beta$, будем писать: $\Phi_k^{\alpha,\beta}$, $\Psi_k^{\alpha,\beta}$, $\sigma_{\alpha,\beta}^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ и

$\mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$. Из свойств определителя справедливо

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\varphi(y_k^-) \\ x(\tau_k-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad \Psi_k = \begin{vmatrix} x(\tau_k) & -\psi(y_k^+) \\ x(\tau_k+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

**Утверждение 20.1.** *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$. *Множество* $\mathbb{T}(x\Delta y)$ *не пусто тогда и только тогда, когда оно содержит разбиение* $T(x) \cap T(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, то для некоторого разбиения $T$ выполнены три условия: $y \in \mathrm{G}^T$, существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и абсолютно сходится ряд $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$.

1. Обозначим $S \doteq T(x) \cap T(y)$ и покажем, что $S \subseteq T$. Предположим, что это не так, то есть существует $\tau_m \in S$ такое, что $\tau_m \notin T$. Обе функции $x$ и $y$ разрывны в точке $\tau_m$, следовательно, поскольку существует интеграл $\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$, то $y^{\scriptscriptstyle T}$ непрерывна в точке $\tau_m$. Это означает, что правая часть формулы $y(t) = y^{\scriptscriptstyle T}(t) - \sum\limits_{\tau_k \in T} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum\limits_{\tau_k \in T} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k$ также непрерывна в точке $\tau_m \notin T$, что противоречит разрывности функции $y$ в этой точке.

2. Итак, $S \subseteq T$ и, следовательно, $y \in \mathrm{G}^S$ (см. лемму 11.1). Таким образом, определена функция $y^{\scriptscriptstyle S}$, причем в силу (20.1) справедливо равенство

$$y^{\scriptscriptstyle S}(t) = y^{\scriptscriptstyle T}(t) - \sum_{\tau_k \in R} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in R} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k, \tag{20.2}$$

где $R \doteq T \backslash S$. В каждой точке $\tau_k \in R$ одна из функций $x$ или $y$ непрерывна, следовательно, $x$ непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, где через $Q$ обозначено множество тех $\tau_k \in R$, в которых $y$ разрывна. Очевидно, $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R \backslash Q$, поэтому

$$y^{\scriptscriptstyle S}(t) = y^{\scriptscriptstyle T}(t) - \sum_{\tau_k \in Q} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k. \tag{20.3}$$

В соответствии с утверждением 11.2 существует интеграл

$$\int_\alpha^\beta x(s)\,d\Big[-\sum_{\tau_k \in Q} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k\Big], \tag{20.4}$$

а поскольку существует $\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$, то существует $\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle S}$. Наконец, абсолютная сходимость ряда $\sigma^{\scriptscriptstyle S}(x\Delta y)$ следует из оценки

$$\sum_{\tau_k \in S} \big(\,|\Phi_k| + |\Psi_k|\,\big) \leqslant \sum_{\tau_k \in T} \big(\,|\Phi_k| + |\Psi_k|\,\big) < \infty.$$

Таким образом, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Обратное утверждение тривиально.

**Замечание 20.1.** На первом этапе доказательства утверждения 20.1 мы доказали, что в том случае, когда $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, для любого $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ справедливо включение $T(x) \cap T(y) \subseteq T$. Дословно повторив выкладки второго этапа, легко убедиться в истинности следующего утверждения: *если* $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ *и* $T(x) \cap T(y) \subseteq S \subseteq T$, *то* $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

**Утверждение 20.2.** *Пусть* $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$ *и* $Q, R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. *Для разбиений* $U \doteq Q \cup R$ *и* $V \doteq Q \cap R$ *имеют место включения* $U, V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Доказательство. Включение $V \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ следует из замечания 20.1. В силу леммы 11.1 справедливо $G^U = G^Q \cap G^R$, поэтому $y \in G^U$. Очевидное равенство $y^Q + y^R = y^U + y^V$ и существование интегралов $\int_\alpha^\beta x\,dy^Q$, $\int_\alpha^\beta x\,dy^R$ и $\int_\alpha^\beta x\,dy^V$ влекут существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy^U$. Наконец, равенство $\sigma^Q(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y) = \sigma^U(x\Delta y) + \sigma^V(x\Delta y)$ и абсолютная сходимость рядов $\sigma^Q(x\Delta y)$, $\sigma^R(x\Delta y)$ и $\sigma^V(x\Delta y)$ влекут абсолютную сходимость ряда $\sigma^U(x\Delta y)$. $\square$

Итак, если множество $\mathbb{T}(x\Delta y)$ не пусто, то оно является подрешеткой решетки $\mathbb{T}(K)$, причем наименьшим элементом решетки $\mathbb{T}(x\Delta y)$ является разбиение $T(x) \cap T(y)$. Следует иметь в виду следующее обстоятельство: если $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $S \subset T$, то $T$ может оказаться вне множества $\mathbb{T}(x\Delta y)$. Покажем это на примере.

**Пример 20.1.** Пусть $K \doteq [0,1]$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $x(t) = 0$ при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и $x(t) = 1$ при $t > \frac{1}{2}$, $y(t) = t\left\{\frac{1}{t}\right\}$ при $t \neq 0$ и $y(0) = 0$ (функция $y$ здесь такая же, как функция $x$ в примере 10.1). Поскольку множество $S \doteq T(x) \cap T(y) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ конечно, то $y \in \mathrm{G}^S (= \mathrm{G})$ и $y^S(t) = y(t)$ при $t \leqslant \frac{1}{2}$ и $y^S(t) = \frac{1}{2} - t$ при $t \geqslant \frac{1}{2}$. Функция $y^S$, как и должно быть, непрерывна в точке $\frac{1}{2}$, следовательно, существует интеграл $\int_0^1 x\,dy^S = \int_{1/2}^1 d\left(\frac{1}{2} - t\right) = -\frac{1}{2}$. Ряд $\sigma^S(x\Delta y)$ вырождается в одно слагаемое, поэтому $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Если положить $T \doteq \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, то $S \subset T$, однако, $y \notin \mathrm{G}^T$ (см. пример 10.1), следовательно, $T \notin \mathbb{T}(x\Delta y)$. Ситуацию проясняет следующая

**Утверждение 20.3.** *Пусть* $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, $T \in \mathbb{T}(K)$ *и* $S \subseteq T$. *Включение* $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $y \in \mathrm{G}^T$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $y \in \mathrm{G}^T$. Поскольку $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$, то $T(x) \cap T(y) \subseteq S$ и $y \in \mathrm{G}^S$, поэтому справедливо равенство (20.2) и остальные выкладки второго этапа доказательства утверждения 20.1, в силу которых существование интеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^S$ влечет существование интеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^T$. Осталось показать абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Пусть $R \doteq T\backslash S$, а $Q$ состоит из тех точек $\tau_k \in R$, в которых $y$ разрывна. Поскольку $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R\backslash Q$, то $\varphi(y_k^-) = \psi(y_k^+) = 0$ и $\Phi_k = \Psi_k = 0$, поэтому

$$\sigma^R(x\Delta y) \doteq -\sum_{\tau_k\in R}\Phi_k + \sum_{\tau_k\in R}\Psi_k = -\sum_{\tau_k\in Q}\Phi_k + \sum_{\tau_k\in Q}\Psi_k.$$

Так как $x$ непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$, следовательно, $\Phi_k = x_k y_k^- \displaystyle\int_\alpha^\beta d\xi_k$ и $\Psi_k = x_k y_k^+ \displaystyle\int_\alpha^\beta d\eta_k$, поэтому

$$\sum_{\tau_k\in R}(\,|\Phi_k| + |\Psi_k|\,) \leqslant \|x\| \sum_{\tau_k\in Q}(\,|\,y_k^-| + |\,y_k^+|\,) \leqslant \|x\| \sum_{\tau_k\in T}(\,|\,y_k^-| + |\,y_k^+|\,) < \infty.$$

В силу равенства $\sigma^T(x\Delta y) = \sigma^S(x\Delta y) + \sigma^R(x\Delta y)$ абсолютная сходимость рядов $\sigma^S(x\Delta y)$ и $\sigma^R(x\Delta y)$ влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma^T(x\Delta y)$. Таким образом, $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

**Следствие 20.1.** *Пусть $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$. Эквивалентные разбиения $S$ и $T$, содержащие разбиение $T(x)\cap T(y)$, принадлежат или не принадлежат множеству $\mathbb{T}(x\Delta y)$ одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $S \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R \doteq S \cap T$, то в соответствии с замечанием 20.1 имеем $R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$. Поскольку $T \sim S$, то $\mathrm{G}^T = \mathrm{G}^S$ (см. лемму 11.1) и $y \in \mathrm{G}^T$, а поскольку $R \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и $R \subseteq T$, то в силу утверждения 20.3 справедливо включение $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

**Теорема 20.1.** *Пусть $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \in \Omega^2$. Если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$, то при всех $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ справедливо тождество*

$$\int_\alpha^\beta x\,dy^T + \sigma^T(x\Delta y) \equiv \mathrm{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S \doteq T(x) \cap T(y)$. В соответствии с формулами (20.3) и (20.4) справедлива цепочка равенств

$$\int_\alpha^\beta x\,dy^S - \int_\alpha^\beta x\,dy^T = \int_\alpha^\beta x(s)\,d\left[-\sum_{\tau_k\in Q} y_k^- \int_\alpha^s d\xi_k + \sum_{\tau_k\in Q} y_k^+ \int_\alpha^s d\eta_k\right] =$$

$$= -\sum_{\tau_k\in Q} x(\tau_k)y_k^- \int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in Q} x(\tau_k)y_k^+ \int_\alpha^\beta d\eta_k, \tag{20.5}$$

заканчивающаяся ссылкой на утверждение 11.2. В частности, правая часть цепочки (20.5) есть абсолютно сходящийся ряд. Напомним (см. второй пункт доказательства утверждения 20.1), что через $Q$ обозначено множество тех $\tau_k \in R \doteq T \backslash S$, в которых $y$ разрывна. Поскольку $y_k^- = y_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in R \backslash Q$, то $\varphi(y_k^-) = \psi(y_k^+) = 0$ и $\Phi_k = \Psi_k = 0$, поэтому

$$\sigma^{R}(x\Delta y) \doteq -\sum_{\tau_k \in R} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in R} \Psi_k = -\sum_{\tau_k \in Q} \Phi_k + \sum_{\tau_k \in Q} \Psi_k.$$

Так как $x$ непрерывна во всех точках $\tau_k \in Q$, то $x_k^- = x_k^+ = 0$ и

$$\sigma^{R}(x\Delta y) = -\sum_{\tau_k \in Q} x_k y_k^- \int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k \in Q} x_k y_k^+ \int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

В силу (20.5) имеет место равенство $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^{S} - \int_\alpha^\beta x\, dy^{T} = \sigma^{R}(x\Delta y)$, а поскольку $\sigma^{T}(x\Delta y) = \sigma^{S}(x\Delta y) + \sigma^{R}(x\Delta y)$, то

$$\int_\alpha^\beta x\, dy^{T} + \sigma^{T}(x\Delta y) = \int_\alpha^\beta x\, dy^{S} + \sigma^{S}(x\Delta y).$$

**Определение 20.1.** Будем говорить, что число $J \in \mathbb{R}$ есть *квазиинтеграл* функции $x \in \mathrm{G}$ по функции $y \in \mathrm{G}$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ относительно дефекта $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$ и обозначать $J \doteq \displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$, если $\mathbb{T}(x\Delta y) \neq \varnothing$ и существует разбиение $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ такое, что $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^{T} + \sigma^{T}(x\Delta y) = J$.

В силу теоремы 20.1 квазиинтеграл не зависит от выбора $T$, важно только, чтобы такое разбиение нашлось, — тем самым определение 20.1 корректно. Следует также отметить, что в обозначении квазиинтеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ вместо привычного знака дифференциала $d$ стоит дефект $\Delta$, выполняющий не только роль разделителя функций $x$ и $y$, но и явно подчеркивающий зависимость квазиинтеграла от дефекта. Итак, величина

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y \doteq \int_\alpha^\beta x\, dy^{T} + \sigma^{T}(x\Delta y) =$$

$$= \int_\alpha^\beta x\, dy^{T} - \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} x_k & -\varphi(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} x_k & -\psi(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} \int_\alpha^\beta d\eta_k \quad (20.6)$$

называется *квазиинтегралом Римана–Стилтьеса дефекта* $\Delta$.

**20.2. Свойства квазиинтегралов.** В приводимой ниже теореме приведены необходимые и достаточные условия существования квазиинтегралов.

**Теорема 20.2.** *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}$, $\alpha, \beta \in K$, $\Delta \in \Omega^2$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$.

1. *Если* $\operatorname{card} T < \infty$, *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^{\scriptscriptstyle T}$ *существуют или нет одновременно.*

2. *Если* $\Delta \in \Omega_c^2$ *и* $y \in \mathrm{G}^T$ *(или* $y \in \Gamma$*), то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy^{\scriptscriptstyle T}$ *существуют или нет одновременно.*

3. *Если* $\Delta \in \Omega_c^2$ *и* $y \in \mathrm{BV}$, *то квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *существует.*

4. *Если существует интеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\, dy$, *то существует квазиинтеграл* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *и выполнено равенство* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y = \int_\alpha^\beta x\, dy.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждений пунктов 1,2 очевидна, поэтому следует доказывать только достаточность.

1. Поскольку $T$ конечно, то $y \in \mathrm{G} = \mathrm{G}^T$, а ряд $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ вырождается в конечную сумму, поэтому $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$ и существует квазиинтеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$.

2. Поскольку $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega_c^2$, то существуют $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что $|\,\varphi(h)\,| \leqslant C\,|\,h\,|$, $|\,\psi(h)\,| \leqslant C\,|\,h\,|$ при $|\,h\,| \leqslant \delta$. Множество

$$S \doteq \bigl\{\, \tau_k \in T : \,|\,y_k^-| > \delta \text{ или } |\,y_k^+| > \delta \,\bigr\}$$

состоит из конечного числа точек (см. утверждение 10.2), следовательно, абсолютная сходимость ряда $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ равносильна абсолютной сходимости ряда $\sigma^{\scriptscriptstyle R}(x\Delta y)$, где $R \doteq T \backslash S$. Поскольку $|\,y_k^-| \leqslant \delta$ и $|\,y_k^+| \leqslant \delta$ для всех $\tau_k \in R$, то $|\,\varphi(y_k^-)\,| \leqslant C\,|\,y_k^-|$ и $|\,\psi(y_k^+)\,| \leqslant C\,|\,y_k^+|$, поэтому

$$|\,\Phi_k\,| \leqslant |\,x_k y_k^- + x_k^- \varphi(y_k^-)\,| \leqslant (\,|\,x_k\,| + C\,|\,x_k^-|\,) \cdot |\,y_k^-| \leqslant (\,1{+}2C\,) \cdot \|x\| \cdot |\,y_k^-|,$$

и аналогично $|\,\Psi_k\,| \leqslant (\,1{+}2C\,) \cdot \|x\| \cdot |\,y_k^+\,|$. Таким образом,

$$\sum_{\tau_k \in R} (\,|\,\Phi_k\,| + |\,\Psi_k\,|\,) \leqslant (\,1{+}2C\,) \cdot \|x\| \cdot \sum_{\tau_k \in T} (\,|\,y_k^-| + |\,y_k^+|\,) < \infty,$$

поэтому ряды $\sigma^{\scriptscriptstyle R}(x\Delta y)$ и $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ абсолютно сходятся и $T \in \mathbb{T}(x\Delta y)$.

Так как $\Gamma \subset \mathrm{G}^T$, то в частном случае $y \in \Gamma$ утверждение тоже верно.

3. Справедливы включения $y \in \mathrm{BV} \subset \mathrm{G}^S$, где $S \doteq T(y)$. Поскольку $y^{\scriptscriptstyle S} \in \mathrm{CBV}$, то есть $y^{\scriptscriptstyle S}$ — непрерывная функция ограниченной вариации, то

согласно утверждению 10.3 существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{S}$. Абсолютная сходимость ряда $\sigma^{S}(x\Delta y)$ доказывается так же, как доказывалась абсолютная сходимость ряда $\sigma^{T}(x\Delta y)$ в предыдущем пункте. Значит, $S\in\mathbb{T}(x\Delta y)$.

4. Существование интеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy$ влечет равенство $T=\varnothing$, следовательно, $y\in\mathrm{G}=\mathrm{G}^T$ и $y^{T}=y$, поэтому существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{T}$, а поскольку $\sigma^{T}(x\Delta y)=0$, то $T\in\mathbb{T}(x\Delta y)$. $\square$

1. *Квазиинтеграл линеен по первому аргументу*, то есть если существуют $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta z$ и $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\Delta z$, то для любых $p,q\in\mathbb{R}$ существует $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z$ и

$$\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z=p\int_\alpha^\beta x\Delta z+q\int_\alpha^\beta y\Delta z.$$

Действительно, поскольку $\mathbb{T}(x\Delta z)\neq\varnothing$ и $\mathbb{T}(y\Delta z)\neq\varnothing$, то для любых $Q\in\mathbb{T}(x\Delta z)$ и $R\in\mathbb{T}(y\Delta z)$ определено разбиение $U\doteq Q\cup R$, и в соответствии с леммой 11.1 справедливо равенство $\mathrm{G}^U=\mathrm{G}^Q\cap\mathrm{G}^R$. Это означает, в частности, что $z\in\mathrm{G}^U$, поэтому в силу утверждения 20.3 имеем включения $U\in\mathbb{T}(x\Delta z)$ и $U\in\mathbb{T}(y\Delta z)$. Таким образом, существуют интегралы $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dz^{U}$ и $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,dz^{U}$, абсолютно сходятся ряды $\sigma^{U}(x\Delta z)$ и $\sigma^{U}(y\Delta z)$ и справедлива цепочка равенств

$$p\int_\alpha^\beta x\Delta z+q\int_\alpha^\beta y\Delta z=p\int_\alpha^\beta x\,dz^{U}+p\,\sigma^{U}(x\Delta z)+q\int_\alpha^\beta y\,dz^{U}+q\,\sigma^{U}(y\Delta z)=$$

$$=\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\,dz^{U}+\sigma^{U}\big((\,px+qy\,)\Delta z\big)=\int_\alpha^\beta (\,px+qy\,)\Delta z.$$

2. *Свойством линейности по второму аргументу квазиинтеграл в общем случае не обладает.* Пусть, например, $\alpha<0$, $\beta>0$, $x=\eta$, $y=g\eta$, $z=h\eta$, где $g,h\in\mathbb{R}$ и $\eta(t)\doteq\theta(t)$ — функция Хевисайда. Если $T\doteq\{0\}$, то $y^{T}=z^{T}=0$, $y(0-)-y(0)=z(0-)-z(0)=0$, $y(0+)-y(0)=g$ и $z(0+)-z(0)=h$. Поскольку $x(0)=0$ и $x(0+)=1$, то

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y=\begin{vmatrix} x(0) & -\psi(g)\\ x(0+) & \psi^*(g)\end{vmatrix}=\psi(g)\ \text{ и }\ \int_\alpha^\beta x\Delta z=\begin{vmatrix} x(0) & -\psi(h)\\ x(0+) & \psi^*(h)\end{vmatrix}=\psi(h).$$

Если $w\doteq py+qz$ $(p,q\in\mathbb{R})$, то

$$w^{T}=0,\quad w(0-)-w(0)=0,\quad w(0+)-w(0)=pg+qh,$$

$$\int_\alpha^\beta x\Delta(\,py+qz\,)=\begin{vmatrix} x(0) & -\psi(\,pg+qh\,)\\ x(0+) & \psi^*(\,pg+qh\,)\end{vmatrix}=\psi(\,pg+qh\,).$$

Равенство $\psi(\,pg+qh\,)=p\,\psi(g)+q\,\psi(h)$ справедливо при всех $p$ и $q$ тогда и только тогда, когда $\psi$ — линейная функция. Этот пример показывает, что и в общей ситуации *линейность квазиинтеграла по второму аргументу имеет место тогда и только тогда, когда* $\Delta\in\Omega^2_\ell$.

3. *При* $\alpha<\gamma<\beta$ *существование квазиинтеграла* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$ *равносильно существованию обоих квазиинтегралов* $\displaystyle\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ *и* $\displaystyle\int_\gamma^\beta x\Delta y$. *При этом*

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y=\int_\alpha^\gamma x\Delta y+\int_\gamma^\beta x\Delta y. \tag{20.7}$$

Если существует квазиинтеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\Delta y$, то $\mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)\neq\varnothing$ и для любого $T\in\mathbb{T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$ существует интеграл $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и абсолютно сходится ряд $\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$. Согласно[5], с. 95, существуют интегралы $\displaystyle\int_\alpha^\gamma x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и $\displaystyle\int_\gamma^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и

$$\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}=\int_\alpha^\gamma x\,dy^{\scriptscriptstyle T}+\int_\gamma^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}. \tag{20.8}$$

Поскольку $\displaystyle\int_\alpha^t d\xi_k\geqslant 0$ и $\displaystyle\int_\alpha^t d\eta_k\geqslant 0$ при всех $t\geqslant\alpha$, то

$$|\,\Phi^{\alpha,t}_k|=|\,x_ky^-_k+x^-_k\varphi(y^-_k)\,|\int_\alpha^t d\xi_k\quad\text{и}\quad|\,\Psi^{\alpha,t}_k|=|\,x_ky^+_k+x^+_k\psi(y^+_k)\,|\int_\alpha^t d\eta_k,$$

а так как $\displaystyle\int_\alpha^\gamma d\xi_k\leqslant\int_\alpha^\beta d\xi_k$ и $\displaystyle\int_\alpha^\gamma d\eta_k\leqslant\int_\alpha^\beta d\eta_k$, то

$$\sum_{\tau_k\in T}(\,|\,\Phi^{\alpha,\gamma}_k|+|\,\Psi^{\alpha,\gamma}_k|\,)\leqslant\sum_{\tau_k\in T}(\,|\,\Phi^{\alpha,\beta}_k|+|\,\Psi^{\alpha,\beta}_k|\,)<\infty.$$

Значит, ряд $\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ абсолютно сходится. Аналогично доказывается абсолютная сходимость ряда $\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$. Следовательно, существуют квазиинтегралы $\displaystyle\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ и $\displaystyle\int_\gamma^\beta x\Delta y$, а к формуле (20.7) приводят равенства (20.8) и

$$\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\alpha,\beta}(x\Delta y)=\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)+\sigma^{\scriptscriptstyle T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y). \tag{20.9}$$

---

[5] **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969. 656 с.

Обратно. Пусть существуют $\int_\alpha^\gamma x\Delta y$ и $\int_\gamma^\beta x\Delta y$, тогда $\mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y) \neq \varnothing$, $\mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y) \neq \varnothing$ и для любых $Q \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $R \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$ определены эквивалентные разбиения $U \doteq Q \cup R$ и $T \doteq U \cup \{\gamma\}$. Поскольку $T \sim U$, то $G^T = \mathrm{G}^U = \mathrm{G}^Q \cap \mathrm{G}^R$, следовательно, $y \in \mathrm{G}^T$. В соответствии с утверждением 20.3 справедливы включения $T \in \mathbb{T}_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $T \in \mathbb{T}_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$, поэтому существуют интегралы $\int_\alpha^\gamma x\,dy^T$ и $\int_\gamma^\beta x\,dy^T$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma^T_{\alpha,\gamma}(x\Delta y)$ и $\sigma^T_{\gamma,\beta}(x\Delta y)$. Функция $y^T$ непрерывна в точке $\gamma$, а функция $x$ ограничена, следовательно, согласно[5], с. 116, существование интегралов $\int_\alpha^\gamma x\,dy^T$ и $\int_\gamma^\beta x\,dy^T$ влечет существование интеграла $\int_\alpha^\beta x\,dy^T$ и равенство (20.8). Таким образом, равенство (20.9) влечет абсолютную сходимость ряда $\sigma^T_{\alpha,\beta}(x\Delta y)$, существование квазиинтеграла $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ и равенство (20.7).

Особо следует отметить то обстоятельство, что классический интеграл Римана–Стилтьеса свойством 3, то есть свойством аддитивности, вообще говоря, не обладает[5], с. 96.

4. *Если $x \in \mathrm{G}$, $y \in \mathrm{BV}$, то для любого $\Delta \in \Omega^2_c$ существует квазиинтеграл $\int_\alpha^\beta x\Delta y$, существует интеграл Перрона–Стилтьеса* (PS)$\int_\alpha^\beta x\,dy$ *и*

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y = (\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy - \sum_{\tau_k\in S} x_k^-\varphi(y_k^-)\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in S} x_k^+\psi(y_k^+)\int_\alpha^\beta d\eta_k, \quad (20.10)$$

*где $S \doteq T(x) \cap T(y)$. В частности,* (PS)$\int_\alpha^\beta x\,dy = \int_\alpha^\beta x\Delta_0 y$, *где через $\Delta_0$ обозначен дефект $(\varphi_0,\psi_0)$ такой, что $\varphi_0(h) = \psi_0(h) \equiv 0$.*

Существование квазиинтеграла $\int_\alpha^\beta x\Delta y$ справедливо в силу утверждения 3 теоремы 20.2. При $\Delta = \Delta_0$ и $T \doteq T(y)$ формула (20.6) принимает вид

$$\int_\alpha^\beta x\Delta_0 y = \int_\alpha^\beta x\,dy^T - \sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k)y_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x(\tau_k)y_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k. \quad (20.11)$$

Существование интеграла (PS)$\int_\alpha^\beta x\,dy$ хорошо известно (см., например, [78]). Там же доказаны равенства

$$(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,d\xi_k = x(\tau_k)\int_\alpha^\beta d\xi_k \quad \text{и} \quad (\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,d\eta_k = x(\tau_k)\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

а поскольку $y^{\scriptscriptstyle T} \in \mathrm{CBV}$, то существует $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$, следовательно, существует $\displaystyle(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и выполнено равенство $\displaystyle(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T} = \int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$. Таким образом, правая часть формулы (20.11) равна $\displaystyle(\mathrm{PS})\int_\alpha^\beta x\,dy$. Формула (20.10) получается вычитанием формул (20.6) и (20.11):

$$\int_\alpha^\beta x\Delta y - \int_\alpha^\beta x\Delta_0 y = -\sum_{\tau_k\in T} x_k^- \varphi(y_k^-)\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+ \psi(y_k^+)\int_\alpha^\beta d\eta_k$$

и замечанием, что $x_k^- = x_k^+ = 0$ для всех $\tau_k \in T \backslash S$.

*Свойство* 4 *показывает исключительную роль дефекта* $\Delta_0$, *— в семейство квазиинтегралов входит интеграл Перрона–Стилтьеса.*

5. *Если* $x \in \mathrm{G}$, $y \in \mathrm{BV}$, $\Delta \in \Omega_c^2$, *то при фиксированном* $\alpha \in K$ *определена функция* $z(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t x\Delta y$ *и справедливо включение* $z \in \mathrm{BV}$.

Первая часть утверждения следует из свойства 4. При $T \doteq T(y)$ справедливо $y^{\scriptscriptstyle T} \in \mathrm{CBV}$ и определена функция $w(t) \doteq \displaystyle\int_\alpha^t x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$. В силу третьего следствия утверждения 10.3 имеет место включение $w \in \mathrm{CBV}$. Функция $h(t) \doteq \sigma_{\alpha,t}^{\scriptscriptstyle T}(x\Delta y)$ есть функция скачков, поэтому $h \in \mathrm{BV}$, $z = w + h \in \mathrm{BV}$.

6. Пусть $x, y \in \mathrm{G}$, $\Delta_1 \doteq (\varphi_1, \psi_1) \in \Omega^2$, $\Delta_2 \doteq (\varphi_2, \psi_2) \in \Omega^2$. *Если существуют квазиинтегралы* $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$ *и* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$, *то справедлив аналог формулы интегрирования по частям*

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y = xy\Big|_\alpha^\beta - \tag{20.12}$$

$$-\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \varphi_1(x_k^-) & \varphi_2^*(y_k^-) \\ \varphi_1^*(x_k^-) & \varphi_2(y_k^-)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \psi_1(x_k^+) & \psi_2^*(y_k^+) \\ \psi_1^*(x_k^+) & \psi_2(y_k^+)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

*где* $T \doteq T(x)\cap T(y)$ *— общие точки разрыва функций* $x$ *и* $y$.

Из существования квазиинтегралов следуют включения $T \in \mathbb{T}(y\,\Delta_1 x)$ и $T \in \mathbb{T}(x\,\Delta_2 y)$, поэтому $x, y \in \mathrm{G}^T$, существуют интегралы $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,dx^{\scriptscriptstyle T}$ и $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$ и абсолютно сходятся ряды $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(y\,\Delta_1 x)$ и $\sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\,\Delta_2 y)$. Следовательно, $\sigma \doteq \displaystyle\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_0 \doteq \displaystyle\int_\alpha^\beta y\,dx^{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$, а

$\sigma_1 \doteq \sigma^{\scriptscriptstyle T}(y\,\Delta_1 x), \quad \sigma_2 \doteq \sigma^{\scriptscriptstyle T}(x\,\Delta_2 y),$ то есть

$$\sigma_1 = -\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} y_k & -\varphi_1(x_k^-) \\ y_k^- & x_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} y_k & -\psi_1(x_k^+) \\ y_k^+ & x_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

$$\sigma_2 = -\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\varphi_2(y_k^-) \\ x_k^- & y_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k & -\psi_2(y_k^+) \\ x_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

В силу формулы (11.15) справедливы равенства $\sigma_0 = (xy)^{\scriptscriptstyle T}(\beta) - x(\alpha)\,y(\alpha) = xy\,\Big|_\alpha^\beta - (xy)_{\scriptscriptstyle T}(\beta)$, следовательно, $\sigma = xy\,\Big|_\alpha^\beta + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где

$$\sigma_3 \doteq -\,(xy)_{\scriptscriptstyle T}(\beta) = \sum_{\tau_k\in T}(xy)_k^-\int_\alpha^\beta d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T}(xy)_k^+\int_\alpha^\beta d\eta_k =$$

$$= \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k + x_k^- & y_k \\ x_k & y_k + y_k^- \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k - \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_k + x_k^+ & y_k \\ x_k & y_k + y_k^+ \end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k.$$

Применили равенства $z(\tau_k-) = z_k + z_k^-$ и $z(\tau_k+) = z_k + z_k^+$, справедливые для всех $z \in \mathrm{G}$. Коэффициент перед $\displaystyle\int_\alpha^\beta d\xi_k$ в сумме $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ равен

$$-x_k^- y_k - \varphi_1(x_k^-)\,y_k^- - x_k y_k^- - x_k^-\,\varphi_2(y_k^-) + (x_k + x_k^-)\,(y_k + y_k^-) - x_k y_k =$$
$$= \big(x_k^- - \varphi_1(x_k^-)\big)\,\big(y_k^- - \varphi_2(y_k^-)\big) - \varphi_1(x_k^-)\,\varphi_2(y_k^-) =$$
$$= -\varphi_1(x_k^-)\,\varphi_2(y_k^-) + \varphi_1^*(x_k^-)\,\varphi_2^*(y_k^-).$$

Коэффициент перед $\displaystyle\int_\alpha^\beta d\eta_k$ равен $\psi_1(x_k^+)\,\psi_2(y_k^+) - \psi_1^*(x_k^+)\,\psi_2^*(y_k^+)$.

**Следствие 20.2.** *Пусть* $x, y \in \mathrm{G}$, $T \doteq T(x) \cap T(y)$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega^2$. *Если выполнено одно из условий:* 1) $\operatorname{card} T < \infty$ *или* 2) $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega_c^2$, $x, y \in \mathrm{G}^T$, *то существование одного из квазиинтегралов* $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$ *или* $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$ *влечет существование другого и равенство* (20.12).

Действительно, если, например, существует $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,\Delta_1 x$, то в соответствии с теоремой 20.2 в обоих случаях существует $\displaystyle\int_\alpha^\beta y\,dx^{\scriptscriptstyle T}$, а в соответствии с пунктом 11.4 (см. (11.14)) существует $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,dy^{\scriptscriptstyle T}$. Еще раз ссылаясь на теорему 20.2, получаем существование квазиинтеграла $\displaystyle\int_\alpha^\beta x\,\Delta_2 y$.

**Следствие 20.3.** *Если в условиях свойства* 6 *или следствия* 20.2 *дефекты* $\Delta_1$ *и* $\Delta_2$ *двойственны, то есть* $\Delta_1 = \Delta$ *и* $\Delta_2 = \Delta^*$, $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$, *то формула* (20.12) *принимает вид*

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta^* y = xy\Big|_\alpha^\beta - \tag{20.13}$$

$$-\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \varphi(x_k^-) & \varphi(y_k^-) \\ \varphi^*(x_k^-) & \varphi^*(y_k^-)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} \psi(x_k^+) & \psi(y_k^+) \\ \psi^*(x_k^+) & \psi^*(y_k^+)\end{vmatrix}\int_\alpha^\beta d\eta_k,$$

*а если* $\Delta \in \Omega^2_\ell$, *то есть* $\varphi$ *и* $\psi$ *линейны, то*

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta^* y = xy\Big|_\alpha^\beta. \tag{20.14}$$

**Замечание 20.2.** Если $\Delta = \Delta_0$, то первый квазиинтеграл в формуле (20.14) — интеграл Перрона–Стилтьеса, второй — интеграл Душника–Стилтьеса [58, с. 7].

**Замечание 20.3.** Формула (20.14) справедлива еще в двух случаях: 1) когда $T(x) \cap T(y) = \varnothing$ и 2) когда функции $x$ и $y$ не имеют общих односторонних разрывов, например, когда $x \in \mathrm{G}_{_L}$, $y \in \mathrm{G}_{_R}$ (или наоборот).

**Замечание 20.4.** Если $\Delta^* = \Delta$, то есть $\varphi(h) = \psi(h) = \frac{h}{2}$, то формула (20.14) принимает классический вид

$$\int_\alpha^\beta y\,\Delta x + \int_\alpha^\beta x\,\Delta y = xy\Big|_\alpha^\beta. \tag{20.15}$$

## § 21 . Квазиинтегральные уравнения в случае регулярного спектрального параметра

Пусть $\alpha \in K \doteq [a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta \in \Omega^2$, $A$ — вещественная $r\times r$-матрица, $Q \in \mathrm{PBV} \doteq \mathrm{PBV}(K;\mathbb{R})$ — кусочно-непрерывная функция ограниченной вариации, $y \doteq \mathrm{col}\,(y_1,\dots,y_r)$, $y_i \in \mathrm{G}$. Функция $x \doteq \mathrm{col}\,(x_1,\dots,x_r)$, $x_j \in \mathrm{G}$, удовлетворяющая равенству (v.1), называется его решением. Выражение $\displaystyle\int_\alpha^t x\Delta Q$ обозначает вектор $\mathrm{col}\Big(\displaystyle\int_\alpha^t x_1\Delta Q,\dots,\int_\alpha^t x_r\Delta Q\Big)$, компоненты которого определены при всех $x_j \in \mathrm{G}$ и $Q \in \mathrm{PBV}$ (теорема 20.2). Заметим также, что если функции $Q$ и $y_i$ непрерывно дифференцируемы, то

$$\int_\alpha^t x_j\Delta Q = \int_\alpha^t x_j\,dQ = \int_\alpha^t \dot Q(s)x_j(s)\,ds$$

для всех $\Delta \in \Omega^2$, поэтому уравнение (v.1) можно интерпретировать как импульсную задачу (v.2).

**21.1. Существование и единственность решения квазиинтегрального уравнения в случае регулярного спектрального параметра.** Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *регулярным* для уравнения (v.1), если при всех $\tau_k \in T(Q)$ матрицы $E - \lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы, где скалярные функции $\pi_k$ и $\varrho_k$ определены равенствами

$$\pi_k(\cdot) \doteq \varphi(Q_k^-) + Q_k^-\xi_k(\cdot), \qquad \varrho_k(\cdot) \doteq \psi(Q_k^+) - Q_k^+\eta_k(\cdot).$$

Напомним, что $T(Q)$ — это (конечное) множество точек разрыва функции $Q$, а $Q_k^-$ и $Q_k^+$ — левый и правый скачки этой функции в точках разрыва. Здесь и в дальнейшем $E$ — единичная матрица порядка $r$. Таким образом, уравнение (v.1) имеет не более, чем $2r\,\mathrm{card}\,T(Q)$ нерегулярных чисел. В частности, если $Q$ непрерывна, то любое $\lambda \in \mathbb{R}$ — регулярное число.

**Теорема 21.1.** *Уравнение* (v.1) *при регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T \doteq T(Q) \cup \{\alpha\}$. Для этого $T$ уравнение (v.1) имеет вид

$$x^{\scriptscriptstyle T}(t) - \sum_{\tau_k\in T} x_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} x_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k -$$

$$-\lambda A\int_\alpha^t x\,dQ^{\scriptscriptstyle T} + \lambda A\sum_{\tau_k\in T}\big[\,x_kQ_k^- + x_k^-\varphi(Q_k^-)\,\big]\int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$-\lambda A\sum_{\tau_k\in T}\big[\,x_kQ_k^+ + x_k^+\psi(Q_k^+)\,\big]\int_\alpha^t d\eta_k =$$

$$= y^{\scriptscriptstyle T}(t) - \sum_{\tau_k\in T} y_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{\tau_k\in T} y_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Функция $Q^{\scriptscriptstyle T}$ непрерывна, а функции $x^{\scriptscriptstyle T}(t)$, $\displaystyle\int_\alpha^t x\,dQ^{\scriptscriptstyle T}$ и $y^{\scriptscriptstyle T}(t)$ непрерывны в точках $\tau_k \in T$, поэтому уравнение (v.1) эквивалентно гибридной системе

$$\begin{cases} x^{\scriptscriptstyle T}(t) - \lambda A\displaystyle\int_\alpha^t x\,dQ^{\scriptscriptstyle T} = y^{\scriptscriptstyle T}(t), \\ x_k^- - \lambda A\,[\,x_kQ_k^- + x_k^-\varphi(Q_k^-)\,] = y_k^-, \ \ \tau_k \in T, \\ x_k^+ - \lambda A\,[\,x_kQ_k^+ + x_k^+\psi(Q_k^+)\,] = y_k^+, \ \ \tau_k \in T, \end{cases} \tag{21.1}$$

относительно вектор-функции $x^{\scriptscriptstyle T}(\cdot) = \mathrm{col}\big(\,x_1^{\scriptscriptstyle T}(\cdot), \ldots, x_r^{\scriptscriptstyle T}(\cdot)\,\big)$ и векторов

$$x_k^- = \mathrm{col}\big(\,(x_1)_k^-, \ldots, (x_r)_k^-\,\big), \quad x_k^+ = \mathrm{col}\big(\,(x_1)_k^+, \ldots, (x_r)_k^+\,\big), \quad \tau_k \in T.$$

Первое уравнение (21.1) равносильно уравнению

$$x^{\scriptscriptstyle T}(t)-\lambda A\int_{\alpha}^{t}x^{\scriptscriptstyle T}dQ^{\scriptscriptstyle T}=b(t), \tag{21.2}$$

где

$$b(t)\doteq y^{\scriptscriptstyle T}(t)+\lambda A\int_{\alpha}^{t}\Big[-\sum_{\tau_k\in T}x_k^-\int_{\alpha}^{s}d\xi_k+\sum_{\tau_k\in T}x_k^+\int_{\alpha}^{s}d\eta_k\Big]\,dQ^{\scriptscriptstyle T}(s).$$

В силу теоремы 10.1 единственное решение уравнения (21.2) имеет вид $x^{\scriptscriptstyle T}(t)=X(t,\alpha)\,b(\alpha)+\displaystyle\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,db(s)$, где $X(t,\tau)\doteq\exp\Big(\lambda A\displaystyle\int_{\tau}^{t}dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)$. Поскольку $b(\alpha)=y^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)=y(\alpha)$, то

$$x^{\scriptscriptstyle T}(t)=X(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,dy^{\scriptscriptstyle T}(s)+\sigma_1+\sigma_2, \tag{21.3}$$

где

$$\sigma_1\doteq-\sum_{\tau_k\in T}\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,d_s\Big[\lambda Ax_k^-\int_{\alpha}^{s}\Big(\int_{\alpha}^{\tau}d\xi_k\Big)\,dQ^{\scriptscriptstyle T}(\tau)\Big],$$

$$\sigma_2\doteq\sum_{\tau_k\in T}\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,d_s\Big[\lambda Ax_k^+\int_{\alpha}^{s}\Big(\int_{\alpha}^{\tau}d\eta_k\Big)\,dQ^{\scriptscriptstyle T}(\tau)\Big].$$

Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\sigma_1&=-\sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,\lambda A\Big(\int_{\alpha}^{s}d\xi_k\Big)\,dQ^{\scriptscriptstyle T}(s)\Big]\,x_k^-=\\&=-\sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_{\alpha}^{t}\Big(\int_{\alpha}^{s}d\xi_k\Big)\,X(t,s)\ d\big(\lambda AQ^{\scriptscriptstyle T}(s)\big)\Big]\,x_k^-=\\&=\sum_{\tau_k\in T}\Big[\int_{\alpha}^{t}\Big(\int_{\alpha}^{s}d\xi_k\Big)\,d_sX(t,s)\Big]\,x_k^-=\\&=\sum_{\tau_k\in T}x_k^-\int_{\alpha}^{t}d\xi_k-\sum_{\tau_k\in T}\int_{\alpha}^{t}X(t,s)\,x_k^-\,d\xi_k(s).\end{aligned}$$

(Применили формулу интегрирования по частям.) Функция $X(t,s)$ непрерывна, следовательно, $\sigma_1=-\sum\limits_{\tau_k\in T}\big[\,X(t,\tau_k)-E\,\big]\,x_k^-\displaystyle\int_{\alpha}^{t}d\xi_k$. Аналогично, $\sigma_2=\sum\limits_{\tau_k\in T}\big[\,X(t,\tau_k)-E\,\big]\,x_k^+\displaystyle\int_{\alpha}^{t}d\eta_k$. Таким образом, с учетом формул (21.3) и

$x = x^{\scriptscriptstyle T} + x_{\scriptscriptstyle T}$ имеем равенство

$$x(t) = X(t,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^t X(t,s)\,dy^{\scriptscriptstyle T}(s) -$$
$$- \sum_{\tau_\ell\in T} X(t,\tau_\ell)\,x_\ell^- \int_\alpha^t d\xi_\ell + \sum_{\tau_\ell\in T} X(t,\tau_\ell)\,x_\ell^+ \int_\alpha^t d\eta_\ell, \quad (21.4)$$

в котором индекс $k$ заменен на $\ell$. Формула (21.4) связывает искомое решение $x(\cdot)$ с его скачками $x_\ell^-$ и $x_\ell^+$ в точках $\tau_\ell \in T$. В частности, при $t = \tau_k \in T$ имеет место равенство

$$x_k = Y_k - \sum_{\ell=1}^n M_{k\ell} x_\ell^- + \sum_{\ell=1}^n N_{k\ell} x_\ell^+, \quad (21.5)$$

где $n \doteq \operatorname{card} T$, а вектор $Y_k$ и матрицы $M_{k\ell}$ и $N_{k\ell}$ определены формулами

$$Y_k \doteq X(\tau_k,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^{\tau_k} X(\tau_k,s)\,dy^{\scriptscriptstyle T}(s),$$

$$M_{k\ell} \doteq X(\tau_k,\tau_\ell)\int_\alpha^{\tau_k} d\xi_\ell, \qquad N_{k\ell} \doteq X(\tau_k,\tau_\ell)\int_\alpha^{\tau_k} d\eta_\ell,$$

причем $M_{kk} = -E\,\xi_k(\alpha)$, $N_{kk} = -E\,\eta_k(\alpha)$.

Последние два уравнения (21.1) имеют вид

$$[\,E - \lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,x_k^- - \lambda Q_k^- A x_k = y_k^-, \quad [\,E - \lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,x_k^+ - \lambda Q_k^+ A x_k = y_k^+,$$

следовательно, с учетом (21.5) скачки функции $x(\cdot)$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &[\,E - \lambda\varphi(Q_k^-)A - \lambda Q_k^- \xi_k(\alpha)A\,]\,x_k^- + \\ &\qquad + \lambda Q_k^- A \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\ne k}}^n M_{k\ell}x_\ell^- - \lambda Q_k^- A \sum_{\ell=1}^n N_{k\ell}x_\ell^+ = y_k^- + \lambda Q_k^- A Y_k, \\ &[\,E - \lambda\psi(Q_k^+)A + \lambda Q_k^+ \eta_k(\alpha)A\,]\,x_k^+ + \\ &\qquad + \lambda Q_k^+ A \sum_{\ell=1}^n M_{k\ell}x_\ell^- - \lambda Q_k^+ A \sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\ne k}}^n N_{k\ell}x_\ell^+ = y_k^+ + \lambda Q_k^+ A Y_k. \end{aligned}\right.$$

Матричные коэффициенты перед векторами $x_k^-$ и $x_k^+$ равны $E - \lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A$ соответственно. Покажем, что они обратимы.

Если $\alpha \in T(Q)$, то $T = T(Q)$, а поскольку $\lambda$ регулярно, то матрицы $E - \lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы при всех $\tau_k \in T$. Если же $\alpha \notin T(Q)$, то $Q_m^- = Q_m^+ = 0$, где через $m$ обозначен тот индекс, что $\alpha = \tau_m$. Это означает, что $\pi_m(\alpha) = \varrho_m(\alpha) = 0$ и матрицы $E - \lambda\pi_m(\alpha)A$ и $E - \lambda\varrho_m(\alpha)A$ обратимы. Остальные матрицы обратимы в силу регулярности $\lambda$. Таким образом, в любом случае матрицы $E-\lambda\pi_k(\alpha)A$ и $E-\lambda\varrho_k(\alpha)A$ обратимы при всех $\tau_k\in T$, поэтому система принимает вид

$$\begin{cases} x_k^- + \mu_k \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} M_{k\ell}x_\ell^- - \mu_k \sum\limits_{\ell=1}^{n} N_{k\ell}x_\ell^+ = p_k,\\ x_k^+ + \nu_k \sum\limits_{\ell=1}^{n} M_{k\ell}x_\ell^- - \nu_k \sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n} N_{k\ell}x_\ell^+ = q_k, \end{cases}$$

где матрицы $\mu_k$ и $\nu_k$ и векторы $p_k$ и $q_k$ определены формулами

$$\mu_k \doteq \lambda Q_k^- \,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}A, \quad \nu_k \doteq \lambda Q_k^+ \,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}A, \tag{21.6}$$

$$p_k \doteq [\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}(\,y_k^- + \lambda Q_k^- AY_k\,), \quad q_k \doteq [\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}(\,y_k^+ + \lambda Q_k^+ AY_k\,).$$

Исследуем коэффициенты полученной системы, предварительно заметив, что все диагональные коэффициенты равны $E$. Так как $\alpha\in T$, то $\alpha=\tau_m$ для некоторого $m$, поэтому (считаем $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n$):

1) если $\ell<m$ и $\ell<k$, то

$$M_{k\ell}=X(\tau_k,\tau_\ell)\int_{\tau_m}^{\tau_k} d\xi_\ell = 0 \quad \text{и} \quad N_{k\ell}=X(\tau_k,\tau_\ell)\int_{\tau_m}^{\tau_k} d\eta_\ell = 0;$$

2) аналогично если $\ell>m$ и $\ell>k$, то $M_{k\ell}=N_{k\ell}=0$;
3) если $\ell<m$, то $M_{\ell\ell}=0$;
4) если $\ell>m$, то $N_{\ell\ell}=0$;
5) если $\ell=m$ и $k\leqslant m$, то $N_{k\ell}=0$;
6) если $\ell=m$ и $k\geqslant m$, то $M_{k\ell}=0$.

Это означает, что матрица системы уравнений (коэффициенты этой матрицы сами являются матрицами порядка $r$) относительно неизвестных векторов $(x_1^-,x_1^+,\ldots,x_n^-,x_n^+)$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12}\\ \sigma^{21} & \sigma^{22}\end{pmatrix},$$

квадратные блоки $\sigma^{11}$ и $\sigma^{22}$ имеют размерность $2m-1$ и $2n-2m+1$ соответственно. При этом: в блоке $\sigma^{11}$ под диагональю расположены нулевые матрицы, а на диагонали — единичные матрицы $E$; в блоке $\sigma^{22}$ над диагональю — нулевые матрицы, на диагонали — $E$; блоки $\sigma^{12}$ и $\sigma^{21}$ состоят сплошь из нулевых матриц. Таким образом, система имеет единственное решение, а ссылка на формулу (21.4) завершает доказательство теоремы. $\square$

Заметим также, что если $\lambda$ не является регулярным, то уравнение (v.1) либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Проиллюстрируем сказанное на примере.

**Пример 21.1.** Пусть $0 \in K,\ \alpha \in K,\ \alpha < 0,\ g, h \in \mathbb{R}$, составим функцию $Q(t) \doteq -g\int_\alpha^t d\xi + h\int_\alpha^t d\eta$ и рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda\int_\alpha^t x\Delta Q = 1,$$

в котором $\Delta \doteq (\varphi, \psi)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ таковы, что $1 - \lambda\psi(h) = 0$ (это означает, что $\lambda$ не регулярно). Здесь $T = \{0\}$, поэтому гибридная система (21.1) для составляющих функции $x(t) \doteq x^{\scriptscriptstyle T}(t) - p\int_\alpha^t d\xi + q\int_\alpha^t d\eta$ имеет вид

$$x^{\scriptscriptstyle T} \equiv 1, \quad p - \lambda\big(\, x(0)g + p\varphi(g)\,\big) = 0, \quad q - \lambda\big(\, x(0)h + q\psi(h)\,\big) = 0,$$

а равенства $x(0) = x^{\scriptscriptstyle T}(0) - p = 1 - p$ и $\lambda\psi(h) = 1$ приводят к системе

$$p - \lambda\,(\,1{-}p\,)\,g - \lambda p\,\varphi(g) = 0, \quad \lambda\,(\,1{-}p\,)\,h = 0.$$

Поскольку $\lambda\psi(h) = 1$, то $h \neq 0$ и $\lambda \neq 0$, поэтому система эквивалентна следующей: $1{-}\lambda\varphi(g) = 0,\ p = 1$. Итак, если $1{-}\lambda\varphi(g) \neq 0$, то решений нет, а в противном случае бесконечное семейство функций $x(t) = 1 - \int_\alpha^t d\xi + q\int_\alpha^t d\eta$, $q \in \mathbb{R}$, удовлетворяет исходному уравнению.

### 21.2. Вспомогательные леммы.

**Лемма 21.1.** *Пусть $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. При $m < n$ произведение матричнозначных функций*

$$x(t) \doteq E - \sum_{k=1}^m A^k\int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{k=1}^m B^k\int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$y(t) \doteq E - A^{m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1} + B^{m+1}\int_\alpha^t d\eta_{m+1} \tag{21.7}$$

*удовлетворяет тождеству $x(t)\,y(t) = E + [\,x(t){-}E\,]\,y(a) + x(b)\,[\,y(t){-}E\,]$. Здесь $A^k,\ B^k\ (k = 1, \ldots, m+1)$ — произвольные матрицы порядка $r$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $T \doteq \{\,\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{m+1}\,\}$.

Для любых $i, s, j = 1, \ldots, r$ справедливы равенства

$$x_{is}(t) = \delta_{is} - \sum_{k=1}^m A_{is}^k\int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{k=1}^m B_{is}^k\int_\alpha^t d\eta_k,$$

$$y_{sj}(t) = \delta_{sj} - A_{sj}^{m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1} + B_{sj}^{m+1}\int_\alpha^t d\eta_{m+1}.$$

Следовательно, $x^{\scriptscriptstyle T}_{is}(t)=\delta_{is},\;\; y^{\scriptscriptstyle T}_{sj}(t)=\delta_{sj},$

$$x^-_{isk}\doteq(x_{is})^-_k=\begin{cases}A^k_{is}, & k\leqslant m,\\ 0, & k=m{+}1,\end{cases}\qquad x^+_{isk}\doteq(x_{is})^+_k=\begin{cases}B^k_{is}, & k\leqslant m,\\ 0, & k=m{+}1,\end{cases}$$

$$y^-_{sjk}\doteq(y_{sj})^-_k=\begin{cases}0, & k\leqslant m,\\ A^{m+1}_{sj}, & k=m{+}1,\end{cases}\qquad y^+_{sjk}\doteq(y_{sj})^+_k=\begin{cases}0, & k\leqslant m,\\ B^{m+1}_{sj}, & k=m{+}1.\end{cases}$$

В силу формулы (11.15) справедливо равенство

$$x_{is}(t)\,y_{sj}(t)=(x_{is}\,y_{sj})^{\scriptscriptstyle T}(t)+(x_{is}\,y_{sj})_{\scriptscriptstyle T}(t)=$$
$$=x_{is}(\alpha)\,y_{sj}(\alpha)+\int_\alpha^t x_{is}\,dy^{\scriptscriptstyle T}_{sj}+\int_\alpha^t y_{sj}\,dx^{\scriptscriptstyle T}_{is}+\sigma_1+\sigma_2,$$

$$\sigma_1\doteq-\sum_{k=1}^{m+1}\begin{vmatrix}x_{isk}+x^-_{isk} & y_{sjk}\\ x_{isk} & y_{sjk}+y^-_{sjk}\end{vmatrix}\int_\alpha^t d\xi_k,$$

$$\sigma_2\doteq\sum_{k=1}^{m+1}\begin{vmatrix}x_{isk}+x^+_{isk} & y_{sjk}\\ x_{isk} & y_{sjk}+y^-_{sjk}\end{vmatrix}\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Интегралы по функциям $y^{\scriptscriptstyle T}_{sj}$ и $x^{\scriptscriptstyle T}_{is}$ равны нулю и выполнено равенство $x_{is}(\alpha)\,y_{sj}(\alpha)=\delta_{is}\delta_{sj}$. При $k\leqslant m$ справедливо равенство $y^-_{sjk}=0$, а при $k=m+1$ имеем $x^-_{isk}=0$, следовательно,

$$\sigma_1=-\sum_{k=1}^m x^-_{isk}\,y_{sjk}\int_\alpha^t d\xi_k-x_{is,m+1}\,y^-_{sj,m+1}\int_\alpha^t d\xi_{m+1}=$$
$$=-\sum_{k=1}^m A^k_{is}\,y_{sjk}\int_\alpha^t d\xi_k-x_{is,m+1}\,A^{m+1}_{sj}\int_\alpha^t d\xi_{m+1}.$$

Цепочка равенств

$$x_{is,m+1}=x_{is}(\tau_{m+1})=\delta_{is}-\sum_{k=1}^m A^k_{is}\int_\alpha^{\tau_{m+1}}d\xi_k+\sum_{k=1}^m B^k_{is}\int_\alpha^{\tau_{m+1}}d\eta_k=$$
$$=\delta_{is}-\sum_{k=1}^m A^k_{is}\int_\alpha^b d\xi_k+\sum_{k=1}^m B^k_{is}\int_\alpha^b d\eta_k$$

заканчивается ссылкой на очевидные равенства $\displaystyle\int_{\tau_{m+1}}^b d\xi_k=\int_{\tau_{m+1}}^b d\eta_k=0,$ $k=1,\ldots,m$. Значит, $x_{is,m+1}=x_{is}(b)$. Аналогично при $k\leqslant m$

$$y_{sjk}=y_{sj}(\tau_k)=\delta_{sj}-A^{m+1}_{sj}\int_\alpha^{\tau_k}d\xi_{m+1}+B^{m+1}_{sj}\int_\alpha^{\tau_k}d\eta_{m+1}=$$
$$=\delta_{sj}-A^{m+1}_{sj}\int_\alpha^a d\xi_{m+1}+B^{m+1}_{sj}\int_\alpha^a d\eta_{m+1}=y_{sj}(a),$$

поэтому $\sigma_1 = \Big[ -\sum_{k=1}^{m} A_{is}^{k} \int_\alpha^t d\xi_k \Big]\, y_{sj}(a) - x_{is}(b) A_{sj}^{m+1} \int_\alpha^t d\xi_{m+1}.$

Аналогично $\sigma_2 = \Big[ \sum_{k=1}^{m} B_{is}^{k} \int_\alpha^t d\eta_k \Big]\, y_{sj}(a) + x_{is}(b) B_{sj}^{m+1} \int_\alpha^t d\eta_{m+1}.$

Таким образом, для всех $i, s, j$ имеет место равенство

$$x_{is}(t)\, y_{sj}(t) = \delta_{is}\delta_{sj} + [\, x_{is}(t) - \delta_{is}\,]\, y_{sj}(a) + x_{is}(b)\, [\, y_{sj}(t) - \delta_{sj}\,]$$

следовательно,

$$x(t)\, y(t) = E + [\, x(t) - E\,]\, y(a) + x(b)\, [\, y(t) - E\,].$$

**Лемма 21.2.** *Пусть* $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n \leqslant b$ *— разбиение отрезка* $[a, b]$*. Произведение матричнозначных функций*

$$\omega_k(t) \doteq E - M_k \int_\alpha^t d\xi_k + N_k \int_\alpha^t d\eta_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

*где* $M_k$ *и* $N_k$ *— произвольные* $r \times r$*-матрицы, удовлетворяет тождеству*

$$\prod_{k=1}^{n} \omega_k(t) = E + \sum_{k=1}^{n} \omega_1(b) \ldots \omega_{k-1}(b) \,\big\{\, \omega_k(t) - E \,\big\}\, \omega_{k+1}(a) \ldots \omega_n(a).$$

Формальное доказательство проводится индукцией, мы же лишь заметим, что в соответствии с леммой 21.1 имеем

$$\omega_1(t)\, \omega_2(t) = E + \big\{\, \omega_1(t) - E \,\big\}\, \omega_2(a) + \omega_1(b) \,\big\{\, \omega_2(t) - E \,\big\},$$

причем это произведение имеет вид (21.7) при $m = 2$, следовательно,

$$\omega_1(t)\, \omega_2(t)\, \omega_3(t) = E + \big\{\, \omega_1(t)\, \omega_2(t) - E \,\big\}\, \omega_3(a) + \omega_1(b)\, \omega_2(b) \,\big\{\, \omega_3(t) - E \,\big\} =$$
$$= E + \big\{\, \omega_1(t) - E \,\big\}\, \omega_2(a)\, \omega_3(a) + \omega_1(b) \,\big\{\, \omega_2(t) - E \,\big\}\, \omega_3(a) + \omega_1(b)\, \omega_2(b) \,\big\{\, \omega_3(t) - E \,\big\}$$

и так далее.

**21.3. Представление решений однородных квазиинтегральных уравнений в случае регулярного спектрального параметра.** Уравнение (v.1), в котором правая часть есть постоянный вектор, будем называть *однородным* и записывать в следующей форме:

$$x(t) - \lambda A \int_\alpha^t x \Delta Q = x(\alpha). \tag{21.8}$$

**Теорема 21.2.** *Уравнение* (21.8) *при регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение, представимое в виде*

$$x(t) = \Big( \prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^{-1}(\alpha) \Big)\, \exp\Big( \lambda A \int_\alpha^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big)\, x(\alpha), \tag{21.9}$$

*где* $T \doteq T(Q)$ *и* $\varepsilon_k(s) \doteq [\, E - \lambda \pi_k(s) A\,]\, [\, E - \lambda \varrho_k(s) A\,]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование и единственность решения имеют место в силу теоремы 21.1, поэтому остается лишь показать, что этим решением является функция (21.9). Введем в рассмотрение матрицы (существующие в силу регулярности $\lambda$)

$$M_k \doteq \mu_k\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,], \qquad N_k \doteq \nu_k\,[\,E+\mu_k\xi_k(\alpha)\,],$$

$$\omega_k(t) \doteq \varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha), \qquad \Theta_k \doteq \omega_1(b)\ldots\omega_{k-1}(b)\,\omega_{k+1}(a)\ldots\omega_n(a),$$

где матрицы $\mu_k$ и $\nu_k$ определены в (21.6), и докажем равенства

$$\omega_k(t) = E - M_k\int_\alpha^t d\xi_k + N_k\int_\alpha^t d\eta_k, \quad \prod_{\tau_k\in T}\omega_k(\tau_m) = \Theta_m\,\omega_m(\tau_m), \quad \tau_m\in T. \tag{21.10}$$

При всех $s\in K$ имеет место цепочка равенств

$$\varepsilon_k(s) = [\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A-\lambda Q_k^-\xi_k(s)A\,]\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A+\lambda Q_k^+\eta_k(s)A\,] =$$
$$= [\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,] -$$
$$- \lambda Q_k^-\xi_k(s)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,] + \lambda Q_k^+\eta_k(s)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A,$$

следовательно,

$$\omega_k(t)-E = [\,\varepsilon_k(t)-\varepsilon_k(\alpha)\,]\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha) =$$
$$= -\Big(\lambda Q_k^-\int_\alpha^t d\xi_k\Big)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha) +$$
$$+\Big(\lambda Q_k^+\int_\alpha^t d\eta_k\Big)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha).$$

Поскольку $\varepsilon_k^{-1}(\alpha) = [\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}$, то

$$\omega_k(t)-E = \sigma_1+\sigma_2,$$

$$\sigma_1 \doteq -\Big(\lambda Q_k^-\int_\alpha^t d\xi_k\Big)\,A\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1},$$

$$\sigma_2 \doteq \Big(\lambda Q_k^+\int_\alpha^t d\eta_k\Big)\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,A\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}.$$

Легко убедиться, что при всех $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ матрицы $A$, $E-\gamma A$, $E-\delta A$, $[\,E-\gamma A\,]^{-1}$, $[E-\delta A\,]^{-1}$ коммутируют между собой (конечно, при условии, что последние две матрицы существуют), следовательно,

$$\sigma_1 = -\mu_k\,[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E-\lambda\varrho_k(\alpha)A\,]^{-1}\int_\alpha^t d\xi_k,$$

$$\sigma_2 = \nu_k\,[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}\int_\alpha^t d\eta_k.$$

Поскольку $\psi(Q_k^+) = \varrho_k(\alpha) + Q_k^+\eta_k(\alpha)$ и $\varphi(Q_k^-) = \pi_k(\alpha) - Q_k^-\xi_k(\alpha)$, то

$$\sigma_1 = -\mu_k\,[\,E - \nu_k\eta_k(\alpha)\,]\int_\alpha^t d\xi_k, \qquad \sigma_2 = \nu_k\,[\,E + \mu_k\xi_k(\alpha)\,]\int_\alpha^t d\eta_k,$$

что и доказывает первую формулу (21.10).

Легко убедиться, что при $k < m$ справедливо $\pi_k(\tau_m) = \varphi(Q_k^-) = \pi_k(b)$ и $\varrho_k(\tau_m) = -\psi^*(Q_k^+) = \varrho_k(b)$, поэтому $\varepsilon_k(\tau_m) = \varepsilon_k(b)$ и $\omega_k(\tau_m) = \omega_k(b)$, а при $k > m$ имеем $\pi_k(\tau_m) = -\varphi^*(Q_k^-) = \pi_k(a)$, $\varrho_k(\tau_m) = \psi(Q_k^+) = \varrho_k(a)$ и, соответственно, $\varepsilon_k(\tau_m) = \varepsilon_k(a)$ и $\omega_k(\tau_m) = \omega_k(a)$. Следовательно,

$$\prod_{\tau_k\in T}\omega_k(\tau_m) = \omega_1(b)\ldots\omega_{m-1}(b)\,\omega_m(\tau_m)\,\omega_{m+1}(a)\ldots\omega_n(a).$$

При любых $t, s \in K$ матрицы $\varepsilon_k(t)$, $\varepsilon_m(s)$, $\varepsilon_k^{-1}(\alpha)$, $\varepsilon_m^{-1}(\alpha)$ коммутируют между собой, поэтому матрицы $\omega_k(t)$ и $\omega_m(s)$ тоже коммутируют, что доказывает вторую формулу (21.10).

Формулу (21.9) можно записать в следующем виде:

$$x(t) = \Big(\prod_k\omega_k(t)\Big)\,X(t,\alpha)\,x(\alpha), \tag{21.11}$$

где $X(t,\tau) \doteq \exp\Big(\lambda A\int_\tau^t dQ^{\scriptscriptstyle T}\Big)$ и пишем $\prod\limits_k$ вместо $\prod\limits_{\tau_k\in T}$, следовательно,

$$\begin{aligned} x_m = x(\tau_m) = \Theta_m\,\omega_m(\tau_m)\,X(\tau_m,\alpha)\,x(\alpha) = \\ = \Theta_m\,[\,E + M_m\xi_m(\alpha) - N_m\eta_m(\alpha)\,]\,X(\tau_m,\alpha)\,x(\alpha) \end{aligned} \tag{21.12}$$

(см. (21.10)), а для произвольного $t \in K$ в соответствии с (21.10), леммой 21.2 и определением матриц $\Theta_k$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} x(t) &= \Big(E + \sum_k\Theta_k\,\{\,\omega_k(t) - E\,\}\Big)\,X(t,\alpha)\,x(\alpha) = \\ &= \Big(E - \sum_k\Theta_k M_k\int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k\Theta_k N_k\int_\alpha^t d\eta_k\Big)\,X(t,\alpha)\,x(\alpha). \end{aligned}$$

Тем самым векторы $x_k^-$ и $x_k^+$ равны:

$$x_k^- = \Theta_k\,M_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha), \qquad x_k^+ = \Theta_k\,N_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha), \tag{21.13}$$

что справедливо в силу следующего утверждения: если $f$ непрерывна, то

$$f(t)\int_\alpha^t d\xi_k = [\,f(t) - f(\tau_k)\,]\int_\alpha^t d\xi_k + f(\tau_k)\int_\alpha^t d\xi_k,$$

$$f(t)\int_\alpha^t d\eta_k = [\,f(t)-f(\tau_k)\,]\int_\alpha^t d\eta_k \;+f(\tau_k)\int_\alpha^t d\eta_k,$$
где первые слагаемые суть непрерывные функции.

Равенства

$$N_k\eta_k(\alpha)=\nu_k\,[\,E+\mu_k\xi_k(\alpha)\,]\,\eta_k(\alpha)=\nu_k\eta_k(\alpha)+\nu_k\,\mu_k\,\xi_k(\alpha)\,\eta_k(\alpha)=\nu_k\eta_k(\alpha),$$

$$\mu_k\pi_k(\alpha)=\lambda Q_k^-\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}A\pi_k(\alpha)=$$
$$=Q_k^-\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}\big[\,E-[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]\big]=Q_k^-\,\big[\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,\big]^{-1}-E\,],$$
формулы (21.12), (21.13) и равенство $Q_k^-\xi_k(\alpha)+\varphi(Q_k^-)=\pi_k(\alpha)$ влекут

$$\sigma\doteq\lambda A\,\big(x_kQ_k^-+x_k^-\varphi(Q_k^-)\big)=$$
$$=\lambda A\,\Theta_k\,\big[\,[\,E+M_k\xi_k(\alpha)-N_k\eta_k(\alpha)\,]\,Q_k^-+M_k\varphi(Q_k^-)\big]\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)=$$
$$=\lambda A\,\Theta_k\,[\,Q_k^-E+M_k\pi_k(\alpha)-Q_k^-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)=$$
$$=\lambda A\,\Theta_k\,\big[\,\mu_k\pi_k(\alpha)\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]+Q_k^-\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]\,\big]\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)=$$
$$=\lambda A\,\Theta_kQ_k^-\,[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha).$$
Матрица $A$ коммутирует с $\Theta_k$ и $[\,E-\lambda\pi_k(\alpha)A\,]^{-1}$, следовательно,

$$\sigma=\Theta_k\mu_k\,[\,E-\nu_k\eta_k(\alpha)\,]\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)=\Theta_k\,M_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha).$$

Аналогично доказывается равенство

$$\lambda A\,\big(x_kQ_k^++x_k^+\psi(Q_k^+)\big)=\Theta_k\,N_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha),$$

следовательно, в формуле

$$\lambda A\int_\alpha^t x\Delta Q=\lambda A\int_\alpha^t x\,dQ^{\scriptscriptstyle T}+\sigma_1 \tag{21.14}$$

имеем

$$\sigma_1\doteq-\lambda A\sum_k\big(x_kQ_k^-+x_k^-\varphi(Q_k^-)\big)\int_\alpha^t d\xi_k+\lambda A\sum_k\big(x_kQ_k^++x_k^+\psi(Q_k^+)\big)\int_\alpha^t d\eta_k=$$

$$=-\sum_k\Theta_k\,M_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)\int_\alpha^t d\xi_k+\sum_k\Theta_k\,N_k\,X(\tau_k,\alpha)\,x(\alpha)\int_\alpha^t d\eta_k.$$
Матрицы $A$, $\omega_k(s)$ и $X(s,\alpha)$ коммутируют между собой, поэтому в силу формул (21.11) и (21.14) имеем

$$\lambda A\int_\alpha^t x\Delta Q=\Big[\,\lambda A\int_\alpha^t\Big(\prod_k\omega_k(s)\Big)\,X(s,\alpha)\,dQ^{\scriptscriptstyle T}(s)\Big]\,x(\alpha)+\sigma_1=$$

$$= \Big[ \int_\alpha^t \Big( \prod_k \omega_k(s) \Big) \exp\Big( \lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big)\, d\Big( \lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big) \Big]\, x(\alpha) + \sigma_1 =$$

$$= \Big[ \int_\alpha^t \Big( \prod_k \omega_k(s) \Big)\, d \exp\Big( \lambda A \int_\alpha^s dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big) \Big]\, x(\alpha) + \sigma_1.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\omega_k(\alpha) = E$, имеем

$$\lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = \Big( \prod_k \omega_k(t) \Big) X(t,\alpha)\, x(\alpha) - \Big( \prod_k \omega_k(\alpha) \Big) x(\alpha) -$$

$$-\Big[ \int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big( \prod_k \omega_k(s) \Big) \Big]\, x(\alpha) + \sigma_1 = x(t) - x(\alpha) + \sigma_1 + \sigma_2,$$

где в соответствии с леммой 21.2

$$\sigma_2 \doteq -\Big[ \int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big( \prod_k \omega_k(s) \Big) \Big]\, x(\alpha) =$$

$$= -\Big[ \int_\alpha^t X(s,\alpha)\, d\Big( E - \sum_k \Theta_k M_k \int_\alpha^s d\xi_k + \sum_k \Theta_k N_k \int_\alpha^s d\eta_k \Big) \Big]\, x(\alpha) =$$

$$= \Big[ \sum_k X(\tau_k,\alpha)\, \Theta_k M_k \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_k X(\tau_k,\alpha)\, \Theta_k N_k \int_\alpha^t d\eta_k \Big]\, x(\alpha).$$

В последнем равенстве воспользовались непрерывностью $X$ и формулами (11.5). Так как матрицы $X(\tau_k,\alpha)$, $\Theta_k$, $M_k$ коммутируют, то $\sigma_2 = -\sigma_1$, поэтому $\lambda A \int_\alpha^t x\Delta Q = x(t) - x(\alpha)$. Теорема доказана.

**Пример 21.2.** При $Q(s) = s - g\xi(s) + h\eta(s)$, $A = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, $v \neq 0$, уравнение (21.8) имеет вид

$$\begin{cases} x_1(t) - \lambda u \int_\alpha^t x_1\Delta Q - \lambda v \int_\alpha^t x_2\Delta Q = x_1(\alpha) \\ x_2(t) + \lambda v \int_\alpha^t x_1\Delta Q - \lambda u \int_\alpha^t x_2\Delta Q = x_2(\alpha). \end{cases} \tag{21.15}$$

Здесь $T = \{0\}$, функции $\pi(\cdot)$ и $\varrho(\cdot)$ равны $\varphi(g) + g\xi(\cdot)$ и $\psi(h) - h\eta(\cdot)$ соответственно, а матрицы $E - \lambda\pi(\cdot)A$ и $E - \lambda\varrho(\cdot)A$ равны

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda\pi(\cdot)u & -\lambda\pi(\cdot)v \\ \lambda\pi(\cdot)v & 1 - \lambda\pi(\cdot)u \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 - \lambda\varrho(\cdot)u & -\lambda\varrho(\cdot)v \\ \lambda\varrho(\cdot)v & 1 - \lambda\varrho(\cdot)u \end{pmatrix}.$$

Они обратимы, поэтому любое $\lambda$ — регулярное число, следовательно, уравнение (21.15) при всех $\lambda$ имеет единственное решение

$$x(t) = \varepsilon(t)\, \varepsilon^{-1}(\alpha)\, \exp\big( \lambda A\, (t-\alpha) \big)\, x(\alpha),$$

где $\varepsilon(\cdot) \doteq [\, E - \lambda\pi(\cdot)A \,]\, [\, E - \lambda\varrho(\cdot)A \,]$.

## § 22 . Аналог матрицы Коши для системы квазиинтегральных уравнений в случае абсолютно регулярного спектрального параметра

Число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *абсолютно регулярным* для уравнения (v.1), если при всех $\tau_k \in T(Q)$ матрицы $E-\lambda\varphi(Q_k^-)A$, $E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A$, $E-\lambda\psi(Q_k^+)A$ и $E+\lambda\psi^*(Q_k^+)A$ обратимы. Здесь $\Delta \doteq (\varphi,\psi)$ и $\Delta^* \doteq (\varphi^*,\psi^*)$ — пара двойственных дефектов. Через $A'$ обозначаем сопряженную к $A$ матрицу.

### 22.1. Четыре союзные системы квазиинтегральных уравнений.

**Лемма 22.1.** *Если* $\lambda$ *— абсолютно регулярно для уравнения* (v.1), *то*

1) $\lambda$ *— регулярно для уравнения* (v.1)*;*

2) $\lambda$ *— регулярно для уравнения*

$$x(t) + \lambda A \int_\alpha^t x\Delta^* Q = y(t); \tag{22.1}$$

3) $\lambda$ *— регулярно для уравнения*

$$x(t) + \lambda A' \int_\alpha^t x\Delta^* Q = y(t). \tag{22.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Зафиксируем $\tau_k \in T(Q)$.

Если $\alpha < \tau_k$, то $\pi_k(\alpha) = \varphi(Q_k^-) - Q_k^- = -\varphi^*(Q_k^-)$ и $\varrho_k(\alpha) = \psi(Q_k^+)$, следовательно, матрицы $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E - \lambda\psi(Q_k^+)A$ обратимы. Если $\alpha = \tau_k$, то $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E - \lambda\varphi(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E - \lambda\psi(Q_k^+)A$ — обратимые матрицы. Наконец, при $\alpha > \tau_k$ имеем $E - \lambda\pi_k(\alpha)A = E - \lambda\varphi(Q_k^-)A$ и $E - \lambda\varrho_k(\alpha)A = E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A$, поэтому обратимость также имеет место.

2. Уравнение (22.1) отличается от (v.1) тем, что $\lambda$ заменено на $-\lambda$, а функции $\varphi$ и $\psi$ — на $\varphi^*$ и $\psi^*$, поэтому регулярность числа $\lambda \in \mathbb{R}$ для уравнения (22.1) означает, что матрицы $E + \lambda\pi_k^*(\alpha)A$ и $E + \lambda\varrho_k^*(\alpha)A$ обратимы, где $\pi_k^*(\cdot) \doteq \varphi^*(Q_k^-) + Q_k^-\xi_k(\cdot)$, $\varrho_k^*(\cdot) \doteq \psi^*(Q_k^+) - Q_k^+\eta_k(\cdot)$. Это действительно имеет место, в чем легко убедиться, проведя выкладки, аналогичные предыдущим, рассмотрев три случая: $\alpha < \tau_k$, $\alpha = \tau_k$ и $\alpha > \tau_k$.

3. Матрицы $E+\lambda\pi_k^*(\alpha)A'$ и $E+\lambda\pi_k^*(\alpha)A$ сопряжены. То же самое можно сказать о матрицах $E+\lambda\varrho_k^*(\alpha)A'$ и $E+\lambda\varrho_k^*(\alpha)A$. Доказательство завершает замечание, что сопряженные матрицы обратимы или нет одновременно. □

Для полноты картины заметим, что если $\lambda$ — абсолютно регулярно для уравнения (v.1), то $\lambda$ — регулярно и для уравнения

$$x(t) - \lambda A' \int_\alpha^t x\Delta Q = y(t). \tag{22.3}$$

Кроме того, справедливо более общее утверждение: если $\lambda$ — абсолютно регулярно для одного из уравнений (v.1), (22.1), (22.2), (22.3), то оно регулярно для всех этих уравнений. Более того, если $\lambda$ — абсолютно регулярно для одного из уравнений (v.1), (22.1), (22.2), (22.3), то оно абсолютно регулярно для всех остальных. Будем называть эти четыре уравнения *союзными.*

Таким образом, введя обозначения $T \doteq T(Q)$ и

$$D(\lambda) \doteq \prod_{\tau_k \in T} [\, E - \lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\, E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]\,[\, E - \lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\, E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A\,],$$

мы можем сформулировать эквивалентное определение: число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется *абсолютно регулярным* для союзных уравнений (v.1), (22.1), (22.2) и (22.3), если $\det D(\lambda) \neq 0$.

**Теорема 22.1.** *Однородное уравнение*

$$x(t) + \lambda A \int_\alpha^t x\Delta^* Q = x(\alpha) \tag{22.4}$$

*при регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение*

$$x(t) = \Big( \prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k^*(t)\, \varepsilon_k^{*^{-1}}(\alpha) \Big) \exp\Big( -\lambda A \int_\alpha^t dQ^{\tau} \Big)\, x(\alpha), \tag{22.5}$$

*где* $T \doteq T(Q)$ *и* $\varepsilon_k^*(s) \doteq [\, E + \lambda\pi_k^*(s)A\,]\,[\, E + \lambda\varrho_k^*(s)A\,]$.

Уравнение (22.4) можно рассматривать как уравнение (21.8), в котором вместо $\lambda$ взято число $-\lambda$, а вместо $\Delta$ — дефект $\Delta^*$. При этом величины $\pi_k(\cdot)$ и $\varrho_k(\cdot)$ переходят в $\pi_k^*(\cdot)$ и $\varrho_k^*(\cdot)$, а матрица $\varepsilon_k(\cdot)$ — в $\varepsilon_k^*(\cdot)$.

Заметим также, что если $\lambda$ — абсолютно регулярно для уравнения (22.4), то оно абсолютно регулярно для (21.8) и справедливы формулы (21.9), (22.5).

### 22.2. Матрица Коши для системы квазиинтегральных уравнений и ее свойства.

**Определение 22.1.** *Матрицей Коши* уравнения (v.1) при абсолютно регулярном $\lambda$ называется матрица

$$C(t,\tau) \doteq D^{-1}(\lambda) \Big( \prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k(t)\, \varepsilon_k^*(\tau) \Big) \exp\Big( \lambda A \int_\tau^t dQ^{\tau} \Big).$$

Отметим основные свойства матрицы Коши.

1. *Справедливы включения:* $C_{ij}(\cdot,\tau) \in \mathrm{PBV}$ *при фиксированном* $\tau \in K$ *и* $C_{ij}(t,\cdot) \in \mathrm{PBV}$ *при фиксированном* $t \in K$.

Утверждение легко следует из замечания, что компоненты матриц $\varepsilon_k(\cdot)$ и $\varepsilon_k^*(\cdot)$ — кусочно-постоянны, а матрица $\exp\Big(\lambda A\int_\tau^t dQ^\tau\Big)$ состоит из кусочно-непрерывных функций ограниченной вариации, как суперпозиция липшицевой функции $\exp(\cdot)$ и $Q^T\in\mathrm{PBV}$.

2. *Имеет место тождество* $C(t,s)\,C(s,\tau)=C(t,\tau)$.

В правой части равенства

$$C(t,s)\,C(s,\tau)=D^{-1}(\lambda)\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^*(s)\Big)\exp\Big(\lambda A\int_s^t dQ^\tau\Big)\times$$
$$\times D^{-1}(\lambda)\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(s)\,\varepsilon_k^*(\tau)\Big)\exp\Big(\lambda A\int_\tau^s dQ^\tau\Big)$$

все матрицы коммутируют между собой, следовательно, в силу легко проверяемых тождеств

$$[\,E-\lambda\pi_k(s)A\,]\,[\,E+\lambda\pi_k^*(s)A\,]\equiv[\,E-\lambda\varphi(Q_k^-)A\,]\,[\,E+\lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,],$$
$$[\,E-\lambda\varrho_k(s)A\,]\,[\,E+\lambda\varrho_k^*(s)A\,]\equiv[\,E-\lambda\psi(Q_k^+)A\,]\,[\,E+\lambda\psi^*(Q_k^+)A\,],$$
$$\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(s)\,\varepsilon_k^*(s)\equiv D(\lambda)\tag{22.6}$$

справедливо

$$C(t,s)\,C(s,\tau)=D^{-1}(\lambda)\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^*(\tau)\Big)\exp\Big(\lambda A\int_\tau^t dQ^\tau\Big)=C(t,\tau).$$

3. Тождество $C(s,s)\equiv E$ очевидно из предыдущего свойства.

4. *Матрицы* $C(t,\tau)$ *и* $C(\tau,t)$ *взаимно обратны.*

5. *Для любого абсолютно регулярного числа* $\lambda$ *уравнение* (21.8) *имеет единственное решение* $x(t)=C(t,\alpha)\,x(\alpha)$.

Действительно, в силу тождества (22.6) справедливо равенство

$$C(t,\alpha)\,x(\alpha)=D^{-1}(\lambda)\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^*(\alpha)\Big)\exp\Big(\lambda A\int_\alpha^t dQ^\tau\Big)\,x(\alpha)=$$

$$=\Big(\prod_{\tau_k\in T}\varepsilon_k(t)\,\varepsilon_k^{-1}(\alpha)\Big)\exp\Big(\lambda A\int_\alpha^t dQ^\tau\Big)\,x(\alpha),$$

в правой части которого стоит функция (21.9).

6. Аналогично доказывается, что *уравнение* (22.4) *при абсолютно регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение* $x(t)=C(\alpha,t)\,x(\alpha)$.

Таким образом, уравнения (21.8) и (22.4) принимают вид

$$C(t,\alpha)\,x(\alpha)-\lambda A\int_{\alpha}^{t}C(s,\alpha)\,x(\alpha)\,\Delta Q(s)=x(\alpha),$$

$$C(\alpha,t)\,x(\alpha)+\lambda A\int_{\alpha}^{t}C(\alpha,s)\,x(\alpha)\,\Delta^{*}Q(s)=x(\alpha),$$

соответственно, следовательно, *справедливы тождества*

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_{\tau}^{t}C(s,\tau)\,\Delta Q(s)\equiv E, \tag{22.7}$$

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_{\tau}^{t}C(t,s)\,\Delta^{*}Q(s)\equiv E. \tag{22.8}$$

## § 23 . Представление решений неоднородных квазиинтегральных уравнений в терминах матрицы Коши

**Теорема 23.1.** *Уравнение* (v.1) *при абсолютно регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение*

$$x(t)=C(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}C(t,s)\,\Delta^{*}y(s)-$$

$$-\lambda A\sum_{\tau_k\in T}C(t,\tau_k)\,[\,E+\lambda\varphi^{*}(Q_k^{-})A\,]^{-1}\begin{vmatrix}\varphi(Q_k^{-}) & \varphi(y_k^{-})\\ \varphi^{*}(Q_k^{-}) & \varphi^{*}(y_k^{-})\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\xi_k+$$

$$+\lambda A\sum_{\tau_k\in T}C(t,\tau_k)\,[\,E+\lambda\psi^{*}(Q_k^{+})A\,]^{-1}\begin{vmatrix}\psi(Q_k^{+}) & \psi(y_k^{+})\\ \psi^{*}(Q_k^{+}) & \psi^{*}(y_k^{+})\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\eta_k,$$

*где* $T\doteq\big[\,\bigcup_{i=1}^{r}T(y_i)\,\big]\cap T(Q),$ *а символическая запись через определители обозначает векторы*

$$\operatorname{col}\Big(\,\varphi(Q_k^{-})\varphi^{*}(y_{1k}^{-})-\varphi^{*}(Q_k^{-})\varphi(y_{1k}^{-}),\ \ldots\ ,\varphi(Q_k^{-})\varphi^{*}(y_{rk}^{-})-\varphi^{*}(Q_k^{-})\varphi(y_{rk}^{-})\,\Big),$$

$$\operatorname{col}\Big(\,\psi(Q_k^{+})\psi^{*}(y_{1k}^{+})-\psi^{*}(Q_k^{+})\psi(y_{1k}^{+}),\ \ldots\ ,\psi(Q_k^{+})\psi^{*}(y_{rk}^{+})-\psi^{*}(Q_k^{+})\psi(y_{rk}^{+})\,\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 21.1 решение существует и единственно (обозначим его $x(\cdot)$ ). В силу (22.7) матрица $X(t)\doteq C(t,\alpha)$ удовлетворяет уравнению $X(t)-\lambda A\int_{\alpha}^{t}X\,\Delta Q=E$, то есть компоненты матрицы $X$ удовлетворяют системе уравнений, аналогичной системе (21.1):

$$\begin{cases} X^{\tau}(t)-\lambda A\displaystyle\int_{\alpha}^{t}X\,dQ^{\tau}=E,\\ X_k^{-}-\lambda A\,[\,X_kQ_k^{-}+X_k^{-}\varphi(Q_k^{-})\,]=0, \quad \tau_k\in T,\\ X_k^{+}-\lambda A\,[\,X_kQ_k^{+}+X_k^{+}\psi(Q_k^{+})\,]=0, \quad \tau_k\in T. \end{cases} \tag{23.1}$$

Матрица $X$ обратима, поэтому определен вектор $b(\cdot)$ такой, что $x = Xb$. Поскольку $X_{ij} \in \mathrm{PBV}$ и $b_j \in \mathrm{G}$, то квазиинтегралы $\displaystyle\int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij}$ и $\displaystyle\int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j$ существуют. Следовательно, в силу формулы (20.13) справедливо равенство

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^r X_{ij}(t)\, b_j(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^r X_{ij}(\alpha)\, b_j(\alpha) + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i} =$$

$$= x_i(\alpha) + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i},$$

где через $\sigma_{1i}$ обозначена функция

$$\sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \varphi(X_{ijk}^-) & \varphi(b_{jk}^-) \\ \varphi^*(X_{ijk}^-) & \varphi^*(b_{jk}^-) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k - \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} \psi(X_{ijk}^+) & \psi(b_{jk}^+) \\ \psi^*(X_{ijk}^+) & \psi^*(b_{jk}^+) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

в которой $X_{ijk}^- \doteq (X_{ij})_k^-$, $X_{ijk}^+ \doteq (X_{ij})_k^+$, $b_{jk}^- \doteq (b_j)_k^-$ и $b_{jk}^+ \doteq (b_j)_k^+$.

По определению квазиинтеграла имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} = \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j dX_{ij}^{\scriptscriptstyle T} + \sigma_{2i},$$

$$\sigma_{2i} \doteq -\sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} b_{jk} & -\varphi(X_{ijk}^-) \\ b_{jk}^- & X_{ijk}^- \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_{j=1}^r \sum_{\tau_k \in T} \begin{vmatrix} b_{jk} & -\psi(X_{ijk}^+) \\ b_{jk}^+ & X_{ijk}^+ \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

следовательно, в силу первого равенства (23.1) справедлива цепочка

$$\sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j \Delta X_{ij} = \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t b_j\, d\left[\delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t X_{kj} dQ^{\scriptscriptstyle T}\right] + \sigma_{2i} =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t \left[\sum_{j=1}^r X_{kj} b_j\right] dQ^{\scriptscriptstyle T} + \sigma_{2i} = \lambda \sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t x_k dQ^{\scriptscriptstyle T} + \sigma_{2i}.$$

Это означает, что $x_i(t) = x_i(\alpha) + \lambda \displaystyle\sum_{k=1}^r A_{ik} \int_\alpha^t x_k dQ^{\scriptscriptstyle T} + \sum_{j=1}^r \int_\alpha^t X_{ij} \Delta^* b_j + \sigma_{1i} + \sigma_{2i}$, или в векторной форме: $x(t) = x(\alpha) + \lambda A \displaystyle\int_\alpha^t x\, dQ^{\scriptscriptstyle T} + \int_\alpha^t X \Delta^* b + \sigma_1 + \sigma_2$, где

$$\sigma_1 \doteq \mathrm{col}\,(\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1r}), \qquad \sigma_2 \doteq \mathrm{col}\,(\sigma_{21}, \ldots, \sigma_{2r}).$$

Следовательно, уравнение (v.1) и равенство $x(\alpha)=y(\alpha)$ порождают цепочку равенств

$$y(t)=x(t)-\lambda A\int_{\alpha}^{t}x\Delta Q=$$

$$x(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}X\Delta^{*}b+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=y(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}Xdb^{\scriptscriptstyle T}+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4,$$

где компоненты $\sigma_{3i}$ и $\sigma_{4i}$ векторов $\sigma_3$ и $\sigma_4$ равны

$$\sigma_{3i}\doteq\lambda\sum_{j=1}^{r}A_{ij}\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_{jk} & -\varphi(Q_k^-)\\ x_{jk}^- & Q_k^-\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\xi_k-$$

$$-\lambda\sum_{j=1}^{r}A_{ij}\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} x_{jk} & -\psi(Q_k^+)\\ x_{jk}^+ & Q_k^+\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\eta_k,$$

$$\sigma_{4i}\doteq-\sum_{j=1}^{r}\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} X_{ijk} & -\varphi^{*}(b_{jk}^-)\\ X_{ijk}^- & b_{jk}^-\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\xi_k+\sum_{j=1}^{r}\sum_{\tau_k\in T}\begin{vmatrix} X_{ijk} & -\psi^{*}(b_{jk}^+)\\ X_{ijk}^+ & b_{jk}^+\end{vmatrix}\int_{\alpha}^{t}d\eta_k$$

соответственно. Здесь $x_{jk}\doteq x_j(\tau_k)$, $x_{jk}^-\doteq(x_j)_k^-$, $x_{jk}^+\doteq(x_j)_k^+$. Наконец, в силу определений (11.6) и (11.8) справедливо равенство

$$y^{\scriptscriptstyle T}(t)=y^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}Xdb^{\scriptscriptstyle T}+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5,\tag{23.2}$$

$$\sigma_5\doteq\operatorname{col}(\sigma_{51},\ldots,\sigma_{5r}),\quad \sigma_{5i}\doteq\sum_{\tau_k\in T}y_{ik}^-\int_{\alpha}^{t}d\xi_k-\sum_{\tau_k\in T}y_{ik}^+\int_{\alpha}^{t}d\eta_k,$$

где $y_{ik}^-\doteq(y_i)_k^-$, $y_{ik}^+\doteq(y_i)_k^+$.

Поскольку функции $y^{\scriptscriptstyle T}$, $b^{\scriptscriptstyle T}$ и $\int_{\alpha}^{t}Xdb^{\scriptscriptstyle T}$ непрерывны в точках $\tau_k\in T$, то уравнение (23.2) эквивалентно двум: $\sigma\doteq\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5\equiv0$ и

$$y^{\scriptscriptstyle T}(t)=y^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}Xdb^{\scriptscriptstyle T}.\tag{23.3}$$

В силу тождества (22.8) матрица $Y(t)\doteq C(\alpha,t)$ удовлетворяет матричному уравнению $Y(t)+\lambda A\int_{\alpha}^{t}Y\Delta^{*}Q=E$, эквивалентному системе уравнений

$$\begin{cases} Y^{\scriptscriptstyle T}(t)+\lambda A\int_{\alpha}^{t}YdQ^{\scriptscriptstyle T}=E,\\ Y_k^-+\lambda A\,[\,Y_kQ_k^-+Y_k^-\varphi^{*}(Q_k^-)\,]=0,\quad \tau_k\in T,\\ Y_k^++\lambda A\,[\,Y_kQ_k^++Y_k^+\psi^{*}(Q_k^+)\,]=0,\quad \tau_k\in T.\end{cases}\tag{23.4}$$

Поскольку $C(t,\alpha)\,C(\alpha,t)\equiv E$, то $XY=E$, следовательно, в силу (23.3) и очевидных равенств $b^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)=b(\alpha)=x(\alpha)=y(\alpha)$ справедливы равенства

$$\int_\alpha^t Y\,dy^{\scriptscriptstyle T}=\int_\alpha^t Y(s)\,d\Big[\,y^{\scriptscriptstyle T}(\alpha)+\int_\alpha^s X\,db^{\scriptscriptstyle T}\Big]=\int_\alpha^t Y(s)X(s)\,db^{\scriptscriptstyle T}(s)=\int_\alpha^t db^{\scriptscriptstyle T},$$

$$b^{\scriptscriptstyle T}(t)=y(\alpha)+\int_\alpha^t Y\,dy^{\scriptscriptstyle T}. \tag{23.5}$$

Тождество $\sigma\equiv 0$ означает, что при всех $i=1,\dots,r$ и $\tau_k\in T$ для левых скачков выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^r\left\{\left|\begin{array}{cc}\varphi(X^-_{ijk}) & \varphi(b^-_{jk})\\ \varphi^*(X^-_{ijk}) & \varphi^*(b^-_{jk})\end{array}\right|-\left|\begin{array}{cc} b_{jk} & -\varphi(X^-_{ijk})\\ b^-_{jk} & X^-_{ijk}\end{array}\right|\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^r\left\{\lambda A_{ij}\left|\begin{array}{cc} x_{jk} & -\varphi(Q^-_k)\\ x^-_{jk} & Q^-_k\end{array}\right|-\left|\begin{array}{cc} X_{ijk} & -\varphi^*(b^-_{jk})\\ X^-_{ijk} & b^-_{jk}\end{array}\right|\right\}+y^-_{ik}=0,$$

и аналогичное равенство справедливо для правых скачков. Раскрыв определители и воспользовавшись равенством $\varphi(h)+\varphi^*(h)=h$, получим, что

$$\sum_{j=1}^r\Big\{X_{ijk}b^-_{jk}+X^-_{ijk}b_{jk}+X^-_{ijk}b^-_{jk}-\lambda A_{ij}\left(\,x_{jk}Q^-_k+x^-_{jk}\varphi(Q^-_k)\,\right)\Big\}=y^-_{ik},$$

или в векторной форме:

$$X_kb^-_k+X^-_kb_k+X^-_kb^-_k-\lambda A\left(\,x_kQ^-_k+x^-_k\varphi(Q^-_k)\,\right)=y^-_k. \tag{23.6}$$

Равенство $x_k=X_kb_k$ очевидно, а в силу формулы (11.3) и равенства $z(\tau_k-)=z_k+z^-_k$, справедливого для любой функции $z\in \mathrm{G}$, имеем

$$x^-_k=(Xb)^-_k=X(\tau_k-)\,b(\tau_k-)-X(\tau_k)\,b(\tau_k)=X_kb^-_k+X^-_kb_k+X^-_kb^-_k,$$

следовательно, равенство (23.6) принимает вид

$$[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,[\,X_k+X^-_k\,]\,b^-_k+\big\{X^-_k-\lambda AX_kQ^-_k-\lambda AX^-_k\varphi(Q^-_k)\big\}\,b_k=y^-_k.$$

В силу второго равенства (23.1) выражение, стоящее в фигурных скобках, равно нулю, следовательно, $[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,[\,X_k+X^-_k\,]\,b^-_k=y^-_k$. Это же равенство, записанное в виде $[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,X^-_k=\lambda A\,X_kQ^-_k$, влечет цепочку

$$[\,E-\lambda\varphi(Q^-_k)A\,]\,[\,X_k+X^-_k\,]=[\,E+\lambda\varphi^*(Q^-_k)A\,]\,X_k=X_k\,[\,E+\lambda\varphi^*(Q^-_k)A\,],$$

последнее равенство которой справедливо в силу коммутативности матриц $A$ и $X(t)=C(t,\alpha)$. Это означает, что $b^-_k=[\,E+\lambda\varphi^*(Q^-_k)A\,]^{-1}Y_ky^-_k$ (напомним, что $\lambda$ — абсолютно регулярно), что вместе с аналогичным равенством для $b^+_k$ и формулой (23.5) приводит к цепочке равенств

$$b(t)=b^{\scriptscriptstyle T}(t)-\sum_k b^-_k\int_\alpha^t d\xi_k+\sum_k b^+_k\int_\alpha^t d\eta_k=$$

$$= y(\alpha) + \int_\alpha^t Y\,dy^{\tau} - \sum_k b_k^- \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k b_k^+ \int_\alpha^t d\eta_k = y(\alpha) + \int_\alpha^t Y\,\Delta^* y + \sigma',$$

где через $\sigma'$ обозначена сумма

$$-\sum_k \left\{ b_k^- - \begin{vmatrix} Y_k & -\varphi^*(y_k^-) \\ Y_k^- & y_k^- \end{vmatrix} \right\} \int_\alpha^t d\xi_k + \sum_k \left\{ b_k^+ - \begin{vmatrix} Y_k & -\psi^*(y_k^+) \\ Y_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} \right\} \int_\alpha^t d\eta_k.$$

Заметим, что по поводу символической записи через определители мы дали все необходимые пояснения в формулировке теоремы. В частности, в силу (23.4) справедливы равенства

$$[\,E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]\,Y_k^- = -\lambda A\,Y_k Q_k^-,$$

$$b_k^- - \begin{vmatrix} Y_k & -\varphi^*(y_k^-) \\ Y_k^- & y_k^- \end{vmatrix} = b_k^- - Y_k y_k^- + \lambda\,[\,E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1} A\,Y_k Q_k^- \varphi^*(y_k^-) =$$

$$= [\,E + \lambda\varphi^*(Q_k^-)A\,]^{-1} \cdot \lambda A\,Y_k \begin{vmatrix} \varphi(Q_k^-) & \varphi(y_k^-) \\ \varphi^*(Q_k^-) & \varphi^*(y_k^-) \end{vmatrix}.$$

Воспользовались формулой для $b_k^-$ и тождеством $\varphi(h) + \varphi^*(h) = h$. Аналогично получается равенство

$$b_k^+ - \begin{vmatrix} Y_k & -\psi^*(y_k^+) \\ Y_k^+ & y_k^+ \end{vmatrix} = [\,E + \lambda\psi^*(Q_k^+)A\,]^{-1} \cdot \lambda A\,Y_k \begin{vmatrix} \psi(Q_k^+) & \psi(y_k^+) \\ \psi^*(Q_k^+) & \psi^*(y_k^+) \end{vmatrix}.$$

Наконец, матрицы $A$, $Y(s) = C(\alpha, s)$ и $X(t) = C(t, \alpha)$ коммутируют между собой, а ссылка на равенства $Y_k = C(\alpha, \tau_k)$, $x(t) = C(t,\alpha)\,b(t)$ и $C(t,\alpha)\,C(\alpha,s) = C(t,s)$ завершает доказательство теоремы. $\square$

**Следствие 23.1.** *Если $\varphi$ и $\psi$ линейны, то решение уравнения* (v.1) *представимо в виде*

$$x(t) = C(t,\alpha)\,y(\alpha) + \int_\alpha^t C(t,s)\Delta^* y(s). \tag{23.7}$$

**Следствие 23.2.** *Если существует интеграл Римана–Стилтьеса $\int_K y\,dQ$, то формула* (23.7) *имеет место при любом* $\Delta \in \Omega^2$.

Действительно, существование $\int_K y\,dQ$ означает, что при всех $i$ справедливо равенство $T(y_i) \cap T(Q) = \varnothing$, поэтому $T = \varnothing$.

**Замечание 23.1.** Если пары функций $(Q, y_i)$ не имеют общих односторонних разрывов, например, если $Q \in \mathrm{G}_{_L}$, $y_i \in \mathrm{G}_{_R}$ (или наоборот), то формула (23.7) также справедлива.

**Теорема 23.2.** *Уравнение* (22.1) *при абсолютно регулярном* $\lambda$ *имеет единственное решение*

$$x(t) = C^*(t,\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t C^*(t,s)\, \Delta y(s) +$$

$$+\lambda A \sum_{\tau_k \in T} C^*(t,\tau_k)\, [\, E - \lambda\varphi(Q_k^-) A\,]^{-1} \begin{vmatrix} \varphi^*(Q_k^-) & \varphi^*(y_k^-) \\ \varphi(Q_k^-) & \varphi(y_k^-) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\xi_k -$$

$$-\lambda A \sum_{\tau_k \in T} C^*(t,\tau_k)\, [\, E - \lambda\psi(Q_k^+) A\,]^{-1} \begin{vmatrix} \psi^*(Q_k^+) & \psi^*(y_k^+) \\ \psi(Q_k^+) & \psi(y_k^+) \end{vmatrix} \int_\alpha^t d\eta_k,$$

*где* $T \doteq \Big[\, \bigcup\limits_{i=1}^{r} T(y_i)\,\Big] \cap T(Q)$, *а через* $C^*(t,\tau)$ *обозначена матрица Коши уравнения* (22.1)*:*

$$C^*(t,\tau) \doteq D^{-1}(\lambda) \Big( \prod_{\tau_k \in T} \varepsilon_k^*(t)\, \varepsilon_k(\tau) \Big) \exp\Big( -\lambda A \int_\tau^t dQ^{\scriptscriptstyle T} \Big). \tag{23.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (22.1) можно рассматривать как уравнение (v.1), в котором вместо $\lambda$ взято число $-\lambda$, а вместо $\Delta$ взят дефект $\Delta^*$. При это величины $\pi_k(\cdot)$ и $\varrho_k(\cdot)$ изменятся на $\pi_k^*(\cdot)$ и $\varrho_k^*(\cdot)$ соответственно, а матрица $\varepsilon_k(\cdot)$ — на $\varepsilon_k^*(\cdot)$. При этом легко заметить, что матрица $D(\lambda)$ не изменится, а матрица Коши имеет вид (23.8).

Заметим, что аналог формулы (23.7), то есть формула

$$x(t) = C^*(t,\alpha)\, y(\alpha) + \int_\alpha^t C^*(t,s)\, \Delta y(s)$$

имеет место в тех же случаях, что и формула (23.7): если функции $\varphi$ и $\psi$ линейны; если существует интеграл $\displaystyle\int_K y\, dQ$ ; если функции $Q$ и $y_i$ не имеют общих односторонних разрывов.

Легко проверяемое тождество $C^*(t,\tau) = C(\tau,t)$ придает свойству 6 матриц Коши более естественную формулировку: уравнение (22.4) при абсолютно регулярном $\lambda$ имеет единственное решение $x(t) = C^*(t,\alpha)\, x(\alpha)$.

**Замечание 23.2.** Справедливо более общее утверждение: при абсолютно регулярном $\lambda$ решения четырех союзных однородных уравнений (v.1), (22.1), (22.2) и (22.3) представимы в виде $x(t) = X(t,\alpha)\, x(\alpha)$, в котором матрица $X$ определена следующим образом: $X(t,\tau) \doteq C(t,\tau)$ для уравнения (v.1); $X(t,\tau) \doteq C(\tau,t)$ — для уравнения (22.1); $X(t,\tau) \doteq C'(\tau,t)$ — для уравнения (22.2) и, наконец, $X(t,\tau) \doteq C'(t,\tau)$ — для уравнения (22.3).

**Замечание 23.3.** Утверждение, аналогичное теореме 23.2, справедливо и для уравнения (22.2): единственное отличие состоит в том, что вместо матрицы $A$ следует взять сопряженную матрицу $A'$. Более того, сейчас мы установим, что скалярное произведение решений однородных уравнений (v.1) и (22.2) при абсолютно регулярном $\lambda$ есть величина постоянная, то есть имеет место тождество $\bigl(x(t), x'(t)\bigr) \equiv \mathrm{const}$, где $x$ — решение однородного уравнения (v.1), а $x'$ — решение однородного уравнения (22.2). Это позволяет называть уравнения (v.1) и (22.2) *сопряженными*. Таковыми же являются уравнения (22.1) и (22.3).

**Теорема 23.3.** *Пусть $x$ — решение однородного уравнения* (v.1)*, а $x'$ — решение сопряженного однородного уравнения* (22.2)*. Справедливо тождество* $\bigl(x(t), x'(t)\bigr) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство опирается на формулу $(Ax, B'y) = (BAx, y)$ и замечание 23.2:

$$\bigl(x(t), x'(t)\bigr) = \bigl(C(t,\alpha)\,x(\alpha),\, C'(\alpha,t)\,x'(\alpha)\bigr) =$$
$$= \bigl(C(\alpha,t)\,C(t,\alpha)\,x(\alpha),\, x'(\alpha)\bigr) = \bigl(x(\alpha), x'(\alpha)\bigr) = \mathrm{const}.$$

**Замечание 23.4.** Аналогичное утверждение имеет место для второй пары сопряженных однородных уравнений (22.1) и (22.3).

## § 24 . Аппроксимируемые решения импульсных уравнений

В основе проблематики импульных систем лежит известный вопрос о стыковке различных интегральных кривых одного и того же уравнения, последовательно решаемого на разных временны́х участках. Поясним сказанное на примере. Пусть функция $Q = Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$, дифференцируемая при $t < \tau$ и при $t > \tau$, терпит разрыв в точке $\tau$. Для достаточно гладкой функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ графики двух семейств решений уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,\dot{Q}(t)$ (решаемого отдельно при $t < \tau$ и при $t > \tau$) заполняют всю плоскость $\mathbb{R}^2$, за исключением прямой $t = \tau$. Если же мы изучаем процесс при всех $t \in \mathbb{R}$, то возникает вопрос обоснования «разумной стыковки» графиков этих двух семейств решений. Существующие в настоящее время подходы к решению проблемы приводят к противоречащим друг другу результатам.

Проиллюстрируем сказанное на уравнении $\dot{x} = \frac{1}{2}\,\delta(t)\,x$, $x(-1) = \omega$ (см. [15, с. 145]). Здесь $f(t,x) = \frac{1}{2}\,x$, $Q = \theta(t)$ — функция Хевисайда, то есть $\theta(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t > 0$.

Уже в работах авторов, развивающих технику умножения разрывных функций на обобщенные, нет единообразия. Так, решением в смысле [6] является функция $x(t) = \omega\,(1 + \frac{2}{3}\,\theta(t))$, а в смысле [15, глава 1] — функция $x(t) = \omega \exp(\frac{1}{2}\,\theta(t))$. В работах авторов, развивающих технику перевода исходной задачи в интегральную форму (в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса, Душника–Стилтьеса и др.), также нет единообразия. Если, например, использовать интеграл Перрона–Стилтьеса, то получим решение $x(t) = \omega\,(\,1 + \frac{1}{2}\,\theta(t)\,)$, а если интеграл Душника–Стилтьеса, то $x(t) = \omega\,(\,1 + \theta(t)\,)$. Применяя квазиинтегралы (варьируя дефекты), можно получить любую функцию из семейства $\{\,x(t) = \omega\,(\,1 + c\,\theta(t)\,),\ c \in \mathbb{R}\,\}$.

Мы видим разнообразие подходов предшественников к представлению импульсных систем. Как следствие, имеет место разнообразие семейств решений таких задач. (Другими словами, тематика носит дискуссионный характер.) Мы, однако, исследуем квазиинтегральные уравнения как единое семейство и полагаем, что отступать от этого принципа следует лишь в исключительных случаях, тогда, когда специфика той или иной конкретной задачи не позволяет работать со всем классом. Например, мы допускаем, что математические модели различных прикладных задач, записанные в квазиинтегральной форме, допускают восстановление конкретного, специфического именно для этой задачи, дефекта по результатам эксперимента, проведенного в рамках данной предметной области. (Подобным образом в статистике восстанавливается так называемая эмпирическая функция распределения.)

Исходя из этого принципа мы восстанавливаем так называемый *аппроксимирующий дефект*, — дефект, порождающий аппроксимируемые решения импульсной системы. Пусть $K \doteq (a, b)\,;$ $Q \in \mathrm{BV}^{\mathrm{loc}}(K)$ — функция локально ограниченной вариации; последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, состоящая из непрерывных функций локально ограниченной вариации, поточечно сходится к функции $Q$. Точка $(\alpha, \omega) \in K \times \mathbb{R}$, непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и дефект $\Delta \doteq (\varphi, \psi) \in \Omega^2$ порождают последовательность квазиинтегральных уравнений

$$\Big\{\,x_n(t) - \int_\alpha^t f(x_n(s))\,\Delta Q_n(s) = \omega\,\Big\}_{n=1}^{\infty} \tag{24.1}$$

и предельное уравнение

$$x(t) - \int_\alpha^t f(x(s))\,\Delta Q(s) = \omega. \tag{24.2}$$

Так как функция $Q_n$ непрерывна, то уравнение (24.1) совпадает с разрешимым уравнением

$$x_n(t) - \int_\alpha^t f(x_n(s))\,dQ_n(s) = \omega, \tag{24.3}$$

заданным через интеграл Римана–Стилтьеса. Если предельная функция $Q$ разрывна, причем $\alpha \in T(Q)$, то известно, что замена в предельном уравнении (24.2) квазиинтеграла на интеграл Римана–Стилтьеса приводит к неразрешимой, вообще говоря, задаче (к несуществующему объекту). Таким образом, даже в том случае, когда последовательность $\{\,x_n\colon\ K_{x_n} \to \mathbb{R}\,\}$, состоящая из решений уравнений (24.3), сходится в смысле какой-либо топологии к некой функции $x\colon\ K_x \to \mathbb{R}$, она не является решением предельного уравнения. (В работах ряда исследователей такие предельные функции директивно объявляются решением предельного уравнения.)

Разрешимость предельного квазиинтегрального уравнения (24.2) позволяет поставить следующий корректный вопрос: при каких дефектах $\Delta$ решения уравнений (24.1) и (24.2) связаны тождеством $\lim\limits_n x_n(t) = x(t)$? В первую очередь заметим, что поставленная проблема порождает ряд других вопросов. Существуют ли решения? Каковы области существования этих решений? Какова область, в которой должно быть выполнено данное тождество? Решение этих вопросов в общем случае требует проведения существенных исследований, поэтому ограничимся лишь двумя примерами.

Пусть функция $f$ непрерывна, строго монотонна и не обращается в ноль на интервале $X \doteq (A, B)$. Зафиксируем интервал $K \doteq (a, b)$ такой, что $0 \in K$, точку $(\alpha, \omega) \in K \times X$, $\alpha < 0$, и предположим, что последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходится к разрывной функции $Q(t) \doteq q(t) + r(t)$ такой, что $q \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, $r(t) = 0$ при $t < 0$, $r(0) = -g$, $r(t) = h - g$ при $t > 0$, $g \neq 0$, $h \neq 0$. Тогда существует дефект $\Delta = \Delta_{(f,Q)}$ (зависящий от $f$ и $Q$) такой, что какова бы ни была последовательность $\{Q_n\}$, $Q_n \in \mathrm{CBV}^{\mathrm{loc}}(K)$, поточечно сходящаяся к функции $Q$, последовательность непродолжаемых непрерывных решений $\{\,x_n\}$ уравнений (24.1) поточечно сходится к непродолжаемому прерывистому решению $x$ уравнения (24.2) в общем (непустом) промежутке существования этих решений.

**Пример 24.1.** Если $X \doteq (0, \infty)$, $f(x) = x$, $K = \mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \omega\, e^{Q(t) - Q(\alpha)}$, $t \in \mathbb{R}$, а функции

$$\varphi^*(g) = \frac{g}{1 - e^{-g}} - 1, \quad g \neq 0, \qquad \psi(h) = 1 - \frac{h}{e^h - 1}, \quad h \neq 0,$$

составляют аппроксимирующий дефект $\Delta_{(f,Q)} \doteq (\varphi, \psi)$.

**Пример 24.2.** Если $X \doteq (0, \infty)$, $f(x) = x^2$, $K = \mathbb{R}$, то аппроксимируемыми решениями являются функции $x(t) = \big(\,\omega^{-1} - Q(t) + Q(\alpha)\,\big)^{-1}$, $t \in K_x$, а аппроксимирующий дефект $\Delta_{(f,Q)} \doteq (\varphi, \psi)$ составляют функции

$$\varphi^*(g) = g\;\frac{1 + z}{2 + z}, \qquad \psi(h) = h\;\frac{1 - w}{2 - w},$$

где $\quad z \doteq \dfrac{g}{\omega^{-1} - q(0) + q(\alpha)}, \;\; w \doteq \dfrac{h}{\omega^{-1} - q(0) + q(\alpha) + g}.$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе получены следующие научные результаты.

1. В первой главе для решения векторного уравнения пантографа

$$\dot{x}(t) - A\,x(\mu t) = b(\mu t)$$

(и его обобщения $\dot{x}(t) - A(\mu t) * x(\mu t) = b(\mu t)$ ) построена функциональная алгебра со специальным умножением $*$, в терминах которой получено представление общего решения уравнения:

$$x(t) = X(t) * \Big\{ X^{-1}(0)\,x_0 + \mu^{-1} \int_0^{\mu t} X^{-1}(s) * b(s)\,ds \Big\}.$$

2. Во второй главе для решения уравнения со степенным отклонением аргумента $\dot{x}(t) - a\,x(\mu t^q) = b(t)$ построена функциональная алгебра со специальным умножением $*$, в терминах которой получено представление общего решения уравнения:

$$x(t) \doteq C(t,0)\,w + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\Big( C(t,\tau) * \int_0^s b(\xi)\,d\xi \Big)\Big|_{s=\tau} d\tau.$$

Доказаны тождества:

$$C(s,s) \equiv 1, \qquad C(t,s) * C(s,\tau) \equiv C(t,\tau), \qquad \frac{\partial}{\partial t} C(t,\tau) \equiv a\,C(\mu t^q, \mu \tau^q).$$

3. В третьей главе для решения обобщенного уравнения пантографа

$$x(t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \int_\alpha^t x(F_i(\cdot))\,dq_i = f(t)$$

(и его обобщения $x(t) - \displaystyle\int_\alpha^t (dQ * x) = f(t)$ ) построена алгебраическая система, состоящая из функциональной алгебры со специальным умножением $*$ и двух бинарных интегральных отношений $u{*}dv$ и $du{*}v$ между элементами алгебры. В терминах данной алгебраической системы получено представление общего решения уравнения:

$$x(t) = C(t,\alpha) * f(\alpha) + \int_\alpha^t \big( C(t,s) * df(s) \big).$$

Получено представление общего решения сопряженного уравнения:

$$y(\tau) = g(\alpha) * C(\alpha,\tau) + \int_\alpha^\tau \big( dg(s) * C(s,\tau) \big).$$

Доказаны тождества:

$$C(s,s)\equiv 1,\qquad C(t,s)*C(s,\tau)\equiv C(t,\tau),\qquad C(t,\tau)-\int_\tau^t \big(dQ(s)*C(s,\tau)\big)\equiv 1.$$

При некоторых дополнительных условиях справедливо тождество

$$C(t,\tau)-\int_\tau^t \big(C(t,s)*dQ(s)\big)\equiv 1.$$

4. В четвертой главе построена алгебраическая система, состоящая из алгебры прерывистых функций с присоединенным умножением $\circ$ и бинарного интегрального отношения $x\circ dy$ между элементами алгебры. Бинарное отношение порождает специальный класс присоединенных обобщенных функций, в терминах которых сформулирована постановка импульсной задачи и исследованы вопросы ее разрешимости. Для линейной импульсной системы с постоянными коэффициентами $\dot x(t)-A\,\dot Q(t)x(t)=\dot y(t)$, заданной в терминах присоединенных обобщенных функций, получено представление общего решения:

$$x(t)=e^{AQ^c(t)}\Big[\,h(t)+\int_\alpha^t e^{-AQ^c(\cdot)}\,dy^c\,\Big],$$

где $h$ — вектор-функция скачков специального вида. В частности,

$$(\,\overset{\circ}{x},\varphi)\equiv(x,\varphi)\qquad\Longleftrightarrow\qquad x(t)=h(t)\,e^t.$$

5. В пятой главе для постановки и решения импульсной задачи построена альтернативная алгебраическая система, состоящая из алгебры прерывистых функций и бинарного квазиинтегрального отношения $x\Delta y$ между элементами алгебры. Для линейной системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами $x(t)-\lambda A\int_\alpha^t x\Delta Q=y(t)$ получено представление решения в форме Коши. При дополнительных условиях справедливо:

$$x(t)=C(t,\alpha)\,y(\alpha)+\int_\alpha^t C(t,s)\Delta^* y(s).$$

(Отношение $x\Delta^*y$ называется двойственным к отношению $x\Delta y$.) Доказаны тождества:

$$C(s,s)\equiv E,\qquad C(t,s)\,C(s,\tau)\equiv C(t,\tau),$$

$$C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(s,\tau)\,\Delta Q(s)\equiv E,\qquad C(t,\tau)-\lambda A\int_\tau^t C(t,s)\,\Delta^* Q(s)\equiv E.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. Об одном обобщенном уравнении пантографа // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 4 (31). С. 5–10.

[2] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

[3] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: ИКИ, 2002. 384 с.

[4] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 9. С. 1542–1552.

[5] Амбарцумян В.А. К теории флуктуаций яркости в Млечном пути // Доклады АН СССР. 1944. Т. 44. С. 223–226.

[6] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 312 с.

[7] Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[8] Быков Я.В., Быкова Л.Я., Шевцов Е.И. Достаточные условия осцилляторности решений нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 9. С. 1555–1560.

[9] Гребенщиков Б.Г. О почти периодических решениях одной нестационарной системы с линейным запаздыванием // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 3. С. 531–537.

[10] Гусаренко С.А., Домошницкий А.И. Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 12. С. 2090–2103.

[11] Дерр В.Я. Об одном обобщении интеграла Римана–Стилтьеса // Изв. ИМИ УдГУ. 1997. № 3 (11). С. 3–29.

[12] Дерфель Г.А., Молчанов С.А. К задаче Т. Като об ограниченных решениях дифференциально-функциональных уравнений // Функц. анализ и его прил. 1990. Т. 24. № 1. С. 77–79.

[13] Долгий Ю.Ф. Точные решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 124–135.

[14] Евлампиев Н.П., Сидоров А.М., Филиппов И.Е. Об одном обобщении уравнения Амбарцумяна // Учен. зап. Казан. ун-та. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156. № 4. С. 25–30.

[15] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.

[16] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[17] Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 97–104.

[18] Курцвейль Я. Об обобщенных обыкновенных дифференциальных уравнениях, обладающих разрывными решениями // ПММ. 1958. Т. 22. № 1. С. 27–45.

[19] Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные моделирующие поводыри в системах с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 182–195.

[20] Максимов В.И. Об одном алгоритме реконструкции входного воздействия в линейной системе с последействием // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 180–192.

[21] Максимов В.П. Некоторые вопросы теории управления функционально-дифференциальными системами // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 112–119.

[22] Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I // Изв. вузов. Матем. 2013. № 6. С. 25–36.

[23] Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П. О решении на полуоси дифференциально-Q-разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. 1991. № 4. С. 44–47.

[24] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.,Л.: Гостехиздат, 1951. 256 с.

[25] Пешков Д.С. Родионов В.И. О линейных импульсных системах // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. 2006. № 1. С. 95–106.

[26] Пименов В.Г., Паначев М.А. Одношаговые численные методы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 187–197.

[27] Родионов В.И. О пространстве регулярно гладких функций // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 1. С. 87–98. Zbl 1299.46033

[28] Россовский Л.Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // СМФН. 2014. № 54. С. 3–138.

[29] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища шк., 1987. 288 с.

[30] Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 226–233.

[31] Симонов П.М. Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 184–192.

[32] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

[33] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[34] Черепенников В.Б. Сингулярные аналитические решения некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 1. С. 197–210.

[35] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[36] Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. N.Y.: Springer, 2012. 520 p.

[37] Agarwal R.P., Bohner M., Li W.-T. Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Vol. 267. N.Y.: Marcel Dekker, 2004. 376 p.

[38] Agarwal R.P., Karakoc F. A survey on oscillation of impulsive delay differential equations // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 60. № 6. P. 1648–1685.

[39] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary Mathematics and Its Applications. Vol. 2. N.Y.: Hindawi Publishing Co., 2006. 366 p.

[40] Bereketoglu H., Karakoc F. Asymptotic constancy for a system of impulsive pantograph equations // Acta Math. Hung. 2015. Vol. 145. № 1. P. 68–79.

[41] Berezansky L., Braverman E. Oscillation of equations with an infinite distributed delay // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 60. № 9. P. 2583–2593.

[42] Berezansky L., Braverman E. New stability conditions for linear differential equations with several delays // Abstr. Appl. Anal. 2011. Art. ID 178568. 19 p.

[43] Bohner M., Peterson A. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Boston: Birkhauser, 2001. 358 p.

[44] Carr J., Dyson J. The matrix functional differential equation $y'(x) = Ay(\lambda x) + By(x)$ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A 75. 1976. № 1. P. 5–22.

[45] Cermak J. On matrix differential equations with several unbounded delays // European J. Appl. Math. 2006. Vol. 17. № 4. P. 417–433.

[46] Chatzarakis G., Diblik J., Stavroulakis I. Explicit integral criteria for the existence of positive solutions of first order linear delay equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016. № 45. P. 1–23.

[47] Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional differential equations: advances and applications. Pure and Applied Mathematics. A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. N.J.: Wiley, 2016. 343 p.

[48] de Bruijn N.G. The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta} F(x-1)$. I, II // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56. 1953. Vol. 15. P. 449–464.

[49] Derfel G., Iserles A. The pantograph equation in the complex plane // J. Math. Anal. Appl. 1997. Vol. 213. № 1. P. 117–132.

[50] Derfel G., Vogl F. On the asymptotics of solutions of a class of linear functional-differential equations // European J. Appl. Math. 1996. Vol. 7. № 5. P. 511–518.

[51] Fan Z., Song M., Liu M. The $\alpha$th moment stability for the stochastic pantograph equation // Comput. Appl. Math. 2009. Vol. 233. № 2. P. 109–120.

[52] Fox L., Meyers D.F., Ockendon J.R., Tayler A.B. On a functional differential equation // J. Inst. Math. Appl. 1971. Vol. 8. № 3. P. 271–307.

[53] Gil' M.I. Stability of neutral functional differential equations. Atlantis Studies in Differential Equations. Vol. 3. Paris: Atlantis Press, 2014. 304 p.

[54] Guan K., Wang Q., He X. Oscillation of a pantograph differential equation with impulsive perturbations // Appl. Math. Comput. 2012. Vol. 219. № 6. P. 3147–3153.

[55] Heard M. A family of solutions of the IVP for the equation $x'(t) = ax(\lambda t)$, $\lambda > 1$ // Aequationes Math. 1973. Vol. 9. P. 273–280.

[56] Heard M.L. Asymptotic behavior of solutions of the functional differential equation $x'(t) = ax(t)+bx(t^{\alpha})$, $\alpha > 1$ // J. Math. Anal. Appl. 1973. Vol. 44. P. 745–757.

[57] Hilger S. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus // Result. Math. 1990. Vol. 18. № 1–2. P. 18–56.

[58] Honig C.S. Volterra Stieltjes-integral equations. Mathematics Studies. Vol. 16. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1975. 157 p.

[59] Iserles A. On the generalized pantograph functional-differential equation // European J. Appl. Math. 1993. Vol. 4. № 1. P. 1–38.

[60] Iserles A., Liu Y. On pantograph integro-differential equations // J. Integral Equations Appl. 1994. Vol. 6. № 2. P. 213–237.

[61] Kato T., McLeod J.B. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 77. № 6. P. 891–937.

[62] Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications. Vol. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 648 p.

[63] Kundrat P. The asymptotic properties of solutions of linear delay differential equations // Math. Slovaca. 2006. Vol. 56. № 3. P. 349–360.

[64] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulsive differential equations. Series in Modern Applied Mathematics. Vol. 6. Singapore: World Scientific, 1989. 273 p.

[65] Lakshmikantham V., Leela S., Drici Z., McRae F.A. Theory of causal differential equations. Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science. Vol. 5. N.J.: World Scientific; Paris: Atlantis Press, 2009. 208 p.

[66] Langley J.K. A certain functional-differential equation // J. Math. Anal. Appl. 2000. Vol. 244. № 2. P. 564–567.

[67] Lehninger H., Liu Y. The functional-differential equation $y'(t) = Ay(t) + By(qt) + Cy'(qt) + f(t)$ // European J. Appl. Math. 1998. Vol. 9. № 1. P. 81–91.

[68] Lim E.-B. Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation $x'(t) = ax(\lambda t) + bx(t) + f(t),\ 0 < \lambda < 1$ // SIAM J. Math. Anal. 1978. Vol. 9. № 5. P. 915–920.

[69] Liu Y. On some conjectures by Morris et al. about zeros of an entire function // J. Math. Anal. Appl. 1998. Vol. 226. № 1. P. 1–5.

[70] Mahler K. On a special functional equation // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15. P. 115–123.

[71] Marshall J.C., van-Brunt B., Wake G.C. A natural boundary for solutions to the second order pantograph equation // J. Math. Anal. Appl. 2004. Vol. 299. № 2. P. 314–321.

[72] Ockendon J.R., Tayler A.B. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1971. Vol. 322. P. 447–468.

[73] Pandolfi L. Some observations on the asymptotic behavior of the solutions of the equation $\dot{x} = A(t)\,x(\lambda t) + B(t)\,x(t),\ \lambda > 0$ // J. Math. Anal. Appl. 1979. Vol. 67. № 2. P. 483–489.

[74] Perestyuk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities. De Gruyter Studies in Mathematics. Vol. 40. Berlin: de Gruyter, 2011. 307 p.

[75] Sabatulina T., Malygina V. On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2014. № 61. P. 1–16.

[76] Skubachevskii A.L. Elliptic functional differential equations and applications. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 91. Basel: Birkhauser Verlag, 1997. 293 p.

[77] Terjeki J. Representation of the solutions to linear pantograph equations // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. Vol. 60. № 3–4. P. 705–713.

[78] Tvrdy M. Regulated functions and the Perron–Stieltjes integral // Casopis pest. mat. 1989. № 114. P. 187–209.

[79] van Brunt B., Kim H.O., Derfel G. Holomorphic solutions to functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. 2010. Vol. 368. № 1. P. 350–357.

[80] Yu Z. Almost surely asymptotic stability of exact and numerical solutions for neutral stochastic pantograph equations // Abstr. Appl. Anal. 2011. Art. ID 143079. 14 p.

[81] Zhang Ch. An asymptotic formula for the zeros of the deformed exponential function // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 441. № 2. P. 565–573.

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА

Публикации в ведущих научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК:

[82] Родионов В.И. Аналитическое решение линейного функционально-дифференциального уравнения с линейным отклонением аргумента // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 616–626.
MR997792, Zbl 0701.34076, WoS A1989CW20100009

[83] Родионов В.И. Алгебры, порожденные линейными дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом // Вестник Удмуртского университета. 1993. Вып. 1. С. 72–88. Zbl 0855.34077

[84] Родионов В.И. Представление решений уравнений с отклоняющимся аргументом // Известия отдела математики и информатики УдГУ. 1993. Вып. 2. С. 25–83. Zbl 0856.34073

[85] Родионов В.И. Функция Коши функционально-дифференциального уравнения // Вестник Удмуртского университета. 1994. Вып. 2. С. 3–28. Zbl 0855.34078

[86] Родионов В.И. Полугрупповые интегральные уравнения. Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 1995. 124 с. Zbl 0847.45009

[87] Родионов В.И. Аналог функции Коши для обобщенного уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 10. С. 1352–1362. MR2397527, Zbl 1161.45001, WoS 000252563500006

[88] Родионов В. И. Присоединенный интеграл Римана-Стилтьеса // Изв. вузов. Матем. 2007. № 2. С. 79–82. MR2336890, Zbl 1138.26003

[89] Родионов В.И. Об одном семействе подпространств пространства прерывистых функций // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2009. Вып. 4. С. 7–24.

[90] Родионов В.И. К вопросу о разрешимости импульсных систем // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. Вып. 2. С. 3–18.

[91] Родионов В.И. Об одном семействе аналогов интеграла Перрона–Стилтьеса // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 3. С. 95–106. Zbl 1299.26017

[92] Родионов В.И. Аналог матрицы Коши для системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2012. Вып. 2. С. 44–62. Zbl 1299.26018

[93] Родионов В.И. Об аппроксимируемых решениях импульсных уравнений // Изв. ИМИ УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 114–115. Zbl 1305.26023

[94] Родионов В.И. Аналог функции Коши для обобщенного уравнения с несколькими отклонениями аргумента // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 6. С. 690–706. MR3208947, Zbl 1282.45002, WoS 000322388700002, Scopus 2-s2.0-84880841633

Публикации в других изданиях:

[95] Родионов В.И. О функции Коши функционально-дифференциальных уравнений // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика: сб. статей. МГУ. М., 1994. С. 77–80.

[96] Родионов В.И. Квазиинтегральные уравнения в пространстве прерывистых функций // Изв. ИМИ УдГУ. 1997. Вып. 2 (10). С. 3–51.

[97] Родионов В.И. Обобщенный интеграл Римана-Стилтьеса в пространстве функций ограниченной вариации с конечным числом односторонних разрывов // Вестник Удмуртского университета. 1999. Вып. 8. С. 65–72.

[98] Родионов В.И. Абстрактные дифференциальные уравнения в пространстве прерывистых функций // Изв. ИМИ УдГУ. 2002. Вып. 2 (25). С. 87–90.

[99] Родионов В.И. Присоединенный интеграл Римана-Стилтьеса в алгебре прерывистых функций // Изв. ИМИ УдГУ. 2005. Вып. 1 (31). С. 3–78.

[100] Родионов В.И. О сильных и слабых операторах в пространстве прерывистых функций // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. Вып. 1 (35). С. 3–32.

[101] Родионов В.И. Обобщенные функции, заданные через присоединенный интеграл // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. Вып. 2 (36). С. 99–102.

Доклады на конференциях и научных семинарах:

[102] Родионов В.И. Аналитическое решение одного класса функционально-дифференциальных уравнений // XII школа по теории операторов в функциональных пространствах: тез. докл. ТГПИ. Тамбов, 1987. С. 58.

[103] Родионов В.И. Алгебра формальных степенных рядов со специальным умножением в теории функционально-дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. III Уральской региональной конф. ППИ. Пермь, 1988. С. 240.

[104] Родионов В.И. Редукция функционально-дифференциального уравнения специального вида к обыкновенному дифференциальному уравнению // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. IV Уральской региональной конф. УАИ. Уфа, 1989. С. 97.

[105] Родионов В.И. Представление решений уравнений с отклоняющимся аргументом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 5. С. 908. Zbl 0843.00010

[106] Родионов В.И. Представление решений уравнений с несколькими отклонениями аргумента // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1932–1933.

[107] Родионов В.И. Квазиинтегралы // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 859. Zbl 1088.00504

[108] Родионов В.И. Системы квазиинтегральных уравнений с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 860. Zbl 1088.00504

[109] Родионов В.И. Об аналоге функции Коши для обобщенного уравнения с несколькими отклонениями аргумента // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тез. докл. IV междунар. конф. РУДН. М., 2013. С. 226–227.

**ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТИ ИЗДАНИЯ:**

Интерфейс электронного издания (в формате pdf) можно условно разделить на 2 части.

Левая навигационная часть (закладки) включает в себя содержание книги с возможностью перехода к тексту соответствующей главы по левому щелчку компьютерной мыши.

Центральная часть отображает содержание текущего раздела. В тексте могут использоваться ссылки, позволяющие более подробно раскрыть содержание некоторых понятий.

**МИНИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ:**

Celeron 1600 Mhz; 128 Мб RAM; Windows XP/7/8 и выше; 8x CDROM; разрешение экрана 1024×768 или выше; программа для просмотра pdf.

**СВЕДЕНИЯ О ЛИЦАХ, ОСУЩЕСТВЛЯВШИХ ТЕХНИЧЕСКУЮ ОБРАБОТКУ И ПОДГОТОВКУ МАТЕРИАЛОВ:**

Оформление электронного издания: Издательский центр «Удмуртский университет».

Подписано к использованию 20.04.2021 г.
Объем электронного издания 1,19 Мб на 1 CD.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4.
Тел. / факс: +7(3412)500-295 E-mail: editorial@udsu.ru