Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА. ГЕОМЕТРИЯ - 1

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2020

УДК 372.8.51 (075.8)
ББК 74.262.21.я13
О - 543

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: кандидат ф.-м. н., доцент Л.И. Романов

О-543 **Олимпиадная математика. Геометрия - 1**: учебно-методическое пособие / Сост. А. С. Мерзляков. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2020. – 48 с.

Предлагаемое пособие предназначено для изучения студентами методов решения геометрических задач.

Пособие разбито на занятия, на каждом из которых рассматриваются решения задач по отдельной геометрической теме. На каждом занятии приводятся основные понятия и факты, связанные с данной темой.

Данное пособие предназначено для студентов, которые обучаются по направлению 010200 - «Математика и компьютерные науки» на очной и заочной формах обучения.

УДК 372.8.51 (075.8)
ББК 74.262.21.я13

© А. С. Мерзляков, сост., 2020
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ЗАНЯТИЕ 01. СЕРИЯ 0. НАБОР ЗАДАЧ ДЛЯ РЕШЕНИЯ 5

ЗАНЯТИЕ 02. СЕРИЯ 1. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ 7

ЗАНЯТИЕ 03. СЕРИЯ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА 9

ЗАНЯТИЕ 04. СЕРИЯ 3. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА 12

ЗАНЯТИЕ 05. СЕРИЯ 4. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ 15

ЗАНЯТИЕ 06. СЕРИЯ 5. ПРОБЕЖИМСЯ-КА ПО СТАРЫМ ТЕМАМ! 18

ЗАНЯТИЕ 07. СЕРИЯ 6. ПОГОВОРИМ О СРЕДНИХ ЛИНИЯХ… ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА 21

ЗАНЯТИЕ 08. СЕРИЯ 7. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. 24

ЗАНЯТИЕ 09. СЕРИЯ 8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ. 26

ЗАНЯТИЕ 10. СЕРИЯ 9. КОРОТКО О ПРОШЛОМ… 29

ЗАНЯТИЕ 11. ОЛИМПИАДА - 1. 31

ЗАНЯТИЕ 12. СЕРИЯ 10. ОКРУЖНОСТИ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ. 32

ЗАНЯТИЕ 13. СЕРИЯ 11. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ. 34

ЗАНЯТИЕ 14. СЕРИЯ 12. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ДВИЖЕНИЯ 37

ЗАНЯТИЕ 15. СЕРИЯ 13. И ВНОВЬ О ТОМ ЖЕ… 42

ЗАНЯТИЕ 16. СЕРИЯ 14. ОЛИМПИАДА! ЧТО ИМЕЕМ В ИТОГЕ… 45

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 47

ВЕДЕНИЕ

В связи с тем, что в школьной программе изучению геометрии уделяется недостаточно времени, в последние годы понимание и усвоение школьного курса геометрии абитуриентами, а следовательно, и студентами, слабое. Однако, знание и понимание всего курса геометрии в дальнейшем является необходимым элементом для полного изучения всего курса математики в ВУЗе.
Геометрия в математике представляет собой область математики, в которой можно наглядно видеть условие задач, что нередко помогает найти идеи решения. Знания геометрического материала очень помогает в изучении таких важных курсов, как, например, дискретная математика, аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия, топология, а также ряда спецкурсов, в которых используется теория графов.

Весь курс разбит на занятия по темам, причём вся тематика занятий достаточно хорошо выдержана в соответствии с одним из общепринятых курсов геометрии в школе, например, по учебнику Л.С.АТАНЯСЯНА «Геометрия 7-9», или ГОРДИН Р.К. «Геометрия. Планиметрия (классы 7-9)». Первое занятие проводится для лучшего знакомства с возможностями студентов. В начале каждого тематического занятия приводятся некоторые основные факты, которые можно использовать при решении задач данной серии. На занятии студентам сначала предлагаются задачи 1 варианта, которые достаточно просты, и часть из которых можно разобрать совместно с преподавателем. Затем им предлагается второй вариант заданий, которые более сложные, чем задания первого варианта, и которые им нужно постараться решить самостоятельно. Все оставшиеся задания, остаются в качестве домашнего задания. Есть отдельные занятия, на которых проводится закрепление методов решения по нескольким изучаемым темам. Заметим, что занятия, на которых проводятся олимпиады, вообще говоря, нужно сопровождать занятиями, на которых задачи данной олимпиады достаточно тщательно разбираются.

Данное пособие предназначено для студентов I курса направления МиКН, ПМИ и всех других, по которым проходит обучение в ИМИТиФ. Оно предназначено для студентов и преподавателей, которым с данным пособием будет проще проводить занятия. Задания для всего курса занятий достаточно тщательно подбирались и систематизировались автором по тематике и методам решения. В ходе проведения курса можно углублять и расширять любую из предложенных тем. Для этого можно использовать материалы, которые несложно найти в литературе, которая указана в конце пособия. Автору хотелось напомнить студентам о геометрическом материале, который они должны были изучать в школе, поэтому не преследовалась цель рассмотрения той или иной темы достаточно глубоко.

ЗАНЯТИЕ 01

СЕРИЯ 0. НАБОР ЗАДАЧ ДЛЯ РЕШЕНИЯ

1. Замостите плоскость одинаковыми а) пятиугольниками; б) семиугольниками.

2. Отметьте 6 точек на плоскости так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

3. Равны ли два треугольника, если они имеют по три равных угла и по две равные стороны?

4. Раскрасить плоскость в три цвета так, чтобы на каждой прямой были точки не более чем двух цветов, и каждый цвет был бы использован.

5. Найти множество середин всех отрезков, концы которых лежат
а) на данной полуокружности;
б) на диагоналях данного квадрата.

6. Можно ли из 13 кирпичей 1x1x2 сложить куб 3x3x3 с дыркой 1x1x1 в центре?

7. Внутри квадрата ABCD расположен квадрат KMXY. Доказать, что середины отрезков AK, BM, CX и DY также являются вершинами квадрата.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 01.

1. **Указание**. Замостим плоскость одинаковыми квадратами, каждый из которых легко разбивается на два одинаковых 5- или 7-угольника, две стороны каждого из которых совпадают со сторонами квадрата, одна должна пройти через центр, а другие попарно симметричны относительно центра квадрата.

2. **Указание.** Уложить каркас правильной треугольной призмы на плоскость, не меняя нужные расстояния.

3. **Ответ.** Не обязательно. Например, треугольники 8,12 и 18, и 12, 18, 27 имеют равные углы, но не равны между собой.

4. **Указание.** Покрасим в первый цвет две какие-нибудь пересекающиеся прямые целиком, кроме их общей точки, которую покрасим во второй цвет. Все остальные точки плоскости покрасим в третий цвет.

5. **Указание.** а) Фигура, ограниченная данной полуокружностью и двумя меньшими полуокружностями, построенными на половинках диаметра большой внутри нее.
б) Квадрат, вершинами которого являются середины сторон данного.

6. **Ответ**: Нельзя. **Указание** Раскрасим в белый и черный цвет в шахматном порядке маленькие кубики 1x1x1, из которых состоят куб и кирпичи. В 13 кирпичах по 13 черных и белых кубиков, а в кубе без центра одних 12, других - 14.

7. **Решение.** При параллельном сдвиге центра квадрата KMXY вместе с самим квадратом в центр квадрата ABCD середины всех четырех отрезков AK,..., DY сдвигаются на половину длины сдвига, поэтому можно считать, что центры квадратов совпадают. В этом случае следует рассмотреть повороты
на 90°, 180° и 270° вокруг общего центра квадратов и заметить, что указанные отрезки и их середины переходят друг в друга. Еще более простое решение получается с использованием понятий вектора и скалярного произведения.

ЗАНЯТИЕ 02

СЕРИЯ 1. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

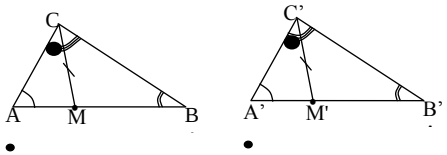
1 признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2 признак равенства треугольников. Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

3 признак равенства треугольников. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

1 ВАРИАНТ

1. Доказать, что два треугольника ABC и A'B'C' равны, если ∠CAB = ∠C'A'B' и ∠CBA=∠C'B'A' при основании и биссектриса CM одного треугольника равна биссектрисе CM' другого треугольника.



2. Стороны равностороннего треугольника делятся точками K, L, M в одном и том же отношении (считая по часовой стрелке) 4:5 Докажите, что треугольник KLM также равносторонний.

3. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если BC = 12.

4. Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение сторон AB и AC.

5. На сторонах BC и CD квадрата ABCD построены во внешнюю сторону равносторонние треугольники BCK и CDL. Доказать, что треугольник AKL правильный.

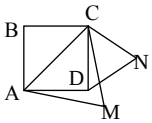
СЕРИЯ 1. РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

2 ВАРИАНТ

1. На катете AB и гипотенузе AC прямоугольного треугольника построены (во внешнюю сторону) квадраты AKLB и ACPQ соответственно. Равны ли треугольники AQB и ACK?

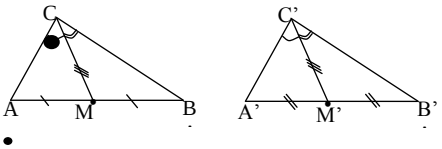
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника квадраты ADKC и CEMB. Из точек D и M опущены перпендикуляры DH и MP на продолжение гипотенузы AB. Доказать, что DH + MP = AB.

3. На стороне CD квадрата ABCD построен правильный треугольник CDN, вершина N которого лежит вне квадрата, а на диагонали AC — правильный треугольник ACM, внутри которого лежит точка D. Доказать, что MN равно стороне квадрата.



4. В треугольнике ABC проведена медиана BD. Точки E и F делят медиану на три равных отрезка (BE = EF = FD). Известно, что AB **= 1** и AF = AD. Найдите длину отрезка CE.

5. Доказать равенство треугольников по равенству длин медиан и равенству двух углов, на которые разбивает медиана угол треугольника.



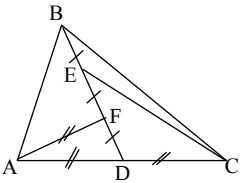
Указания, решения и ответы к задачам занятия 02.

ВАРИАНТ 1

3. Ответ: 6
4. Ответ: 1:2

ВАРИАНТ 2

1. Ответ: равны.
2. Указание: опускаем высоту из вершины C и показываем, что получилось две пары равных треугольников, откуда все и следует.
3. Указание: показывается, что треугольники CNM и ACD по двум сторонам и углу между ними. Отсюда и требуемое равенство.
4. Ответ: CE = 1. **Решение**. Докажем, что треугольники ABF и CED равны (см. рис.). Заметим, что AF = DC и BF = ED. Так как AFD - равнобедренный треугольник, то $\angle AFD = \angle ADF$. Углы, смежные с ними, также равны: $\angle AFB = \angle EDC$. Следовательно, $\Delta ABF = \Delta CED$ по двум сторонам и углу между ними, значит, CE = AB.



ЗАНЯТИЕ 03

СЕРИЯ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Две прямые одной плоскости называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Признак параллельности прямых. Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Свойство параллельных прямых. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то при этом образуются равные внутренние накрест лежащие углы.

Теорема об углах треугольника. Сумма внутренних углов треугольника равна 180.

Теорема о внешнем угле треугольника. Внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов.

СЕРИЯ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА.

ВАРИАНТ 1

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что AC || BD и AD || BC.

2. Сумма двух углов в равнобедренной трапеции равна 150°. Найдите больший угол этой трапеции.

3. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за 45 минут?

4. Найти, чему равна сумма углов

а) в четырёхугольнике; б) в пятиугольнике; в) в n-угольнике.

5. Известно, что углы A, B и C в треугольнике ABC равны α, β и γ градусов соответственно. Чему равен угол между биссектрисами углов

а) A и B? б) B и C; в) A и C?

СЕРИЯ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА.

ВАРИАНТ 2

1. Чему равен угол между часовой и минутной стрелкой в 12 час 20минут?

2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов.

3. Отрезок AB – гипотенуза прямоугольного треугольника ABC. На прямой AB отметили такие точки K и M, не лежащие на отрезке AB, что AK = AC и BM=BC. Найдите угол KCM.

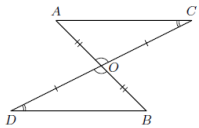
4. На стороне AB квадрата ABCD построен равносторонний треугольник ABM. Найдите угол DMC.

5. Чему равна сумма острых углов «звездочки» (см. рис.)?

Указания, решения и ответы к задачам занятия 03.

ВАРИАНТ 1

1. Решение. Треугольники AOC и BOD (см. рис.) равны по двум сторонам и углу между ними (AO = BO и CO = DO по условию, а углы AOC и BOD равны как вертикальные), поэтому ∠OAC = ∠OBD. Прямая AB пересекает прямые AC и BD, причем накрест лежащие углы OAC и OBD равны, следовательно, прямые AC и BD параллельны. Аналогично, AD||BC.

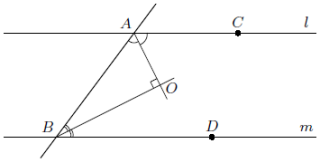


2. Ответ: 105°.

ВАРИАНТ 2

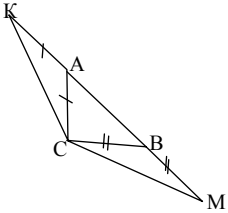
1. Ответ: 110°.

Решение. Пусть прямые *l* и m параллельны, а третья прямая пересекает их соответственно в точках A и B (см.рис.). Возьмем на прямой *l* точку C, а на прямой m - точку D так, чтобы эти точки лежали по одну сторону от прямой AB. Тогда углы BAC и ABD - внутренние односторонние. По свойству параллельных прямых ∠BAC + ∠ABD = 180°. Пусть биссектрисы этих углов пересекаются в точке O. Тогда ∠OAB + ∠OBA = ∠BAC + ∠ABD = 180° = (∠BAC +∠ABD)= 90°.



Следовательно, по теореме о сумме углов треугольника ∠AOB = 180°. (∠OAB + ∠OBA) = 180° - 90° = 90°.

3. Ответ: 135°. **Решение**. Поскольку треугольники AKC и BMC – равнобедренные, то ∠AKC = ∠ACK = $^1/_2$ ∠A и ∠BMC = ∠BCM=$^1/_2$ ∠B. Значит, ∠KCM = 180° – ∠CKM – ∠CMK=180° – $^1/_2$ (∠A+∠B)= 135°.



4. Ответ: 30° или 150°.

5. Ответ: 180°. **Указание**. Через внешние углы любого маленького треугольника.

ЗАНЯТИЕ 04
СЕРИЯ 3. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

ВАРИАНТ 1

1. Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

2. Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

3. **(Неравенство треугольника)** Сумма любых двух сторон невырожденного треугольника больше третьей стороны.

4. Стороны равнобедренного треугольника равны 1 и 3. Какая из сторон является основанием?

5. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D. Докажите, что AD < AB + BC + CD.

СЕРИЯ 3. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА…

ВАРИАНТ 2

1. Может ли периметр треугольника быть равным 19, если одна из его сторон на 1 короче другой и на 3 длиннее третьей?

2. Доказать, что если точка C лежит левее серединного перпендикуляра к отрезку AB, то она расположена ближе к точке A, чем к точке B. И наоборот, если точка C лежит правее серединного перпендикуляра к отрезку AB, то она расположена ближе к точке B, чем к точке A.

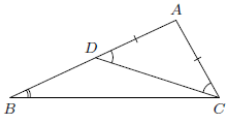
Сначала рассмотрим прием разбиения суммы длин оцениваемых отрезков на пары.
3. а) Доказать, что сумма длин диагоналей AC+BD выпуклого четырехугольника ABCD больше суммы длин двух противоположных сторон AB+CD. б) Верно ли утверждение для невыпуклого четырёхугольника?

4. Докажите, что медиана треугольника, заключенная между двумя его неравными сторонами, образует больший угол с меньшей из двух этих сторон..

5. Доказать, что сумма длин всех звеньев ломаной $A_1A_2A_3...A_n$ не меньше, чем длина отрезка, соединяющего концы этой ломаной, причем равенство достигается только если все звенья ломаной лежат на одной прямой (точнее, если вершины $A_2,A_3,.,A_{n-1}$ лежат на отрезке A_1A_n.)

Указания, решения и ответы к задачам занятия 04.

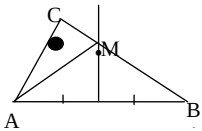
ВАРИАНТ 1



1. Доказательство. Пусть сторона AB треугольника ABC больше стороны AC (см.рис.). Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. Тогда точка D лежит между точками A и B. В равнобедренном треугольнике ADC углы при основании CD равны, а так как угол ADC - внешний угол треугольника DBC, то $\angle ACB > \angle ACD = \angle ADC = \angle ABC + \angle DCB > \angle ABC$.

2.Доказательство. Допустим, что угол B меньше угла C в треугольнике ABC. И допустим, что AC > BC. Тогда, согласно первой задаче угол B должен быть больше угла C. Пришли к противоречию с условием задачи.

ВАРИАНТ 2

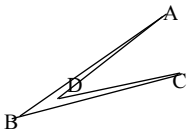


2. Доказательство. Обозначим точку пересечения CB с серединным перпендикуляром к отрезку AB через M. Тогда, в силу свойства серединного перпендикуляра AM=MB. Поэтому

CB = MB+CM = AM+CM > AC.

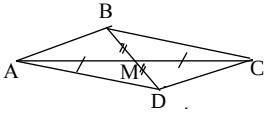
Последнее неравенство следует из неравенства треугольника. Второе неравенство доказывается совершенно также.

Это свойство дополняет свойство серединного перпендикуляра, о том, что он является геометрическим местом точек, которые равноудалены от концов отрезка.



3. Доказательство. Пусть O точка пересечения диагоналей AC и BD. Тогда по неравенству треугольника AO+OB>AB и OC+OD>CD. Складываем эти неравенства и получаем требуемое неравенство.

Заметим, что если четырехугольник не является выпуклым, тогда сумма длин его диагоналей не всегда больше суммы длин двух противоположных сторон. Например, смотри рисунок. На нём видно, что BD + AC меньше суммы длин и AD+BC и AB+DC.



4.Доказательство. Пусть ABC — наш треугольник, BM —его медиана, BC>AB. Достроим треугольник до параллелограмма ABCD. Так как в любом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, а AD=BC>AB, то в треугольнике ABD $\angle ABM > \angle ADM$, и отсюда и следует то, что $\angle ABM < \angle CBM$, так как $\angle ADM = \angle CBM$

5. Доказательство. Рассмотрим ломаную $A_1A_2A_3..A_n$(см.рис.). Из треугольника $A_1A_2A_3$ следует (по неравенству треугольника), что $A_1A_2 + A_2A_3 \Rightarrow A_1A_3$. Таким образом получаем, что осталось доказать, что $A_1A_3A_4....A_n \Rightarrow A_1A_n$.

Продолжая рассуждения далее, с треугольниками $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ...$A_1A_{n-1}A_n$, получаем требуемое неравенство.

Если вспомним замечание, сделанное сразу после формулировки неравенства треугольника, получаем, что равенство возможно только в случае, когда все точки $A_2, A_3, ., A_{n-1}$ лежат на отрезке A_1A_n.

ЗАНЯТИЕ 05

СЕРИЯ 4. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

ОПР. Треугольник называется **равнобедренным**, если у него равны длины двух сторон. Тогда третья сторона такого треугольника называется **основанием**, а противолежащая этой стороне вершина называется **вершиной равнобедренного треугольника**.

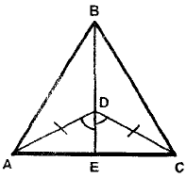
I. Если в треугольнике равны два угла, то этот треугольник равнобедренный.

II. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная из вершины, является медианой и биссектрисой.

III. В равнобедренном треугольнике равны две медианы, высоты и биссектрисы.
Заметим, что при решении задач, связанных с равнобедренными треугольниками, равнобочными трапециями, часто используется тригонометрия.

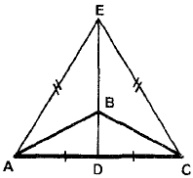
СЕРИЯ 4. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ. ВАРИАНТ 1.

1. На сторонах AB и BC соответственно равнобедренного треугольника ABC от его вершины B отложены равные отрезки BM и BN. Доказать, что отрезки CM и AN равны.



2. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

3. Доказать, что треугольник ABC (см.рис. справа) равнобедренный.



4. В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса угла A при основании AC пересекает высоту BD, длина которой равна 10, в точке M, отстоящей от боковой стороны на 4. На каком расстоянии точка M находится от вершины B треугольника ABC?

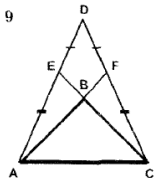
5. В равнобедренном треугольнике ABC длина сторон AB и BC равна 13 см. Известно, что опущена высота BE на основание AC, и что периметр треугольника ABE равен 30 см. Найти длину основания.

СЕРИЯ 4. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

ВАРИАНТ 2.

1. Доказать, что треугольник является равнобедренным, если у него равны две медианы.

2. В равнобедренном треугольнике с тупым углом при вершине С проведены высоты к боковым сторонам, продолжения которых пересекаются в точке F. Доказать, что длины этих высот равны, а треугольник ABF – равнобедренный.



3. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

4. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 30 см, длина высоты, проведенной к основанию, — 20 см. Определить длину высоты, проведенной к боковой стороне.

5. В равнобедренном треугольнике ABC длина сторон AB и BC равна 12 см. Известно, что серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает основание AC в точке E, и что периметр треугольника ABE равен 26 см. Найти длину основания.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 05.

ВАРИАНТ 1.

1. Указание. Равны треугольники ABN и BCM.
2. Доказательство. Треугольники AED и ECD равны по III признаку. Значит, ED – серединный перпендикуляр. По свойству серединного перпендикуляра отсюда AB=BC.

4. Ответ: 6. **Указание**. MD = 4, отсюда MB = BD – MD = 6.
5. **Ответ**: 10 см или 24. **Указание**. Из условия понятно, что сумма длин высот и половины основания равна 17, а из теоремы Пифагора удвоенное произведение этих длин равно 120. Отсюда находим, что длина основания равна 10 или 26.

ВАРИАНТ 2.

2. Доказательство. Пусть AK и BL – это высоты треугольника ABC, проведенные к боковым сторонам BC и AC соответственно. Тогда $\angle ACL = \angle BCK$. Отсюда, из свойств прямоугольного треугольника, следует, что $\angle CAL = \angle CBK$. Поэтому равны и углы BAF и ABF, т.е. треугольник ABF – равнобедренный.

3. Доказательство. Треугольники ADF и ECD равны по I признаку. Значит, равны длины AF и CE, а также углы AFD и CED. Отсюда равны углы AEC и AFC. Следовательно, равны треугольники AEC и AFC по I признаку. Поэтому равны углы BAC и BCA, и отсюда треугольник ABC равнобедренный.

4. Ответ: 24.

5. Ответ: 14 см. **Указание**. Из свойств серединного перпендикуляра следует, что EB=EC. Отсюда, из условия, что AB+BE+EA=12+EC+EA=12+AC=26 следует, что AC=14.

ЗАНЯТИЕ 06

СЕРИЯ 5. ПРОБЕЖИМСЯ ПО СТАРЫМ ТЕМАМ!

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СУММА УГЛОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК
НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ВАРИАНТ 1

1. Известно, что углы остроугольного треугольника равны α, β и γ. Найти углы между высотами.

2. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею в отношении AO : OB = CO : OD = 1 : 2. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что треугольник DMB равнобедренный.

3. Треугольник ABC - равнобедренный (AB = BC). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

4. Точки M и N - середины равных сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка X, а на отрезке NX - точка Y так, что MN = XY. Докажите, что BY = CX.

5. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Равносторонние треугольники ADG и CEH построены во внешнюю сторону. Найдите углы треугольника GBH, если выполнено равенство AD+EC=AC.

6. Существует ли четырехугольник со сторонами, равными: а) 1,1,1,2; б) 1, 2, 3, 6?

СЕРИЯ 5. ПРОБЕЖИМСЯ ПО СТАРЫМ ТЕМАМ!

ВАРИАНТ 2

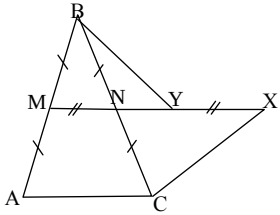
1. Найдите сумму внешних углов при вершинах выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине.
2. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты ACDE и CBFK (вершины обоих квадратов перечислены против часовой стрелки), P - середина KD. Докажите, что $CP \perp AB$.
3. Дан квадрат ABCD. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что BK = AC. Найдите угол BKC.
4. В остроугольном треугольнике ABC M — середина стороны BC, BH и CN — высоты, $\angle NBM = \angle HMN$, AC = 8. Найдите NH.
5. Вне правильного треугольника ABC отмечены точки S и T так, что $\angle SAB = \angle TCA = 45°$ и $\angle SBA = \angle TAC = 15°$. Найдите угол AST.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 06.

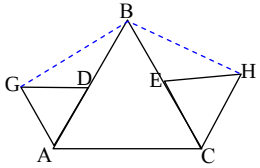
ВАРИАНТ 1

1. Ответ: α, β и γ.

3. Ответ: 36°. 36°. **Указание**. Обозначим $\angle B = \beta$ (рис.). Тогда $\angle BAM = \beta$. $\angle AMC = \angle B + \angle BAM = 2\beta$, $\angle BAC = \angle BCA = 22\beta$. Из уравнения $\beta + 2\beta + 2\beta = 180^o$. находим, что $\beta = 36^o$.



4. Доказательство. Из рисунка видно, что треугольник BMY равен треугольнику NCX. Отсюда и требуемое.



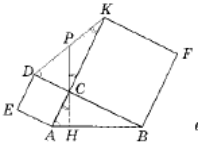
5. Ответ: 120°, 30°, 30°. **Решение**. Заметим, что AD=BE из условия, поэтому треугольники GDB и BHE равны по первому признаку. Отсюда BH=GB, и сумма углов GBD и HBE равна 60°. Отсюда и получаем ответ.

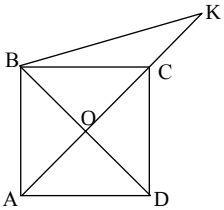
6. Ответ: а) да; б) нет.

ВАРИАНТ 2

1. Ответ: 360°.

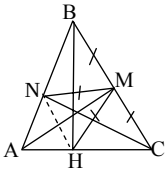
2. Доказательство. Обозначим $\angle BAC = \alpha$ (см.рис.). Из равенства прямоугольных треугольников ABC и DKC (по двум катетам), следует, что $\angle CDK = \angle BAC = \alpha$. Пусть прямая CP пересекает отрезок AB в точке H. Поскольку CP - медиана прямоугольного треугольника DKC, проведенная из вершины прямого угла, то PC=PK и $\angle PKC = \angle PCK = \angle ACH$. Из того, что $\angle KDC + \angle PKC = 90^o$, следует, что и $\angle ACP + \angle CAH = 90^o$. А отсюда и следует, что $\angle AHC = 90^o$.



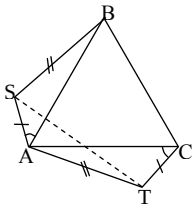


3. Ответ: 30°. **Решение** 1. Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, то DK = BK. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны и $\angle BKD = 60°$. В силу симметрии относительно прямой AC $\angle BKC = \angle DKC = 30°$.
Решение 2. Проводим диагональ BD, которая пересекается с AC в точке O. Тогда OB = 0,5AC = 0,5BK. Треугольник BKO – прямоугольный. Отсюда $\sin\angle BKO = 0{,}5$. Отсюда $\angle BKO = 30^o$.

4.Ответ: 4. **Решение**. Заметим, что $\angle NBM = \angle BNM = \angle HMN$. Отсюда получаем, что MH||AB. Значит, H – середина AC. Но тогда AH=NH=HC=4.



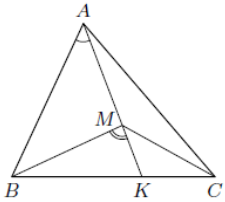
5. **Ответ**. 45°. **Решение** 1. Треугольники ASB и CTA равны по стороне и 2 углам. Значит, SB = AT. Поскольку ∠ASB = 180° – (45° + 15°) = 120° = ∠SAT, треугольники SAT и ASB равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, ∠AST = ∠SAB = 45°.



Решение 2. Несложно заметить, что треугольник AST равен треугольнику ASB по I признаку равенства). Отсюда угол AST = 45°.

6. **Доказательство**. Продолжим AM до пересечения со стороной BC в точке K (см.рис.). Тогда ∠BMK = ∠BAM + ∠ABM > ∠BAM и ∠CMK = ∠CAM + ∠ACM > ∠CAM. Следовательно,

∠BMC = ∠BMK + ∠CMK > ∠BAM + ∠CAM = ∠BAC.

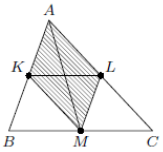


ЗАНЯТИЕ 07
СЕРИЯ 06. ПОГОВОРИМ О СРЕДНИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА.

ВАРИАНТ 1

1 (I). Средняя линия B_1C_1 (B_1 – середина стороны AC, C_1- середина стороны AB) треугольника ABC параллельна стороне BC и равна половине этой стороны.

2 (II). Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.



3. Доказать, что отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC, и медиана, проведенная из вершины A, делят друг друга пополам.

4. Дан треугольник с периметром, равным 24. Найдите периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного.

5. Острый угол A ромба ABCD равен 45◦, проекция стороны AB на сторону AD равна 12. Найдите расстояние от центра ромба до стороны CD.

У параллелограмма Вариньона есть несколько интересных свойств, которые мы сейчас и рассмотрим. Они могут пригодиться, при решении ряда задач по геометрии.

ВАРИАНТ 2

1. Расстояние между серединами взаимно перпендикулярных хорд AC и BC некоторой окружности равно 10. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

2. Доказать, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника является параллелограммом, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника и равны половинам этих диагоналей. Этот параллелограмм называется **параллелограммом Вариньона**.

3. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AB равно 1. Найдите хорду AC, если $\angle BAC = 30◦$.

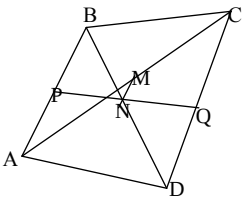
4. Докажите, что для того, чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы средние линии четырехугольника были равны (средней линией четырехугольника называется отрезок, соединяющий середины противоположных сторон).

5. В выпуклом четырехугольнике ABCD, отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AD и BC. Найдите угол, образованный продолжением сторон AB и CD.

ВАРИАНТ 3

1. Если у четырехугольника равны диагонали, то четырехугольник с вершинами в серединах сторон этого четырехугольника есть ромб.

2. Сторона треугольника равна а. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан, проведенных к двум другим сторонам.



3. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

4. Пусть P и Q середины сторон AB и CD четырехугольника ABCD, M и N – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то BC=AD.

5. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешний углов B и C. Найдите длину отрезка PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

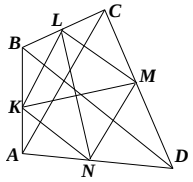
Указания, решения и ответы к задачам занятия 07.

ВАРИАНТ 1

1. **Указание**: продолжаем среднюю линию B_1C_1 за точку C_1 до точки D, на длину равную длине B_1C_1. Тогда равны треугольники B_1C_1A и BC_1D. Отсюда следует равенство и параллельность длин BD и $B_1A=B_1C$. Следовательно, четырехугольник B_1CBD – параллелограмм. А отсюда и следует равенство BC и $DB_1 = 2B_1C_1$.

ВАРИАНТ 2

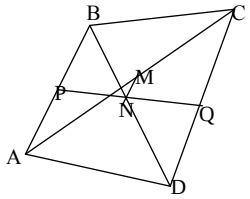
4. **Доказательство**. K, L, M, N –середины соответствующих сторон четырехугольника. Так как KL – средняя линия Δ ABC, то KL параллельна AC и равна ее половине. То же самое можно сказать про MN, поэтому KL и MN параллельны и равны, т.е. KLMN – параллелограмм. Так как его стороны параллельны диагоналям, то KLMN является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали ABCD перпендикулярны. С другой стороны, по свойству прямоугольника, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны, а диагоналями KLMN являются как раз средние линии исходного четырехугольника.



5. **Ответ**: 90°. **Указание**. Пусть E,F - середины диагоналей AC и BD соответственно, K,L – середины сторон BC и AD –соответственно. Тогда четырехугольник EKFL – параллелограмм, у которого равны диагонали, т.е. это прямоугольник. Стороны этого прямоугольника параллельны сторонам AB и CD, отсюда угол между сторонами равен 90°.

ВАРИАНТ 3

4. **Указание**. Рассмотрим четырехугольник PMQN - это параллелограмм. Если его диагонали перпендикулярны, тогда это ромб. Следовательно, MQ=$\frac{AD}{2}$; NQ=$\frac{BC}{2}$, как средние линии треугольника. Следовательно, стороны BC и AD равны.



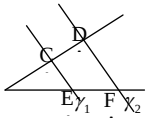
5. **Ответ**: 5. **Указание**. Продолжить эти перпендикуляры до пересечения со стороной BC в точках, например E и F. Тогда длина EF равна периметру треугольника ABC, и PM является средней линией треугольника AEF и равна половине EF, т.е. 5.

ЗАНЯТИЕ 08

СЕРИЯ 7. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

В задачах на нахождение отношений часто используется теорема Фалеса, или точнее теорема о пропорциональных отрезках, которую мы также будем называть теоремой Фалеса, и которая формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА (Фалес). Две параллельные прямые высекают на сторонах угла пропорциональные отрезки, или (см.рис.), если прямые CE||DF, то AC/CD=AE/EF.

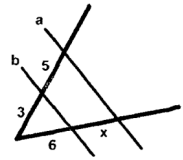


Заметим, что решение задач, с использованием теоремы Фалеса, также достаточно часто, можно решать, либо с помощью метода подобия, либо с использованием теоремы Менелая, либо с использованием метода масс, о которых мы в этом курсе говорить не будем.

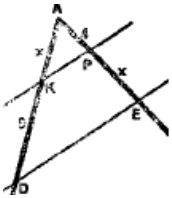
СЕРИЯ 7. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ВАРИАНТ 1

1. Проведены две параллельные прямые, которые на сторонах угла высекают отрезки длины которых равны соответственно 3, 5 на одной и 6 и x – на другой (см.рис.). Найти x.

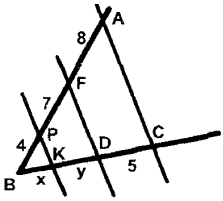


Дано: $a \parallel b$.
Найти: x.



2. Проведены две параллельные прямые KP и DE, которые на сторонах угла высекают отрезки длины которых равны соответственно 4, x на одной и x и 9 – на другой (см.рис.). Найти x.

3. Проведены три параллельные прямые PK, DF и AC которые на сторонах угла высекают отрезки длины которых равны соответственно 4, 7, 8 на одной и x, y и 5 – на другой (см.рис.). Найти x и y.



Дано: $AC \parallel FD \parallel PK$.
Найти: x и y.

4. Высота равнобокой трапеции, проведенная из конца меньшего основания, делит ее большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

5. Докажите, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке M и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

СЕРИЯ 7. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ВАРИАНТ 2

1. а) В треугольнике ABC проведена медиана CK, на стороне AC взята точка M так, что AM равно 4, а MC равно 6. В каком отношении делится медиана CK точкой ее пересечения с отрезком BM?

б) Тот же вопрос, если отношение AM к MC равно m:n?

2. На стороне BC треугольника ABC взята точка F так, что BF равно 3, а FC —2. На стороне AC взята точка E так, что AE=8, EC=2,5. BE и AF пересекаются в точке K. Найти отношение AK к KF.

3. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении она делит сторону BC?

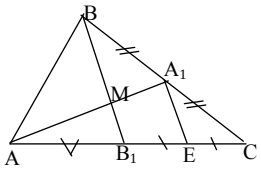
4. Прямые, соединяющие вершины A и C со серединами сторон BC и AD параллелограмма соответственно, пересекают его диагональ BD в точках M и N. Доказать, что BM=MN=ND.

5. Найдите отношение оснований BC к AD трапеции ABCD (AD||BC), если ее средняя линия MN делится диагоналями на три равные части.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 08.

ВАРИАНТ 1

5. **Решение**. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC, которые пересекаются в точке M (см.рис.). Чтобы найти отношение $AM:MA_1$ и использовать для этого теорему Фалеса, нужно провести прямую, которая будет параллельно BB_1 и проходить через точку A_1. Проводим такой отрезок A_1E (E на стороне AC). По теореме Фалеса для угла BCB_1 получаем, что $BA_1:A_1C=B_1E:EC=1$, так как $BA_1=A_1C$. Но $AB_1=B_1C$, поэтому $B_1E=\frac{1}{2}AB_1$. Отсюда, по теореме Фалеса для угла A_1AE получаем, что $AM:MA_1=AB_1:B_1E=2:1$.



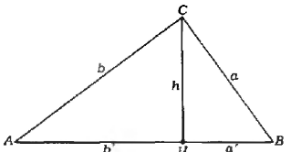
ВАРИАНТ 2

1. **Ответ**: а) 3:1, считая от вершины C.
2. **Ответ**: 4:1.
3. **Ответ**: 1:2. Указание. а) Пусть прямая, проходящая через точки A и L, пересекает сторону BC в точке M. Через т.B_1 проводим отрезок B_1K (K на BC), параллельный AM.
5. **Ответ**: 1:2.

ЗАНЯТИЕ 09

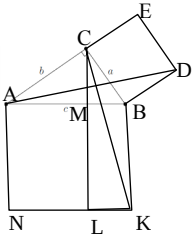
СЕРИЯ 8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Введём обозначения (см.рисунок).
Пусть ABC - прямоугольный треугольник, точка H - основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C, длины сторон обозначим через AB=c, AC=b, BC=a, CH=h, ∠A=α, ∠B=β.



Отметим два несложных свойства прямоугольного треугольника.

I. Так как сумма всех углов любого треугольника равна 180°, то сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.



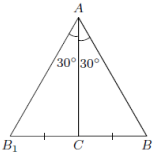
II. (**Теорема Пифагора**) Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$.
На рисунке справа рисунок к одному из способов доказательства теоремы Пифагора, через площади треугольников и прямоугольников. Показывается, что площадь прямоугольника MBKL равна площади квадрата CEDB. Это доказывается через равенство площадей треугольников CKB и ABD.

СЕРИЯ 8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1 ВАРИАНТ

1. Пусть ABC прямоугольный треугольник. Доказать, что медиана, проведённая из вершины прямого угла C, равна половине гипотенузы AB.

2. Катет BC прямоугольного треугольника ABC равен половине гипотенузы. Докажите, что угол A, противолежащий этому катету, равен 30◦.



3. Пусть ABC прямоугольный треугольник, и на гипотенузе AB нашлась точка D, такая, что треугольник CDB – равнобедренный, причём CD=DB. Доказать, что D - это середина гипотенузы AB.

4. Докажите, что для прямоугольного треугольника ABC (угол C прямой), справедливо ∠ATB = 135°, где T – центр вписанной окружности.

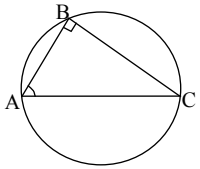
5. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

СЕРИЯ 8. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

2 ВАРИАНТ

1. Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

2. Докажите, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.



3. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30◦, а гипотенуза равна 8. Найдите отрезки, на которые делит гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла.

4. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

5. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что HC=AB. Найти угол при вершине C.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 09.

ВАРИАНТ 1

2. **Указание**: через подсчёт углов.

4. **Указание**. Сумма половинок острых углов равна 45°, значит, дополняющий их угол равен 135°.

5. **Ответ**: 5 и $2\cdot\sqrt{13}$.

ВАРИАНТ 2

1. **Указание**. 1) подсчёт углов равнобедренных треугольников; 2) основание медианы – центр описанной окружности.

2. Указание. 1 способ: по свойствам медианы прямоугольного треугольника, она равна половине гипотенузы. Значит, середина гипотенузы – есть точка, равноудаленная от вершин треугольника. Значит, это и есть центр описанной окружности.
2 способ: По свойству острого угла А прямоугольного треугольника отношение длины противолежащего катета ВС к длине гипотенузы АС равно синусу угла А. Отсюда получаем, что $\frac{a}{c}=\sin\alpha$, т.е. $c=\frac{a}{\sin\alpha}$. С другой стороны, по теореме синусов для треугольника АВС получается, что $2R=\frac{a}{\sin\alpha}$. Следовательно, 2R=c. Таким образом, длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна длине диаметра описанной окружности. Следовательно, центр окружности совпадает с серединой гипотенузы.

3.Ответ: 2 и 6. **Указание**: против угла в 30° лежит половина гипотенузы.

4. Ответ: $((a^2+b^2)/5)^{1/2}$.

5. Ответ: 45°. **Решение**. Пусть ВК —высота треугольника АВС. Прямоугольные треугольники НКС и АВК равны, так как углы НСК и КВА равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами, и НС=АВ. Отсюда следует равенство сторон КС и ВК. Следовательно, треугольник ВКС —равнобедренный и прямоугольный, т.е. $\angle BCK=45^o$.

ЗАНЯТИЕ 10

СЕРИЯ 9. КОРОТКО О ПРОШЛОМ

ВАРИАНТ 1

1. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна длине одной из его сторон. Определите углы этого треугольника.

2. Если у четырехугольника равны диагонали, то четырехугольник с вершинами в серединах сторон этого четырехугольника есть ромб.

3. Разрежьте параллелограмм на 9 равнобедренных треугольников.

4. В треугольнике ABC точка D на стороне AB и точка E на стороне AC расположены так, что AD:DB = CE:EA = 2:1. Найти отношение, в котором прямая, проходящая через точку D параллельно стороне BC, делит отрезок BE.

5. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата ABCD со стороной a. Найдите MN

СЕРИЯ 09. КОРОТКО О ПРОШЛОМ

ВАРИАНТ 2

1. Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырехугольника без параллельных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

2. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и середину L медианы BB_1. В каком отношении она делит медиану CC_1?

3. Найдите отношение оснований трапеции, если ее средняя линия делится диагоналями на три равные части.

4. В остроугольном треугольнике ABC M — середина стороны BC, BH и CN — высоты, $\angle NBM = \angle HMN$, AC = 8. Найдите NH.

5. Треугольник ABC прямоугольный, C – вершина прямого угла, T – центр вписанной окружности в прямоугольный треугольник ABC, CH – высота, R и S центры вписанных окружностей в треугольники ACH и BCH. Доказать, что T является точкой пересечения высот треугольника CRS.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 10

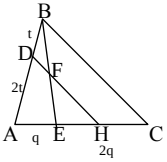
ВАРИАНТ 1

1. Ответ: 72°, 72° и 36°. **Решение**. Если АК – биссектриса угла А, равного α, при основании равнобедренного треугольника АВС, то тогда $\pi - 2\alpha = \alpha/2$. Отсюда угол $\alpha = 72^o$. Если биссектриса равна боковой стороне, тогда получаем, что этот случай невозможен.

2. Указание. Используем свойства параллелограмма Вариньона.

3. Указание. вырезаем один равнобедренный треугольник, затем оставшиеся части разбиваем на прямоугольные треугольники, каждый из которых разбивается на два равнобедренных.

4. Ответ: 1:1. **Решение**. (См. рис). Требуется найти отношение длин отрезков FE и FB.



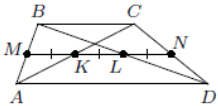
Если рассмотрим угол ВАС, то согласно теореме Фалеса (DH||BC), получаем, что AH:HC=AD:DB=2:1. А так как длина ЕС равнялась двум длинам отрезка АЕ, то длины отрезков НС и ЕН будут равны между собой и равны q.
Если рассмотрим угол ВЕС, то согласно теореме Фалеса (FH||BC), получаем, что EF:FB=EH:HC=1:1. Отсюда и получаем требуемое соотношение длин.

5. **Ответ**: $a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

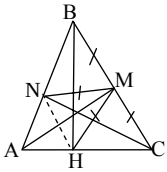
ВАРИАНТ 2

2. Ответ: 1:3.

3. Ответ: 1 : 2. **Решение.** Пусть AD = a, BC = b _ основания трапеции ABCD (a > b), M и N - середины AB и CD соответственно, K и L - точки пересечения средней линии MN с диагоналями AC и BD соответственно (см.рис.). MK = LN = 0,5BC = 0,5b. По условию задачи KL = MK = LN = 0,5b. Поэтому MN = 1,5(a+b) = 1,5b. Из полученного уравнения находим, что a = 2b.



4. Ответ: 4. **Решение**. Заметим, что ∠NBM=∠BNM=∠HMN. Отсюда получаем, что MH||AB. Значит, H – середина AC. Но тогда AH=NH=HC=4.



ЗАНЯТИЕ 11
ТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО 3-М ПРОЙДЕННЫМ ТЕМАМ

СЕРИЯ 5. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ
СЕРИЯ 6. ПОГОВОРИМ О СРЕДНИХ… ПАРАЛЛЕЛОГРАММ ВАРИНЬОНА.
СЕРИЯ 7. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА И КОЕ-ЧТО ЕЩЁ…

ОЛИМПИАДА

1. Доказать, что если медиана BM треугольника ABC является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

2. Доказать, что если у четырехугольника равны диагонали, то четырехугольник с вершинами в серединах сторон этого четырехугольника есть ромб.

3. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

4. Прямая проходит через вершину A треугольника ABC и точку L медианы BB1, которая делит медиану в отношении 1:2, считая от вершины B. В каком отношении она делит сторону BC?

5. Сторона AC треугольника ABC равна a. Найдите отрезок, соединяющий середины медиан AA_1 и CC_1.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 11.

1. **Доказательство**. Достраиваем треугольник ABC до параллелограмма ABCD, то так как угол ∠ABD = ∠CBD = ∠CDB, то треугольник BCD, а, значит, и треугольник ABC равнобедренные, так как AB=BD=BC.

2. **Указание**. Использование свойств параллелограмма Вариньона.

4. **Ответ**: 1:4.

5. **Ответ**: a/4. **Указание**. Пусть B_1 – середина стороны AC. Достраиваем треугольник $A_1B_1C_1$, где средней линией к A_1C_1 – будет искомый отрезок. Значит, его длина равна a/4.

ЗАНЯТИЕ 12

СЕРИЯ 10. ОКРУЖНОСТИ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

ВАРИАНТ 1

1. Около любого треугольника можно описать единственную окружность. Центр окружности, описанной около треугольника,- это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

2.. Докажите, что равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

3. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B, отрезок AB виден под прямым углом.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B, AM и AN - диаметры окружностей. Докажите, что точки M, N и B лежат на одной прямой.

5. Докажите следующие свойства окружности:
а) диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам;
б) диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде;
в) окружность симметрична относительно каждого своего диаметра;
г) дуги окружности, заключенные между параллельными хордами, равны;
д) хорды, удаленные от центра окружности на равные расстояния, равны.

СЕРИЯ 10. ОКРУЖНОСТИ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

ВАРИАНТ 2

1. Через точку окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

2. Через точку A окружности с центром O проведены диаметр AB и хорда AC. Докажите, что угол BAC вдвое меньше угла BOC.

3. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60°. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен R.

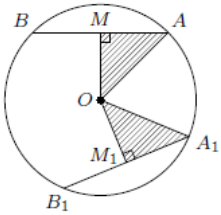
4. Дана окружность с центром O. На продолжении хорды AB за точку B отложен отрезок BC, равный радиусу. Через точки C и O проведена секущая CD (D - точка пересечения с окружностью, лежащая вне отрезка CO). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$.

5. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

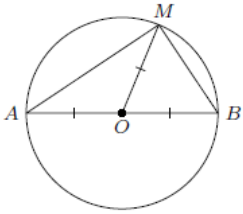
Указания, решения и ответы к задачам занятия 12.

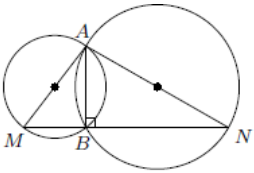
ВАРИАНТ 1

2. Решение. Пусть AB и A_1B_1 - равные хорды окружности с центром O, не являющиеся диаметрами (см.рис.). Расстояния от центра окружности до этих хорд равны перпендикулярам OM и OM_1, опущенным на хорды из центра окружности. Поскольку M и M_1 - середины хорд, AM = 1. Значит, прямоугольные треугольники AMO и A_1M_1O равны по катету и гипотенузе (радиус окружности). Следовательно, OM = OM_1.
Если AB и A_1B_1 - диаметры, утверждение очевидно.



3. Решение. Пусть точка M, отличная от A и B, лежит на указанной окружности (см.рис.). Тогда медиана MO треугольника AMB (радиус окружности) равна половине стороны AB (диаметр окружности). Следовательно, ∠AMB = 90◦.





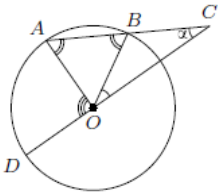
4. Решение. Поскольку точка B лежит на окружности с диаметром AM, ∠ABM = 90◦ (см.рис.). Аналогично, ∠ABN = 90◦. Следовательно, точки M и N лежат на прямой, перпендикулярной AB и проходящей через точку B.

ВАРИАНТ 2

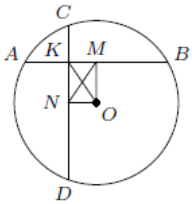
1. Ответ: 60°.

2. Указание. Примените теорему о внешнем угле треугольника.

3. Ответ: R.



4. Доказательство. По свойствам внешнего угла треугольника AOD, он равен 3∠ACD.



5. Доказательство. (см.рис.) KMNO – прямоугольник, а у него равны диагонали.

ЗАНЯТИЕ 13

СЕРИЯ 11. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Опр. Движение плоскости - это преобразование плоскости, которое сохраняет расстояние и углы.

Заметим, что весь курс евклидовой геометрии основан именно на таком понятии движения. Так, например, для равенства рассматриваемых фигур нужно проделывать с фигурами какие-то преобразования, чтобы их сравнить. Так вот (по Евклиду), при этих преобразованиях не должны меняться длины и углы сравниваемых фигур. Значит, такие преобразования являются движениями. Это верно и для рассмотрения других важных фактов.
Как известно, видами движения на плоскости являются поворот, симметрия и параллельный перенос.

ВИДЫ ДВИЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

ПОВОРОТ
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС
СИММЕТРИЯ: ЦЕНТРАЛЬНАЯ И ОСЕВАЯ

СЕРИЯ 11. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

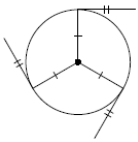
ВАРИАНТ 1

1. а) Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60 градусов (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C.
б) При каких поворотах переходят в себя квадрат?
ИДЕЯ: поворот.

2. Доказать, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом в 60°.
Решение. При повороте на 60° градусов правильный треугольник переходит в себя, следовательно и его медианы переходят друг в друга. Отсюда и ответ задачи.

3. Пусть M и N - середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN перпендикулярна основаниям, то трапеция - равнобедренная.

4. Существует ли фигура, не имеющая осей симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
Ответ: существует.



5. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?
Ответ: существует.

СЕРИЯ 11. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

ВАРИАНТ 2

1. Через центр равностороннего треугольника проведены две прямые, угол между которыми равен 60°.Доказать, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, равны.

2. На противоположных сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Доказать, что прямая, соединяющая вершины этих треугольников, лежащие вне параллелограмма, проходят через центр параллелограмма.

3. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.

4. Внутри прямоугольника ABCD взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

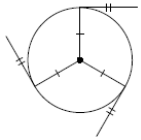
5. На сторонах AB, BC, и CA равностороннего треугольника ABC взяты соответственно точки K, M и P так, что AK=BM=CP. Доказать, что прямые AM, BP и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 13.

ВАРИАНТ 1

2. Решение. При повороте на 60° градусов правильный треугольник переходит в себя, следовательно и его медианы переходят друг в друга. Отсюда и ответ задачи.

3. Указание. Рассмотреть осевую симметрию



4. Ответ: существует.

5. Ответ: существует (см. рис.)

ВАРИАНТ 2

1. Указание. При повороте на 60 градусов вокруг центра треугольника, отрезки перейдут друг в друга. Поэтому их длины равны.

3. Указание. Поворот на 90 градусов вокруг центра.

4. Указание. Делаем параллельный перенос отрезков AM и DM, соответственно в отрезки BN и CN. Тогда получаем 4-хугольник MBNC, у которого диагонали BC и MN (MN+AD) перпендикулярны, а стороны равны AM, BM, CM, DM.

ЗАНЯТИЕ 14

СЕРИЯ 12: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ДВИЖЕНИЯ

С помощью использования движений плоскости решаются и некоторые экстремальные задачи на оценку длин. Рассмотрим решение следующей задачи. Конечно, в ней главная роль отводится неравенству треугольника, однако, и использование симметрии также достаточно важно.

ВАРИАНТ 1

1. Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на прямой l такую точку X, чтобы сумма AX+XB имела наименьшую возможную длину.

Решим аналогичную задачу, чуть другую, но похожую.

2. Даны две точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой ℓ, на разном расстоянии от нее. Найти на этой прямой такую точку M, чтобы разность ее расстояний (по абсолютной величине) до точек A и B была бы наибольшей.

Рассмотрим несколько задач, в которых речь идёт и об оценках и о движениях. Начнем с такой задачи, в которой движение уже сделано, осталось только оценить то, что получилось.

3. Точку A, лежащую внутри острого угла, отразили симметрично относительно сторон угла. Полученные точки B и C соединили и точки пересечения отрезка BC со сторонами угла обозначили через и (см. рис.) Доказать, что BC/2>DE.

А сейчас рассмотрим ещё одну задачу, связанную с оценками длин медиан треугольника.

4. Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключена, и больше разности этой полусуммы и половины третьей стороны.

СЕРИЯ 14: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ДВИЖЕНИЯ - 2

ВАРИАНТ 2

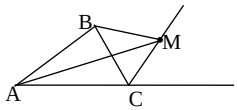
1. Даны две точки A и B, лежащие по одну сторону от плоскости P. Найти на этой плоскости такую точку M, чтобы сумма ее расстояний от точек A и B была бы наименьшей.

2. Даны две точки A и B, лежащие по разные стороны от плоскости P, находящиеся на разных расстояниях от плоскости. Найти на этой плоскости такую точку, чтобы разность ее расстояний (по абсолютной величине) от точек A и B была бы наибольшей.

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрали точку D, а на его продолжении за вершину C точку E так, что AD=CE. Докажите, что BD+BE > AB+BC.

В следующей задаче непросто догадаться, какое движение нужно использовать, перед тем, как получить требуемые оценки. Но это движение также определяется фигурой, куда входят все отрезки, которые нужно оценивать.

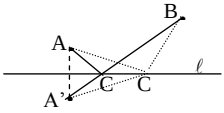
4. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M. Докажите, что MA+MB > CA+CB. (см. рис.)



5. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причем угол AOC равен 60 градусов. Докажите, что AC + BD ≥ 1.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 15.
ВАРИАНТ 1

1. Решение. (см. рис.) Пусть точка A' —точка симметричная A относительно прямой ℓ. Пусть точка C - произвольная точка на прямой ℓ. Тогда, в силу свойств серединного перпендикуляра (прямая ℓ - серединный перпендикуляр к AA'), сумма AC + CB будет равна сумма расстояний A'C + CB. Но когда сумма A'C + CB будет минимальной? Понятно, когда A'B — отрезок прямой (см. рис.), иначе по неравенству треугольника эта сумма будет больше этого отрезка! Значит искомая точка C — это точка пересечения ℓ с отрезком A'B.

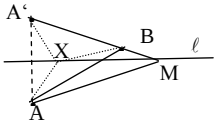


Полностью ли решена наша задача?

Нет, конечно! А для любого ли расположения точек A и B проходят все наши рассуждения? Ведь мы же ничего не знаем про расположение т. A и B.

После недолгого раздумья видно, что при произвольном расположении мы можем провести все указанные операции в решении. Но это необходимо отметить в решении: оно годится для произвольного расположения точек A и B.

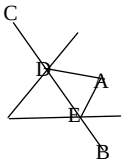
2. Решение. Аналогично первой задаче отражаем симметрично одну из точек (пусть A в A') относительно прямой ℓ. Модуль разности между произвольной точкой X прямой ℓ и точками A и B - |XA - XB| = |XA' - XB| - не будет превышать AB. А равен ли он когда-нибудь AB? Да, если XA и XB лежат на одной прямой. То есть какую точку мы должны взять в качестве M? Точку пересечения A'B и прямой ℓ. Вновь ту же точку, но уже для другой задачи. Решена ли задача полностью?

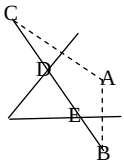


Нет! А всегда ли будут пересекаться прямая A'B и ℓ? Конечно не всегда, если A'B параллельна ℓ, тогда пересечений не будет.

Следовательно, этот случай нужно рассмотреть отдельно! Однако, по условию этот случай исключен из рассмотрения, но тем не менее это условие очень важно для правильной записи ответа.

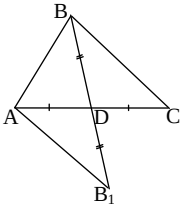
3. Доказательство. (см. рис.) По свойству серединного перпендикуляра AD = DC и AE = BE. Но по неравенству треугольника в ADE сумма длин сторон AD + AE = DB + EC > DE. Следовательно, DE < BC/2. Что и требовалось доказать.





Нужно отметить, что перед тем, как была сделана оценка, дополнительными преобразованиями мы получили фигуру (в данном случае треугольник ADE), куда входили все отрезки, которые по условию задачи нужно оценивать. Получение данной фигуры нередко подсказывает, какой вид движений нужно использовать, чтобы затем можно было непосредственно оценивать нужные величины. Также нужно отметить, что вновь по ходу решения помогают известные свойства: в данном случае свойства серединного перпендикуляра.

4. **Доказательство.** а) Когда в условии задач требуется найти или оценить медианы, то часто используем метод достроения треугольника до параллелограмма. Так и в данном случае (см. рис.): достраиваем данный треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$. Тогда диагональ BB_1 равна сумме двух медиан BD, а AB_1=BC. Но по неравенству треугольника (для треугольника ABB_1) отсюда и получаем, что $AB+AB_1 \geq BB_1 = 2BD$.



б) Пусть BD — медиана. Тогда AD+BD > AB и CD+BD > BC. Отсюда и результат. Это так, ибо AD+BD+CD+BD> AB+BC. Отсюда

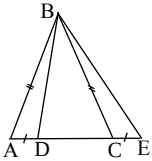
$$2BD > AB+BC - (AD+CD) = AB+BC-AC.$$

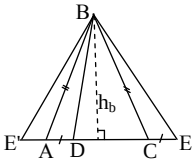
ВАРИАНТ 2

1. **Решение.** Какая основная идея решения? Конечно же - симметрия. Эта задача очень напоминает задачу, которая предлагалась в варианте 1.
Отражаем одну из точек, например т.А, относительно плоскости в точку A', и пусть AA' пересекает плоскость отражения в точке M. Возьмем произвольную точку N в плоскости отражения, отличную от точки M. Рассмотрим треугольник A'NB. По неравенству треугольника NA'+NB>BA'. Но NA=NA', поэтому точка M и будет искомой точкой.

2. **Решение**. Сейчас уже понятно, что и это решение будет аналогично решению задачи, разобранной выше.
Отражаем одну из точек, например A, относительно плоскости, в точку A' и проводим прямую через две точки A' и B, которая пересекает плоскость отражения в точке M (так как расстояния от точек A' и B до плоскости различны). Точка M и будет искомой, что доказывается точно также, как и в задаче варианта 1.

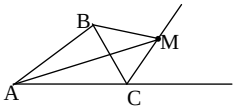
3. **Доказательство.** Какая основная сложность решения? Первоначально неясна связь между данными величинами и неравенством, которое нужно доказать. Следовательно, чтобы установить нужную связь, нужно создать фигуру, куда входили бы все (или большая часть) рассматриваемых отрезков.



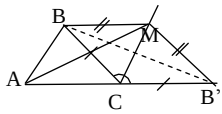


А это несложно сделать. Отображаем симметрично относительно высоты h_b треугольника ABC сторону BE, т.е. $E \to E'$ (См.рис.) Получаем, что треугольник ABE' равен треугольнику BCE, и AB является медианой в треугольнике ABE'. Отсюда по задаче 3, получаем, что AB<(BE'+BD)/2. Поэтому 2AB=AB+BC<(BE'+BD)/2<(BE+BD)/2.

Что и требуется показать.



4. **Доказательство.** Если в первой задаче связь между оцениваемыми отрезками почти сразу видна, то здесь эта связь не так очевидна. Значит нужно получить фигуру, куда бы входили все (или большинство) рассматриваемых отрезков.



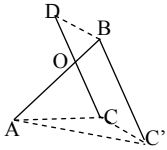
А такая фигура получается, если выполнить симметрию относительно биссектрисы внешнего угла C: точку B переносим в точку B', лежащую на продолжении стороны AC. В силу свойств симметрии CB'=CB и MB=MB’ (см.рис.). Следовательно, CA + CB = AB', а AM+BM = AM+MB'. И требуемое неравенство сразу следует из рассмотрения неравенства треугольника для треугольника AMB’.

Все ли решение задачи?

Нет! Мы же не знаем, как происходит обозначение вершин треугольника, а если вершины располагаются по-другому? Будет ли тогда верно требуемое неравенство задачи?

Как несложно убедиться неравенство будет также верным, но забывать об этом втором случае нельзя!

5. **Доказательство.** Обратите внимание на угол 60°. Очень вероятно, что где-то должен встретиться равносторонний треугольник. Это нередко служит путеводной звездой при решении.



Значит, нужно что-то такое и здесь создать. И это что-то создается путем параллельного переноса вдоль отрезка AC отрезка CD в BC' (см. рис.).

Так как CD=BC'=AB, то треугольник ABC' равносторонний (следовательно AC' = 1), а четырехугольник BC’CD – параллелограмм, поэтому BD=CC’. По неравенству треугольника из треугольника ACC’ следует, что AC+CC’=AC+BD$\geq$AC, т.е. требуемое неравенство доказано.

ЗАНЯТИЕ 15.
СЕРИЯ 13. И ВНОВЬ О ТОМ ЖЕ

ОКРУЖНОСТИ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ.

ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ И ДВИЖЕНИЯ

СЕРИЯ 13. И ВНОВЬ О ТОМ ЖЕ

ВАРИАНТ 1

1. В окружности проведены хорды AB и CD. Расстояние между равными параллельными хордами AB и CD равно радиусу окружности. Найдите угол между пересекающимися прямыми AC и BD.

2. Докажите, что выпуклый n-угольник является правильным если он переходит в себя при повороте на 360/n градусов относительно некоторой точки.

3. Продолжения хорд AB и CD окружности с диаметром AD пересекаются под углом 25°. Найдите острый угол между хордами AC и BD.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что AB = CD. Известно, что $\angle BDC = 80°$ и $\angle BCD = 20°$. Докажите, что BC > AD.

5. Внутри отрезка AB взята точка C и построены (по одну сторону прямой AE) квадраты ACMN и CBPQ; точки K и L — средины отрезков AQ и BM. Докажите, что CKL- равнобедренный треугольник.

СЕРИЯ 13. И ВНОВЬ О ТОМ ЖЕ

ВАРИАНТ 2

1. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника взяты точки D и K соответственно, а на стороне AC —точки E и M так, что суммы DA+AE и KC + CM равны стороне треугольника. Доказать, что угол между прямыми DM и KE равен 60°.

2. Продолжения равных хорд AB и CD окружности соответственно за точки B и C пересекаются в точке P. Докажите, что треугольники APD и BPC равнобедренные.

3. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N, отличных от A. Докажите, что AM = AN.

4. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC, точки B и C, а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

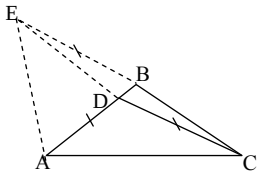
5. Точка C —середина отрезка AB. На произвольном луче, проведенном из точки C и не лежащем на прямой AB, выбраны три последовательные точки P,M и Q так, что PM=MQ. Доказать, что 2CM < AP+BQ.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 15.

ВАРИАНТ 1

3. **Ответ**: 25.

4. Доказательство. Дополним треугольник DBC до параллелограмма BCED, как показано на рисунке. Тогда треугольник ABE равнобедренный, причём $\angle DBE = \angle CDB = 80°$, а $\angle BAE = \angle BEA = 50°$. Заметим, что в треугольнике ADE ED=BC, а $\angle DEA = 30^o < 50°$, в то время как $\angle BAE = 50°$. Отсюда, ED=BC>AD.

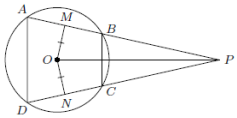


5. **Указание.** Поворот вокруг C на 90° по часовой стрелке. A переходит в M, Q - в B. Значит, AQ перейдёт в MB. Отсюда K (середина AQ) перейдёт в L (середину MB). Таким образом CKL – не только равнобедренный, но и прямоугольный треугольник.

ВАРИАНТ 2

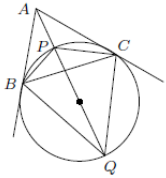
1. **Указание**. Повернем треугольник вокруг центра на 120°, тогда сразу получаем, что DM перейдет в KC и угол между ними равен 60°.

2. **Доказательство**. Перпендикуляры из O на AB и DC равны. Отсюда равны треугольники POM и PON, значит PM=PN. Отсюда и PB=PC.

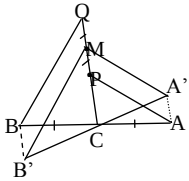


3. Указание. Треугольники AMD и AND равны.

4. **Указание.** Пусть P - точка пересечения биссектрис треугольника ABC (см.рис.), а Q - точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Тогда отрезок PQ виден из точек B и C под прямым углом.



5. **Доказательство** этой задачи очень напоминает решение задачи 5, которую разбирали на занятии. Делаем параллельный перенос AP и QB таким образом, чтобы точки Q,M и P совпали, а отрезки AP и QB при этом перейдут в A'M и MB' соответственно. При этом точки A,A',B и B' образуют параллелограмм, у которого точка C является точкой пересечения диагоналей. Поэтому CM —медиана треугольника A'MB', и по задаче 3, следует требуемый результат.



ЗАНЯТИЕ 16. ОЛИМПИАДА.

СЕРИЯ 14. ЧТО ИМЕЕМ В ИТОГЕ?! ОЛИМПИАДА…

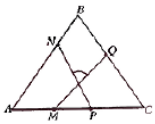
1. Пусть P и Q середины сторон AB и CD четырехугольника ABCD, M и N – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то BC=AD.

2. Из вершины A треугольника ABC опущены перпендикуляры AM и AP на биссектрисы внешний углов B и C. Найдите длину отрезка PM, если периметр треугольника ABC равен 10.

3. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой вершины.

4. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, а на другой - точка B, причем ∠AKB = 90◦. Докажите, что AB = 2R.

5. В равностороннем треугольнике точки M, N, P и Q со стороной a расположены так, как это показано на рисунке. Известно, что MA+AN=PC+CQ=a. Доказать, что угол между отрезками MQ и PN равен 60°.



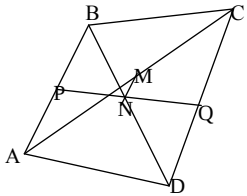
6. На стороне AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки E и D так, что BE:EA = 2:7, BD:DC = 1:3. Отрезок AD и CE пересекаются в точке O. Найти отношение AO:OD.

7. Найти в треугольнике ABC точку, сумма расстояний от которой до вершин и середин сторон была бы наименьшей.

8. Даны две точки A и B, лежащие по разные стороны от плоскости P, находящиеся на разных расстояниях от плоскости. Найти на этой плоскости такую точку, чтобы разность ее расстояний (по абсолютной величине) от точек A и B была бы наибольшей.

Указания, решения и ответы к задачам занятия 16.

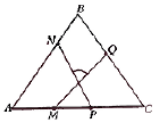
ВАРИАНТ 1



1. Указание. Рассмотрим четырехугольник PMQN - это параллелограмм. Если его диагонали перпендикулярны, тогда это ромб. Следовательно, MQ=$\frac{AD}{2}$; NQ=$\frac{BC}{2}$, как средние линии треугольника. Следовательно, стороны BC и AD равны.

2. Ответ: 5. **Указание**. Продолжить эти перпендикуляры до пересечения со стороной BC в точках, например E и F. Тогда длина EF равна периметру треугольника ABC, и PM является средней линией треугольника AEF и равна половине EF, т.е. 5.

3. Доказательство. Пусть M данная точка. Докажем, что AM<MB+MC+MD. Пусть AD и BC —основания трапеции. Тогда в силу равнобедренности трапеции AB=CD, а в силу неравенства треугольника для треугольника AMB получаем, что AM<AB+BM = CD+BM < MC+MD+BM, опять же в силу неравенства треугольника для длины стороны CD треугольника MCD.



5. Решение. Повернем треугольник вокруг центра на 120 градусов, тогда сразу получаем, что DM перейдет в KC и угол между ними равен 60.

6. Ответ: 14:3.

7. Решение. Пусть A_1 - середина стороны BC, B_1 - середина стороны AC, и C_1 - середина стороны AB. Вспомним прием, который мы уже использовали на занятии, разбиение длин отрезков на пары: проще оценивать суммы пары расстояний от искомой точки X до вершины и середины противолежащей этой вершине стороны, например, длину AX + XA_1. По неравенству треугольника эта сумма не меньше длины AA_1, причем равна ей по длине только тогда, когда X лежит на AA_1. Рассуждая аналогично и для двух других пар данных вершин, получаем, что искомая точка —это точка пересечения медиан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. ГОРДИН Р.К. «Геометрия. Планиметрия». М.Изд-во Дрофа, 2001,400с.
II. ПОЛОНСКИЙ В., РАБИНОВИЧ Е.,ЯКИР М. «Геометрия 7-11». М.Изд-во АСТ-Пресс.1998.256с.
III. ПРАСОЛОВ В.В. «Задачи по планиметрии». М.Изд-во МЦНМО.2007.640с.

Учебное издание

Составитель

А.С. Мерзляков

Олимпиадная математика. Геометрия - 1.

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 28.12.2020. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 1,55.
Тираж 50 экз. Заказ № 2207.

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18