Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Д. Л. Федоров, Т. С. Тинюкова, О. В. Максимова

Криволинейные интегралы первого рода

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2021

УДК 517.2/.3(075.8)
ББК 22.161.12я73
Ф333

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: д. ф.-м. н., проф., ведущий научный сотрудник отдела теор. физики УдмФИЦ УрО РАН Ю. П. Чубурин

Федоров Д.Л., Тинюкова Т.С., Максимова О.В.

Ф333 Криволинейные интегралы первого рода: учеб.-метод. пособие/ Федоров Д.Л., Тинюкова Т.С., Максимова О.В. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. – 58 с.

ISBN 978-5-4312-0887-4

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению криволинейных интегралов первого рода, которое входит в раздел математического анализа «Интегральное исчисление функций нескольких переменных». Приведены краткие теоретические сведения и индивидуальные задания для самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики. Может быть использовано также в работе со студентами нематематического профиля.

УДК 517.2/.3(075.8)
ББК 22.161.12я73

ISBN 978-5-4312-0887-4

Содержание

Предисловие

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт работы со студентами Института математики, информационных технологий и физики. Оно является частью ряда пособий авторского коллектива кафедры, посвящённого различным разделам дисциплины «Математический анализ». Включенный в пособие материал, относится к разделу «Криволинейные интегралы» этой дисциплины. Изучается данный раздел на втором курсе обучения. Для успешного усвоения материала студент должен изучить раздел «Интегралы», знать методы интегрирования.

В результате освоения раздела формируются следующие компетенции:

> УК-1 — способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
>
> ОПК-1 — способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие содержит два раздела. Первый включает теоретические сведения и примеры решения задач. Во втором разделе приведены разбитые на варианты задания лабораторных работ, которые также можно использовать на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов. В каждом варианте предложено 16 заданий на вычисление криволинейного интеграла. Большинство из них предполагает аналитическое вычисление определённого интеграла, основанное на применении формулы Ньютона–Лейбница. В последних двух заданиях вычисления приводят к «неберущимся» интегралам, а потому их решение требует применения численных методов интегрирования. С этой целью авторы пособия рекомендуют использовать компьютерные технологии. В качестве примера в пособии приведено решение аналогичного задания в среде SageMath. Допустимо использовать и другие компьютерные пакеты или языки программирования. Решение задания в этом случае следует принимать в виде кода программы.

1. Теоретические сведения

Пусть AB — кривая на плоскости или в пространстве. Точка A — начало кривой, точка B — конец кривой. Пусть на множестве $\{P\}$ точек кривой AB задана функция $f(P)$, зависящая от двух или трёх переменных (в зависимости от размерности кривой). Построим разбиение кривой AB точками $\{P_i\}$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ так, чтобы $A = P_0$ и $B = P_n$ (см. рис. 1). Множество таких точек обозначим буквой T. Пусть $P_{i-1}P_i$ — частичная дуга кривой AB, соединяющая точки P_{i-1} и P_i. Обозначим через $s(P_{i-1}P_i)$ длину этой дуги. Тогда диаметром разбиения T будем называть величину $\Delta T = \max\limits_i s(P_{i-1}P_i)$. На каждой дуге $P_{i-1}P_i$ выберем произвольным образом точку Q_i, $i = 1, \ldots, n$. Составим сумму

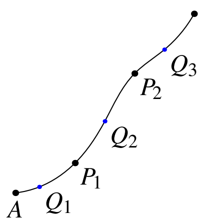


Рис. 1. Разбиение кривой AB

$$\sigma = \sigma(T, \{Q_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(Q_i) s(P_{i-1}P_i), \tag{1}$$

которую будем называть интегральной суммой, соответствующей заданному разбиению.

Определение 1. Криволинейным интегралом первого рода функции $f(P)$ по кривой AB называется предел $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \sigma$ при условии, что этот предел не зависит от разбиений T и от выбора точек Q_i. Обозначение: $\int\limits_{AB} f(P)\, ds$.

Перечислим основные свойства криволинейного интеграла.

1°. Если $f(P) \equiv 1$ на AB, то $\int\limits_{AB} 1\, ds = s(AB)$, где $s(AB)$ — длина кривой.

2°. Если начало и конец кривой поменять местами, то значение криволинейного интеграла не изменится, то есть $\int\limits_{AB} f\, ds = \int\limits_{BA} f\, ds$.

3°. Если точка C лежит на кривой AB, то $\int\limits_{AB} f\, ds = \int\limits_{AC} f\, ds + \int\limits_{CB} f\, ds$.

4°. $\int\limits_{AB} (f \pm g)\, ds = \int\limits_{AB} f\, ds \pm \int\limits_{AB} g\, ds.$

5°. $\int\limits_{AB} \lambda f\, ds = \lambda \int\limits_{AB} f\, ds$, где $\lambda = \mathrm{const}$.

6°. Если $f(P) \leqslant g(P)$ на AB, то $\int\limits_{AB} f\, ds \leqslant \int\limits_{AB} g\, ds$.

7°. Теорема о среднем. Если $m \leqslant f(P) \leqslant M$ и $g(P) \geqslant 0$ на AB, то можно подобрать такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leqslant \mu \leqslant M$, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_{AB} fg\, ds = \mu \int\limits_{AB} g\, ds.$$

8°. Оценка криволинейного интеграла: $\left|\int\limits_{AB} f\, ds\right| \leqslant \int\limits_{AB} |f|\, ds$.

9°. Если $|f(P)| \leqslant M$ на AB, то $\left|\int\limits_{AB} f\, ds\right| \leqslant Ms(AB)$.

Способ вычисления криволинейного интеграла существенно зависит от геометрического способа задания кривой. Перечислим далее эти способы.

1) Если AB — кривая в пространстве, заданная параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,\ b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, ds =$$
$$= \int\limits_a^b f\bigl(x(t), y(t), z(t)\bigr) \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2 + \bigl(z'(t)\bigr)^2}\, dt. \qquad (2)$$

2) Если AB — плоская кривая, то вместо формулы (2) используется формула

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f\bigl(x(t), y(t)\bigr) \sqrt{\bigl(x'(t)\bigr)^2 + \bigl(y'(t)\bigr)^2}\, dt. \qquad (3)$$

3) Если кривая AB задана как график функции $y=\varphi(x)$, где $x\in$ $\in[a,\ b]$, то формула (3) примет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds=\int\limits_a^b f\big(x,\varphi(x)\big)\sqrt{1+\big(\varphi'(x)\big)^2}\,dx. \tag{4}$$

4) Аналогично, если кривая AB задана как график функции $x=$ $=\psi(y)$, где $y\in[c,\ d]$, то формула (2) примет вид

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds=\int\limits_c^d f\big(\psi(y),y\big)\sqrt{1+\big(\psi'(y)\big)^2}\,dy. \tag{5}$$

5) Если кривая задана в полярных координатах равенством $r=r(\varphi)$, где $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta f\big(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi\big)\sqrt{r^2(\varphi)+\big(r'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \tag{6}$$

Пример 1. Пусть кривая AB является частью параболы $y=x^2$, где $0\leqslant x\leqslant 1$. Требуется вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} x\,ds$. Применяем для этого формулу (4):

$$\int\limits_{AB} x\,ds=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^1\sqrt{1+4x^2}\,d\big(1+4x^2\big)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\big(1+4x^2\big)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

Часто кривая Γ в пространстве задаётся как пересечение двух поверхностей $z=\Phi(x,y)$ и $z=\Psi(x,y)$. Для параметризации такой кривой нужно сначала параметризовать плоскую кривую γ, заданную уравнением $\Phi(x,y)=\Psi(x,y)$. Эта кривая γ представляет собой проекцию Γ на координатную плоскость xOy. Пусть $\gamma\colon x = x(t), y = y(t)$ и $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда кривая Γ может быть задана уравнениями

$$\begin{aligned} & x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = \Phi\big(x(t), y(t)\big) \\ \text{или} \quad & x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = \Psi\big(x(t), y(t)\big), \quad a \leqslant t \leqslant b. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, где Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x = y, \quad \text{причём } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0. \tag{7}$$

Запишем параметрические уравнения кривой Γ. Из равенств (7) следует равенство $2y^2 + z^2 = R^2$. Из аналитической геометрии известно, что это уравнение эллипса в плоскости yOz, его каноническое уравнение имеет вид $\frac{y^2}{R^2/2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$. Параметрические уравнения этого эллипса $y = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t$, $z = R\sin t$. С учётом условий $y \geqslant 0, z \geqslant 0$ получаем $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, сама кривая Γ может быть задана равенствами

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t, \quad y = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos t, \quad z = R\sin t, \quad t \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Переходим к вычислению криволинейного интеграла. Находим

$$\begin{aligned} & \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2} = \\ & \qquad = \sqrt{\frac{R^2}{2}\sin^2 t + \frac{R^2}{2}\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R. \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (2) получаем определённый интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{R^2}{2}\cos^2 t \cdot R\,dt = \frac{R^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{R^3}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^3}{8}.$$

Перечислим основные геометрические и физические задачи, решение которых сводится к вычислению криволинейного интеграла первого рода.

1. Длина кривой AB находится по формуле $s(AB) = \int\limits_{AB} ds$.

2. Пусть S — цилиндрическая поверхность с образующей параллельной оси Oz, а кривая Γ — направляющая цилиндра, то есть его проекция на координатную плоскость xOy. Тогда площадь этой поверхности, заключённая между поверхностями $z = 0$ и $z = \Phi(x, y) \geqslant 0$, может быть вычислена по формуле

$$S = \int\limits_{\Gamma} \Phi(x, y)\, ds.$$

3. Пусть на пространственной кривой AB распределена масса с плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда масса кривой находится по формуле $m = \int\limits_{AB} \mu(x, y, z)\, ds$.

4. Координаты центра масс (x_C, y_C, z_C) материальной кривой AB с плотностью $\mu(x, y, z)$ находятся по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} x\mu(x, y, z)\, ds, \quad y_C = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} y\mu(x, y, z)\, ds,$$
$$z_C = \frac{1}{m}\int\limits_{AB} z\mu(x, y, z)\, ds.$$

5. Сила притяжения точечной единичной массы, расположенной в точке с координатами $(x_0; y_0; z_0)$, к кривой Γ с плотностью $\mu(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = G\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathbf{r}\mu\, ds}{r^3}, \quad \text{где } \mathbf{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), r = |\mathbf{r}|. \tag{8}$$

   Здесь G — гравитационная постоянная.

6. В динамике вращательного движения используется понятие момента инерции тела. В зависимости от оси вращения момент

инерции материальной кривой AB с плотностью $\mu(x, y, z)$ вычисляется по одной из формул:

$$I_z = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right) \mu(x, y, z)\, ds, \text{ если ось вращения лежит на } Oz,$$

$$I_y = \int\limits_{AB} \left(z^2 + x^2\right) \mu(x, y, z)\, ds, \text{ если ось вращения лежит на } Oy,$$

$$I_x = \int\limits_{AB} \left(y^2 + z^2\right) \mu(x, y, z)\, ds, \text{ если ось вращения лежит на } Ox.$$

Пример 3. Вычислить координаты центра масс треугольного контура с вершинами в точках $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ 0)$, $C(0;\ 2)$ (см. рис. 2), если плотность материала, из которого изготовлен контур, задана выражением $\mu = y + 1$. Для вычисления нам понадобятся уравнения сторон треугольника. Уравнение стороны AB имеет вид $y = 0$, а стороны AC и BC могут быть заданы уравнениями $y = 2x + 2$ и $y = -2x + 2$. Сначала находим массу треугольника:

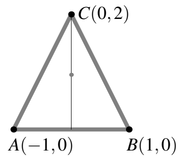


Рис. 2. Треугольный контур ABC.

$$m = \int\limits_{ABC} (y+1)\, ds = \int\limits_{AB} (y+1)\, ds + \int\limits_{AC} (y+1)\, ds + \int\limits_{BC} (y+1)\, ds =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx + \int\limits_{-1}^{0} (2x + 2 + 1)\sqrt{1+4}\, dx + \int\limits_{0}^{1} (-2x + 2 + 1)\sqrt{1+4}\, dx =$$

$$= 2 + \sqrt{5}\left(x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{0} + \sqrt{5}\left(-x^2 + 3x\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= 2 + \sqrt{5}(-1+3) + \sqrt{5}(-1+3) = 2 + 4\sqrt{5}.$$

Из того факта, что треугольник симметричен относительно оси Oy, а его плотность не зависит от переменной x, можно установить, что центр масс треугольника должен лежать на его оси симметрии, то есть на оси Oy. Поэтому абсцисса центра масс $x_C = 0$. Непосредственное вычисление интеграла приведёт к тому же значению x_C. Остаётся вычислить ординату центра масс:

$$
\begin{aligned}
my_C = \int\limits_{ABC} y(y+1)\,ds = \\
&= \int\limits_{AB} (y^2+y)\,ds + \int\limits_{AC} (y^2+y)\,ds + \int\limits_{BC} (y^2+y)\,ds = \\
&= \int\limits_{-1}^{1} 0\,dx + \int\limits_{-1}^{0} \big((2x+2)^2 + 2x + 2\big)\sqrt{1+4}\,dx + \\
&\qquad + \int\limits_{0}^{1} \big((-2x+2)^2 - 2x + 2\big)\sqrt{1+4}\,dx = \\
&= \sqrt{5}\int\limits_{-1}^{0} \big(4x^2+10x+6\big)\,dx + \sqrt{5}\int\limits_{0}^{1} \big(4x^2-10x+6\big)\,dx = \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{4}{3}x^3 + 5x^2 + 6x\right)\bigg|_{-1}^{0} + \sqrt{5}\left(\frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + 6x\right)\bigg|_{0}^{1} = \\
&= \sqrt{5}\left(\frac{4}{3} - 5 + 6\right) + \sqrt{5}\left(\frac{4}{3} - 5 + 6\right) = \frac{14}{3}\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $y_C = \frac{\frac{14}{3}\sqrt{5}}{2+4\sqrt{5}} \approx 0{,}9535$.

Пример 4. Материальная кривая Γ на плоскости представляет собой отсечённую прямой $y = x$ часть кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = (t^2+t+5)\ln\frac{t}{5}$, $y = (11-4t)\ln\frac{t}{5}$. На Γ распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}8x^2 + 0{,}5y^2$. Найти длину кривой, массу и координаты её центра масс.

Определим границы параметра t кривой Γ. Поскольку её концы лежат на прямой $y = x$, для этого нужно решить уравнение

$$(t^2+t+5)\ln\frac{t}{5} = (11-4t)\ln\frac{t}{5}.$$

Его корни $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. Тогда длина кривой определяется интегралом

$$\int_1^5 \sqrt{\left((2t+1)\ln\frac{t}{5} + t + 1 + \frac{5}{t}\right)^2 + \left(-4\ln\frac{t}{5} - 4 + \frac{11}{t}\right)^2}\,dt. \qquad (9)$$

Получившееся выражение относится к разряду «неберущихся» интегралов, поэтому найти его значение аналитически при помощи формулы Ньютона–Лейбница не представляется возможным. Вычислим интеграл (9) приближённо, используя численные методы интегрирования, реализованные в компьютерном пакете SageMath.[1] Этот пакет имеет богатые возможности аналитических преобразований, численного моделирования, построения графических изображений и может служить хорошей альтернативой популярному коммерческому пакету Maple. Пакет SageMath имеет свой язык, близкий к широко распространённому в научной среде языку программирования Python. На странице 13 приведён текст программы для решения поставленной задачи. Также приведены результаты расчётов и изображение данной кривой. В программе применяется процедура `diff` для символического дифференцирования функций $x(t)$ и $y(t)$. Вычисление интегралов производится при помощи встроенной процедуры `numerical_integral`. Результаты выводятся с тремя знаками после запятой, хотя вычисления производятся с более высокой точностью. Для построения кривой предназначена процедура `parametric_plot`.

Пример 5. Пусть кривая Γ образована пересечением цилиндра $7x^2 + {}$ $+2xy+7y^2 = 1$ с плоскостью $z = 3x+2y+2$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2$. Найти силу, с которой эта кривая притягивает единичную массу, расположенную в точке $(1; 1; 0)$.

Выполним это задание, вычисляя интегралы приближённо с помощью пакета SageMath. Сначала приведём квадратичную форму $7x^2 + 2xy + 7y^2$ к каноническому виду. Применим для этого методы линейной алгебры. Выпишем матрицу квадратичной формы, её

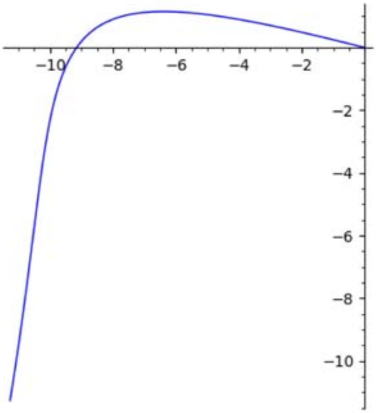
[1] Данный пакет распространяется свободно под лицензией GPL. Установочный файл может быть скачан с сайта sagemath.org.

Решение примера 4

In [2]:
```
x(t) = (t^2 + t + 5) * log(t/5)
y(t) = (11 - 4*t) * log(t/5)
α = 1; β = 5 # границы изменения параметра t
s(t) = sqrt(diff(x(t), t)^2 + diff(y(t), t)^2) # производная длины
μ(t) = .8*x(t)^2 + .5*y(t)^2 # плотность кривой
L = numerical_integral(s(t), α, β)[0] # длина
M = numerical_integral(μ(t)*s(t), α, β)[0] # масса
xC = numerical_integral(x(t)*μ(t)*s(t), α, β)[0]/M # абсцисса центра масс
yC = numerical_integral(y(t)*μ(t)*s(t), α, β)[0]/M # ордината центра масс
print("Длина кривой L = %.3f" % L)
print("Масса кривой M = %.3f" % M)
print("Центр масс в точке (%.3f, %.3f)" % (xC, yC))
parametric_plot((x(t), y(t)), (t, α, β))
```

```
Длина кривой L = 21.157
Масса кривой M = 1475.387
Центр масс в точке (-9.999, -5.261)
```

Out[2]:



собственные значения и собственные векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = 6, \qquad u = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что в основании цилиндра лежит эллипс, каноническое уравнение которого в подходящей системе координат имеет вид $8x_1^2 + 6y_1^2 = 1$, причём новые координаты x_1, y_1 связаны со старыми координатами равенством

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ux_1 + vy_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда параметрические уравнения эллипса в приведённых координатах имеют вид $x_1 = \frac{\cos t}{\sqrt{8}}$, $y_1 = \frac{\sin t}{\sqrt{6}}$. Отсюда выводим параметрические уравнения кривой Γ

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos t}{4} + \frac{\sin t}{6}\sqrt{3}, \\ y(t) &= \frac{\cos t}{4} - \frac{\sin t}{6}\sqrt{3}, \\ z(t) &= \frac{5\cos t}{4} + \frac{\sin t}{6}\sqrt{3} + 2, \quad t \in [0;\ 2\pi]. \end{aligned}$$

Тогда по формуле (8), полагая для простоты $G = 1$, определяем проекции силы притяжения точки на координатные оси:

$$\begin{aligned} F_x &= \int\limits_{\Gamma} \frac{(x-1)\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\,ds}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \\ F_y &= \int\limits_{\Gamma} \frac{(y-1)\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\,ds}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \\ F_z &= \int\limits_{\Gamma} \frac{z\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\,ds}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}. \end{aligned}$$

По формуле (2) приводим эти криволинейные интегралы к определённым интегралам

$$\begin{aligned} F_x &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{(x-1)\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \\ F_y &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{(y-1)\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}, \\ F_z &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{z\big(0{,}3x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}8z^2\big)\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt}{\big((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2\big)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Далее приведён текст программы для решения и ответ. Смысл используемых команд должен быть ясен из приведённых комментариев.

Решение примера 5

In [12]:
```
import sympy
A = Matrix([[7, 1], [1, 7]]) # Матрица квадратичной формы эллипса
V = A.eigenvectors_left() # Определение собственных значений и собственных векторов м
атрицы
λ1 = V[0][0]; λ2 = V[1][0] # Выделение собственных значений
u = V[0][1][0]; v = V[1][1][0] # Выделение собственных векторов
u = u / u.norm(); v = v / v.norm() # Нормированные собственные векторы
print("λ1=", λ1, "λ2=", λ2)
print("u=", u, "v=", v)
x1(t) = cos(t)/sqrt(λ1); y1(t) = sin(t)/sqrt(λ2) # Параметризация эллипса в приведённ
ых координатах
x(t) = sympy.powsimp(u[0] * x1(t) + v[0] * y1(t)) # Параметризация эллипса в первонач
альной системе координат
y(t) = sympy.powsimp(u[1] * x1(t) + v[1] * y1(t))
print("x=", x(t))
print("y=", y(t))
z(t) = 3 * x(t) + 2 * y(t) + 2
print("z=", z(t))
μ(t) = .3 * x(t)^2 + .4 * y(t)^2 + 1.8 * z(t)^2 # Плотность кривой
s(t) = sqrt(diff(x(t), t)^2 + diff(y(t), t)^2 + diff(z(t), t)^2) # Производная длины
r(t) = sqrt(x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2) # Расстояние до точечной массы
Fx = numerical_integral(x(t) * μ(t) * s(t) / r(t)^3, 0, 2 * π)[0]
Fy = numerical_integral(y(t) * μ(t) * s(t) / r(t)^3, 0, 2 * π)[0]
Fz = numerical_integral(z(t) * μ(t) * s(t) / r(t)^3, 0, 2 * π)[0]
print("F = (%.3f, %.3f, %.3f)" % (Fx, Fy, Fz))
```

```
λ1= 8 λ2= 6
u= (1/2*sqrt(2), 1/2*sqrt(2)) v= (1/2*sqrt(2), -1/2*sqrt(2))
x= 1/6*sqrt(3)*sin(t) + 1/4*cos(t)
y= -1/6*sqrt(3)*sin(t) + 1/4*cos(t)
z= 1/6*sqrt(3)*sin(t) + 5/4*cos(t) + 2
F = (-0.412, -0.248, 9.733)
```

2. Задания для индивидуальной работы

Вариант 1

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (2x-y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-1;0)$ и $(1;1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{x-1}{y-x}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;0)$ и $(3;1)$.

3. $\int\limits_\Gamma (x+3y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1;1)$, $N(0;1)$, $P(1;0)$.

4. $\int\limits_\Gamma (y-x)\,ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$, $(1;-1)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=x^2+2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_\Gamma (x+y^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=25$, $y\leqslant 0$, $x\geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma xy^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-x$.

8. $\int\limits_\Gamma (x^2-3y)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=4\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_\Gamma x\,ds$, Γ — эвольвента окружности $x(t)=\cos t+t\sin t$, $y(t)=$ $=\sin t-t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant \pi/2$.

10. $\int\limits_\Gamma (-3x-y-5)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-3x-y-\frac{3}{2}$.

11. $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4x^2+48x+145}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(-6;2)$, проходящей через точку $B(-7;3)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_L \frac{ds}{x^2+4}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-4x+2y+2z+5=0$, $-3x-y-6z+2=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=2\sin\varphi-3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-x+\frac{3y}{2}+10$.

14. Найдите массу, распределенную по цепной линии Γ: $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ с линейной плотностью $\mu = \frac{1}{y^2}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+5)\,e^{\frac{t}{2}}$, $y = (4t+26)\,e^{\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y = 2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}3x^2 + 0{,}8y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{3x^2}{2} - xy + \frac{3y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = x - 3y - 5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}3x^2 + 0{,}7y^2 + 0{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 2

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-1;1)$ и $(1;-1)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{(x-y)^2}{y}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;2)$ и $(2;1)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(2x-y)\,ds$, Γ — треугольник MNP, где $M(0;2)$, $N(0;-1)$, $P(1;0)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y-x)\,ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(-1;0)$, $(0;2)$, $(1;0)$, $(0;-2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = -x^2+1$ с началом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$ и концом в точке с абсциссой 0.

6. $\int\limits_{\Gamma}(x^2+2y)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(x+2y^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(2x+3y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 4\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} x\,ds$, Γ — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, график которой находится в первой координатной четверти.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(5x + 6y + \frac{61}{2}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 - 10x - y^2 - 12y + \frac{39}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2+16x+17}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = x^2+px+q$, проходящей через точки $A(4;34)$ и $B(-2;-2)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{y^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x - z - 6 = 0$, $-4x + 5y - 5z - 4 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = \sin\varphi - 5\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -3x - \frac{3y}{5} + 19$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = e^x$ по кривой Γ: $x(t) = \ln(1 + t^2)$, $y(t) = 2\,\mathrm{arctg}\,t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 4t - 5)\,e^{-t}$, $y = (7t + 7)\,e^{-t}$, отсечённый прямой $y = -x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}5x^2 + 0{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{10x^2}{3} - \frac{2\sqrt{5}xy}{3} + \frac{14y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = -3x + 4y + 7$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}6x^2 + 0{,}2y^2 + 0{,}9z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 3

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (x - 2y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-1;1)$ и $(1;0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x+1}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;4)$ и $(2;2)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} \left(\dfrac{x}{2} - y\right) ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1;1)$, $N(-1;1)$, $P(0;0)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (2y - x)\, ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(0;0)$, $(-1;1)$, $(-2;0)$, $(-1;-1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = 2x^2 - 1$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (x+2)^2 y\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 16$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} y(y - x^2)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = y$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (y + x^2)\, ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 49\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} y\, ds$, Γ — арка циклоиды $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} (z - 11)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = 6x + 2y - 9$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2 - 32x + 65}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(4;7)$, проходящей через точку $B(5;6)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{z^2+3}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-4x - 5y - 3z + 4 = 0$, $2x + 3y - 2z + 1 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = 2\sin\varphi + \cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -x - \frac{y}{2} + 4$.

14. Найдите массу, распределенную по кривой Γ, заданной в полярных координатах $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, с линейной плотностью $\mu = r$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - t - 2)\, e^{-\frac{t}{3}}$, $y = (6t - 30)\, e^{-\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = -3x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 2{,}1x^2 + 0{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Г образована пересечением цилиндра $4x^2 + 2xy + 4y^2 = 1$ и плоскости $z = 2x + 5y - 3$. На кривой Г распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}3x^2 + 1{,}5y^2 + 1{,}7z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Г притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 4

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Г (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (x+y)\,ds$, Г — отрезок с концами $(-1;2)$ и $(1;0)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y}{x-y}\,ds$, Г — отрезок с концами $(2;-1)$ и $(4;-3)$.

3. $\int\limits_\Gamma (2x-y)\,ds$, Г — ломаная $MNPM$, где $M(1;0)$, $N(2;1)$, $P(2;-1)$.

4. $\int\limits_\Gamma (y-x)\,ds$, Г — граница ромба с вершинами $(0;1)$, $(2;0)$, $(0;-1)$, $(-2;0)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Г — дуга параболы $y = -2x^2 + 3$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma xy^2\,ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 16$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (2y - x^2)\,ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = -2y$.

8. $\int\limits_\Gamma (x-2y)\,ds$, кривая Г задана в полярных координатах уравнением $r^2 = \sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \geqslant 0$.

9. $\int\limits_\Gamma y\,ds$, Г — развёртка окружности $x(t) = 2(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = 2(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_\Gamma \left(3x - 2y - \frac{13}{2}\right)\,ds$, Г — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = 3x - 2y + \frac{51}{4}$.

11. $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4x^2+16x+17}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = -x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(0;1)$ и $B(-1;4)$.

12. $\int\limits_L \frac{ds}{x^2+6}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x-5y+2z-5=0$, $5x-4y-4z-3=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=\sin\varphi+2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-2x+y+7$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по кривой $\Gamma\colon y^2=4x$, $0\leqslant x\leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu=|y|$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+2t-4)\,e^{-\frac{t}{4}}$, $y=4te^{-\frac{t}{4}}$, отсечённый прямой $y=-4x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=1{,}6x^2+0{,}7y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{13x^2}{3}+\frac{4\sqrt{2}xy}{3}+\frac{11y^2}{3}=1$ и плоскости $z=5x+3y-2$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu=0{,}5y^2+0{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 5

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (2x+y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;2)$ и $(1;0)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{(x+y)^2}{x+1}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;1)$ и $(3;4)$.

3. $\int\limits_\Gamma (x-4y)\,ds$, Γ — треугольник MNP, где $M(1;0)$, $N(-1;1)$, $P(0;-1)$.

4. $\int\limits_\Gamma (y+x)\,ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(1;0)$, $(2;2)$, $(3;0)$, $(2;-2)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=x^2-2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_\Gamma (y^2-2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4$, $y \leqslant 0$, $x \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma yx\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-y$.

8. $\int\limits_\Gamma (2x+3y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2=4\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi \geqslant 0$.

9. $\int\limits_\Gamma y\,ds$, Γ — дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=25$, график которой находится во второй координатной четверти.

10. $\int\limits_\Gamma (-x-3y+5)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x^2+2x-y^2+6y+27$.

11. $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4x^2-32x+65}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(4;6)$, проходящей через точку $B(2;10)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_L \frac{ds}{y^2+3}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $5x-5y-3z-4=0$, $-4x-4y+2z+4=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-\sin\varphi-2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1-2x$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по дуге гиперболы $\Gamma\colon x(t)=\operatorname{ch} t$, $y(t)=\operatorname{sh} t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu=\sqrt{e^{4t}+1}\operatorname{ch} t$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+3t+6)\,e^{\frac{t}{2}}$, $y=(6t+20)\,e^{\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y=2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=1{,}1x^2+0{,}9y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{7x^2}{2}-5xy+\frac{7y^2}{2}=1$ и плоскости $z=-x+5y+5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu=1{,}7x^2+0{,}6y^2+1{,}0z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 6

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(3x+y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;0)$ и $(2;2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{xy}{y-x}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(4;-2)$ и $(3;0)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(x+y+4)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(-1;0)$, $N(-1;2)$, $P(2;3)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y^2+x)\,ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-x^2+4$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}yx^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=16$, $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(y^2-1)^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=2y$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x^2-y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2=9\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi\geqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma}y\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t)=t-\sin t$, $y(t)=1-\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}(z-21)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-4x+2y+11$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-4x+2}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=x^2+px+q$, проходящей через точки $A(-7;59)$ и $B(-5;33)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{z^2+7}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-2x-3y-4z-1=0$, $2x-2y+5z+1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-6\sin\varphi-2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-2x+6y+51$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu=x^2$ по кривой Γ: $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x=(t^2+5t+5)\,e^{\frac{t}{3}}$, $y=(36t-21)\,e^{\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y=3x$. На

Г распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}7x^2 + 0{,}6y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Г, её массу и центр масс.

16. Кривая Г образована пересечением цилиндра $\frac{14x^2}{3} + \frac{2\sqrt{5}xy}{3} + \frac{10y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 5x - y + 1$. На кривой Г распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}2x^2 + 1{,}9y^2 + 0{,}2z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Г притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 7

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Г (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (x + y + 1)\, ds$, Г — отрезок с концами $(-1; 1)$ и $(2; 0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} (2x+y)\, ds$, Г — ломаная $MNPM$, где $M(0; 0)$, $N(1; 1)$, $P(0; 2)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (2y - x)\, ds$, Г — граница квадрата с вершинами $(1; 1)$, $(3; 1)$, $(3; -1)$, $(1; -1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x + y}{y + 1}\, ds$, Г — отрезок с концами $(0; 2)$ и $(1; 4)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Г — дуга параболы $y = 2x^2 - 3$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (y - x^2)\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} yx^2\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 8x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (xy + y)\, ds$, Г — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 36\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} y\, ds$, Г — развёртка окружности $x(t) = 5(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = 5(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{37}{2} - z\right)\, ds$, Г — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 + 6x - y^2 + 2y + 27$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2+24x+37}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(-3;-6)$, проходящей через точку $B(-1;-10)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{x^2+1}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $x-3y+z-2=0$, $-2x-4y+2z+1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = \sin\varphi + 2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-2x-4y+14$.

14. Найдите массу, распределенную по цепной линии Γ: $y = 4\operatorname{ch}\frac{x}{4}$, $0 \leqslant t \leqslant 4$ с линейной плотностью $\mu = e^{x/4}y^{-2}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+4t+3)\,e^t$, $y = (4t+12)\,e^t$, отсечённый прямой $y=x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}8x^2 + 1{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{9x^2}{2} + \sqrt{5}xy + \frac{5y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = 5x-6y+5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}6x^2 + 0{,}4y^2 + 1{,}1z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 8

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(2-x+y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;0)$ и $(1;3)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{yx}{x+1}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;4)$ и $(6;-2)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(x+2y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(1;2)$, $P(-2;2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y-x)\,ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(0;2)$, $(0;-2)$, $(2;0)$, $(-2;0)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = -2x^2 + 2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (1 - yx^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} xy^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -8x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (x - 3y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 4\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi \geqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,ds$, Γ — дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3} = 16$, график которой находится в первой и второй координатных четвертях.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(-3x + 4y - \frac{25}{2}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -3x + 4y + \frac{119}{4}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2+20x+26}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = -x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(-6;-2)$ и $B(-5;4)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{y^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-4y - z + 5 = 0$, $3x + y + 4z - 3 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -3\sin\varphi - 5\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 4x - \frac{12y}{5} + 38$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = e^y$ по кривой Γ: $x(t) = 2\operatorname{arcctg} t$, $y(t) = \ln(1 + t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 + t + 2)\,e^{\frac{t}{3}}$, $y = (6 - 6t)\,e^{\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = 3x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}8x^2 + 1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $3x^2 - 2\sqrt{5}xy + 7y^2 = 1$ и плоскости $z = 5x + 4y + 5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}0x^2 + 1{,}8y^2 + 1{,}8z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 9

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(3+x+y)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(2;1)$ и $(0;2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{y+2x}{x-y}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;1)$ и $(13;-12)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(x+2y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;-1)$, $N(2;0)$, $P(2;1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(3y-x)\,ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(2;0)$, $(4;1)$, $(2;2)$, $(0;1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=x^2+4$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}(y+x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4$, $x\geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}x^2y\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-4x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x-5y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2=49\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi\leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma}x^2\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t)=5(t-\sin t)$, $y(t)=5(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(6x+3y+\frac{45}{2}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x^2-12x-y^2-6y+\frac{55}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-40x+101}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(5;5)$, проходящей через точку $B(4;6)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{z^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x-6y-4z+5=0$, $-4x-2y+5z+4=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-2\sin\varphi-\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-5x-\frac{5y}{2}+17$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по кривой Г, заданной в полярных координатах $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, с линейной плотностью $\mu = 1/r$.

15. Пусть Г — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 3t - 3)\, e^{\frac{t}{3}}$, $y = (-18t - 15)\, e^{\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = 3x$. На Г распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}3x^2 + 1{,}9y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Г, её массу и центр масс.

16. Кривая Г образована пересечением цилиндра $\frac{37x^2}{6} - \frac{\sqrt{5}xy}{3} + \frac{41y^2}{6} = 1$ и плоскости $z = -x + 2y - 6$. На кривой Г распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}6x^2 + 0{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Г притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 10

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Г (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (x + y - 1)\, ds$, Г — отрезок с концами $(1; 2)$ и $(2; 0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x + y}{1 + x}\, ds$, Г — отрезок с концами $(1; 2)$ и $(2; -2)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (2x + y)\, ds$, Г — треугольник MNP с вершинами $M(0; 1)$, $N(0; -2)$, $P(-2; 0)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (3x + y^2)\, ds$, Г — граница ромба с вершинами $(0; 1)$, $(3; 0)$, $(0; -1)$, $(-3; 0)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Г — дуга параболы $y = -x^2 - 4$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} yx^3\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 25$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (x + y^2)\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 8y$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (x + 2y)\, ds$, кривая Г задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 36 \sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\,ds$, Γ — эвольвента окружности $x(t) = 3(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = (\sin t - t\cos t)$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(z-\frac{37}{4}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2+y^2$ и $z = x+\frac{35}{4}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-16x+17}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = x^2+px+q$, проходящей через точки $A(7;24)$ и $B(-3;24)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{x^2+7}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $3y+5z+2=0$, $2x-5y+5z+2=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = \sin\varphi - 3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -2x-\frac{2y}{3}+9$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по кривой $\Gamma\colon y^2 = 8x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ с линейной плотностью $\mu = |y|$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+2t+5)\,e^{-\frac{t}{4}}$, $y = -52e^{-\frac{t}{4}}$, отсечённый прямой $y = -4x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}6x^2 + 1{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{10x^2}{3}+\frac{4\sqrt{2}xy}{3}+\frac{8y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 2x-4y+11$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}6x^2+0{,}4y^2+1{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 11

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}\left(x+\dfrac{y}{2}\right)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(1;0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{x}{y+2x}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(2;1)$ и $(4;3)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(1;2)$, $P(-1;1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y+2)x\,ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;1)$, $(-2;1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=2x^2+1$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}(x^4+y)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=1$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(y-x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-8y$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(2x+3y)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=4\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma}(x-y)\,ds$, Γ — дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=9$, график которой находится в третьей координатной четверти.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{45}{4}-z\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x^2-8x-y^2-10y-\frac{37}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-16x+17}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(2;4)$, проходящей через точку $B(4;0)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{y^2+3}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-4x-5y+4z-4=0$, $2x+2y-5z-2=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-6\sin\varphi-5\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-3x-\frac{5y}{2}+43$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по дуге гиперболы $\Gamma\colon x(t)=\operatorname{ch}t$, $y(t)=\operatorname{sh}t$, $0\leqslant t\leqslant\ln 2$ с линейной плотностью $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{e^{4t}+1}}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x=$ $=(t^2-3t-4)\,e^{-\frac{t}{4}}$, $y=24e^{-\frac{t}{4}}$, отсечённый прямой $y=-4x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=2{,}6x^2+1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых

реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Г, её массу и центр масс.

16. Кривая Г образована пересечением цилиндра $\frac{17x^2}{3} - \frac{2\sqrt{2}xy}{3} + \frac{16y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = -6x + 3y - 5$. На кривой Г распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}4x^2 + 0{,}8y^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Г притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 12

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Г (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma \left(\dfrac{x}{2} + 1\right) ds$, Г — отрезок с концами $(0;0)$ и $(1;-2)$.

2. $\int\limits_\Gamma (x + 2y)\, ds$, Г — ломаная $MNPM$, где $M(1;0)$, $N(2;-1)$, $P(0;-2)$.

3. $\int\limits_\Gamma (y - 3x)\, ds$, Г — граница ромба с вершинами $(-1;0)$, $(-3;0)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$.

4. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y-1}{x-y+3}\, ds$, Г — отрезок с концами $(2;4)$ и $(1;2)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Г — дуга параболы $y = -2x^2 + 5$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma (3 - x^2 y)\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (y - x^2)\, ds$, Г — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4x$.

8. $\int\limits_\Gamma x(1 - y)\, ds$, кривая Г задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 25\sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \geqslant 0$.

9. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Г — арка циклоиды $x(t) = 4(t - \sin t)$, $y(t) = 4(1 - \cos t)$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_\Gamma (-x - 3y - 5)\, ds$, Г — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x - 3y + \frac{67}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2+24x+37}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = -x^2+px+$ $+q$, проходящей через точки $A(-4;12)$ и $B(-8;-12)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{z^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-2x - y + 2z - 1 = 0$, $-4x + 4z - 3 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = 5\sin\varphi + 3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu =$ $= y^2$ по кривой $\Gamma\colon x(t) = e^{2t}\cos t$, $y(t) = e^{2t}\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x =$ $= (t^2 + 4t + 6)\, e^{-\frac{t}{3}}$, $y = (-12t - 45)\, e^{-\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = -3x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{16x^2}{3} - \frac{4\sqrt{2}xy}{3} +$ $+ \frac{14y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 2x + y - 5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}8x^2 + 1{,}3y^2 + 1{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 13

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(2;0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x}{y}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(1;3)$ и $(7;9)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (1 - y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1;0)$, $N(-1;1)$, $P(-1;-1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (y + 2x)\, ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(0;0)$, $(2;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} x)\, ds$, Γ — дуга параболы $y = x^2 + 3$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 + x)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} yx^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 10x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2y)\, ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = \cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, Γ — развёртка окружности $x(t) = 4(\cos t + t \sin t)$, $y(t) = 4(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} (-2x + 4y + 10)\ ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 + 4x - y^2 - 8y + 62$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2 - 32x + 65}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(4; -2)$, проходящей через точку $B(2; 2)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{x^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $5x - 3y + 2z + 2 = 0$, $-5x - 3y - 2z - 6 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -3\sin\varphi + 4\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -x + \frac{4y}{3} + 12$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по цепной линии Γ: $y = 2\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ с линейной плотностью $\mu = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 3t - 4)\, e^t$, $y = (-5t - 4)\, e^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}65x^2 + 2{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{3x^2}{2} - xy + \frac{3y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = 5x - 3y - 5$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}7x^2 + 0{,}4y^2 + 0{,}7z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с с

точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 14

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(y-5)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;0)$ и $(-1;-2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{x}{y}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;2)$ и $(2;1)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(2x-3y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(2;1)$, $P(2;-1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y+x)\,ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(0;1)$, $(-2;1)$, $(-1;0)$, $(-1;2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-x^2-1$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}yx^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=25$, $x\geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(y+x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-4y$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(2x^2+y)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2=16\sin(2\varphi)$, $\sin\varphi\leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma}x^2\,ds$, Γ — дуга астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=4$, график которой находится в четвёртой координатной четверти.

10. $\int\limits_{\Gamma}(z-9)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-2x+4y-1$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2+8x+5}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=x^2+px+q$, проходящей через точки $A(-5;12)$ и $B(-6;21)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{y^2+5}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-3x-2y-6z-4=0$, $2x-4y-z+2=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-4\sin\varphi+4\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=2x+2y+23$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = e^{-x/2}$ по кривой Γ: $x(t) = \ln(1+t^2)$, $y(t) = 2\,\mathrm{arctg}\, t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 2t + 6)\, e^{\frac{t}{3}}$, $y = (18 - 15t)\, e^{\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = 3x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}8x^2 + 1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $4x^2 - 4\sqrt{2}xy + 6y^2 = 1$ и плоскости $z = -2x + 3y + 4$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}7x^2 + 1{,}3y^2 + 0{,}1z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 15

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (y - x)\; ds$, Γ — отрезок с концами $(0; -1)$ и $(2; 1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y}{x+1}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0; 1)$ и $(2; 5)$.

3. $\int\limits_\Gamma (2x + y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0; -1)$, $N(2; 0)$, $P(1; 1)$.

4. $\int\limits_\Gamma x\, ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(1; 0)$, $(1; 2)$, $(3; 1)$, $(-1; 1)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = 2x^2 - 2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma yx^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (xy^2 + y)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -10y$.

8. $\int\limits_\Gamma (2x + 3y)\, ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 4\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} y^2\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t)=2(t-\sin t)$, $y(t)=2(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

10. $\int\limits_{\Gamma}(33-z)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x^2-8x-y^2+8y+34$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-16x+17}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(2;-3)$, проходящей через точку $B(4;-7)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{z^2+6}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-5x-5y+4z+5=0$, $5x-3z-1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=\sin\varphi+5\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-4x-20y+123$.

14. Найдите массу, распределенную по кривой Γ, заданной в полярных координатах $r=\sqrt{\cos\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, с линейной плотностью $\mu=r^3\sin\varphi$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x=(t^2+4t+2)\,e^{\frac{t}{2}}$, $y=(22t-20)\,e^{\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y=2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=0{,}9x^2+1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{7x^2}{2}+3xy+\frac{7y^2}{2}=1$ и плоскости $z=2-5y$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu=0{,}4x^2+0{,}8y^2+0{,}3z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 16

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(y+4x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-1;0)$ и $(1;-2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y}{1+x}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-5;-9)$ и $(-2;-3)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(x-2y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;1)$, $N(1;-1)$, $P(-1;-1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(y-1)\,ds$, Γ — граница квадрата с вершинами $(-1;0)$, $(-1;2)$, $(0;1)$, $(-2;1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-2x^2-2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}(3x+y^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=9$, $y\geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} xy^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4y$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x+2y^2)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma}(x-1)\,ds$, Γ — эвольвента окружности $x(t)=\cos t+t\sin t$, $y(t)=\sin t-t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}(4y-8)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=4y$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-4x+2}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=-x^2+px+q$, проходящей через точки $A(2;2)$ и $B(0;4)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{x^2+5}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-6y-6z-4=0$, $-2x+3y-3z-1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=2\sin\varphi+\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=3x-6y+21$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по кривой $\Gamma\colon y^2=12x$, $0\leqslant x\leqslant 3$ с линейной плотностью $\mu=|yx|$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2-2t+4)\,e^{-\frac{t}{2}}$, $y=(8t-14)\,e^{-\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y=-2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=2{,}3x^2+1{,}7y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{11x^2}{3} - \frac{2\sqrt{2}xy}{3} + \frac{10y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 4x + 5y + 4$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}7x^2 + 0{,}5y^2 + 0{,}9z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 17

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (1 - y + x)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(2;2)$ и $(1;-1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y}{x-y}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0;1)$ и $(3;7)$.

3. $\int\limits_\Gamma (x + y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1;2)$, $N(-1;2)$, $P(0;-2)$.

4. $\int\limits_\Gamma (3 - x)\, ds$, Γ — граница ромба с вершинами $(1;1)$, $(-3;1)$, $(-1;0)$, $(-1;2)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = x^2 - 6$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_\Gamma xy^3\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (x - 2y^2)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -16y$.

8. $\int\limits_\Gamma y(x - y)\, ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 9\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_\Gamma x\, ds$, Γ — дуга графика функции $x(t) = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

10. $\int\limits_\Gamma (2x + 6y + 20)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 - 4x - y^2 - 12y - 12$.

11. $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4x^2+40x+101}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(-5;-1)$, проходящей через точку $B(-6;0)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{y^2+7}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-6x+y+4z+5=0$, $-3x-5y+z+1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=\sin\varphi-4\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-x+4y+21$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по дуге гиперболы $\Gamma\colon x(t)=\operatorname{ch} t$, $y(t)=\operatorname{sh} t$, $0\leqslant t\leqslant \ln 4$ с линейной плотностью $\mu=\dfrac{e^t\operatorname{ch} t}{\sqrt{e^{4t}+1}}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2-3t+3)\,e^{-\frac{t}{2}}$, $y=(4t-6)\,e^{-\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y=-2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=1{,}4x^2+0{,}7y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $4x^2-4\sqrt{2}xy+ 6y^2=1$ и плоскости $z=-x-4y+1$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu=0{,}5x^2+0{,}2y^2+1{,}4z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 18

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(2y+x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(2;2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma}\dfrac{y}{y-x}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;3)$ и $(7;15)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(1-y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(3;0)$, $P(2;1)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(3y-x)\,ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(0;0)$, $(1;2)$, $(-1;2)$, $(-2;0)$.

5. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-x^2+3$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} xy^2\,ds$, Г — дуга окружности $x^2+y^2=9$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\,ds$, Г — дуга окружности $x^2+y^2=-2x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (2x+4y)\,ds$, Г — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=16\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (y+2)\,ds$, Г — развёртка окружности $x(t)=2(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=2(\sin t-t\cos t)$, $\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(z-\frac{33}{4}\right)\,ds$, Г — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x+4y-\frac{1}{4}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2-16x+17}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=x^2+px+q$, проходящей через точки $A(-4;34)$ и $B(-3;23)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{z^2+3}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x-5=0$, $-x-y+4z=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-\sin\varphi+\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-5x-5y+15$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = xy$ по кривой Г: $x(t)=e^t\sin 2t$, $y(t)=e^t\cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$.

15. Пусть Г — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+5t-1)\,e^t$, $y=-5e^t$, отсечённый прямой $y=x$. На Г распределена масса с линейной плотностью $\mu=2{,}5x^2+0{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Г, её массу и центр масс.

16. Кривая Г образована пересечением цилиндра $\frac{17x^2}{3}+\frac{4\sqrt{2}xy}{3}+\frac{19y^2}{3}=1$ и плоскости $z=-3y-3$. На кривой Г распределена масса с плотностью $\mu=0{,}2x^2+0{,}7y^2+0{,}3z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Г притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 19

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (2y + x)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(-1; 1)$ и $(2; -2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x + y}{1 + x}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0; 1)$ и $(1; -1)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (1 - y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0; 0)$, $N(1; 1)$, $P(-1; 2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (3y - x)\, ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(2; 0)$, $(2; 2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = 2x^2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} yx^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 + x)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 10y$.

8. $\int\limits_{\Gamma} x(1 + y)\, ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 9 \sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} y\, ds$, Γ — дуга графика функции $x(t) = \frac{1}{25} \cos^3 t$, $y = \frac{1}{25} \sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{23}{2} - z\right)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 + 6x - y^2 - 2y + 13$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2 + 48x + 145}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(-6; -1)$, проходящей через точку $B(-4; -5)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{x^2 + 1}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-2x - 6y - 4z + 1 = 0$, $2x - 2y + 2z - 3 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -6 \sin\varphi - 2 \cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -x - \frac{y}{3} + 9$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по цепной линии Γ: $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu = \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+3t-3)\,e^t$, $y = te^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 2{,}8x^2 + 1{,}3y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{5x^2}{3} + \frac{4\sqrt{2}xy}{3} + \frac{7y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = -x - 2y + 2$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}3x^2 + 1{,}8y^2 + 1{,}4z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 20

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (2 + y + x)\; ds$, Γ — отрезок с концами $(-3;1)$ и $(1;-1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{ds}{x-y}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(4;0)$ и $(3;1)$.

3. $\int\limits_\Gamma (2x - y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(-1;1)$, $P(-2;-1)$.

4. $\int\limits_\Gamma y\,ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(1;0)$, $(3;1)$, $(0;1)$, $(-2;0)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = -2x^2 + 3$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma (y + x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 36$, $x \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma y(x + 2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 16x$.

8. $\int\limits_\Gamma (y - 3x)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 25\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_\Gamma x\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t) = 3(t - \sin t)$, $y(t) = 3(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

10. $\int\limits_{\Gamma} (x - 3y - 5)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = x - 3y + \frac{67}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2-12x+10}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = -x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(4;-2)$ и $B(1;4)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{y^2+4}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $x + 4y + 5z - 6 = 0$, $3x - 3y + 3z - 3 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -6\sin\varphi - 4\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -5x + \frac{15y}{2} + 91$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = e^{-y/2}$ по кривой Γ: $x(t) = 2\operatorname{arcctg} t$, $y(t) = \ln(1 + t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 + 3t + 4)\, e^t$, $y = (1 - t)\, e^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}8x^2 + 3y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{5x^2}{2} - 3xy + \frac{5y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = -4x + y + 4$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}1x^2 + 1{,}9y^2 + 1{,}0z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 21

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (y - x - 1)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(-1;-1)$ и $(3;1)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x}{y}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(2;4)$ и $(4;6)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;0)$, $N(2;1)$, $P(2;2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(x+5)\,ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(1;0)$, $(4;0)$, $(0;-1)$, $(3;-1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = x^2 + 6$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} y^2x^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x \leqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(y + x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -10x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x - 4y)\,ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 9\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma}(x^2 + y^2)^{3/2}\,ds$, Γ — эвольвента окружности $x(t) = 3(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = (\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(-4x + y + \frac{17}{2}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 + 8x - y^2 - 2y - \frac{1}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-48x+145}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(6;3)$, проходящей через точку $B(5;4)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{z^2+1}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-x + 4z - 6 = 0$, $x - y - 2z - 1 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -\sin\varphi + 3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 3x - 9y + 38$.

14. Найдите массу, распределенную по кривой Γ, заданной в полярных координатах $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, с линейной плотностью $\mu = r^3\cos\varphi$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 + t - 3)\,e^{\frac{t}{3}}$, $y = (-12t - 27)\,e^{\frac{t}{3}}$, отсечённый прямой $y = 3x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 2{,}3x^2 + y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{19x^2}{3} - \frac{10\sqrt{2}xy}{3} + \frac{14y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 2x + 3y + 12$. На кривой Γ распределена

масса с плотностью $\mu = 1{,}2x^2 + 0{,}1y^2 + 1{,}2z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 22

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (y + x + 1)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(-1; 1)$ и $(1; -3)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{2y - 1}{x + 1}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0; 3)$ и $(2; 5)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (2 - y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0; 0)$, $N(-2; -1)$, $P(-2; -2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(0; 0)$, $(-2; 2)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = -x^2 + 7$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 9$, $y \leqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (yx + 1)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -3x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + 2y)\, ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = \sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, ds$, Γ — дуга графика функции $x(t) = \frac{1}{16}\cos^3 t$, $y = \frac{1}{16}\sin^3 t$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} (z - 9)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -4x + 4y - 7$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2 + 20x + 26}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(-8; 27)$ и $B(-2; -3)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{x^2 + 5}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x + 4y + 5z + 1 = 0$, $-3y + 5z - 6 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -3\sin\varphi + 2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -3x - \frac{9y}{2} + 28$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по кривой Γ: $y^2 = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1/4$ с линейной плотностью $\mu = y^{3/2}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 4t - 1)\, e^{\frac{t}{4}}$, $y = (44 - 12t)\, e^{\frac{t}{4}}$, отсечённый прямой $y = 4x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}4x^2 + 2{,}1y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{7x^2}{2} + \sqrt{5}xy + \frac{3y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = 4x - 4y - 1$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 0{,}5x^2 + 1{,}2y^2 + 0{,}4z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 23

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (2 - y + x)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(-2; 0)$ и $(0; 1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y+1}{x-y}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(1; -2)$ и $(2; -5)$.

3. $\int\limits_\Gamma (2x+y)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1; 0)$, $N(1; 4)$, $P(2; 2)$.

4. $\int\limits_\Gamma (x + y - 1)\, ds$, Γ — граница параллелограмма с вершинами $(-1; 0)$, $(-1; 2)$, $(1; 0)$, $(1; -2)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = 2x^2 + 5$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma (x - 2y)^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (y - x^2)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)^2\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2=16\sin(2\varphi)$, $\sin\varphi\geqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma}xy\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t)=4(t-\sin t)$, $y(t)=4(1-\cos t)$, $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{21}{4}-z\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=-x^2+4x-y^2-2y+\frac{11}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2+16x+17}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(-2;4)$, проходящей через точку $B(0;0)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{y^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-6x+2y-4z+5=0$, $5x-2y+z+3=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-3\sin\varphi-2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-2x-\frac{4y}{3}+13$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по дуге гиперболы $\Gamma\colon x(t)=\operatorname{ch}t$, $y(t)=\operatorname{sh}t$, $0\leqslant t\leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu=\dfrac{e^t\operatorname{ch}t}{\sqrt{e^{4t}+1}}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x=(t^2-2t-1)\,e^{-\frac{t}{2}}$, $y=(14-6t)\,e^{-\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y=-2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=0{,}8x^2+1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{13x^2}{3}-\frac{4\sqrt{2}xy}{3}+\frac{11y^2}{3}=1$ и плоскости $z=1-y-3x$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu=1{,}2x^2+1{,}0y^2+1{,}8z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 24

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (1-y-x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;0)$ и $(3;2)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{y+x}{x-1}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(2;-1)$ и $(8;-15)$.

3. $\int\limits_\Gamma (x+y)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(-2;0)$, $N(0;2)$, $P(1;0)$.

4. $\int\limits_\Gamma (x+y-1)\,ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(0;0)$, $(1;2)$, $(3;2)$, $(4;0)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-2x^2+5$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma (y-x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=25$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (x+y)^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4y$.

8. $\int\limits_\Gamma (2x+y^2)\,ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=16\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_\Gamma \sqrt[4]{x^2+y^2}\,ds$, Γ — развёртка окружности $x(t)=4(\cos t+ t\sin t)$, $y(t)=4(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}$.

10. $\int\limits_\Gamma (3x-3y-9)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=3x-3y-\frac{7}{2}$.

11. $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{4x^2+12x+10}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=-x^2+px+ q$, проходящей через точки $A(-2;2)$ и $B(4;-28)$.

12. $\int\limits_L \frac{ds}{z^2+3}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $5x-2y-5z+5=0$, $-x-2z-6=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-5\sin\varphi-6\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=-2x+\frac{5y}{3}+29$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = xy$ по кривой Γ: $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+2t+1)\,e^{-t}$, $y = (2t-1)\,e^{-t}$, отсечённый прямой $y = -x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}75x^2 + 2{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{20x^2}{3} - \frac{8\sqrt{2}xy}{3} + \frac{16y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = 4x - y - 1$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}9x^2 + 0{,}7y^2 + 1{,}6z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 25

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (y-2x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;3)$ и $(-1;-1)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{xy}{y+1}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;2)$ и $(2;4)$.

3. $\int\limits_\Gamma (x+2y+1)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;1)$, $N(0;-2)$, $P(2;0)$.

4. $\int\limits_\Gamma (x-1)\,ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;3)$, $(2;-1)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = x^2+1$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_\Gamma (2y-x)^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=4$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma (y+x^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=3x$.

8. $\int\limits_\Gamma (y-3x)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 25\sin(2\varphi)$, $\sin\varphi \geqslant 0$.

9. $\int\limits_\Gamma (x-y)\,ds$, Γ — дуга графика функции $x(t) = \frac{1}{9}\cos^3 t$, $y = \frac{1}{9}\sin^3 t$, $\pi \leqslant t \leqslant 3\pi/2$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(5x + 4y + \frac{41}{2}\right) ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 - 10x - y^2 - 8y + \frac{103}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2-40x+101}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(5;-4)$, проходящей через точку $B(4;-3)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{x^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $4x + y + z + 2 = 0$, $-2x + 5y + 3z - 2 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = \sin\varphi + \cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -6x - 6y + 17$.

14. Найдите ординату центра масс, распределенных по цепной линии Γ: $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu = \dfrac{e^x y}{e^{2x} + 1}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 + 4t + 5)\,e^t$, $y = (3t + 11)\,e^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}5x^2 + 1{,}25y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{5x^2}{3} + \frac{4\sqrt{2}xy}{3} + \frac{7y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = -x - 6y + 2$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}9y^2 + 1{,}7z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 26

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (y - 2x)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(2;1)$ и $(-1;-2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y-1}{x+1}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0;1)$ и $(1;-1)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(2y+1)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;1)$, $N(1;0)$, $P(-2;0)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} y\,ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(0;0)$, $(1;2)$, $(2;2)$, $(4;0)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y=-x^2+5$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}(yx+1)^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=25$, $y\geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(y^2-2xy)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x-5y)\,ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=49\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} y^2\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t)=2(t-\sin t)$, $y(t)=2(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(z-\frac{23}{2}\right)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z=x^2+y^2$ и $z=3x+y+\frac{13}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2+1}}$, $\Gamma=AB$ — часть параболы вида $y=x^2+px+q$, проходящей через точки $A(4;10)$ и $B(-1;-5)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{y^2+7}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-y-z+4=0$, $-2x-4y+3z-6=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r=-4\sin\varphi-3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z=1$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = ye^{-x/2}$ по кривой $\Gamma\colon x(t)=\ln(1+t^2)$, $y(t)=2\operatorname{arctg} t$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+4t-3)\,e^t$, $y=(4t+1)\,e^t$, отсечённый прямой $y=x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu=2{,}5x^2+1{,}4y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{11x^2}{3}-\frac{4\sqrt{2}xy}{3}+\frac{13y^2}{3}=1$ и плоскости $z=5x+2y+5$. На кривой Γ распределена

масса с плотностью $\mu = 1{,}0x^2 + 1{,}5y^2 + 1{,}7z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 27

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (2+x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(0;0)$ и $(3;2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y}{x-y}\,ds$, Γ — отрезок с концами $(-6;-5)$ и $(0;7)$.

3. $\int\limits_{\Gamma}(1-y+x)\,ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(0;1)$, $N(0;-1)$, $P(2;0)$.

4. $\int\limits_{\Gamma}(1+y)\,ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(-1;0)$, $(4;0)$, $(0;-2)$, $(2;-2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, Γ — дуга параболы $y = 2x^2 - 4$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_{\Gamma}(2x+y)^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=1$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma}(3x+y^2)\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=-y$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(y^2+5x)\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 49\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} x^2\,ds$, Γ — арка циклоиды $x(t) = 5(t-\sin t)$, $y(t) = 5(1-\cos t)$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{161}{4} - z\right)ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2+y^2$ и $z = -x^2-2x-y^2-8y+\frac{127}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2-56x+197}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(7;-8)$, проходящей через точку $B(8;-9)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{z^2+2}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $2x-4y-z=0$, $-4x-y-6z-1=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -6\sin\varphi + \cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 3x - \frac{y}{2} + 22$.

14. Найдите массу, распределенную по кривой Γ, заданной в полярных координатах $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant 0$, с линейной плотностью $\mu = 1/r^3$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 + 5t + 4)\,e^t$, $y = (3t + 7)\,e^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}45x^2 + 1{,}3y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $4x^2 + 4\sqrt{2}xy + 6y^2 = 1$ и плоскости $z = 5x + 5y - 6$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}8x^2 + 0{,}7y^2 + 0{,}8z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 28

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_\Gamma (2y + x)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(2; 0)$ и $(3; 2)$.

2. $\int\limits_\Gamma \dfrac{x + y}{x + 1}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(0; 1)$ и $(2; 5)$.

3. $\int\limits_\Gamma (2 + x)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(-3; 0)$, $N(1; 0)$, $P(-1; -2)$.

4. $\int\limits_\Gamma (1 + x + y)\, ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(2; 0)$, $(-3; 0)$, $(-2; 2)$, $(1; 2)$.

5. $\int\limits_\Gamma xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = -2x^2 + 8$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{3}$.

6. $\int\limits_\Gamma (x + y^2)^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 4$, $y \leqslant 0$, $x \geqslant 0$.

7. $\int\limits_\Gamma yx^2\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

8. $\int\limits_{\Gamma}(x+y)^2\,ds$, кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r^2 = 36\sin(2\varphi)$, $\cos\varphi \leqslant 0$.

9. $\int\limits_{\Gamma} x^2\,ds$, Γ — эвольвента окружности $x(t) = \cos t + t\sin t$, $y(t) = \sin t - t\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma}(6y-18)\,ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2+y^2$ и $z = 6y+27$.

11. $\int\limits_{\Gamma}\frac{ds}{\sqrt{4x^2+8x+5}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = -x^2+px+q$, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(4;-19)$.

12. $\int\limits_{L}\frac{ds}{x^2+6}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $3x-2y+3z-2=0$, $-3x-6y-2z-5=0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = -3\sin\varphi + 3\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z=0$ и $z = -4x-4y+34$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по кривой $\Gamma\colon y^2 = 16x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ с линейной плотностью $\mu = |xy|$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2+2t+1)\,e^{\frac{t}{2}}$, $y = (14t-10)\,e^{\frac{t}{2}}$, отсечённый прямой $y = 2x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 0{,}5x^2 + 1{,}9y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{11x^2}{3} + \frac{8\sqrt{2}xy}{3} + \frac{7y^2}{3} = 1$ и плоскости $z = -3x+2y+1$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}3x^2 + 1{,}9y^2 + 0{,}4z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 29

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma}(y-x)\,ds$, Γ — отрезок с концами $(1;2)$ и $(-1;0)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y-2}{x-1}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(2;-1)$ и $(8;-15)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (2y+x-2)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1;0)$, $N(1;2)$, $P(-1;2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (1+y)\, ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(-2;0)$, $(3;0)$, $(-1;-1)$, $(2;-1)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = x^2 - 10$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $-\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} (x-2y^2)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2 = 16$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (3-xy)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2 = y$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (x^2+2y)\, ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 36\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} x^2\, ds$, Γ — дуга графика функции $x(t) = \frac{1}{4}\cos^3 t$, $y = \frac{1}{4}\sin^3 t$, $3\pi/2 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(-4x+3y+\frac{25}{2}\right)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2+y^2$ и $z = -x^2+8x-y^2-6y-\frac{9}{2}$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2-56x+197}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы с вершиной в точке $A(7;-5)$, проходящей через точку $B(6;-4)$ и осью симметрии параллельной оси Oy.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{y^2+4}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $5x+4y-z-4 = 0$, $-4x+5y+3z+4 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = \sin\varphi - 2\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -2x+4y+14$.

14. Найдите абсциссу центра масс, распределенных по дуге гиперболы Γ: $x(t) = \operatorname{ch} t$, $y(t) = \operatorname{sh} t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ с линейной плотностью $\mu = \sqrt{e^{4t}+1}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2-3t+3)\, e^{\frac{t}{4}}$, $y = (20-8t)\, e^{\frac{t}{4}}$, отсечённый прямой $y = 4x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}6x^2 + 1{,}2y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых

реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $\frac{5x^2}{2} + 3xy + \frac{5y^2}{2} = 1$ и плоскости $z = -4x + 5y - 6$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}6x^2 + 1{,}2y^2 + 0{,}3z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Вариант 30

Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской или пространственной кривой Γ (1–12):

1. $\int\limits_{\Gamma} (2x + y)\, ds$, Γ — отрезок с концами $(-1; 2)$ и $(1; -2)$.

2. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y}{x - y}\, ds$, Γ — отрезок с концами $(1; 9)$ и $(-5; -3)$.

3. $\int\limits_{\Gamma} (2y - 2)\, ds$, Γ — ломаная $MNPM$, где $M(1; 0)$, $N(0; 2)$, $P(2; 2)$.

4. $\int\limits_{\Gamma} (1 + y)\, ds$, Γ — граница трапеции с вершинами $(1; -1)$, $(-1; -1)$, $(1; 3)$, $(-1; 2)$.

5. $\int\limits_{\Gamma} xy\, ds$, Γ — дуга параболы $y = -x^2 + 2$ с началом в точке с абсциссой 0 и концом в точке с абсциссой $\sqrt{2}$.

6. $\int\limits_{\Gamma} x^2(x - y)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$, $y \leqslant 0$.

7. $\int\limits_{\Gamma} (1 - yx^2)\, ds$, Γ — дуга окружности $x^2 + y^2 = -x$.

8. $\int\limits_{\Gamma} (5x - y)\, ds$, Γ — левый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2 = 25\cos(2\varphi)$.

9. $\int\limits_{\Gamma} x\, ds$, Γ — арка циклоиды $x(t) = 3(t - \sin t)$, $y(t) = 3(1 - \cos t)$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$.

10. $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{41}{2} - z\right)\, ds$, Γ — пересечение поверхностей, заданных уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = -x^2 + 6x - y^2 + 6y + 23$.

11. $\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{4x^2 - 8x + 5}}$, $\Gamma = AB$ — часть параболы вида $y = x^2 + px + q$, проходящей через точки $A(1; -5)$ и $B(2; -4)$.

12. $\int\limits_{L} \frac{ds}{z^2+7}$, L — прямая, образованная пересечением плоскостей $-3x + 2y - 5z - 5 = 0$, $-5x - 4y - 5z - 6 = 0$.

13. Цилиндрическая поверхность задана в полярных координатах уравнением $r = 2\sin\varphi - 5\cos\varphi$. Найти площадь поверхности цилиндра, расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = -x - \frac{2y}{5} + 8$.

14. Найдите массу, распределенную с линейной плотностью $\mu = x^2$ по кривой Γ: $x(t) = e^{2t}\cos t$, $y(t) = e^{2t}\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$.

15. Пусть Γ — участок кривой, заданной уравнениями $x = (t^2 - 2t + 1)\,e^t$, $y = (2 - 2t)\,e^t$, отсечённый прямой $y = x$. На Γ распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1{,}7x^2 + 0{,}6y^2$. Используя любые доступные компьютерные программы, в которых реализованы методы численного интегрирования, найти приближённо с точностью 10^{-3} длину кривой Γ, её массу и центр масс.

16. Кривая Γ образована пересечением цилиндра $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ и плоскости $z = x - 6y + 3$. На кривой Γ распределена масса с плотностью $\mu = 1{,}7x^2 + 1{,}0y^2 + 1{,}8z^2$. Найти компоненты вектора силы, с которой кривая Γ притягивает единичную точечную массу, расположенную в начале координат. Вычисления проводить с точностью 10^{-3} при помощи подходящих компьютерных программ, реализующих численное интегрирование.

Список литературы

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. — Москва, Лань 2016.
2. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для вузов, рек. МО РФ / И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2002. — 724 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов/ Б.П.Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558 с.
4. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 1 (6-е изд.) / В.А.Зорич. — М.: МЦНМО, 2012. — 818 с.
5. Ильин В. А. Математический анализ. Ч. 1. 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1 / Л.Д.Кудрявцев. — М.: Издательство Юрайт, 2017.
7. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы. Ряды: учеб. пособие / Под ред. Л.Д.Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 504 с.
8. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 1 курс / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин [и др.]. — Москва: Айрис Пресс, 2013. — 574 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. для вузов рек. МО РФ: в 3-х т. Т 2./ Г.М.Фихтенгольц. — 8-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 800 с.
10. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 1 / В.С.Шипачев, А.Н.Тихонов. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 248 с.

Учебное издание

Федоров Дмитрий Леонидович
Тинюкова Татьяна Сергеевна
Максимова Ольга Васильевна

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 16.04.2021. Формат 60x84/$_{16}$.
Усл. печ. л. 3,4. Тираж 300 экз. Заказ № 781.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: (3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18