Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2021. Том 57. С. 3–76

УДК 517.962.22, 517.977

© ***И. Н. Банщикова***

ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассматриваются достаточные и необходимые условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы

$$x(m+1) = (A(m) + B(m)U(m))\,x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Изучены свойства устойчивости полного спектра показателей Ляпунова и интегральной разделенности линейных систем с дискретным временем, получено описание спектрального множества линейной системы в случае устойчивости полного спектра, изучено свойство равномерной полной управляемости линейной системы с дискретным временем, изучены свойства оболочки Бебутова линейной управляемой системы с дискретным временем.

Ключевые слова: дискретная линейная система, показатели Ляпунова, управляемость, стабилизируемость, динамическая система сдвигов.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-01

Введение

Одним из основных методов конструирования управления для линейных систем с постоянными коэффициентами является метод размещения полюсов [64]. Этот метод основан на выборе такой обратной связи, что полюса замкнутой системы оказываются в наперед заданных точках комплексной плоскости. Теоретической основой данного метода является следующая классическая теорема [33, В. М. Попов], [66, У. Уонэм]: *линейная стационарная система*

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k,$$

управляема тогда и только тогда, когда для любого набора комплексных чисел $\Lambda = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big)$*, симметричного относительно вещественной оси, найдется стационарная обратная связь* $u = Ux$ *с постоянной матрицей* $U \in \mathbb{R}^{k\times n}$*, обеспечивающая совпадение спектра замкнутой системы*

$$\dot{x} = \big(A + BU\big)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с набором Λ. Аналогичный результат имеет место и для систем с дискретным временем [49], [50, с. 458]. В то же самое время, для стационарных систем хорошо изучена связь между положением полюсов и динамическими свойствами системы, такими, как устойчивость, колеблемость решений и т. п.

Аналогичная задача для нестационарных систем значительно менее изучена. Практически все известные результаты для нестационарных систем с непрерывным временем можно найти в книге [29].

Отметим, что для нестационарных систем (в отличие от стационарных) существует целый ряд неэквивалентных определений управляемости: равномерная, полная, дифференциальная, по входу, по выходу, и т. д. (см., например, [56]). Кроме того, для таких систем нет очевидного обобщения понятия полюсов. В определенной степени, показатели Ляпунова играют ту же роль, что вещественные части полюсов для стационарных систем с непрерывным временем и логарифмы абсолютных значений полюсов для стационарных систем с дискретным временем.

Впервые задача о назначении спектра показателей Ляпунова линейной нестационарной системы с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k, \tag{0.1}$$

посредством линейной обратной связи $u(m) = U(m)x(m)$ была рассмотрена в работе [42]. В этой работе было установлено, что свойство равномерной полной управляемости системы (0.1) обеспечивает разрешимость задачи о глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.2}$$

т. е. возможности построения для произвольного наперед заданного набора чисел $\lambda_1 \leqslant \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ такого матричного управления $U\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$, что полный спектр замкнутой системы (0.2) совпадает с этим набором. Заметим, что алгоритм построения управления $U(\cdot)$ в этой работе не гарантирует малости нормы управления, даже если требуемое смещение показателей Ляпунова системы (0.2) по отношению к показателям свободной системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.3}$$

мало́.

В связи с этим возникает вопрос — можно ли для любого набора из малой окрестности полного спектра показателей Ляпунова системы (0.3) гарантировать возможность построения такой матрицы обратной связи $U(\cdot)$, что полный спектр показателей системы (0.2) совпадает с этим набором, при этом малому смещению показателей отвечает малая норма управления $U(\cdot)$? Решению этого вопроса посвящена работа.

Для решения поставленной задачи в работе введено понятие пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (0.2).

Отметим, что вопрос о пропорциональной локальной управляемости спектра тесно связан с задачей об отыскании достижимых границ подвижности показателей системы при различных возмущениях ее коэффициентов. Для систем с непрерывным временем существенный вклад в решение этой задачи внесли Р. Э. Виноград [13], В. М. Миллионщиков [30], Н. А. Изобов [18, 21], И. Н. Сергеев [36, 37]. Вопросы построения спектрального множества при различных классах возмущений систем с непрерывным временем изучались М. И. Рахимбердиевым и Н. Х. Розовым [35], Н. А. Изобовым [22, 23], Н. А. Изобовым и Т. Е. Зверевой [20], С. А. Гришиным [15], А. Г. Сурковым [38]. Кроме того, задача об управлении показателями Ляпунова имеет непосредственную связь с проблемами устойчивости и стабилизации. В заключение введения отметим, что вопросами устойчивости и стабилизации решений систем с дискретным временем занимались В. Т. Борухов, О. М. Кветко [8]; В. А. Зайцев [17, 67]; А. А. Кандаков, К. М. Чудинов [24, 25]; А. Ю. Куликов, В. В. Малыгина [26]; Г. А. Леонов [27]; A. Bacciotti, A. Biglio [45]; S. Bittanti, P. Bolzern, G. De Nicolao [46]; C. I. Byrnes, W. Lin, B. K. Ghosh [47]; V. Cheng [48]; J. C. Engwerda [51]; L. Grüne, F. Wirth [52]; W. Kwon, A. Pearson [57]; W. Lin [58]; J. Tsinias [65] и другие авторы.

ГЛАВА I. О свойстве устойчивости показателей Ляпунова систем с дискретным временем

Основной объект исследований главы — дискретная линейная однородная система

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Мы всюду предполагаем, что матрица $A(\cdot)$ этой системы вполне ограничена на $\mathbb{N}$, т. е. $A(m)$ обратима при всех $m \in \mathbb{N}$ и

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\bigl(\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|\bigr) < \infty.$$

В таком случае система обладает полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел. Вводится понятие устойчивости полного спектра и исследуются некоторые его свойства. В третьем параграфе построен пример системы с неустойчивым спектром показателей Ляпунова. Последние два параграфа главы посвящены исследованию важного подкласса множества систем с устойчивыми показателями — системам с интегральной разделенностью.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с фиксированным ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_n$ и стандартной нормой $\|\cdot\|$. Через $\mathbb{R}^{n\times n}$ будем обозначать пространство вещественных матриц размерности $n \times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в $\mathbb{R}^{n\times n}$ евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$; $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица, $*$ — операция транспонирования. Пусть $s_n \geqslant \ldots \geqslant s_1 \geqslant 0$ — сингулярные числа [40, с. 493] матрицы $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда выполнены соотношения

$$\|F\| = s_n, \quad \|F^{-1}\| = s_1^{-1}, \quad |\det F| = s_1 s_2 \ldots s_n$$

и справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{\|F\|}{\|F^{-1}\|^{n-1}} = s_1^{n-1}s_n \leqslant |\det F| \leqslant s_n^{n-1}s_1 = \frac{\|F\|^{n-1}}{\|F^{-1}\|}. \tag{1.1}$$

Отметим еще два свойства спектральной нормы, которые также будут полезны нам в дальнейшем. Во-первых, для любой $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено равенство [40, с. 373] $\|F^*\| = \|F\|$. Во-вторых, имеет место оценка [40, с. 378]

$$\|F\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \|Fe_i\|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n}\max\{\|Fe_i\|\colon\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Множество всех упорядоченных по возрастанию наборов из n вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Для фиксированного набора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ и произвольного $\delta > 0$ через $\mathcal{O}_\delta(\mu)$ обозначим совокупность всех таких наборов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$, что $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |\nu_j - \mu_j| < \delta$. Таким образом, $\mathcal{O}_\delta(\mu)$ — это δ-окрестность набора μ во множестве $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

Рассмотрим линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m), \tag{1.2}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n\times n}$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* на $\mathbb{N}$ [16], т. е. при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0, что

$$\|A\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0.$$

Здесь и ниже использовано обозначение $\|A\|_\infty \doteq \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|A(m)\|$. Заметим, что при всех m выполнены неравенства

$$\|A\|_\infty + \|A^{-1}\|_\infty \geqslant \|A(1)\| + \|A(1)\|^{-1} \geqslant 2, \tag{1.3}$$

поэтому $a_0 \geqslant 1$.

Для произвольных $m_0 \in \mathbb{N}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ введем начальное условие

$$x(m_0) = x_0. \tag{1.4}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. *Задачей Коши* для системы (1.2) называется задача о поиске решений системы (1.2), удовлетворяющих начальным условиям (1.4).

О п р е д е л е н и е 1.2. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) системы (1.2) называется совокупность из n линейно независимых решений этой системы.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)$ — некоторая ФСР системы (1.2). *Фундаментальной матрицей* системы (1.2) называется матрица

$$\Phi(\cdot) = \big[x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)\big].$$

Хорошо известно (см., например, [14]), что для произвольных $m_0 \in \mathbb{N}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши (1.2), (1.4) существует, единственно и продолжаемо на все множество натуральных чисел; ФСР системы (1.2) существует; множество всех фундаментальных матриц этой системы совпадает со множеством

$$\big\{\Phi(\cdot)C\colon C \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det C \neq 0\big\},$$

и общее решение системы (1.2) имеет вид

$$x_0(m,c) = \sum_{i=1}^{n} c_i x^i(m) = \Phi(m)c,\ m \in \mathbb{N},$$

где $\Phi(\cdot) = \big[x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)\big]$ — произвольная фундаментальная матрица системы (1.2), $c = \operatorname{col}(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ — произвольный постоянный вектор.

О п р е д е л е н и е 1.4. Пусть $\Phi(\cdot)$ — некоторая фундаментальная матрица системы (1.2). Матрицей Коши системы (1.2) называется матрица

$$X_A(m,s) = \Phi(m)\Phi^{-1}(s),$$

где m, s — натуральные числа.

Тогда [14, с. 13–14] для каждого решения $x(\cdot)$ этой системы имеет место равенство

$$x(m) = X_A(m,s)x(s) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{N},$$

и

$$X_A(m,s) = \begin{cases} \prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) & \text{при } m > s, \\ E & \text{при } m = s, \\ X_A^{-1}(s,m) & \text{при } m < s. \end{cases}$$

Здесь и всюду ниже полагаем $\prod\limits_{l=s}^{m-1} A(l) = A(m-1)A(m-2)\cdots A(s)$, т. е. матрицы перемножаются в порядке убывания индекса. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ выполнена оценка

$$\|X_A(m,s)\| \leqslant a_0^{|m-s|}.$$

Напомним теперь основные понятия асимптотической теории линейных систем с дискретным временем (см., например, [14]).

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1.2) определим его *показатель Ляпунова* равенством

$$\lambda[x] \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\|x(m)\|$$

и обозначим через Λ *спектр* показателей Ляпунова системы (1.2), т. е. множество всех $\lambda\in\mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1.2) с показателем λ. Известно [14, с. 51–52], что множество Λ состоит не более, чем из n различных чисел и расположено на отрезке $[-\ln a_0, \ln a_0]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_p\}$, где $\Lambda_1<\ldots<\Lambda_p$, $p\leqslant n$. Показатель тривиального решения системы (1.2) полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j\in\{1,\ldots,p\}$ рассмотрим множество $\mathcal{E}_j$ всех решений системы (1.2), показатели которых не превосходят Λ_j. Множество $\mathcal{E}_0$ считаем состоящим из тривиального решения системы (1.2).

Тогда [14, с. 54] каждое из множеств $\mathcal{E}_j$ является линейным подпространством, и размерность $\dim\mathcal{E}_j$ пространства $\mathcal{E}_j$ равна N_j, где N_j — количество линейно независимых решений системы (1.2), имеющих характеристический показатель Λ_j; $N_0=\dim\mathcal{E}_0\doteq 0$.

Поскольку $\mathcal{E}_j\subset\mathcal{E}_l$ при $j<l$, то $N_0<N_1<\ldots<N_p$, при этом $N_p=n$.

Возьмем произвольную ФСР $\Phi(\cdot)=\bigl\{x^1(\cdot),\ldots,x^n(\cdot)\bigr\}$ системы (1.2), и для каждого $j\in\{1,\ldots,p\}$ рассмотрим величину n_j — количество решений с показателем Λ_j, входящих в $\Phi(\cdot)$. Известно [14, с. 54], что справедливы неравенства

$$n_1+\ldots+n_j\leqslant N_j,\quad j=1,\ldots,p.$$

О п р е д е л е н и е 1.5 (см. [14, с. 53]). ФСР $\Phi(\cdot)$ называется *нормальной*, если для нее выполнены строгие равенства

$$n_1+\ldots+n_j=N_j,\quad j=1,\ldots,p.$$

О п р е д е л е н и е 1.6 (см. [14, с. 55]). Говорят, что ФСР $\Phi(\cdot)$ обладает *свойством несжимаемости*, если для любой нетривиальной линейной комбинации $y(\cdot)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx^j(\cdot)$ входящих в нее решений справедливо равенство

$$\lambda[y]=\max\bigl\{\lambda[x^j]\colon c_j\neq 0\bigr\}.$$

Известно [14, с. 55], что ФСР $\Phi(\cdot)$ нормальна тогда и только тогда, когда она обладает свойством несжимаемости. Отсюда вытекают два важных следствия:

1) во всех нормальных ФСР системы (1.2) число n_j решений с характеристическим показателем Λ_j одно и то же (и совпадает с величиной N_j-N_{j-1}), $j=1,\ldots,p$;

2) всякая нормальная ФСР реализует весь спектр системы (1.2), т. е. множество чисел $\bigl\{\lambda[x^j]\colon j=1,\ldots,n\bigr\}$ совпадает с ее спектром.

Итак, каждой линейной однородной дискретной системе (1.2) соответствует n чисел — показателей Ляпунова нетривиальных решений, входящих в ее произвольную нормальную ФСР: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Это множество называется *полным спектром* показателей Ляпунова системы (1.2) [14, с. 57]. В дальнейшем будем обозначать его

$$\lambda(A)=\bigl(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\bigr),$$

считая при этом, что $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$. Таким образом, $\lambda(A)\in\mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

О п р е д е л е н и е 1.7. *Преобразованием Ляпунова* системы (1.2) называется линейное преобразование вида
$$y(m) = L(m)x(m), \tag{1.5}$$
где матрица $L\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вполне ограничена. Матрица $L(\cdot)$ при этом называется *матрицей Ляпунова*. Системы (1.2) и

$$y(m+1) = C(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

называются *асимптотически эквивалентными* (или *приводимыми* друг к другу), если существует связывающее их преобразование Ляпунова.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку преобразование Ляпунова (1.5) переводит систему (1.2) в систему
$$\begin{aligned} y(m+1) = L(m+1)x(m+1) = L(m+1)A(m)x(m) = \\ = L(m+1)A(m)L^{-1}(m)y(m), \end{aligned} \tag{1.7}$$

то системы (1.2) и (1.6) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется матрица Ляпунова $L(\cdot)$, обеспечивающая выполнение тождества

$$C(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что преобразование Ляпунова сохраняет свойство полной ограниченности матрицы системы, а также такие асимптотические (при $m \to +\infty$) характеристики системы, как полный спектр показателей Ляпунова, свойство устойчивости и т. п. (см. [14]).

Имеет место следующее достаточное условие асимптотической эквивалентности систем (1.2) и (1.6).

Т е о р е м а 1.1 (см. [42]). *Если существует строго возрастающая последовательность $\big(m_i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел, такая, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнены равенства*

$$X_C\left(m_{i+1}, m_i\right) = X_A\left(m_{i+1}, m_i\right)$$

и неравенства $m_{i+1}-m_i \leqslant c < \infty$, то системы (1.2) *и* (1.6) *асимптотически эквивалентны.*

Рассмотрим теперь линейную неоднородную систему с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m) + f(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n.$$

Имеет место *формула Коши* для произвольного решения $x(\cdot)$ этой системы [14, с. 20]:

$$x(m) = X_A(m, m_0)x(m_0) + \sum_{s=m_0}^{m-1} X_A(m, s+1)f(s), \quad m > m_0, \tag{1.8}$$

при каждом $m_0 \in \mathbb{N}$.

§ 2. Аддитивные и мультипликативные возмущения. Устойчивость показателей Ляпунова

Нас будет интересовать вопрос о поведении полного спектра показателей Ляпунова системы (1.2) под действием различных возмущений ее коэффициентов.

О п р е д е л е н и е 2.1 (см. [2, 60]). Пусть зафиксирован некоторый класс возмущений матрицы коэффициентов $A(\cdot)$ системы (1.2). *Спектральным множеством* системы (1.2), отвечающим заданному классу возмущений, будем называть совокупность полных спектров показателей Ляпунова возмущенных систем, когда возмущения пробегают весь заданный класс.

Сначала рассмотрим возмущенную систему в виде

$$y(m+1) = \big(A(m) + Q(m)\big)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Систему (2.1) будем называть *аддитивно возмущенной* по отношению к системе (1.2), а сами возмущения $Q(\cdot)$ — *аддитивными*. Чтобы возмущенная система (2.1) обладала полным спектром показателей Ляпунова, состоящим из n чисел, достаточно потребовать от аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ полной ограниченности матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$. По этой причине введем понятие допустимого аддитивного возмущения.

Определение 2.2 (см. [2, 60]). Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ будем называть *допустимым* для системы (1.2), если матрица $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Лемма 2.1 (см. [2]). *Аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для системы* (1.2) *в том и только том случае, когда существует такая вполне ограниченная матрица $R\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, что*

$$Q(m) = A(m)R(m) - A(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ допустимо для (1.2). Положим

$$R(m) = A^{-1}(m)\big(A(m) + Q(m)\big), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда равенство (2.2) выполнено, а из полной ограниченности матриц $A(\cdot)$ и $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вытекает полная ограниченность $R(\cdot)$.

Достаточность. Пусть $R(\cdot)$ вполне ограничена. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (2.2). Тогда

$$A(m) + Q(m) = A(m)R(m), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

и полная ограниченность матрицы $A(\cdot) + Q(\cdot)$ вытекает из полной ограниченности $A(\cdot)$ и $R(\cdot)$. Лемма доказана. □

Равенство (2.3) позволяет записать возмущенную по отношению к (1.2) систему в виде

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

Матрицу $R(\cdot)$ в этом случае называем *мультипликативным возмущением* матрицы системы (1.2), а саму систему (2.4) — *мультипликативно возмущенной* по отношению к системе (1.2). Если матрица $A(\cdot)R(\cdot)$ вполне ограничена, то полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (2.4) состоит из n чисел. Так как по условию матрица $A(\cdot)$ вполне ограничена, то приходим к следующему определению.

Определение 2.3 (см. [2, 60]). Мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ будем называть *допустимым*, если матрица $R(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Замечание 2. Отметим, что для всякой линейной однородной системы вида (1.2) множество допустимых мультипликативных возмущений одно и то же, в то время как множество допустимых аддитивных возмущений зависит от выбора матрицы $A(\cdot)$ системы (1.2).

Из леммы 2.1 и определений 2.2 и 2.3 вытекает следствие.

Следствие 2.1 (см. [2]). *Множество $\mathcal{Q}$ всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида* (2.1) *совпадает со множеством $\mathcal{R}$ всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида* (2.4).

Теперь рассмотрим подмножества множеств $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$. Для произвольного $\delta > 0$ обозначим через $\mathcal{Q}_\delta$ множество всех допустимо аддитивно возмущенных систем вида (2.1), возмущения $Q(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|Q(m)\| < \delta,$$

а через $\mathcal{R}_\delta$ — множество всех допустимо мультипликативно возмущенных систем вида (2.4), возмущения $R(\cdot)$ которых удовлетворяют неравенству

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta.$$

Л е м м а 2.2 (см. [2]). *Для каждого $\delta > 0$ справедливы включения $\mathcal{Q}_\delta \subset \mathcal{R}_{a_0\delta}$, $\mathcal{R}_\delta \subset \mathcal{Q}_{a_0\delta}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала первое включение. Пусть допустимое аддитивное возмущение $Q(\cdot)$ таково, что

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|Q(m)\| < \delta.$$

Тогда система (2.1) с матрицей коэффициентов $A(\cdot) + Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_\delta$. Положим

$$R(m) = E + A^{-1}(m)Q(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда из леммы 2.1 следует, что $R(\cdot)$ — допустимое мультипликативное возмущение, причем $R(m) - E = A^{-1}(m)Q(m)$, поэтому

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < a_0\delta.$$

Это означает, что система (2.4) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_{a_0\delta}$. Но при всех m справедливы равенства

$$A(m)R(m) = A(m) + Q(m),$$

откуда вытекает доказываемое включение.

Теперь докажем второе включение. Пусть допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ таково, что

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta.$$

Тогда система (2.4) с матрицей коэффициентов $A(\cdot)R(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{R}_\delta$. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (2.2). Тогда из леммы 2.1 следует, что $Q(\cdot)$ — допустимое аддитивное возмущение, причем

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \|Q(m)\| \leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} \bigl(\|A(m)\|\, \|R(m) - E\|\bigr) < a_0\delta.$$

Это означает, что система (2.1) с матрицей коэффициентов $A(\cdot) + Q(\cdot)$ принадлежит множеству $\mathcal{Q}_{a_0\delta}$. Но при всех m справедливы равенства

$$A(m)R(m) = A(m) + Q(m),$$

что и доказывает лемму. $\square$

Для произвольного допустимого аддитивного возмущения $Q(\cdot)$ обозначим через

$$\lambda(A + Q) = \bigl(\lambda_1(A + Q), \ldots, \lambda_n(A + Q)\bigr) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$$

полный спектр показателей Ляпунова системы (2.1). Спектральное множество системы (1.2), отвечающее классу всевозможных допустимых для этой системы аддитивных возмущений, будем обозначать $\lambda(\mathcal{Q})$. Аналогично для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{Q}_\delta)$ — спектральное множество системы (1.2), отвечающее классу допустимых аддитивных возмущений $Q(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|Q(m)\| < \delta$.

Далее, пусть
$$\lambda(AR) = \bigl(\lambda_1(AR), \ldots, \lambda_n(AR)\bigr) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$$
— полный спектр показателей Ляпунова системы (2.4) для произвольного допустимого мультипликативного возмущения $R(\cdot)$. Спектральное множество системы (1.2), отвечающее классу всевозможных мультипликативных возмущений, обозначаем $\lambda(\mathcal{R})$, а для произвольного $\delta > 0$ положим $\lambda(\mathcal{R}_\delta)$ — спектральное множество системы (1.2), отвечающее классу допустимых мультипликативных возмущений $R(\cdot)$, удовлетворяющих оценке $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|R(m) - E\| < \delta$.

Тогда из следствия 2.1 и леммы 2.2 получаем такое утверждение.

С л е д с т в и е 2.2 (см. [2]). *Множества $\lambda(\mathcal{Q})$ и $\lambda(\mathcal{R})$ совпадают. Для каждого $\delta > 0$ имеют место включения $\lambda(\mathcal{Q}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{R}_{a_0\delta})$, $\lambda(\mathcal{R}_\delta) \subset \lambda(\mathcal{Q}_{a_0\delta})$.*

Обратимся теперь к вопросу о поведении полного спектра показателей Ляпунова системы (1.2) при различных возмущениях ее коэффициентов.

О п р е д е л е н и е 2.4. Показатели Ляпунова системы (1.2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой аддитивно возмущенной системы вида (2.1) из множества $\mathcal{Q}_\delta$ выполнены неравенства
$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(A+Q)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$
то есть имеет место включение $\lambda\bigl(\mathcal{Q}_\delta\bigr) \subset O_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$.

З а м е ч а н и е 3. Определение 2.4 представляет собой непосредственный перенос на линейные системы с дискретным временем аналогичного определения для линейных систем с непрерывным временем (см., например, [19, с. 72]).

Из леммы 2.2 вытекает, что определение 2.4 эквивалентно следующему определению.

О п р е д е л е н и е 2.5 (см. [2]). Показатели Ляпунова системы (1.2) называются *устойчивыми*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида (2.4) из множества $\mathcal{R}_\delta$ выполнены неравенства
$$|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$
то есть имеет место включение $\lambda\bigl(\mathcal{R}_\delta\bigr) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$.

По аналогии с системами с непрерывным временем, введем понятия центральных показателей системы (1.2). Эти показатели играют ключевую роль в поведении показателей Ляпунова при возмущениях коэффициентов системы (1.2).

О п р е д е л е н и е 2.6 (см. [2]). *Верхним центральным показателем* (Винограда) системы (1.2) будем называть величину
$$\Omega(A) = \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln\bigl\|X_A\bigl(jT+1, (j-1)T+1\bigr)\bigr\| =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^{m} \ln\Bigl\| \prod_{l=(j-1)T+1}^{jT} A(l)\Bigr\|,$$

младшим центральным показателем (Миллионщикова) — величину

$$\overline{\omega}(A)=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\bigl\|X_A\bigl((j-1)T+1,jT+1\bigr)\bigr\|^{-1}=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\Bigl\|\Bigl(\prod_{l=(j-1)T+1}^{jT}A(l)\Bigr)^{-1}\Bigr\|^{-1}.$$

Величины T и m здесь считаем пробегающими множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Замечание 4. Понятие верхнего центрального показателя для систем с непрерывным временем было введено Р. Э. Виноградом [13], а понятие младшего центрального показателя — В. М. Миллионщиковым [31].

Имеет место следующий критерий устойчивости полного спектра показателей Ляпунова.

Теорема 2.1 (В. М. Миллионщиков [32]; Б. Ф. Былов и Н. А. Изобов [11]). *Показатели Ляпунова системы* (1.2) *устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова* (1.5)*, приводящее систему* (1.2) *к системе*

$$y(m+1)=D(m)y(m),\quad m\in\mathbb{N},\quad y\in\mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

с блочно-диагональной матрицей $D(m)=\operatorname{diag}\bigl(D_1(m),\dots,D_p(m)\bigr)$*, обладающей следующими свойствами:*

1) *для каждого* $j\in\{1,\dots,p\}$ *матрица* $D_j(m)$ *нижняя треугольная размерами* $n_j\times n_j$;

2) *имеют место равенства* $\Omega(D_j)=\overline{\omega}(D_j)=\Lambda_j,\ j=1,\dots,p$;

3) *блоки* $D_1(\cdot),\dots,D_p(\cdot)$ *интегрально отделены, то есть существуют такие* $\alpha>1$ *и* $\gamma>0$*, что при всех* $m>s$ *и* $j\in\{1,\dots,p-1\}$ *справедливы неравенства*

$$\Bigl\|\Bigl(\prod_{l=s}^{m-1}D_{j+1}(l)\Bigr)^{-1}\Bigr\|^{-1}\geqslant\gamma\alpha^{m-s}\Bigl\|\prod_{l=s}^{m-1}D_j(l)\Bigr\|.$$

Замечание 5. Из свойства 2) теоремы 2.1 следует [11,32], что диагональные элементы $d_{ii}(\cdot)$ матрицы $D(\cdot)$ таковы, что при всех $j\in\{1,\dots,p\}$ и $i\in n_j$ выполнены равенства

$$\overline{d_{ii}}\doteq\varlimsup_{m\to\infty}m^{-1}\sum_{l=1}^{m}\ln|d_{ii}(l)|=\Lambda_j;$$

запись $i\in n_j$ здесь и ниже означает, что $i\in\{n_0+\ldots+n_{j-1}+1,\dots,n_0+\ldots+n_j\}$, где $n_0\doteq 0$.

§ 3. Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова

Эффект неустойчивости показателей Ляпунова при малых аддитивных возмущениях матрицы коэффициентов линейной системы с непрерывным временем был установлен О. Перроном в работе [59] (см. также [19, с. 23–24], [1, с. 194–195]). Ниже на основании примера Перрона системы с непрерывным временем и неустойчивыми показателями Ляпунова сконструирован соответствующий пример системы с дискретным временем, при этом возмущение матрицы коэффициентов системы (1.2) построено мультипликативным.

П р и м е р 3.1 (см. [3]). Рассмотрим систему второго порядка

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

с матрицей коэффициентов

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & e^{(m+1)\sin\ln(m+1) - m\sin\ln m - 2a} \end{pmatrix},$$

где параметр a принадлежит интервалу $(0,1)$.

Проверим, что матрица $A(\cdot)$ системы (3.1) вполне ограничена на $\mathbb{N}$. С этой целью введем в рассмотрение функции

$$f(t) = t\sin\ln t, \quad \varphi(t) = e^{-f(t)}, \quad t \geqslant 1.$$

Тогда

$$A(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e^{2a}} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}(m) = \begin{pmatrix} e^{a} & 0 \\ 0 & \frac{\varphi(m)e^{2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$|f'(t)| = |\sin\ln t + \cos\ln t| = \big|\sqrt{2}\sin\big(\ln t + \pi/4\big)\big| \leqslant \sqrt{2}, \quad t \geqslant 1, \tag{3.2}$$

то для каждого $m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства

$$|f(m+1) - f(m)| \leqslant \max_{t\in[m,m+1]} |f'(t)| \leqslant \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e^{2a}}\right| &= e^{-f(m+1)+f(m)-2a} \leqslant e^{|f(m+1)-f(m)|-2a} \leqslant e^{\sqrt{2}-2a}, \\ \left|\frac{\varphi(m)e^{2a}}{\varphi(m+1)}\right| &= e^{-f(m)+f(m+1)+2a} \leqslant e^{|f(m+1)-f(m)|+2a} \leqslant e^{\sqrt{2}+2a}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

откуда вытекает полная ограниченность матрицы $A(\cdot)$.

Рассмотрим решения $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$ системы (3.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$x^j(1) = e_j, \ j = 1, 2.$$

Тогда при всех $m > 1$

$$x^1(m) = X(m,1)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_1 = \prod_{l=1}^{m-1} e^{-a}e_1 = \begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x^2(m) = X(m,1)e_2 = \prod_{l=1}^{m-1} A(l)e_2 =$$

$$= \prod_{l=1}^{m-1} e^{(l+1)\sin\ln(l+1) - l\sin\ln l - 2a}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{m\sin\ln m - 2a(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя характеристические показатели Ляпунова решений $x^1(\cdot)$ и $x^2(\cdot)$, получим

$$\lambda[x^1] = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln\left|e^{-a(m-1)}\right| = -a,$$

$$\lambda[x^2] = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \ln\left|e^{m\sin\ln m - 2a(m-1)}\right| = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{m\sin\ln m - 2a(m-1)}{m} =$$

$$= \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m + \lim_{m\to\infty} \frac{-2a(m-1)}{m} = \varlimsup_{m\to\infty} \sin\ln m - 2a.$$

Для вычисления $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sin\ln m$ рассмотрим последовательности

$$t_k = e^{(2k+1/2)\pi},\ m_k = [t_k]+1, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$1 \geqslant \overline{\lim_{m\to\infty}} \sin\ln m \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}} \sin\ln m_k = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sin\bigl(\ln t_k + \ln(m_k/t_k)\bigr) =$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \Bigl(\sin\ln t_k \cos\ln(m_k/t_k) + \cos\ln t_k \sin\ln(m_k/t_k)\Bigr) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \cos\ln(m_k/t_k) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \cos\ln(m_k/t_k) = \cos\ln\bigl(\lim_{k\to\infty} m_k/t_k\bigr) = \cos\ln 1 = 1.$$

Таким образом, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \sin\ln m = 1$, и $\lambda[x^2] = 1-2a$.

Из условия $a<1$ вытекает, что $\lambda[x^1] < \lambda[x^2]$, поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (3.1) состоит из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1-2a.$$

Зафиксируем произвольное $\gamma>0$ и рассмотрим мультипликативное возмущение

$$R(m) = \{r_{ij}(m)\}_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\frac{e^{-am}}{\varphi(m)}\displaystyle\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Докажем, что оно является допустимым. Из оценки (3.2) получаем, что для всех $m\in\mathbb{N}$ и $\widehat{\tau}\in[m,m+1]$, в силу теоремы Лагранжа, выполнено неравенство

$$|f(m)-f(\widehat{\tau})| = |m\sin\ln m - \widehat{\tau}\sin\ln\widehat{\tau}| \leqslant \max_{t\in[m,m+1]} |f'(t)|\cdot|m-\widehat{\tau}| \leqslant \sqrt{2}.$$

Воспользуемся полученным результатом для оценки величины

$$\frac{1}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

В силу теоремы о среднем для определенного интеграла найдется $\widehat{\tau}\in[m,m+1]$ такое, что

$$\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau = \varphi(\widehat{\tau}),$$

поэтому

$$\frac{1}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau = \frac{\varphi(\widehat{\tau})}{\varphi(m)} = e^{m\sin\ln m - \widehat{\tau}\sin\ln\widehat{\tau}} = e^{f(m)-f(\widehat{\tau})} \leqslant e^{|f(m)-f(\widehat{\tau})|} \leqslant e^{\sqrt{2}}.$$

Из неравенства, связывающего спектральную и максимальную столбцовую норму матрицы [40, с. 378], получаем

$$\|R(m)\| \leqslant \sqrt{2}\bigl(1+|r_{21}(m)|\bigr) = \sqrt{2}\Bigl(1+\gamma\frac{e^{-am}}{\varphi(m)}\int_m^{m+1}\varphi(\tau)\,d\tau\Bigr) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2}\bigl(1+\gamma e^{-am}e^{\sqrt{2}}\bigr) \leqslant \sqrt{2}\bigl(1+\gamma e^{\sqrt{2}}\bigr), \quad m\in\mathbb{N}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\|R^{-1}(m)\| = \|R(m)\|$. Следовательно, выбранная функция $R(\cdot)$ является вполне ограниченной и поэтому принадлежит множеству $\mathcal{R}$ допустимых мультипликативных возмущений.

Далее,

$$\|R(m)-E\| = \gamma \frac{e^{-am}}{\varphi(m)} \int_m^{m+1} \varphi(\tau)\,d\tau \leqslant \gamma e^{-am} e^{\sqrt{2}} \leqslant \gamma e^{-a+\sqrt{2}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что если $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, то $\|R(\cdot)-E\|_\infty < \delta$, то есть $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$.

Рассмотрим допустимо мультипликативную возмущенную по отношению к (3.1) систему

$$y(m+1) = A(m)R(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^2. \tag{3.5}$$

Матрица коэффициентов этой системы имеет вид

$$A(m)R(m) = \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)} \displaystyle\int_m^{m+1} \varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix}.$$

Пусть $X_{AR}(m,s)$ — матрица Коши системы (3.5). Тогда для каждого решения $y(\cdot)$ этой системы и произвольного $m \in \mathbb{N}$

$$y(m+1) = X_{AR}(m+1,1)y(1) = \prod_{l=1}^{m} A(l)R(l)y(1) =$$
$$= A(m)R(m)A(m-1)R(m-1)\ldots A(2)R(2)A(1)R(1)y(1) =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-am-2a}}{\varphi(m+1)} \displaystyle\int_m^{m+1} \varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m)e^{-2a}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-a(m-1)-2a}}{\varphi(m)} \displaystyle\int_{m-1}^{m} \varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(m-1)e^{-2a}}{\varphi(m)} \end{pmatrix}$$
$$\ldots \begin{pmatrix} e^{-a} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-a-2a}}{\varphi(2)} \displaystyle\int_1^{2} \varphi(\tau)\,d\tau & \frac{\varphi(1)e^{-2a}}{\varphi(2)} \end{pmatrix} y(1) = \begin{pmatrix} e^{-ma} & 0 \\ \gamma \frac{e^{-(2m+1)a}}{\varphi(m+1)} \displaystyle\int_1^{m+1} \varphi(\tau)\,d\tau & \frac{e^{-2ma}}{\varphi(m+1)} \end{pmatrix} y(1).$$

Следовательно, решения системы (3.5) с начальными условиями

$$y^1(1) = e_1, \quad y^2(1) = e_2$$

имеют вид

$$y^1(m) = \begin{pmatrix} y_1^1(m) \\ y_2^1(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-a(m-1)} \\ \gamma \frac{e^{-(2m-1)a}}{\varphi(m)} \displaystyle\int_1^{m} \varphi(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}, \qquad y^2(m) = \begin{pmatrix} y_1^2(m) \\ y_2^2(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2(m-1)a}}{\varphi(m)} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $y^2(m) \equiv x^2(m)$, поэтому

$$\lambda[y^2] = \lambda[x^2] = 1-2a.$$

Найдем показатель Ляпунова решения $y^1(\cdot)$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \frac{e^{-2at}}{\varphi(t)} \int_1^t \varphi(\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 1.$$

Вновь возьмем последовательности

$$t_k \doteq e^{(2k+1/2)\pi}, \quad m_k \doteq [t_k]+1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varphi(t_k) = e^{-t_k \sin \ln t_k} = e^{-t_k}.$$

Отметим, что $\varphi(\tau) > 0$ при всех $\tau \geqslant 1$ и $[t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}] \subset [1, t_k] \subset [1, m_k)$, поэтому

$$\int_1^{m_k} \varphi(\tau)\, d\tau > \int_1^{t_k} \varphi(\tau)\, d\tau > \int_{t_k e^{-\pi}}^{t_k e^{-2\pi/3}} \varphi(\tau)\, d\tau \geqslant t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) \min_{\tau \in [t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}]} \varphi(\tau).$$

Найдем минимальное значение функции $\varphi(\cdot)$ на отрезке

$$J_k \doteq [t_k e^{-\pi}, t_k e^{-2\pi/3}] = [e^{(2k-1/2)\pi}, e^{(2k-1/6)\pi}].$$

Так как

$$\varphi'(t) = -e^{-t \sin \ln t} (\sin \ln t + \cos \ln t) = -\sqrt{2} e^{-t \sin \ln t} \sin(\ln t + \pi/4), \tag{3.6}$$

то отрезок J_k содержит единственную критическую точку $e^{(2k-1/4)\pi}$ функции $\varphi(\cdot)$, в которой производная функции меняет знак с «$+$» на «$-$». Следовательно, минимальное значение функции достигается на одном из концов отрезка J_k. Сравнивая значения функции $\varphi(\cdot)$ на концах отрезка, получаем, что это минимальное значение достигается в левом конце $\tau_k \doteq e^{(2k-1/2)\pi}$, при этом

$$\min_{t \in J_k} \varphi(t) = \varphi(\tau_k) = e^{\tau_k} = e^{t_k e^{-\pi}}.$$

Тогда

$$\int_1^{m_k} \varphi(\tau)\, d\tau > t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{t_k e^{-\pi}}.$$

Из равенства (3.6) получаем, что функция $\varphi(\cdot)$ убывает на отрезке

$$\left[e^{(2k-1/4)\pi}, e^{(2k+3/4)\pi}\right],$$

который содержит в себе отрезок $[t_k, m_k]$, поэтому $\varphi(t_k) > \varphi(m_k)$. Кроме того, $m_k \leqslant t_k + 1$. Следовательно,

$$\psi(m_k) = \frac{e^{-2am_k}}{\varphi(m_k)} \int_1^{m_k} \varphi(\tau)\, d\tau > \frac{e^{-2a(t_k+1)}}{\varphi(t_k)} \int_1^{m_k} \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{e^{-2a(t_k+1)}}{e^{-t_k}} \int_1^{m_k} \varphi(\tau)\, d\tau > e^{-2a} e^{(1-2a)t_k} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{t_k e^{-\pi}} =$$

$$= e^{-2a} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k}.$$

Тогда

$$y_2^1(m_k) = \gamma e^a \psi(m_k) > \gamma e^{-a} t_k \left(e^{-2\pi/3} - e^{-\pi}\right) e^{(1-2a+e^{-\pi})t_k},$$

поэтому

$$\lambda[y^1] \geqslant \lambda[y_2^1] \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} m_k^{-1} \ln |y_2^1(m_k)| \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln t_k + \bigl(1 - 2a + e^{-\pi}\bigr) t_k}{m_k} =$$

$$= \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\ln t_k + \bigl(1 - 2a + e^{-\pi}\bigr) t_k}{t_k} \cdot \frac{t_k}{m_k} = 1 - 2a + e^{-\pi}.$$

Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR)$ возмущенной системы (3.5) состоит из чисел

$$\lambda_1(AR) = \lambda[y^2] = 1 - 2a, \quad \lambda_2(AR) = \lambda[y^1] \geqslant 1 - 2a + e^{-\pi},$$

а спектр $\lambda(A)$ невозмущенной системы (3.1) — из чисел

$$\lambda_1(A) = \lambda[x^1] = -a, \quad \lambda_2(A) = \lambda[x^2] = 1 - 2a.$$

Возьмем $\varepsilon = (1-a)/2 > 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется допустимое мультипликативное возмущение $R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta$ вида (3.4), где $\gamma < \delta e^{a-\sqrt{2}}$, такое, что

$$|\lambda_1(AR) - \lambda_1(A)| = \lambda_1(AR) - \lambda_1(A) = 1 - 2a + a = 1 - a > \varepsilon.$$

Следовательно, $\lambda(AR) \notin \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$. Это означает, что показатели Ляпунова системы (3.1) неустойчивы.

§ 4. Интегральная разделенность линейной системы с дискретным временем

В этом параграфе будем рассматривать свободную линейную систему (1.2). Как и прежде, через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\big) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ будем обозначать полный спектр показателей Ляпунова этой системы.

З а м е ч а н и е 6. Рассмотрим диагональную систему

$$y(m+1) = \operatorname{diag}\big(c_1(m), \ldots, c_n(m)\big) y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

с вполне ограниченной матрицей $C(\cdot) = \operatorname{diag}\big(c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)\big)$. Обозначим через $Y(m,s)$ матрицу Коши системы (4.1). Тогда при всех $m > 1$

$$Y(m,1) = \prod_{l=1}^{m-1} C(l) = \operatorname{diag}\Big(\prod_{l=1}^{m-1} c_1(l), \ldots, \prod_{l=1}^{m-1} c_n(l)\Big),$$

то есть $Y(m,1) = \big[y^1(m), \ldots, y^n(m)\big]$, где

$$y^i(m) = e_i \prod_{l=1}^{m-1} c_i(l), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Матрица $Y(m,1)$ является фундаментальной матрицей системы (4.1). Используя понятие несжимаемости (определение 1.6), нетрудно проверить, что соответствующая фундаментальная система решений $\big\{y^1(\cdot), \ldots, y^n(\cdot)\big\}$ нормальна.

Также будем рассматривать преобразование Ляпунова системы (1.2), но не в виде (1.5), а в виде

$$x(m) = L(m) y(m), \tag{4.3}$$

где матрица $L \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вполне ограничена.

З а м е ч а н и е 7. Применяя преобразование (4.3) к системе (1.2), получим систему

$$\begin{aligned} y(m+1) = L^{-1}(m+1)x(m+1) = L^{-1}(m+1)A(m)x(m) = \\ = L^{-1}(m+1)A(m)L(m)y(m). \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование (4.3) переводит (1.2) в систему (1.6), где

$$C(m) = L^{-1}(m+1)A(m)L(m).$$

Введем понятие интегральной разделенности систем с дискретным временем.

О п р е д е л е н и е 4.1 (см. [4]). Система (1.2) называется *системой с интегральной разделенностью*, если она имеет фундаментальную систему решений $x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)$ такую, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $j < m$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнены неравенства

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(j)\|} \geqslant \gamma a^{m-j} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(j)\|}. \tag{4.4}$$

З а м е ч а н и е 8. Определение 4.1 для систем с непрерывным временем было дано Б. Ф. Быловым в [9].

Приведем (с доказательствами) два свойства интегрально разделенных систем, аналогичные свойствам интегрально разделенных систем с непрерывным временем (см., например, [1]).

Л е м м а 4.1. *Если (1.2) — система с интегральной разделенностью, то ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из n различных чисел.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим фундаментальную систему решений $x^1(\cdot),\dots,x^n(\cdot)$ системы (1.2), для которой выполнены неравенства (4.4). Полагая в этих неравенствах $j=1<m$ и логарифмируя, получим

$$\ln\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(1)\|}\geqslant \ln\left(\gamma a^{m-1}\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(1)\|}\right),$$

отсюда

$$\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\big(\ln\|x^{i+1}(m)\|-\ln\|x^i(m)\|\big)\geqslant \ln a.$$

В то же время

$$\begin{gathered}\varliminf_{m\to\infty}\frac{1}{m}\big(\ln\|x^{i+1}(m)\|-\ln\|x^i(m)\|\big)=\\ =\varliminf_{m\to\infty}\left(\frac{\ln\|x^{i+1}(m)\|}{m}+\frac{\ln\|x^i(m)\|^{-1}}{m}\right)\leqslant\\ \leqslant\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^{i+1}(m)\|+\varliminf_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{m}\ln\|x^i(m)\|\right)=\\ =\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^{i+1}(m)\|-\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\ln\|x^i(m)\|=\lambda[x^{i+1}]-\lambda[x^i],\end{gathered}$$

поэтому $\lambda[x^{i+1}]-\lambda[x^i]\geqslant\ln a>0$ при всех $i\in\{1,\dots,n-1\}$. Это означает, что n различных чисел $\lambda[x^1],\dots,\lambda[x^n]$ образуют полный спектр системы (1.2). Лемма доказана. □

С л е д с т в и е 4.1. *ФСР системы* (1.2)*, для которой выполнены неравенства* (4.4)*, нормальна.*

Л е м м а 4.2. *Интегральная разделенность инвариантна относительно ляпуновских преобразований.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть интегрально разделенная система (1.2) ляпуновским преобразованием (4.3) приводится к системе (1.6). Покажем, что эта система также интегрально разделена. Рассмотрим ее фундаментальную систему решений

$$Y(\cdot)=\big\{L^{-1}(\cdot)x^1(\cdot),L^{-1}(\cdot)x^2(\cdot),\dots,L^{-1}(\cdot)x^n(\cdot)\big\},$$

где $x^1(\cdot),\dots,x^n(\cdot)$ — та фундаментальная система решений системы (1.2), для которой справедливы неравенства (4.4). Пусть постоянная $\ell\geqslant 1$ такова, что $\|L(m)\|\leqslant\ell$, $\|L^{-1}(m)\|\leqslant\ell$ при всех натуральных m. Тогда

$$\|L^{-1}(m)x(m)\|\leqslant\|L^{-1}(m)\|\,\|x(m)\|\leqslant\ell\|x(m)\|$$

и

$$\|x(m)\|=\|L(m)L^{-1}(m)x(m)\|\leqslant\|L(m)\|\,\|L^{-1}(m)x(m)\|\leqslant\ell\|L^{-1}(m)x(m)\|,$$

откуда

$$\|L^{-1}(m)x(m)\|\geqslant\frac{\|x(m)\|}{\ell}.$$

Теперь проверим непосредственно неравенства (4.4) для фундаментальной системы решений $Y(\cdot)$:

$$\begin{gathered}\frac{\|L^{-1}(m)x^{i+1}(m)\|\,\|L^{-1}(j)x^i(j)\|}{\|L^{-1}(j)x^{i+1}(j)\|\,\|L^{-1}(m)x^i(m)\|}\geqslant\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\ell}\cdot\frac{\|x^i(j)\|}{\ell}\cdot\frac{1}{\ell\|x^{i+1}(j)\|\,\ell\|x^i(m)\|}=\\ =\frac{\|x^{i+1}(m)\|\,\|x^i(j)\|}{\ell^4\|x^{i+1}(j)\|\,\|x^i(m)\|}\geqslant\frac{1}{\ell^4}\gamma a^{m-j}\doteq\widetilde{\gamma}a^{m-j}.\end{gathered}$$

Лемма доказана. □

О п р е д е л е н и е 4.2. Функция $c_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально отделенной* от функции $c_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, если при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $s < m$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|c_2(l)|}{|c_1(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Совокупность функций $c_1, \ldots, c_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *интегрально разделенной*, если существует перестановка $(i_1, \ldots, i_n)$ индексов $(1, \ldots, n)$ такая, что для каждого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ функция $c_{i_{j+1}}(\cdot)$ интегрально отделена от функции $c_{i_j}(\cdot)$.

Л е м м а 4.3 (см. [4]). *Если диагональ* $c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)$ *системы* (4.1) *интегрально разделена, то эта система интегрально разделена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(i_1, \ldots, i_n)$ — такая перестановка индексов $(1, \ldots, n)$, что

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|c_{i_{j+1}}(l)|}{|c_{i_j}(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s} \tag{4.5}$$

при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$. Рассмотрим фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \big\{y^{i_1}(\cdot), \ldots, y^{i_n}(\cdot)\big\}$, где $y^i(\cdot)$ определены равенствами (4.2). Так как при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n$

$$\frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|} = \prod_{l=s}^{m-1} |c_{i_j}(l)|,$$

то из неравенства (4.5) вытекает

$$\frac{\|y^{i_{j+1}}(m)\|}{\|y^{i_{j+1}}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|}$$

при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$. Это означает, что система (4.1) интегрально разделена. Лемма доказана. □

Рассмотрим теперь вопрос о приведении системы (1.2) к диагональному виду.

Т е о р е м а 4.1 (см. [4]). *Система* (1.2) *приводима к системе* (4.1) *с вполне ограниченной диагональной матрицей* $C(\cdot) = \operatorname{diag}\big(c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)\big)$ *тогда и только тогда, когда она имеет фундаментальную матрицу*

$$\Phi(\cdot) = \big[x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\big]$$

такую, что при некотором $\rho > 0$ *и всех натуральных* m *выполнено неравенство*

$$|\det \Phi(m)| \geqslant \rho \prod_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (1.2) приводится к диагональному виду (4.1) преобразованием Ляпунова (4.3). Система (4.1) имеет нормальную фундаментальную матрицу

$$\Psi(m) = \big[y_1(m)e^1, \ldots, y_n(m)e^n\big],$$

где $y_j(m) = \prod\limits_{l=1}^{m-1} c_j(l)$. Положим

$$\Phi(m) \doteq \big[x^1(m), \ldots, x^n(m)\big] = L(m)\Psi(m).$$

Это фундаментальная матрица системы (1.2). Пусть

$$L(m) = \big[l^1(m), \ldots, l^n(m)\big].$$

Тогда

$$x^j(m) = l^j(m) y_j(m),$$

поэтому

$$\frac{|\det \Phi(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|} = \frac{|\det L(m)|\,|\det \Psi(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\| \cdot \prod\limits_{j=1}^{n} |y_j(m)|} = \frac{|\det L(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\|}.$$

Так как матрица $L(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$, то при некотором $\ell \geqslant 1$ и всех $m \in \mathbb{N}$ выполнены неравенства $\|L(m)\| \leqslant \ell$, $\|L^{-1}(m)\| \leqslant \ell$, поэтому

$$\|l^j(m)\| = \|L(m)e^j\| \leqslant \|L(m)\| \leqslant \ell, \qquad |\det L(m)| \geqslant \frac{1}{\|L^{-1}(m)\|^n} \geqslant \frac{1}{\ell^n},$$

следовательно,

$$\frac{|\det L(m)|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|l^j(m)\|} \geqslant \frac{1}{\ell^{2n}} \doteq \rho,$$

и неравенство (4.6) выполнено.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\Phi(m) = \big[x^1(m), \ldots, x^n(m)\big]$ — фундаментальная матрица, для которой выполнено условие (4.6). Положим

$$l^j(m) = \frac{x^j(m)}{\|x^j(m)\|}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad m \in \mathbb{N},$$

и построим матрицу $L(m) = \big[l^1(m), \ldots, l^n(m)\big]$. Тогда для матрицы

$$D(m) \doteq \operatorname{diag}\big(\|x^1(m)\|, \ldots, \|x^n(m)\|\big)$$

справедливо равенство

$$\Phi(m) = L(m)D(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Докажем, что $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова. Действительно,

$$\|L(m)\| = \sup_{\|h\|=1} \|L(m)h\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|l^j(m)\| = n,$$

$$|\det L(m)| = \frac{|\det \Phi(m)|}{|\det D(m)|} \geqslant \frac{\rho \prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|}{\prod\limits_{j=1}^{n} \|x^j(m)\|} = \rho,$$

поэтому

$$\|L^{-1}(m)\| \leqslant \frac{\|L(m)\|^{n-1}}{|\det L(m)|} \leqslant \frac{n^{n-1}}{\rho}.$$

К системе (1.2) применим преобразование Ляпунова (4.3) с построенной матрицей $L(\cdot)$. Это преобразование переводит систему (1.2) в систему (1.6), которая имеет фундаментальную матрицу $\Psi(m) = L^{-1}(m)\Phi(m)$, то есть выполнено равенство $\Phi(m) = L(m)\Psi(m)$. Сравнивая его с (4.7), получаем тождество

$$\Psi(m) = D(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Так как фундаментальная матрица линейной однородной системы обращает в тождество эту систему, получаем $\Psi(m+1) = C(m)\Psi(m)$, откуда

$$C(m) = \Psi(m+1)\Psi^{-1}(m) = D(m+1)D^{-1}(m) = \operatorname{diag}\Big(\frac{\|x^1(m+1)\|}{\|x^1(m)\|}, \dots, \frac{\|x^n(m+1)\|}{\|x^n(m)\|}\Big),$$

то есть $C(m)$ — диагональная матрица. Полная ограниченность $C(\cdot)$ вытекает из замечания 1. Теорема доказана. $\square$

Для произвольной фундаментальной системы решений

$$\Phi(\cdot) = \big\{x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)\big\}$$

системы (1.2) обозначим через $\mathcal{L}_i(m)$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы $x^1(m), \dots, x^i(m)$, и через $\beta_i(m) \in (0, \pi/2]$ — угол между $\mathcal{L}_i(m)$ и вектором $x^{i+1}(m)$ (т. е. угол между вектором $x^{i+1}(m)$ и его проекцией на $\mathcal{L}_i(m)$), $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $m \in \mathbb{N}$. В случае необходимости ниже будем подчеркивать зависимость подпространств и углов от выбора $\Phi(\cdot)$ следующим образом: $\mathcal{L}_i(m) = \mathcal{L}_i(m; \Phi)$, $\beta_i(m) = \beta_i(m; \Phi)$.

С л е д с т в и е 4.2 (см. [4]). *Система* (1.2) *приводима к системе* (4.1) *с вполне ограниченной диагональной матрицей* $C(\cdot) = \operatorname{diag}\big(c_1(\cdot), \dots, c_n(\cdot)\big)$ *тогда и только тогда, когда она имеет фундаментальную матрицу*

$$\Phi(\cdot) = [x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)],$$

такую, что при некотором $\beta \in (0, \pi/2]$ *и всех* $i \in \{1, \dots, n-1\}$ *для углов* $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot; \Phi)$ *выполнены неравенства*

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \beta_i(m) \geqslant \beta. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно (см., например, [12, формула (3)]), что

$$|\det \Phi(m)| = \|x^1(m)\| \dots \|x^n(m)\| \sin\beta_1(m) \dots \sin\beta_{n-1}(m), \tag{4.9}$$

поэтому условие (4.6) эквивалентно неравенству

$$\sin\beta_1(m) \dots \sin\beta_{n-1}(m) \geqslant \rho, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Если это неравенство выполнено, то при всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\beta_i(m) \geqslant \sin\beta_i(m) \geqslant \frac{\rho}{\prod\limits_{j \neq i} \sin\beta_j(m)} \geqslant \rho,$$

то есть оценка (4.8) справедлива для $\beta = \rho$.

Обратно, если имеет место условие (4.8), то

$$\sin\beta_i(m) \geqslant \frac{2}{\pi}\beta_i(m) \geqslant \frac{2}{\pi}\beta,$$

поэтому

$$\sin\beta_1(m) \dots \sin\beta_{n-1}(m) \geqslant \big(2\beta/\pi\big)^{n-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и оценка (4.10) выполнена при $\rho = \big(2\beta/\pi\big)^{n-1}$. Следствие доказано. $\square$

Л е м м а 4.4 (см. [4]). *Пусть* $\Phi(\cdot) = \{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\}$ *— ФСР системы* (1.2)*, такая, что при некотором* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$*, всех натуральных* $i \leqslant j-1$ *и* $s \leqslant m$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|}. \tag{4.11}$$

и (4.8)*. Тогда существует такое* $C_j > 0$*, что для каждого нетривиального решения* $z(\cdot) \in \mathcal{L}_j(\cdot)$ *и всех натуральных* $m \geqslant s$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} \leqslant C_j \frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}. \tag{4.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z(\cdot) \in \mathcal{L}_j(\cdot)$ — произвольное нетривиальное решение. Зафиксируем произвольный начальный момент времени $s \in \mathbb{N}$. Пронормируем $x^1(\cdot), \ldots, x^j(\cdot)$ так, чтобы $\|x^l(s)\| = 1$ при всех $l \in \{1, \ldots, j\}$, то есть вместо $x^1(\cdot), \ldots, x^j(\cdot)$ рассмотрим $\tilde{x}^1(\cdot), \ldots, \tilde{x}^j(\cdot)$, где

$$\tilde{x}^l(\cdot) \doteq \frac{x^l(\cdot)}{\|x^l(s)\|}, \quad l = 1, \ldots, j.$$

Отметим, что $\tilde{x}^1(m), \ldots, \tilde{x}^j(m)$ образуют базис линейного подпространства $\mathcal{L}_j(m)$, и нормировка решений не влияет на углы $\beta_i(\cdot)$. Тогда для решения

$$\tilde{z}(\cdot) \doteq \frac{z(\cdot)}{\|z(s)\|} \in \mathcal{L}_j(\cdot)$$

справедливо представление

$$\tilde{z}(m) = \sum_{l=1}^{j} c_l \tilde{x}^l(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

с не зависящими от m константами $c_1, \ldots, c_j$. В равенстве

$$\tilde{z}(s) = \sum_{l=1}^{j} c_l \tilde{x}^l(s)$$

все векторы по норме равны 1, при этом для всех $1 \leqslant l < j$ справедливы неравенства $\beta_l(s) \geqslant \beta$. Отсюда следует [9, лемма 1], что найдется такая не зависящая от выбора $z(\cdot) \in \mathcal{L}_j(\cdot)$ и $s \in \mathbb{N}$ величина $C > 0$, что $|c_l| \leqslant C$. Следовательно, для каждых $z(\cdot) \in \mathcal{L}_j(\cdot)$ и $m \geqslant s \in \mathbb{N}$

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} = \|\tilde{z}(m)\| \leqslant \sum_{l=1}^{j} |c_l| \, \|\tilde{x}^l(m)\| = \sum_{l=1}^{j} |c_l| \, \frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|} \leqslant \sum_{l=1}^{j} C \, \frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|}. \tag{4.13}$$

Из неравенств (4.11) следует, что для каждого $l \in \{1, \ldots, j-1\}$

$$\frac{\|x^l(m)\|}{\|x^l(s)\|} \leqslant \gamma^{-1} a^{-(m-s)} \frac{\|x^{l+1}(m)\|}{\|x^{l+1}(s)\|} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \gamma^{l-j} a^{-(j-l)(m-s)} \frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|} \leqslant \gamma^{l-j} \frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}.$$

Продолжая оценку (4.13), получим

$$\frac{\|z(m)\|}{\|z(s)\|} \leqslant C \cdot \Big(\frac{1}{\gamma^{j-1}} + \frac{1}{\gamma^{j-2}} + \ldots + 1 \Big) \frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|} =: C_j \frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|}.$$

Таким образом, существует такое $C_j > 0$, что при всех $z(\cdot) \in \mathcal{L}_j(\cdot)$ и $m \geqslant s \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство (4.12). Лемма доказана. $\square$

Т е о р е м а 4.2 (см. [4]). *Система* (1.2) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она приводима к интегрально разделенной диагональной системе* (4.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь вытекает непосредственно из леммы 4.2.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\Phi(\cdot) = \{x^1(\cdot), \ldots, x^n(\cdot)\}$ — фундаментальная система решений системы (1.2), для которой выполнены условия (4.11). Докажем, что для углов $\beta_i(m) = \beta_i(m; \Phi)$ справедливы условия (4.8).

Предположим, что это не так, и пусть $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ — наименьший номер, для которого условие (4.8) не выполнено. Тогда существуют строго возрастающая последовательность моментов времени $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и последовательность решений $(z^k(\cdot))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_i(\cdot)$ такие, что

$$\beta_i(m_k) = \sphericalangle\bigl(z^k(m_k), x^{i+1}(m_k)\bigr) < \frac{1}{k}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|z^k(m_k)\| = \|x^{i+1}(m_k)\| = 1$. Тогда

$$0 \leqslant \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| = 2\sin\bigl(\beta_i(m_k)/2\bigr) \leqslant \beta_i(m_k) < 1/k,$$

поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| = 0.$$

Для любого фиксированного $M \in \mathbb{N}$ имеем оценки

$$\begin{gathered}\|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| = \|X(m_k+M, m_k)z^k(m_k) - X(m_k+M, m_k)x^{i+1}(m_k)\| \leqslant \\ \leqslant \|X(m_k+M, m_k)\|\,\|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| \leqslant \prod_{l=m_k}^{m_k+M-1} \|A(l)\| \cdot \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\| \leqslant \\ \leqslant a_0^M \|z^k(m_k) - x^{i+1}(m_k)\|,\end{gathered}$$

следовательно, для каждого фиксированного $M \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| = 0. \tag{4.14}$$

С другой стороны, в силу нашего предположения о минимальности номера i, для которого не выполнено условие (4.8), из леммы 4.4 мы имеем оценку

$$\|z^k(m_k+M)\| = \frac{\|z^k(m_k+M)\|}{\|z^k(m_k)\|} \leqslant C_i \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|},$$

из которой

$$\begin{gathered}\|z^k(m_k+M) - x^{i+1}(m_k+M)\| \geqslant \|x^{i+1}(m_k+M)\| - \|z^k(m_k+M)\| \geqslant \\ \geqslant \|x^{i+1}(m_k+M)\| - C_i\frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} = \frac{\|x^{i+1}(m_k+M)\|}{\|x^{i+1}(m_k)\|} - C_i\frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} \geqslant \\ \geqslant \gamma a^M \frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} - C_i\frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} = \bigl(\gamma a^M - C_i\bigr)\frac{\|x^i(m_k+M)\|}{\|x^i(m_k)\|} \geqslant \bigl(\gamma a^M - C_i\bigr)a_0^{-M}.\end{gathered}$$

Так как $a > 1$, а C_i не зависит от M, то при достаточно больших $M \in \mathbb{N}$ величина в правой части последнего неравенства строго положительна и не зависит от k, что противоречит равенству (4.14).

Из следствия 4.2 получаем, что система (1.2) приводима к диагональной системе (4.1). Интегральная разделенность этой системы вытекает из леммы 4.2. Теорема доказана. □

§ 5. Некоторые свойства интегрально разделенных систем

Т е о р е м а 5.1 (см. [4]). *Если (1.2) — система с интегральной разделенностью, то для всякой нормальной ФСР* $\Psi(\cdot) = \{y^1(\cdot), \dots, y^n(\cdot)\}$ *этой системы, упорядоченной по возрастанию показателей, найдутся такие* $\gamma_1 > 0$ *и* $a > 1$*, что при всех натуральных* $m \geqslant s$ *и* $i \leqslant n-1$ *выполнены неравенства*

$$\frac{\|y^{i+1}(m)\|}{\|y^{i+1}(s)\|} \geqslant \gamma_1 a^{m-s} \frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(\cdot) = \{x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)\}$ — фундаментальная система решений системы (1.2), для которой выполнены условия определения 4.1. Тогда $\Phi(\cdot)$ нормальна и, следовательно, несжимаема, то есть для любой нетривиальной линейной комбинации $y(\cdot) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x^k(\cdot)$ имеет место равенство $\lambda[y] = \max\limits_{c_k \neq 0} \lambda[x_k]$.

Зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{N}$. Вместо фундаментальных систем $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ будем рассматривать фундаментальные системы $\tilde{\Phi}(\cdot)$ и $\tilde{\Psi}(\cdot)$, состоящие из решений $\tilde{x}^j(\cdot) = x^j(\cdot)/\|x^j(s)\|$ и $\tilde{y}^j(\cdot) = y^j(\cdot)/\|y^j(s)\|$ соответственно, то есть пронормируем все решения в момент времени s. Очевидно, что фундаментальная система $\tilde{\Phi}(\cdot)$ несжимаема, поэтому

$$\tilde{y}^j(\cdot) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j \tilde{x}^k(\cdot), \quad j = 1, \dots, n,$$

где $c_j^j \neq 0$. Точно так же, как в доказательстве леммы 4.4, из [9, лемма 1] получаем существование такого $C > 0$, что $|c_k^j| \leqslant C$ при всех $j \in \{1, \dots, n\}$ и $k \in \{1, \dots, j\}$.

Докажем для каждого $j \in \{1, \dots, n\}$ существование такого $B_j > 0$, что для всех натуральных $m \geqslant s$

$$\|\tilde{y}^j(m)\| \geqslant B_j \|\tilde{x}^j(m)\|. \tag{5.1}$$

Действительно, если $j = 1$ или если $c_j^1 = \ldots = c_{j-1}^j = 0$ при $j > 1$, то из условия $\|\tilde{y}^j(s)\| = \|\tilde{x}^j(s)\| = 1$ получаем

$$\tilde{y}^j(m) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j \tilde{x}^k(m) = c_j^j \tilde{x}^j(m) = \pm \tilde{x}^j(m),$$

поэтому неравенство (5.1) выполнено при $B_j = 1$.

Пусть теперь $j > 1$ и не все коэффициенты $c_1^j, \dots, c_{j-1}^j$ равны нулю. Положим

$$z^j(\cdot) = \sum_{k=1}^{j-1} c_k^j \tilde{x}^k(\cdot).$$

Тогда $z^j(\cdot) \in \mathcal{L}_{j-1}(\cdot; \tilde{\Phi})$, причем $z^j(\cdot)$ — нетривиальное решение. Так как нормировка решений не влияет на выполнение неравенств

$$\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(j)\|} \geqslant \gamma a^{m-j} \frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(j)\|},$$

то из доказательства необходимости теоремы 4.2 получаем, что для всех углов $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot; \tilde{\Phi})$ справедливы неравенства

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \beta_i(m) \geqslant \beta, \tag{5.2}$$

а из леммы 4.4 — существование такого $C_{j-1} > 0$, что при всех $m \geqslant s$

$$\frac{\|z^j(m)\|}{\|z^j(s)\|} \leqslant C_{j-1}\frac{\|\tilde{x}^{j-1}(m)\|}{\|\tilde{x}^{j-1}(s)\|} = C_{j-1}\|\tilde{x}^{j-1}(m)\| =$$
$$= C_{j-1}\frac{\|x^{j-1}(m)\|}{\|x^{j-1}(s)\|} \leqslant \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\frac{\|x^j(m)\|}{\|x^j(s)\|} = \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\|\tilde{x}^j(m)\|.$$

Поэтому

$$\|z^j(m)\| \leqslant \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}}\|z^j(s)\| \cdot \|\tilde{x}^j(m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_{j-1}}{\gamma a^{m-s}} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{j-1}|c_k^j|\,\|\tilde{x}^k(s)\|\Big) \cdot \|\tilde{x}^j(m)\| \leqslant \frac{C_{j-1}Cn}{\gamma a^{m-s}}\|\tilde{x}^j(m)\|.$$

Из равенства

$$\tilde{y}^j(m) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j \tilde{x}^k(m) = z^j(m) + c_j^j\tilde{x}^j(m)$$

получаем оценку

$$\|\tilde{y}^j(m)\| \geqslant |c_j^j|\,\|\tilde{x}^j(m)\| - \|z^j(m)\| \geqslant \Big(|c_j^j| - \frac{C_{j-1}Cn}{\gamma a^{m-s}}\Big)\|\tilde{x}^j(m)\|.$$

Так как $a > 1$, то найдется такое $M \in \mathbb{N}$, что при всех $m \geqslant s + M$ выполнено неравенство

$$\|\tilde{y}^j(m)\| \geqslant \frac{|c_j^j|}{2}\|\tilde{x}^j(m)\|.$$

Положим

$$D_j = \min\Big\{\frac{\|\tilde{y}^j(m)\|}{\|\tilde{x}^j(m)\|}\ :\ m = s, s+1, \ldots, s+M-1\Big\}.$$

Тогда при всех $m \in \{s, s+1, \ldots, s+M-1\}$

$$\|\tilde{y}^j(m)\| \geqslant D_j\|\tilde{x}^j(m)\|.$$

Наконец, пусть $B_j \doteq \min\{D_j,\, |c_j^j|/2\}$. Тогда неравенство (5.1) имеет место при всех натуральных $m \geqslant s$.

Заметим, что $y^i(\cdot) \in \mathcal{L}_i(\cdot;\Phi)$, поэтому, в силу леммы 4.4, при всех $m \geqslant s$ имеет место неравенство

$$\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|} \leqslant C_i\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Используя это неравенство и оценку (5.1), получим, что при всех натуральных $m \geqslant s$ и $i \leqslant n-1$

$$\frac{\|y^{i+1}(m)\|}{\|y^{i+1}(s)\|} = \|\tilde{y}^{i+1}(m)\| \geqslant B_{i+1}\|\tilde{x}^{i+1}(m)\| = B_{i+1}\frac{\|x^{i+1}(m)\|}{\|x^{i+1}(s)\|} \geqslant$$
$$\geqslant B_{i+1}\gamma a^{m-s}\frac{\|x^i(m)\|}{\|x^i(s)\|} \geqslant \frac{B_{i+1}}{C_i}\gamma a^{m-s}\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|} =: \gamma_1 a^{m-s}\frac{\|y^i(m)\|}{\|y^i(s)\|}.$$

Теорема доказана. □

С л е д с т в и е 5.1 (см. [4]). *Для всякой нормальной фундаментальной системы решений* $\Phi(\cdot)$ *системы с интегральной разделенностью* (1.2) *для углов* $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot;\Phi)$ *имеют место неравенства* (5.2) *при некотором* $\beta \in (0, \pi/2]$ *и всех натуральных* $i \leqslant n-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По ФСР $\Phi(\cdot)$ построим новую ФСР $\Psi(\cdot)$, упорядочив входящие в $\Phi(\cdot)$ решения по возрастанию показателей Ляпунова. Из теоремы 5.1 и из доказательства необходимости теоремы 4.2 следует, что для углов $\beta_i(\cdot;\Psi)$ имеют место неравенства $\beta_i(m;\Psi) \geqslant \widehat{\beta}$ при некотором $\widehat{\beta} > 0$ и всех $m \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1,\ldots,n-1\}$. Но для фундаментальных матриц $\Phi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ справедливо равенство $|\det\Phi(m)| = |\det\Psi(m)|$, из которого, пользуясь формулой (4.9), получаем

$$\prod_{j=1}^{n-1} \sin\beta_j(m;\Phi) = \prod_{j=1}^{n-1} \sin\beta_j(m;\Psi) \geqslant \sin^{n-1}\widehat{\beta}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда вытекает, что для углов $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot;\Phi)$ имеют место неравенства (5.2) при некотором $\beta \in (0,\pi/2]$ и всех натуральных $i \leqslant n-1$. Следствие доказано. □

С л е д с т в и е 5.2 (см. [4]). *Диагональная система* (4.1) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда ее диагональ интегрально разделена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь установлена в лемме 4.3.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (4.1) интегрально разделена. Рассмотрим ее фундаментальную систему решений $\Psi(\cdot) = \big\{y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)\big\}$, где $y^i(\cdot)$ определены равенствами (4.2). Тогда, в силу замечания 6, $\Psi(\cdot)$ нормальна. Пусть $(i_1,\ldots,i_n)$ — такая перестановка индексов $(1,\ldots,n)$, что

$$\lambda[y_{i_{j+1}}] > \lambda[y_{i_j}], \quad j = 1,\ldots,n-1.$$

Тогда из теоремы 5.1 получаем, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\frac{\|y^{i_{j+1}}(m)\|}{\|y^{i_{j+1}}(s)\|} \geqslant \gamma a^{m-s} \frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|}.$$

Но

$$\frac{\|y^{i_j}(m)\|}{\|y^{i_j}(s)\|} = \prod_{l=s}^{m-1} |c_{i_j}(l)|,$$

поэтому

$$\prod_{l=s}^{m-1} |c_{i_{j+1}}(l)| \geqslant \gamma a^{m-s} \prod_{l=s}^{m-1} |c_{i_j}(l)|,$$

то есть при всех натуральных $m > s$ и $j \leqslant n-1$ справедливы оценки

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|c_{i_{j+1}}(l)|}{|c_{i_j}(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Это означает, что диагональ системы (4.1) интегрально разделена. Следствие доказано. □

С л е д с т в и е 5.3 (см. [4]). *Система* (1.2) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда она приводима к диагональной системе* (4.1) *с интегрально разделенной диагональю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает непосредственно из теоремы 4.2 и следствия 5.2. □

О п р е д е л е н и е 5.1 (см. [14, с. 64]). *Сопряженной системой* к линейной однородной системе (1.2) называется система

$$\psi(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m), \quad \psi^* \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3}$$

Т е о р е м а 5.2 (см. [4]). *Если* (1.2) — *система с интегральной разделенностью, то сопряженная система* (5.3) *также является системой с интегральной разделенностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ляпуновское преобразование (4.3) приводит систему (1.2) к диагональному виду (4.1) с интегрально отделенными функциями $c_i(\cdot)$, $c_{i+1}(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n-1$. Тогда, в силу замечания 7, выполнено равенство

$$A(m) = L(m+1)C(m)L^{-1}(m),$$

поэтому

$$L(m+1) = A(m)L(m)C^{-1}(m).$$

Применим ляпуновское преобразование $\eta(m) = \psi(m)L(m)$ к системе (4.1), получим

$$\begin{aligned}\eta(m+1) = \psi(m+1)L(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m)A(m)L(m)C^{-1}(m) = \\ = \psi(m)L(m)C^{-1}(m) = \eta(m)C^{-1}(m).\end{aligned}$$

Таким образом, преобразование $\eta(m) = \psi(m)L(m)$ приводит систему (5.3) к диагональной системе

$$\eta(m+1) = \eta(m)H(m), \quad \eta^* \in \mathbb{R}^n, \tag{5.4}$$

где

$$H(m) = \operatorname{diag}(h_1(m), \ldots, h_n(m)) = C^{-1}(m),$$

следовательно,

$$h_i(m) = \big(c_i(m)\big)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

При всех натуральных $m > s$ и $i \leqslant n-1$ справедливы неравенства

$$\frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |h_i(l)|}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |h_{i+1}(l)|} = \frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |c_i(l)|^{-1}}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |c_{i+1}(l)|^{-1}} = \frac{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |c_{i+1}(l)|}{\prod\limits_{l=s}^{m-1} |c_i(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s},$$

т. е. функция $h_i(\cdot)$ при каждом $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ интегрально отделена от функции $h_{i+1}(\cdot)$. Это означает, что система (5.4) интегрально разделена, а потому и (5.3) интегрально разделена. Теорема доказана. □

Для доказательства завершающей теоремы параграфа нам понадобится еще одна лемма. Аналогичное утверждение для функций непрерывного аргумента приведено в [1, с. 51–52].

Л е м м а 5.1 (см. [4]). *Пусть функция* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *вполне ограничена, то есть существует такое* $M \geqslant 1$, *что* $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |f(m)| \leqslant M$, $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} |f(m)|^{-1} \leqslant M$. *Тогда для каждого фиксированного* $T \in \mathbb{N}$

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \ln|f(l)| = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{l=1}^{kT} \ln|f(l)|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любое натуральное T. Очевидно, что выполнено неравенство

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \ln|f(l)| \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT} \sum_{l=1}^{kT} \ln|f(l)|.$$

Докажем противоположное неравенство.

Заметим, что при всех $m \in \mathbb{N}$

$$\ln|f(m)| \leqslant \ln M, \quad -\ln|f(m)| = \ln|f(m)|^{-1} \leqslant \ln M,$$

поэтому $\bigl|\ln|f(m)|\bigr| \leqslant \ln M$ при всех натуральных m.

Пусть $\bigl(m_j\bigr)_{j\in\mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, на которой реализуется $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}\sum\limits_{l=1}^{m} \ln|f(l)|$. Положим

$$k_j \doteq \bigl[m_j/T\bigr].$$

Без ограничения общности можно считать, что $k_j \geqslant 1$. Так как

$$m_j \in \bigl[k_jT, (k_j+1)T\bigr),$$

то $m_j - k_jT < T$ и $1 \leqslant \dfrac{m_j}{k_jT} < 1 + \dfrac{1}{k_j}$. Тогда

$$\frac{1}{k_jT}\sum_{l=1}^{k_jT} \ln|f(l)| = \frac{1}{k_jT}\Bigl(\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| - \sum_{l=k_jT+1}^{m_j} \ln|f(l)|\Bigr) =$$

$$= \frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| - \frac{1}{k_jT}\sum_{l=k_jT+1}^{m_j} \ln|f(l)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| - \frac{1}{k_jT}\sum_{l=k_jT+1}^{m_j} \bigl|\ln|f(l)|\bigr| > \frac{m_j}{k_jT}\cdot\frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| - \frac{T\ln M}{k_jT}.$$

Так как $k_j \to \infty$ при $j \to \infty$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{m_j}{k_jT} = 1$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{T\ln M}{k_jT} = 0$, поэтому

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{kT}\sum_{l=1}^{kT} \ln|f(l)| \geqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{1}{k_jT}\sum_{l=1}^{k_jT} \ln|f(l)| \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{j\to\infty} \frac{1}{m_j}\sum_{l=1}^{m_j} \ln|f(l)| = \varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} \ln|f(l)|,$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана. □

Теорема 5.3 (см. [4]). *Система* (1.2) *интегрально разделена тогда и только тогда, когда ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив и состоит из n различных чисел.*

Доказательство. Необходимость. Из леммы 4.1 получаем, что спектр показателей Ляпунова системы (1.2) состоит из n различных чисел $\Lambda_1(A) < \ldots < \Lambda_n(A)$, и кратность каждого показателя равна 1. Итак, в рассматриваемом случае $p = n$ и $n_i = 1$ при всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Из следствия 5.3 вытекает существование преобразования Ляпунова (4.3), приводящего систему (1.2) к диагональному виду (4.1) с интегрально разделенной диагональю $c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)$. Полагая $D_j(m) = c_j(m) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, получим, что свойство 1 теоремы 2.1 выполнено.

Далее, в силу замечания 6, нормальной фундаментальной системой решений системы (4.1) является $\Phi(\cdot) = \bigl\{y^1(\cdot), \ldots, y^n(\cdot)\bigr\}$, где $y^i(\cdot)$ определяются равенствами (4.2). Без ограничения общности можно считать, что $\Lambda_i(A) = \lambda[y^i]$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\Lambda_i(A) = \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\|y^i(m)\| = \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\Bigl|\prod_{l=1}^{m-1} c_i(l)\Bigr| = \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{l=1}^{m-1} \ln|c_i(l)|.$$

С другой стороны,

$$\Omega(D_j) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \Big\| \prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} D_j(l) \Big\| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \Big| \prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} c_j(l) \Big| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{l=1}^{mT} \ln |c_j(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \ln |c_j(l)|,$$

последнее равенство здесь вытекает из леммы 5.1. Следовательно, $\Omega(D_j) = \Lambda_j(A)$ при каждом $j \in \{1, \ldots, n\}$. Аналогично,

$$\overline{\omega}(D_j) = \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \Big\| \big(\prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} D_j(l) \big)^{-1} \Big\|^{-1} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^{m} \ln \Big| \prod_{l=(k-1)T+1}^{kT} c_j(l) \Big| =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{mT} \sum_{l=1}^{mT} \ln |c_j(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m} \ln |c_j(l)| = \Lambda_j(A).$$

Таким образом, свойство 2 теоремы 2.1 также выполнено.

Наконец, в силу интегральной разделенности функций $c_1(\cdot), \ldots, c_n(\cdot)$ при некоторых $a > 1$, $\gamma > 0$ и всех натуральных $m > s$, $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\Big\| \big(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l) \big)^{-1} \Big\|^{-1} = \prod_{l=s}^{m-1} |c_{j+1}(l)| \geqslant \gamma a^{m-s} \prod_{l=s}^{m-1} |c_j(l)| = \gamma a^{m-s} \Big\| \prod_{l=s}^{m-1} D_j(l) \Big\|.$$

Это означает, что и свойство 3 теоремы 2.1 выполнено. Следовательно, полный спектр показателей Ляпунова системы (1.2) устойчив.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть полный спектр показателей Ляпунова системы (1.2) состоит из n различных чисел и устойчив. Тогда $p = n$, и из свойства 1 теоремы 2.1 получаем, что система (1.2) некоторым преобразованием Ляпунова (4.3) приводима к блочно-диагональному виду (2.5), где

$$D(m) = \operatorname{diag}\big(D_1(m), \ldots, D_n(m)\big) \doteq \operatorname{diag}\big(c_1(m), \ldots, c_n(m)\big)$$

с одномерными блоками $D_j(\cdot) = c_j(\cdot)$, то есть система (1.2) приводима к диагональному виду (4.1). Из свойства 3 теоремы 2.1 следует, что при некоторых $a > 1$, $\gamma > 0$ и всех натуральных $m > s$, $j \leqslant n-1$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} |c_{j+1}(l)| = \Big\| \big(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l) \big)^{-1} \Big\|^{-1} \geqslant \gamma a^{m-s} \Big\| \prod_{l=s}^{m-1} D_j(l) \Big\| = \gamma a^{m-s} \prod_{l=s}^{m-1} |c_j(l)|.$$

Это означает, что диагональ системы (4.1) интегрально разделена. Таким образом, преобразование (4.3) приводит систему (1.2) к диагональной системе с интегрально разделенной диагональю. Из следствия 5.3 получаем, что система (1.2) интегрально разделена. Теорема доказана. □

ГЛАВА II. Достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова

В этой главе рассматривается локальная задача о назначении полного спектра показателей Ляпунова для линейных систем с дискретным временем. В § 6 вводятся различные определения управляемости полного спектра показателей Ляпунова, в том числе ключевое определение работы — пропорциональная локальная управляемость полного спектра показателей Ляпунова. Из этого определения вытекает, что если замкнутая система

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{II.1}$$

обладает свойством пропорциональной локальной управляемости спектра, то выбором подходящей матрицы $U(\cdot)$ мы можем установить полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы (II.1) в произвольную позицию в некоторой окрестности спектра Ляпунова свободной системы

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{II.2}$$

при этом норма матрицы $U(\cdot)$ ограничена сверху расстоянием между этими двумя спектрами с некоторым постоянным множителем, не зависящим от выбора целевой позиции спектра.

В последующих параграфах главы получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра. Одним из этих условий является равномерная полная управляемость системы

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k. \tag{II.3}$$

Это свойство исследуется в § 7.

В § 8 введено понятие пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы. Доказано, что в случае устойчивости показателей невозмущенной системы мультипликативно возмущенная система обладает этим свойством. На основе полученных результатов получено описание спектрального множества линейной системы с устойчивыми показателями.

В последнем параграфе второй главы на основе результатов предыдущих двух параграфов получены достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (II.1) — равномерная полная управляемость системы (II.3) и устойчивость полного спектра показателей Ляпунова системы (II.2) (теорема 9.2). В заключение параграфа построен пример 9.1, показывающий, что найденные условия не являются необходимыми.

§ 6. Управляемость показателей Ляпунова

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(m+1) = A(m)x(m) + B(m)u(m), \tag{6.1}$$

где аргумент m пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; неизвестная функция x принимает значения в $\mathbb{R}^n$; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n\times n}$ и коэффициент $B(m)$ при каждом m принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n\times k}$; управление u принимает значения в $\mathbb{R}^k$. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{N}$, при этом

$$\|A\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|B\|_\infty \leqslant a_0.$$

Из (1.3) следует, что $a_0 \geqslant 1$.

Управление $u(\cdot)$ в системе (6.1) выберем в виде линейной обратной связи $u(m) = U(m)x(m)$, получим замкнутую систему вида

$$x(m+1) = \big(A(m) + B(m)U(m)\big)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.2}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (6.2). Поскольку мы будем решать задачу об управлении спектром показателей Ляпунова, то естественным образом приходим к следующему определению.

О п р е д е л е н и е 6.1 (см. [44]). Матричное управление $U\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ называется *допустимым* для системы (6.2), если матрица $A(\cdot) + B(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть $U(\cdot)$ — допустимое для системы (6.1) матричное управление. Тогда для замкнутой системы (6.2) определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(A + BU) = \big(\lambda_1(A + BU), \ldots, \lambda_n(A + BU)\big) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$.

О п р е д е л е н и е 6.2 (см. [42, 44]). Полный спектр показателей Ляпунова системы (6.2) называется:

- *глобально управляемым*, если для любого набора $\mu \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ найдется допустимое для системы (6.1) матричное управление $U(\cdot)$, обеспечивающее выполнение равенства
$$\lambda(A + BU) = \mu; \tag{6.3}$$
- *пропорционально глобально управляемым*, если для каждого $\Delta > 0$ найдется такое $\ell = \ell(\Delta) > 0$, что для любого набора $\mu = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big) \in \mathcal{O}_\Delta\big(\lambda(A)\big)$ существует допустимое для системы (6.1) матричное управление $U(\cdot)$, обеспечивающее выполнение равенства (6.3) и удовлетворяющее оценке
$$\|U\|_\infty \leqslant \ell \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j|; \tag{6.4}$$
- *локально управляемым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого набора $\mu \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ найдется допустимое для системы (6.1) матричное управление $U(\cdot)$, обеспечивающее выполнение равенства (6.3) и удовлетворяющее оценке $\|U\|_\infty \leqslant \varepsilon$;
- *пропорционально локально управляемым*, если найдутся такие $\delta > 0$ и $\ell > 0$, что для каждого набора $\mu = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big) \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ существует допустимое для системы (6.1) матричное управление $U(\cdot)$, гарантирующее выполнение равенства (6.3) и удовлетворяющее оценке (6.4).

Очевидно, что из пропорциональной локальной управляемости полного спектра системы (6.2) следует его локальная управляемость; из пропорциональной глобальной управляемости следует глобальная управляемость; наконец, из пропорциональной глобальной управляемости следует пропорциональная локальная управляемость (и локальная управляемость).

Достаточные условия глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова были получены в работе [42]. Заметим, что предложенный в этой работе алгоритм построения матричного управления $U(\cdot)$ не обеспечивает малости нормы этого управления, даже если требуемое смещение спектра показателей Ляпунова относительно спектра свободной системы (1.2) мало́. На первом шаге построения управления производится смещение спектра в точку $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$, а на втором шаге — в целевую точку μ. Понятно, что если спектр свободной системы $\lambda(A)$ далек от начала координат, а целевая точка μ близка к $\lambda(A)$, то матричное управление $U(\cdot)$ не может быть малым по норме. По этой причине возникает вполне естественный вопрос: можно ли обеспечить малость управления $U(\cdot)$, если требуется всего лишь «слегка пошевелить» спектр показателей Ляпунова?

Ответу на этот вопрос посвящена работа. В частности, во второй главе показано, что достаточными условиями пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова замкнутой системы (6.2) является равномерная полная управляемость системы (6.1) и устойчивость показателей Ляпунова свободной системы (1.2). В третьей главе решается вопрос о необходимости этих условий.

Докажем здесь одно утверждение о свойстве пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Рассмотрим систему (6.2) и подействуем на нее произвольным преобразованием Ляпунова (1.5), в итоге получим систему

$$\begin{aligned} y(m+1) = L(m+1)x(m+1) = L(m+1)\big(A(m)+B(m)U(m)\big)x(m) = \\ = L(m+1)\big(A(m)+B(m)U(m)\big)L^{-1}(m)y(m) = \\ = \big(L(m+1)A(m)L^{-1}(m)+L(m+1)B(m)U(m)L^{-1}(m)\big)y(m). \end{aligned}$$

Обозначим

$$C(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m), \quad G(m) = L(m+1)B(m), \tag{6.5}$$

$$V(m) = U(m)L^{-1}(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

тогда получим

$$y(m+1) = \big(C(m)+G(m)V(m)\big)y(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{6.6}$$

Л е м м а 6.1 (см. [7]). *Свойство пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова инвариантно относительно преобразований Ляпунова, т. е. системы* (6.2) *и* (6.6) *обладают этим свойством одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (6.2) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. В соответствии с этим свойством найдем числа $\delta > 0$ и $\ell > 0$, возьмем любой набор чисел $\mu \in \mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big)$ и построим матричное управление $U(\cdot)$, гарантирующее выполнение равенства (6.3) и удовлетворяющее оценке (6.4). Возьмем произвольную матрицу Ляпунова $L(\cdot)$, и пусть $l = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \|L^{-1}(m)\|$. Положим $V(m) = U(m)L^{-1}(m)$. Так как преобразование Ляпунова сохраняет полный спектр показателей Ляпунова, то $\lambda(A) = \lambda(C)$ и

$$\lambda(C+GV) = \lambda(C+GUL^{-1}) = \lambda(A+BU) = \mu.$$

Кроме того,

$$\|V\|_\infty \leqslant l\|U\|_\infty \leqslant l\ell \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A)-\mu_j| = l\ell \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(C)-\mu_j|.$$

Это означает, что полный спектр показателей Ляпунова системы (6.6) пропорционально локально управляем. Точно так же доказывается, что наличие этого свойства у системы (6.6) влечет его для системы (6.2). Лемма доказана. $\square$

§ 7. Равномерная полная управляемость систем с дискретным временем

Основным объектом исследования этого параграфа является линейная управляемая система с дискретным временем (6.1).

При исследовании управляемости важную роль играет матрица управляемости (матрица Калмана)

$$W(m_0, m) = \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)B^*(j)X_A^*(m_0, j+1),$$

где $m > m_0$ — произвольные натуральные числа.

О п р е д е л е н и е 7.1 (см. [53]). Система (6.1) называется *равномерно вполне управляемой*, если найдутся такие $K \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$, что

$$\xi^* W(m_0, m_0 + K)\xi \geqslant \gamma \|\xi\|^2$$

для каждых $m_0 \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если K задано, то мы говорим, что система *K-равномерно вполне управляема.*

З а м е ч а н и е 9. Понятие равномерной полной управляемости линейных систем с непрерывным временем было введено Р. Калманом в [55].

Приведем три утверждения (лемма 7.1, теоремы 7.1 и 7.2) о равномерной полной управляемости, необходимые для дальнейших исследований. Их доказательства практически дословно повторяют доказательства соответствующих утверждений для систем с непрерывным временем. Эти доказательства мы приведем для полноты изложения.

Л е м м а 7.1 (см. [29]). *Если система* (6.1) *K-равномерно вполне управляема, то существует такое положительное число β, что при каждом $m_0 \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\|W^{-1}(m_0, m_0 + K)\| \leqslant \beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $m_0 \in \mathbb{N}$. Матрица $W(m_0, m_0 + K)$ эрмитова, поэтому все ее собственные значения вещественны [40, с. 53]. Пусть

$$\lambda_j = \lambda_j\big(W(m_0, m_0 + K)\big) \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n,$$

— произвольное собственное значение матрицы $W(m_0, m_0 + K)$; $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, — соответствующий собственный вектор. Тогда из определения 7.1 получим неравенство

$$\lambda_j = \lambda_j \xi^* \xi = \xi^* W(m_0, m_0 + K)\xi \geqslant \gamma,$$

из которого следует соотношение

$$\det W(m_0, m_0 + K) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j\big(W(m_0, m_0 + K)\big) \geqslant \gamma^n > 0,$$

означающее, что матрица $W(m_0, m_0 + K)$ обратима. Тогда из (1.1) следует, что для $\|W^{-1}(m_0, m_0 + K)\|$ справедлива требуемая оценка

$$\|W^{-1}(m_0, m_0 + K)\| \leqslant \frac{\|W(m_0, m_0 + K)\|^{n-1}}{\det W(m_0, m_0 + K)} \leqslant \frac{\big(a_0^{4(K+1)}\big)^{n-1}}{\gamma^n} =: \beta.$$

Лемма доказана. □

Ниже мы будем использовать следующий критерий равномерной полной управляемости системы (6.1). Для систем с непрерывным временем этот критерий был установлен Е. Л. Тонковым [39, с. 37–38].

Т е о р е м а 7.1 (см. [53]). *Система* (6.1) K*-равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда существует такое* $\alpha > 0$, *что для произвольных* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и* $m_0 \in \mathbb{N}$ *найдется управление* $u\colon [m_0, m_0 + K - 1] \to \mathbb{R}^k$ *такое, что решение* $x(\cdot)$ *задачи Коши для системы* (6.1) *с выбранным* $u(\cdot)$ *и начальным условием* (1.4) *удовлетворяет равенству* $x(m_0 + K) = 0$*, при этом*

$$\|u\|_{[m_0, m_0+K-1]} \leqslant \alpha \|x_0\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\beta > 0$ ограничивает сверху величину $\|W^{-1}(m_0, m_0 + K)\|$. Зафиксируем произвольные $m_0 \in \mathbb{N}$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и выберем в качестве управления $u(\cdot)$ функцию

$$u(m) = -B^*(m) X_A^*(m_0, m+1) W^{-1}(m_0, m_0 + K) x_0, \quad m \in [m_0, m_0 + K - 1].$$

Для решения задачи Коши (6.1), (1.4) имеет место формула Коши

$$x(m) = X_A(m, m_0) x_0 + \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m, j+1) B(j) u(j), \quad m > m_0,$$

или

$$x(m) = X_A(m, m_0)\Big(x_0 + \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1) B(j) u(j)\Big), \quad m > m_0,$$

поэтому

$$x(m_0 + K) = X_A(m_0 + K, m_0)\Big(x_0 + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1) B(j) u(j)\Big) =$$

$$= X_A(m_0 + K, m_0)\Big(x_0 - \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1) B(j) B^*(j) X_A^*(m_0, j+1) \times$$

$$\times W^{-1}(m_0, m_0 + K) x_0\Big) =$$

$$= X_A(m_0 + K, m_0)\Big(x_0 - W(m_0, m_0 + K) W^{-1}(m_0, m_0 + K) x_0\Big) =$$

$$= X_A(m_0 + K, m_0)(x_0 - x_0) = 0,$$

то есть условие (1.4) выполнено. Для нормы управления $u(\cdot)$ справедлива оценка

$$\|u\|_{[m_0, m_0+K-1]} \leqslant a_0 \cdot a_0^K \cdot \beta \cdot \|x_0\| =: \alpha \|x_0\|.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим противное, пусть система (6.1) не является K-равномерно вполне управляемой. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся момент времени m_k и вектор $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_k\| = 1$, такие, что

$$\xi_k^* W(m_k, m_k + K) \xi_k < \frac{1}{k}.$$

Пусть $\widehat{\xi}$, $\|\widehat{\xi}\| = 1$, — предельная точка последовательности (ξ_k). Без ограничения общности можно считать, что последовательность (ξ_k) имеет предел $\widehat{\xi}$. Для квадратичной формы $\xi^* W(m, m + K)\xi$ справедливы оценки

$$|\xi_k^* W(m_k, m_k + K)\xi_k - \widehat{\xi}^* W(m_k, m_k + K)\widehat{\xi}| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_k^* W(m_k, m_k + K)(\xi_k - \widehat{\xi})| + |(\xi_k^* - \widehat{\xi}^*) W(m_k, m_k + K)\widehat{\xi}| \leqslant$$

$$\leqslant \|\xi_k^* W(m_k, m_k + K)\| \|\xi_k - \widehat{\xi}\| + \|W(m_k, m_k + K)\widehat{\xi}\| \|\xi_k^* - \widehat{\xi}^*\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\|W(m_k, m_k + K)\| \|\xi_k - \widehat{\xi}\|.$$

Поскольку матрица $W(m, m+K)$ ограничена, отсюда следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер k_ε, начиная с которого будет выполнено неравенство

$$0 \leqslant \widehat{\xi}^* W(m_k, m_k + K)\widehat{\xi} \leqslant$$

$$\leqslant \xi_k^* W(m_k, m_k+K)\xi_k + |\xi_k^* W(m_k, m_k+K)\xi_k - \widehat{\xi}^* W(m_k, m_k+K)\widehat{\xi}| < \varepsilon.$$

При каждом $k \in \mathbb{N}$ на $[m_0, m_0 + K - 1]$ определено управление $u_k(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\|u_k\| \leqslant \alpha\|\widehat{\xi}\| = \alpha$ и такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши для системы (6.1) с управлением $u = u_k(\cdot)$ и начальным условием $x(m_k) = \widehat{\xi}$ удовлетворяет равенству

$$x(m_k + K) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)u(j) = -\widehat{\xi},$$

поэтому

$$1 = \widehat{\xi}^*\widehat{\xi} = |\widehat{\xi}^* \sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)u(j)| \leqslant \sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} \|\widehat{\xi}^* X_A(m_0, j+1)B(j)\|\|u_k(j)\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} \|\widehat{\xi}^* X_A(m_0, j+1)B(j)\| \leqslant \alpha\left(K \sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} \|\widehat{\xi}^* X_A(m_0, j+1)B(j)\|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \alpha\left(K \sum_{j=m_k}^{m_k+K-1} \|\widehat{\xi}^* W(m_0, m_k+K)\|^2\right)^{1/2} < \alpha\sqrt{K\varepsilon}.$$

При $\varepsilon \leqslant \frac{1}{\alpha^2 K}$ получаем противоречие. Теорема доказана. □

Применяя к системе (6.1) преобразование Ляпунова (1.5) и используя обозначения (6.5), получим соотношения

$$\begin{gathered} y(m+1) = L(m+1)x(m+1) = L(m+1)\big(A(m)x(m) + B(m)u(m)\big) = \\ = L(m+1)\big(A(m)L^{-1}(m)y(m) + B(m)u(m)\big) = \\ = L(m+1)A(m)L^{-1}(m)y(m) + L(m+1)B(m)u(m) = \\ = C(m)y(m) + G(m)u(m). \end{gathered}$$

Таким образом, преобразование (1.5) переводит систему (6.1) в систему

$$y(m+1) = C(m)y(m) + G(m)u(m), \tag{7.1}$$

где $C(\cdot)$ и $G(\cdot)$ определены равенствами (6.5).

Т е о р е м а 7.2 (см. [34]). *Ляпуновское преобразование сохраняет свойство K-равномерной полной управляемости системы, т. е. если система* (6.1) *K-равномерно вполне управляема,* (1.5) *— преобразование Ляпунова, то преобразованная система* (7.1) *K-равномерно вполне управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим матрицу Калмана системы (7.1). Пусть $X_C(m, s)$ — матрица Коши однородной системы (1.6). Заметим, что при всех $m, s \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$X_C(m, s) = \prod_{j=s}^{m-1} C(j) = \prod_{j=s}^{m-1} L(j+1)A(j)L^{-1}(j) =$$

$$= \big(L(m)A(m-1)L^{-1}(m-1)\big)\cdot\big(L(m-1)A(m-2)L^{-1}(m-2)\big)\times\ldots$$
$$\ldots\times\big(L(s+1)A(s)L^{-1}(s)\big) =$$
$$= L(m)\prod_{j=s}^{m-1}A(j)L^{-1}(s) = L(m)X_A(m,s)L^{-1}(s),$$

поэтому для матрицы Калмана системы (7.1) имеем представление

$$W_L(m_0, m_0+K) =$$
$$= \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_C(m_0, j+1)G(j)G^*(j)X_C^*(m_0, j+1) =$$
$$= \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} L(m_0)X_A(m_0, j+1)L^{-1}(j+1)L(j+1)B(j)\times$$
$$\times B^*(j)L^*(j+1)L^{-*}(j+1)X_A^*(m_0, j+1)L^*(m_0) =$$
$$= L(m_0)W(m_0, m_0+K)L^*(m_0),$$

где $W(m_0, m_0+K)$ — матрица Калмана системы (6.1). Из свойства K-равномерной полной управляемости этой системы следует, что существует не зависящее от m_0 положительное число θ, для которого

$$\min_{\|\xi\|\neq 0}\frac{\xi^*W(m_0, m_0+K)\xi}{\|\xi\|^2}\geqslant\theta.$$

Для произвольного ненулевого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ имеем оценку

$$\frac{\xi^*W_L(m_0, m_0+K)\xi}{\|\xi\|^2} = \frac{\xi^*L(m_0)W(m_0, m_0+K)L^*(m_0)\xi}{\|\xi\|^2} =$$
$$= \frac{\xi^*L(m_0)W(m_0, m_0+K)L^*(m_0)\xi}{\|L^*(m_0)\xi\|^2}\cdot\frac{\|L^*(m_0)\xi\|^2}{\|\xi\|^2}\geqslant\theta\cdot\min_{\|\eta\|\neq 0}\frac{\|L^*(m_0)\eta\|^2}{\|\eta\|^2} = \theta\|L^{-1}(m_0)\|^{-2}.$$

Так как $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова, при некотором $a>0$ справедливы неравенства

$$\|L^{-1}(m)\|\leqslant a,\ \theta\|L^{-1}(m_0)\|^{-2}\geqslant\theta a^{-2} =: \theta_1,$$

и положительная величина θ_1 не зависит от m_0. Следовательно, при всех $m_0\in\mathbb{N}$ выполняется оценка

$$\min_{\|\xi\|\neq 0}\frac{\xi^*W_L(m_0, m_0+K)\xi}{\|\xi\|^2}\geqslant\theta_1,$$

то есть преобразованная система (7.1) K-равномерно вполне управляема. □

Докажем еще некоторые результаты, касающиеся равномерной полной управляемости. Аналогичные результаты для систем с непрерывным временем были доказаны в статье [28] (см. также [29, лемма 12.1, теорема 12.1]).

Л е м м а 7.2 (см. [44]). *Система* (6.1) K*-равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда существует такое положительное* p, *что для произвольных* $m_0\in\mathbb{N}$ *и* $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ *найдется матричная функция* $V\colon[m_0, m_0+K-1]\cap\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{k\times n}$ *такая, что*

$$\|V\|_{[m_0, m_0+K-1]}\leqslant p\|H-E\|,$$

разрешающая матричную задачу управления

$$Z(m+1) = Z(m) + X_A(m_0, m+1)B(m)V(m), \tag{7.2}$$

$$Z(m_0) = E,\ Z(m_0+K) = H. \tag{7.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (6.1) K-равномерно вполне управляема. Возьмем любые $m_0 \in \mathbb{N}$ и $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. В силу критерия равномерной полной управляемости Е. Л. Тонкова (теорема 7.1) для каждого из векторов

$$z_l = (H - E)e_l, \quad l = 1, \ldots, n,$$

существует управление $u_l(m),\ m = m_0, m_0 + 1, \ldots, k_0 + K - 1$, удовлетворяющее оценке

$$\|u_l\|_{[m_0, m_0+K-1]} \leqslant p_0\|z_l\|,$$

такое, что решение задачи Коши для системы (6.1) с этим управлением и с начальным условием $x(m_0) = z_l$ попадет в начало координат в момент времени $m_0 + K$, т. е.

$$x(m_0 + K) = 0.$$

Поскольку решение этой задачи Коши записывается в виде

$$x(m) = X_A(m, m_0)z_l + \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m, j+1)B(j)u_l(j) =$$
$$= X_A(m, m_0)\Bigg(z_l + \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)u_l(j)\Bigg),$$

то

$$x(m_0 + K) = X_A(m_0 + K, m_0)\Bigg(z_l + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)u_l(j)\Bigg) = 0,$$

откуда получаем равенство

$$(E - H)e_l + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)u_l(j) = 0.$$

Пусть $V(m) = [u_1(m), \ldots, u_n(m)]$. Тогда

$$(E - H)e_l + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)V(j)e_l = 0, \quad l = 1, \ldots, n,$$

поэтому

$$(E - H) + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)V(j) = 0$$

и

$$H = E + \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} X_A(m_0, j+1)B(j)V(j).$$

С другой стороны, решение системы (7.2) с начальным условием $Z(m_0) = E$ имеет вид

$$Z(m) = E + \sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)V(j), \tag{7.4}$$

следовательно, при выбранном управлении $V(\cdot)$ выполнено равенство $Z(m_0+K)=H$. Кроме того, для всех $m\in\{m_0,\ldots,m_0+K-1\}$ и $x=\sum\limits_{j=1}^{n}x_je_j\in\mathbb{R}^n$ имеют место соотношения

$$\|V(m)x\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}x_jV(m)e_j\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{n}x_ju_j(m)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}|x_j|\|u_j(m)\|\leqslant\|x\|\sum_{j=1}^{n}\|u_j(m)\|\leqslant$$

$$\leqslant\|x\|p_0\sum_{j=1}^{n}\|z_j\|\leqslant p_0n\|x\|\|H-E\|.$$

Возьмем $p=p_0n$, тогда

$$\|V\|_{[m_0,m_0+K-1]}=\sup_{x\neq0}\frac{\|V(m)x\|}{\|x\|}\leqslant p\|H-E\|.$$

Достаточность. Пусть для любых $m_0\in\mathbb{N}$ и $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$ существует матричная функция $V(m),\ m=m_0,m_0+1,\ldots,m_0+K-1,\ V\in\mathbb{R}^{k\times n}$, разрешающая задачу управления (7.2), (7.3) и такая, что выполнена оценка $\|V\|_{[m_0,m_0+K-1]}\leqslant p\|H-E\|$. Возьмем любые $x_0\in\mathbb{R}^n$ и $m_0\in\mathbb{N}$. Рассматривая систему (7.2) от $m=m_0$ до $m=m_0+K-1$, мы получим

$$\sum_{j=m_0}^{m_0+K-1}X_A(m_0,j+1)B(j)V(j)=H-E.$$

Пусть $H=E+[-x_0,0,\ldots,0]$. Выберем $u(m)=V(m)e_1$. Решение задачи Коши для системы (6.1) с управлением $u=u(\cdot)$ и начальным условием $x(m_0)=x_0$ записывается в виде

$$x(m)=X(m,m_0)\left(x_0+\sum_{j=m_0}^{m-1}X_A(m_0,j+1)B(j)V(j)e_1\right),$$

поэтому

$$x(m_0+K)=X(m_0+K,m_0)\left(x_0+\sum_{j=m_0}^{m_0+K-1}X_A(m_0,j+1)B(j)V(j)e_1\right)=$$

$$=X_A(m_0+K,m_0)\left(-H+E+\sum_{j=m_0}^{m_0+K-1}X_A(m_0,j+1)B(j)V(j)\right)e_1=0.$$

Для $\|u\|_{[m_0,m_0+K-1]}$ имеем оценку

$$\|u\|_{[m_0,m_0+K-1]}\leqslant\|V\|_{[m_0,m_0+K-1]}\leqslant p\|H-E\|=p\|(H-E)e_1\|=p\|x_0\|.$$

Следовательно, система (6.1) является K-равномерно вполне управляемой. $\square$

Теорема 7.3 (см. [44]). *Если система* (6.1) *K-равномерно вполне управляема, то найдутся такие $\alpha>0$ и $r>0$, что для любого $m_0\in\mathbb{N}$ и любой матрицы $H\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\|H-E\|<r$, существует управление $U(m)$, $m=m_0,m_0+1,\ldots,m_0+K-1$, $U(m)\in\mathbb{R}^{k\times n}$, удовлетворяющее оценкам*

$$\|U(m)\|\leqslant\alpha\|H-E\|,$$

$$\left\|\big(A(m)+B(m)U(m)\big)^{-1}\right\| < 3a_0^{2K}, \quad m \in \{m_0, m_0+1, \ldots, m_0+K-1\},$$

и обеспечивающее для матрицы Коши $X_{A+BU}(m,s)$ *системы* (6.2) *с* $U = U(\cdot)$ *выполнение равенства*

$$X_{A+BU}(m_0+K, m_0) = X_A(m_0+K, m_0)H.$$

Доказательство. Возьмем любые $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $m_0 \in \mathbb{N}$. Пользуясь леммой 7.2, найдем $V(m)$, $m = m_0, \ldots, m_0+K-1$, удовлетворяющее оценке $\|V\|_{[m_0, m_0+k-1]} \leqslant \leqslant p\|H-E\|$ и разрешающее задачу управления (7.2), (7.3). Из (7.4) следует, что при всех $m = m_0+1, \ldots, m_0+K$ имеют место неравенства

$$\|Z(m)-E\| = \left\|\sum_{j=m_0}^{m-1} X_A(m_0, j+1)B(j)V(j)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=m_0}^{m-1} \|X_A(m_0, j+1)\|\|B(j)\|\|V(j)\| \leqslant$$

$$\leqslant p\|H-E\| \sum_{j=m_0}^{m-1} \|X_A(m_0, j+1)\|\|B(j)\| \leqslant p\|H-E\| \sum_{j=m_0}^{m-1} a_0^{j-m_0+1} \leqslant$$

$$\leqslant p\|H-E\| \sum_{j=m_0}^{m_0+K-1} a_0^{j-m_0+1} = p\|H-E\|\sum_{i=1}^{K} a_0^i = p\|H-E\|\frac{a_0(a_0^K-1)}{a_0-1}.$$

Определим

$$r = \frac{a_0-1}{2a_0(a_0^K-1)p}$$

и предположим, что $\|H-E\| < r$, тогда $\|Z(m)-E\| < 1/2$. Последнее неравенство означает [40, с. 301], что $Z(m)$ обратима и

$$\|Z^{-1}(m)\| = \|Z^{-1}(m) - E + E\| \leqslant \|Z^{-1}(m) - E\| + 1 =$$

$$= \|Z^{-1}(m)(E - Z(m))\| + 1 \leqslant \|Z^{-1}(m)\|\|E - Z(m)\| + 1 < \frac{\|Z^{-1}(m)\|}{2} + 1$$

и поэтому $\|Z^{-1}(m)\| < 2$. Положим

$$V_1(m) \doteq V(m)Z^{-1}(m), \quad m = m_0, m_0+1, \ldots, m_0+K-1.$$

Тогда

$$\|V_1(m)\| \leqslant 2p\|H-E\|$$

и

$$Z(m+1) = \Big(E + X_A(m_0, m+1)B(m)V_1(m)\Big)Z(m),$$

$$Z(m_0) = E, \; Z(m_0+K) = H.$$

Обозначим

$$Y(m) = X_A(m, m_0)Z(m), \; U(m) = V_1(m)X_A(m_0, m).$$

Получаем

$$Y(m+1) = X_A(m+1, m_0)Z(m+1) =$$

$$= A(m)X_A(m, m_0)\Big(E + X_A(m_0, m+1)B(m)V_1(m)\Big)Z(m) =$$

$$= A(m)X_A(m, m_0)Z(m) + A(m)A^{-1}(m)B(m)V_1(m)Z(m) =$$

$$= A(m)Y(m) + B(m)V_1(m)X_A(m_0, m)X_A(m, m_0)Z(m) =$$

$$A(m)Y(m) + B(m)U(m)Y(m) = (A(m) + B(m)U(m))Y(m).$$

Это означает, что $Y(m),\ m = m_0, \dots, m_0 + K - 1,$ — решение матричного уравнения

$$Y(m+1) = (A(m) + B(m)U(m))Y(m) \tag{7.5}$$

с определенным выше управлением $U(m)$. Кроме того,

$$Y(m_0) = E.$$

Следовательно,

$$Y(m) = X_{A+BU}(m, m_0), \quad m = m_0, \dots, m_0 + K,$$

и

$$X_{A+BU}(m_0 + K, m_0) = Y(m_0 + k) =$$
$$= X_A(m_0 + K, m_0)Z(m_0 + K) = X_A(m_0 + K, m_0)H.$$

Заметим, что

$$\|U(m)\| \leqslant \|V_1(m)\| \|X_A(m_0, m)\| \leqslant 2pa_0^K \|H - E\|$$

и, определив $\alpha = 2pa_0^k$, мы получим оценку $\|U(m)\| < \alpha\|H - E\|$. Наконец, из уравнения (7.5) мы получим обратимость матрицы $A(m) + B(m)U(m)$ и оценку

$$\left\|(A(m) + B(m)U(m))^{-1}\right\| \leqslant \|Y(m)\| \|Y^{-1}(m+1)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|X_A(m, m_0)\| \|Z(m)\| \|Z^{-1}(m+1)\| \|X_A(m_0, m+1)\| <$$
$$< 2a_0^{2K} \|Z(m)\| \leqslant 2a_0^{2K}(\|Z(m) - E\| + 1) < 2a_0^{2K} 3/2 = 3a_0^{2K}.$$

Теорема доказана. □

Наряду с системой (1.2) вновь рассмотрим мультипликативно возмущенную систему (2.4). Пусть $X_{AR}(m, s)$ — матрица Коши этой системы.

Л е м м а 7.3 (см. [44]). *Для любого натурального $m > s$ справедливо равенство*

$$X_{AR}(m, s) = X_A(m, s) + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m, j)\big(R(j) - E\big)X_{AR}(j, s).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим матрицу $Q(\cdot)$ равенством (2.2). Тогда $A(m)+Q(m) = A(m)R(m)$, следовательно, система (2.4) совпадает с аддитивно возмущенной системой (2.1), поэтому матрицы Коши этих систем совпадают:

$$X_{AR}(m, s) = X_{A+Q}(m, s), \quad m > s.$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим матрицу $X_{A+Q}(m, s) = [z_1(m), \dots, z_n(m)]$ для $m \geqslant s$. Поскольку $X_{A+Q}(s, s) = E$, то $z_l(s) = e_l$, $l = 1, \dots, n$. Для каждого $l \in \{1, \dots, n\}$ и для любого натурального $m > s$ справедлива формула Коши

$$X_{A+Q}(m, s)e_l = z_l(m) = X_A(m, s)e_l + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m, j+1)Q(j)z_l(j) =$$
$$= X_A(m, s)e_l + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m, j+1)Q(j)X_{A+Q}(j, s)e_l =$$
$$= X_A(m, s)e_l + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m, j+1)Q(j)X_{A+Q}(j, s)e_l,$$

следовательно,

$$X_{A+Q}(m,s) = X_A(m,s) + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m,j+1)Q(j)X_{A+Q}(j,s)$$

и

$$X_{AR}(m,s) = X_{A+Q}(m,s) = X_A(m,s) + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m,j+1)Q(j)X_{A+Q}(j,s) =$$
$$= X_A(m,s) + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m,j+1)A(j)\big(R(j)-E\big)X_{AR}(j,s) =$$
$$= X_A(m,s) + \sum_{j=s}^{m-1} X_A(m,j)\big(R(j)-E\big)X_{AR}(j,s).$$

Лемма доказана. □

Т е о р е м а 7.4 (см. [44]). *Если система* (6.1) *равномерно вполне управляема, то существуют* $\widehat{\delta} > 0$ *и* $\widehat{l} > 0$ *такие, что для любой* $R(\cdot) \in \mathcal{R}_{\widehat{\delta}}$ *найдется допустимое для системы* (6.2) *матричное управление* $U(\cdot)$ *такое, что*

$$\|U\|_\infty \leqslant \widehat{l}\|R-E\|_\infty,$$

и система (2.4) *асимптотически эквивалентна системе* (6.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K \in \mathbb{N}$ таково, что система (6.1) K-равномерно вполне управляема. Согласно теореме 7.3, найдутся α, $r > 0$ такие, что для любого $m \in \mathbb{N}$ и для любой фиксированной $H_l \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|H_l - E\| < r$, найдется матричное управление $U_l\colon [(l-1)K+1, lK] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{k\times n}$ такое, что

$$\|U_l(m)\| \leqslant \alpha\|H_l - E\|, \qquad \Big\|\big(A(m)+B(m)U_l(m)\big)^{-1}\Big\| < 3a_0^{2K}$$

и

$$X_{A+BU_l}\left(lK+1,(l-1)\,K+1\right) = X_A\left(lK+1,(l-1)\,K+1\right)H_l. \tag{7.6}$$

Пусть $\widehat{\delta} > 0$ настолько мало́, что выполнено неравенство

$$\widehat{\delta}Ka_0^{2K}(\widehat{\delta}+1)^K < r.$$

Возьмем любую матрицу $R(\cdot) \in \mathcal{R}_{\widehat{\delta}}$. Заметим, что

$$\|R\|_\infty \leqslant \|R-E\|_\infty + 1 < \widehat{\delta} + 1.$$

Из леммы 7.3 получаем

$$X_{AR}\big(lK+1,(l-1)K+1\big) = X_A\big(lK+1,(l-1)K+1\big) +$$
$$+ \sum_{j=(l-1)K+1}^{lK} X_A(lK+1,j)\big(R(j)-E\big)X_{AR}\big(j,(l-1)K+1\big) = X_A\big(lK+1,(l-1)K+1\big)H_l,$$

где

$$H_l = E + \sum_{j=(l-1)K+1}^{lK} X_A\big((l-1)K+1,j\big)\big(R(j)-E\big)X_{AR}\big(j,(l-1)K+1\big).$$

Кроме того,

$$\|H_l - E\| \leqslant \|R-E\|_\infty \sum_{j=(l-1)K+1}^{lK} \|X_A\big((l-1)K+1, j\big)\| \|X_{AR}\big(j, (l-1)K+1\big)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|R-E\|_\infty K a_0^K \big(a_0 \|R\|_\infty\big)^K < \|R-E\|_\infty K a_0^{2K} (\widehat{\delta}+1)^K < \widehat{\delta} K a_0^{2K} (\widehat{\delta}+1)^K < r.$$

Последнее неравенство вместе с (7.6) означает, что существует матричное управление $U(\cdot)$,

$$U(m) = U_l(m),\ l \in \mathbb{N},\ m \in \{(l-1)K+1, \ldots, lK\},$$

такое, что

$$X_{A+BU}\big(lK+1, (l-1)K+1\big) = X_{A+BU_l}\big(lK+1, (l-1)K+1\big) =$$
$$= X_A\big(lK+1, (l-1)K+1\big) H_l = X_{AR}\big(lK+1, (l-1)K+1\big).$$

Заметим, что

$$\|U\|_\infty = \sup_{l\in\mathbb{N}} \left(\max_{m=(l-1)K+1,\ldots,lK} \|U_l(m)\| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \sup_{l\in\mathbb{N}} \|H_l - E\| \leqslant \alpha K a_0^{2K} (\widehat{\delta}+1)^K \|R-E\|_\infty \doteq \widehat{l} \|R-E\|_\infty.$$

Для построенного матричного управления $U(\cdot)$ справедлива оценка

$$\|U\|_\infty \leqslant \widehat{l} \|R-E\|_\infty < \widehat{l\widehat{\delta}},$$

поэтому

$$\|A+BU\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty + \|B\|_\infty \|U\|_\infty < a_0(1+\widehat{l\widehat{\delta}}).$$

Кроме того, матрица $A(m)+B(m)U(m)$ обратима для любого $m \in \mathbb{N}$ и

$$\left\| \big(A+BU\big)^{-1} \right\|_\infty < 3a_0^{2K}.$$

По теореме 1.1 мы получаем, что системы (6.2) и (2.4) асимптотически эквивалентны. Теорема доказана. □

§ 8. Спектральное множество системы с устойчивыми показателями

Введем понятие пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы.

О п р е д е л е н и е 8.1 (см. [44]). Полный спектр показателей Ляпунова системы (2.4) называется *пропорционально глобально управляемым*, если для каждого $\Delta > 0$ существует $\widehat{\ell} = \widehat{\ell}(\Delta) > 0$ такое, что для любого набора

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in O_\Delta\big(\lambda(A)\big)$$

найдется матрица $R(\cdot) \in \mathcal{R}$, удовлетворяющая оценке

$$\|R-E\|_\infty \leqslant \widehat{\ell} \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j| \tag{8.1}$$

и гарантирующая выполнение равенства

$$\lambda(AR) = \mu. \tag{8.2}$$

Наша цель — доказать это свойство в случае, когда показатели Ляпунова невозмущенной системы (1.2) устойчивы. Для этого рассмотрим сначала скалярное линейное неоднородное уравнение
$$\varphi(m+1) = a(m)\varphi(m) + g(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \tag{8.3}$$
где функция $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ вполне ограничена. Положим $h(m) = \prod\limits_{l=1}^{m-1} a(l)$ при $m \geqslant 2$ и $h(1) = 1$.

Непосредственно из формулы (1.8) вытекает, что для каждого решения $\varphi(\cdot)$ уравнения (8.3) имеет место равенство
$$\varphi(m) = h(m)\Big(\varphi(1) + \sum_{s=1}^{m-1} h^{-1}(s+1)g(s)\Big), \quad m > 1. \tag{8.4}$$

Рассмотрим теперь линейную однородную систему с дискретным временем
$$y(m+1) = F(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^k, \tag{8.5}$$
с вполне ограниченной на $\mathbb{N}$ нижней треугольной матрицей
$$F(m) = \{f_{ij}(m)\}_{i,j=1}^{k}.$$
Положим $h_i(m) = \prod\limits_{l=1}^{m-1} f_{ii}(l)$ при $m > 1$ и $h_i(1) = 1$.

Системе (8.5) поставим в соответствие систему
$$\varphi(m+1) = \widehat{F}(m)\varphi(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in \mathbb{R}^k, \tag{8.6}$$
матрица $\widehat{F}(\cdot)$ которой имеет вид
$$\widehat{F}(m) = \begin{pmatrix} |f_{11}(m)| & 0 & \dots & 0 \\ 1 & |f_{22}(m)| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & |f_{kk}(m)| \end{pmatrix}.$$
Рассмотрим также мультипликативно возмущенную по отношению к (8.5) систему
$$z(m+1) = F(m)\operatorname{diag}\big(e^{\nu_1}, \dots, e^{\nu_k}\big)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^k. \tag{8.7}$$

Л е м м а 8.1 (см. [2]). *Пусть $j \in \{1, \dots, k\}$ фиксировано,*
$$\varphi(\cdot) = \operatorname{col}\big(\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot)\big)$$
— решение системы (8.6) *с начальным условием $\varphi(1) = e_j$. Тогда для произвольного набора чисел $\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$ координаты решения*
$$z(\cdot) = \operatorname{col}\big(z_1(\cdot), \dots, z_k(\cdot)\big)$$
системы (8.7) *с начальным условием $z(1) = e_j$ удовлетворяют оценкам*
$$|z_i(m)| \leqslant \alpha^{i-j} e^{\nu_j(m-1)}\varphi_i(m), \quad i \in \{1, \dots, k\}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{8.8}$$
где $\alpha \doteq \sup\{1, |f_{ij}(m)|\colon i,j = 1, \dots, k, \quad m \in \mathbb{N}\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $j \in \{1, \ldots, k\}$. Найдем координаты $\varphi_i(\cdot)$ решения $\varphi(\cdot)$ системы (8.6), удовлетворяющего начальному условию $\varphi(1) = e_j$.

При всех $i \in \{1, \ldots, j-1\}$: $\varphi_i(m) \equiv 0$. Координата $\varphi_j(\cdot)$ является решением задачи Коши $\varphi_j(m+1) = |f_{jj}(m)|\varphi_j(m)$, $\varphi_j(1) = 1$, поэтому $\varphi_j(m) = |h_j(m)|, \quad m \in \mathbb{N}$. А при $i > j$ координата $\varphi_i(\cdot)$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению

$$\varphi_i(m+1) = |f_{ii}(m)|\varphi_i(m) + \sum_{l=j}^{i-1} \varphi_l(m)$$

и начальному условию $\varphi_i(1) = 0$, поэтому, в силу (8.4), справедливо равенство

$$\varphi_i(m) = |h_i(m)| \sum_{s=1}^{m-1} |h_i^{-1}(s+1)| \sum_{l=j}^{i-1} \varphi_l(s), \quad m > 1.$$

Теперь будем доказывать оценки (8.8).

1) При $i \in \{1, \ldots, j-1\}$: $|z_i(m)| = \varphi_i(m) \equiv 0$, и (8.8) выполнено.

2) Функция $z_j(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$z_j(m+1) = f_{jj}(m)e^{\nu_j} z_j(m), \quad z_j(1) = 1,$$

поэтому

$$z_j(m) = \prod_{l=1}^{m-1} f_{jj}(l)e^{\nu_j} = h_j(m)e^{\nu_j(m-1)}, \quad m > 1,$$

$$|z_j(m)| = |h_j(m)|e^{\nu_j(m-1)} = \varphi_j(m)e^{\nu_j(m-1)},$$

и оценка (8.8) при $i = j$ обращается в точное равенство.

3) Пусть неравенство (8.8) доказано при всех $i \in \{j, \ldots, p-1\}$, где $p \in \{j+1, \ldots, k\}$. Докажем его для $i = p$. Функция $z_p(\cdot)$ является решением задачи Коши

$$z_p(m+1) = f_{pp}(m)e^{\nu_p} z_p(m) + \sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(m)e^{\nu_l} z_l(m), \quad z_p(1) = 0,$$

поэтому, в силу (8.4),

$$z_p(m) = h_p(m)e^{\nu_p(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} h_p^{-1}(s+1)e^{-\nu_p s} \sum_{l=j}^{p-1} f_{pl}(s)e^{\nu_l} z_l(s),$$

откуда

$$|z_p(m)| \leqslant |h_p(m)|e^{\nu_p(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\nu_p s} \sum_{l=j}^{p-1} |f_{pl}(s)|e^{\nu_l}|z_l(s)| \leqslant$$

$$\leqslant |h_p(m)|e^{\nu_p(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\nu_p s}\alpha \sum_{l=j}^{p-1} e^{\nu_l}\alpha^{l-j}e^{\nu_j(s-1)}\varphi_l(s) \leqslant$$

$$\leqslant |h_p(m)|e^{\nu_p(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{-\nu_p s}\alpha \cdot \alpha^{p-1-j}e^{\nu_j}e^{\nu_j(s-1)} \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) =$$

$$= \alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\nu_p(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)|e^{(\nu_j-\nu_p)s} \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\nu_p(m-1)}e^{(\nu_j-\nu_p)(m-1)} \sum_{s=1}^{m-1} |h_p^{-1}(s+1)| \sum_{l=j}^{p-1} \varphi_l(s) =$$

$$= \alpha^{p-j}|h_p(m)|e^{\nu_j(m-1)}\sum_{s=1}^{m-1}|h_p^{-1}(s+1)|\sum_{l=j}^{p-1}\varphi_l(s) = \alpha^{p-j}e^{\nu_j(m-1)}\varphi_p(m), \quad m>1.$$

Лемма доказана. $\square$

Пусть $F_0(\cdot) = \operatorname{diag}\big(f_{11}(\cdot),\dots,f_{kk}(\cdot)\big)$ — матрица диагонального приближения для матрицы $F(\cdot)$ системы (8.5). Заметим, что

$$\Omega(F_0) = \lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\Big\|\prod_{l=(j-1)T+1}^{jT}F_0(l)\Big\| =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\max_{i=1,\dots,k}\sum_{l=(j-1)T+1}^{jT}\ln|f_{ii}(l)|,$$

$$\overline{\omega}(F_0) = \lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\ln\Big\|\Big(\prod_{l=(j-1)T+1}^{jT}F_0(l)\Big)^{-1}\Big\|^{-1} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{mT}\sum_{j=1}^{m}\min_{i=1,\dots,k}\sum_{l=(j-1)T+1}^{jT}\ln|f_{ii}(l)|.$$

Аналогично случаю систем с непрерывным временем [10, с. 120–121], можно доказать, что центральные показатели треугольных систем и систем их диагонального приближения совпадают, поэтому в нашем случае $\Omega(F) = \Omega(\widehat{F}) = \Omega(F_0)$, $\overline{\omega}(F) = \overline{\omega}(\widehat{F}) = \overline{\omega}(F_0)$.

Т е о р е м а 8.1 (см. [2]). *Пусть матрица* $F(\cdot)$ *системы* (8.5) *такова, что*

$$\Omega(F_0) = \overline{\omega}(F_0) = \lambda.$$

Тогда для любого набора чисел $\nu_1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_k$ *полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы* (8.7) *состоит из чисел* $\lambda+\nu_k \leqslant \ldots \leqslant \lambda+\nu_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что показатели Ляпунова системы (8.5) устойчивы, а ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из k чисел λ. Такими же свойствами обладает и система (8.6). Отсюда вытекает, что показатель Ляпунова всякого нетривиального решения системы (8.6) равен числу λ. Кроме того, для всех $i\in\{1,\dots,k\}$

$$\overline{f_{ii}} \doteq \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\sum_{l=1}^{m-1}\ln|f_{ii}(l)| = \lambda.$$

Зафиксируем произвольное $j\in\{1,\dots,k\}$ и рассмотрим решения $z(\cdot) = \operatorname{col}(z_1(\cdot),\dots,z_k(\cdot))$ и $\varphi(\cdot) = \operatorname{col}(\varphi_1(\cdot),\dots,\varphi_k(\cdot))$ систем (8.7) и (8.6) соответственно, удовлетворяющие начальным условиям $z(1) = \varphi(1) = e_j$. Тогда при всех $i\in\{1,\dots,k\}$ справедливы неравенства $\lambda[\varphi_i] \leqslant \lambda[\varphi] = \lambda$. Найдем показатель Ляпунова функции $z(\cdot)$. Из леммы 8.1 получаем, что при всех $i\in\{1,\dots,k\}$ имеют место оценки (8.8), поэтому

$$\lambda[z_i] = \lambda[|z_i|] = \lambda[e^{\nu_j(m-1)}] + \lambda[\varphi_i] \leqslant \nu_j + \lambda,$$

при этом

$$\lambda[z_j] = \lambda[e^{\nu_j(m-1)}] + \lambda[\varphi_j] = \nu_j + \lambda[|h_j(m)|] =$$

$$= \nu_j + \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln|h_j(m)| = \nu_j + \varlimsup_{m\to\infty} m^{-1}\ln\prod_{l=1}^{m-1}|f_{jj}(l)| = \nu_j + \overline{f_{jj}} = \nu_j + \lambda.$$

Следовательно,
$$\lambda[z] = \max_{i=1,\ldots,k} \lambda[z_i] = \lambda + \nu_j.$$

Построим фундаментальную систему решений $Z(\cdot) = \{z^1(\cdot), \ldots, z^k(\cdot)\}$ системы (8.7) такую, что $z^j(1) = e_j$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда $\lambda[z^j] = \lambda + \nu_j$, причем этот показатель реализуется j-й координатой решения $z^j(\cdot)$. Докажем, что $Z(\cdot)$ несжимаема (определение 1.6), то есть для любой нетривиальной линейной комбинации $\sum_{j=1}^k \gamma_j z^j(\cdot)$ входящих в $Z(\cdot)$ решений имеет место равенство
$$\lambda\Big[\sum_{j=1}^{k} \gamma_j z^j\Big] = \max\{\lambda[z^j] \colon \gamma_j \neq 0\}.$$

Пусть $\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ — произвольный ненулевой вектор, и $l \in \{1, \ldots, k\}$ — наименьший индекс, для которого $\gamma_l \neq 0$. Рассмотрим
$$z(m) = Z(m)\gamma = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j z^j(m) = \sum_{j=l}^{k} \gamma_j z^j(m).$$

Тогда
$$\lambda[z] \leqslant \max_{j=l,\ldots,k} \lambda[z^j] = \lambda + \nu_l.$$

С другой стороны, фундаментальная матрица $Z(\cdot)$ нижняя треугольная (см. доказательство леммы 8.1), поэтому l-я координата $z_l^j(\cdot)$ решения $z^j(\cdot)$ равна тождественно нулю при всех $j > l$, и для l-й координаты функции $z(\cdot)$ справедливо равенство
$$z_l(m) = \sum_{j=l}^{k} \gamma_j z_l^j(m) = \gamma_l z_l^l(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lambda[z] \geqslant \lambda[z_l] = \lambda[z_l^l] = \lambda + \nu_l$. Следовательно,
$$\lambda[z] = \lambda + \nu_l = \max_{j\colon \gamma_j \neq 0} \lambda[z^j].$$

Итак, фундаментальная система решений $Z(\cdot)$ несжимаема. Но тогда фундаментальная система $Z(\cdot)$ нормальна, а потому реализует полный спектр показателей Ляпунова системы (8.7). Следовательно, полный спектр этой системы состоит из чисел $\lambda + \nu_k, \ldots, \lambda + \nu_1$. Теорема доказана. □

Сейчас мы получим достаточное условие пропорциональной глобальной управляемости полного спектра показателей системы (2.4). Для этого нам понадобится одно простое утверждение.

Утверждение 8.1 (см. [6]). *Пусть $\Delta > 0$ — фиксировано. Тогда для каждого значения $t \in [-\Delta, \Delta]$ выполнено неравенство*
$$|e^t - 1| \leqslant \frac{e^\Delta - 1}{\Delta}|t|. \tag{8.9}$$

Доказательство. Очевидно, что $|e^t - 1| \leqslant e^{|t|} - 1$. Далее, функция $f(t) \doteq (e^t - 1)/t$ строго возрастает при $t > 0$, поэтому при $0 < |t| \leqslant \Delta$ выполнено неравенство
$$(e^{|t|} - 1)/|t| \leqslant (e^\Delta - 1)/\Delta,$$

которое влечет (8.9). При $t = 0$ неравенство (8.9) тоже выполнено. □

Т е о р е м а 8.2 (см. [2]). *Пусть показатели Ляпунова системы* (1.2) *устойчивы. Тогда полный спектр показателей Ляпунова мультипликативно возмущенной системы* (2.4) *пропорционально глобально управляем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремой 2.1 построим преобразование Ляпунова (1.5), приводящее систему (1.2) к виду (2.5). Из (1.7) и (2.5) следует, что

$$D(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m). \tag{8.10}$$

Пусть $\Delta > 0$ фиксировано. Возьмем произвольный набор чисел $\mu = \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big) \in \mathcal{O}_\Delta\big(\lambda(A)\big)$ и обозначим $\nu_j = \mu_j - \lambda_j(A)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $|\nu_j| < \Delta$ при всех j. Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, p\}$. Для каждого $i \in n_j$ имеет место равенство $\nu_j = \mu_j - \Lambda_i(A)$, поэтому числа ν_j, $j \in n_i$, упорядочены по возрастанию. Упорядочим их по убыванию и полученный набор чисел обозначим η_j, $j \in n_i$. Пусть H_i — диагональная $n_i \times n_i$ матрица, диагональные элементы которой совпадают с e^{η_j}, $j \in n_i$. Тогда матрица $H \doteq \operatorname{diag}\big(e^{\eta_1}, \ldots, e^{\eta_n}\big)$ совпадает с блочно-диагональной матрицей $\operatorname{diag}(H_1, \ldots, H_p)$. Рассмотрим мультипликативно возмущенную по отношению к (2.5) систему

$$\psi(m+1) = D(m)H\psi(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \psi \in \mathbb{R}^n. \tag{8.11}$$

Это система с блочно-диагональной матрицей, диагональные блоки которой — нижние треугольные матрицы $D_i(m)H_i$, $i = 1, \ldots, p$. Рассмотрим фундаментальную матрицу $\Psi(\cdot) = \big[\psi^1(\cdot), \ldots, \psi^n(\cdot)\big]$ системы (8.11), такую, что $\Psi(1) = E$. Так как матрица системы (8.11) блочно-нижнетреугольная, то такую же структуру имеет и $\Psi(\cdot)$. Из доказательства теоремы 8.1 следует, что $\lambda[\psi^j] = \eta_j + \Lambda_i(A) \doteq \beta_j$, $j \in n_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Заметим, что набор чисел $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ совпадает с набором $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, но второй набор упорядочен по возрастанию. Кроме того, для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ набор $\{\beta_j\}_{j \in n_i}$ совпадает с набором $\{\mu_j\}_{j \in n_i}$, но первый упорядочен по убыванию, а второй по возрастанию. Отсюда следует, что $\max\limits_{j \in n_{i-1}} \beta_j \leqslant \min\limits_{j \in n_i} \beta_j$ при всех $i \in \{2, \ldots, p\}$.

Докажем несжимаемость $\Psi(\cdot)$. Из нее будет следовать нормальность $\Psi(\cdot)$ и то, что полный спектр показателей Ляпунова возмущенной системы (8.11) состоит из чисел

$$\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n.$$

Действительно, рассмотрим произвольную нетривиальную линейную комбинацию входящих в $\Psi(\cdot)$ решений: $\psi(\cdot) = \sum\limits_{j=1}^{n} \gamma_j \psi^j(\cdot)$. Пусть $k \in n_i$ — произвольно. Обозначим $I_k \doteq \{j \in n_i \colon j \leqslant k\}$. Так как $\Psi(\cdot)$ блочно-нижнетреугольная, то для k-й координаты решения $\psi(\cdot)$ имеем равенство $\psi_k(\cdot) = \sum\limits_{j \in I_k} \gamma_j \psi^j_k(\cdot)$, откуда $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k} \lambda[\psi^j_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k} \lambda[\psi^j]$. Рассмотрим $s \in \{1, \ldots, n\}$ — наибольший индекс, для которого $\gamma_s \neq 0$, и пусть $s \in n_{i_0}$. Найдем наименьший индекс $l \in n_{i_0}$, для которого $\gamma_l \neq 0$. Тогда $\max\limits_{j \colon \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$. Для доказательства несжимаемости $\Psi(\cdot)$ надо установить, что $\lambda[\psi] = \beta_l$. В самом деле, $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in n_{i_0 - 1}} \beta_j \leqslant \beta_l$ при всех $k \in \{1, \ldots, l-1\}$. Для координаты $\psi_l(\cdot)$ справедливы равенства $\psi_l(\cdot) = \sum\limits_{j \in I_l} \gamma_j \psi^j_l(\cdot) = \gamma_l \psi^l_l(\cdot)$, поэтому $\lambda[\psi_l] = \lambda[\gamma_l \psi^l_l] = \lambda[\psi^l_l] = \beta_l$. Наконец, при $k \in \{l+1, \ldots, s\}$: $\lambda[\psi_k] \leqslant \max\limits_{j \in I_k \colon \gamma_j \neq 0} \lambda[\psi^j] = \beta_l$. Следовательно, $\lambda[\psi] = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \lambda[\psi_k] = \beta_l$. Таким образом, фундаментальная система решений $\Psi(\cdot)$ несжимаема, и полный спектр системы (8.11) состоит из чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$.

К системе (8.11) применим обратное преобразование Ляпунова $\psi = L(m)y$. Тогда, с учетом равенства (8.10),

$$\begin{aligned} y(m+1) = L^{-1}(m+1)\psi(m+1) = L^{-1}(m+1)D(m)H\psi(m) = \\ = L^{-1}(m+1)L(m+1)A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) = \\ = A(m)L^{-1}(m)H\psi(m) = A(m)L^{-1}(m)HL(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Положим

$$R(m) = L^{-1}(m)HL(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8.12}$$

Из полной ограниченности матрицы Ляпунова $L(\cdot)$ и невырожденности H вытекает полная ограниченность матрицы $R(\cdot)$. Итак, имеем допустимо мультипликативно возмущенную по отношению к (1.2) систему вида (2.4). Так как преобразование Ляпунова сохраняет полный спектр, то показатели Ляпунова построенной системы (2.4) — это набор чисел

$$\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n.$$

Пусть $l \doteq \max\bigl\{\|L\|_\infty, \|L^{-1}\|_\infty\bigr\}$. Обозначим

$$\widehat{\ell} = \widehat{\ell}(\Delta) = l^2(e^\Delta - 1)/\Delta. \tag{8.13}$$

Докажем, что построенное мультипликативное возмущение $R(\cdot)$ удовлетворяет оценке (8.1). Действительно, из равенства (8.12) получаем, что $R(m) - E = L^{-1}(m)\bigl(H - E\bigr)L(m)$, поэтому $\|R - E\|_\infty \leqslant l^2\|H - E\|$. Далее, из утверждения 8.1 получаем оценки

$$\|H - E\| = \max_{j=1,\ldots,n} |e^{\eta_j} - 1| = \max_{j=1,\ldots,n} |e^{\nu_j} - 1| \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} \bigl(e^{|\nu_j|} - 1\bigr) \leqslant \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} \max_{j=1,\ldots,n} |\nu_j|.$$

Следовательно,

$$\|R - E\|_\infty \leqslant l^2 \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} \max_{j=1,\ldots,n} |\nu_j| = \widehat{\ell} \max_{j=1,\ldots,n} |\nu_j| = \widehat{\ell} \max_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)|,$$

т. е. оценка (8.1) выполнена. Теорема доказана. □

Из этой теоремы вытекает описание спектрального множества мультипликативно возмущенной системы в случае устойчивости показателей невозмущенной системы.

Т е о р е м а 8.3 (см. [2, 60]). *Предположим, что показатели Ляпунова системы* (1.2) *устойчивы. Тогда спектральное множество* $\lambda(\mathcal{R})$ *системы* (1.2) *при всевозможных допустимых мультипликативных возмущениях ее коэффициентов совпадает со множеством* $\mathbb{R}^n_\leqslant$ *всех упорядоченных по неубыванию наборов из* n *чисел, при этом для каждого* $\Delta > 0$ *найдется такое* $\widehat{\ell} = \widehat{\ell}(\Delta) > 1$, *что для любого* $\delta \in (0, \Delta)$ *имеет место включение*

$$\mathcal{O}_\delta\bigl(\lambda(A)\bigr) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\widehat{\ell}\delta}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из теоремы 8.2. Неравенство $\widehat{\ell}(\Delta) > 1$ следует из (8.13) и из того, что $l \geqslant 1$ и $e^\Delta - 1 > \Delta$ при всех $\Delta > 0$. Теорема доказана. □

Т е о р е м а 8.4 (см. [60]). *Пусть показатели Ляпунова системы* (1.2) *устойчивы. Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие положительные* $\delta_1 < \delta_2$, *что справедливы включения*

$$\mathcal{O}_{\delta_1}\bigl(\lambda(A)\bigr) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\delta_2}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как показатели Ляпунова невозмущенной системы (1.2) устойчивы, то по определению 2.5 найдется такое $\delta_2 > 0$, что имеет место включение $\lambda(\mathcal{R}_{\delta_2}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$. Пользуясь теоремой 8.3, найдем величину $\widehat{\ell}(\delta_2) > 1$ и положим $\delta_1 = \delta_2/\widehat{\ell}(\delta_2)$. Тогда $\delta_1 < \delta_2$, поэтому $\mathcal{O}_{\delta_1}\bigl(\lambda(A)\bigr) \subset \lambda(\mathcal{R}_{\widehat{\ell}(\delta_2)\delta_1}) = \lambda(\mathcal{R}_{\delta_2}) \subset \mathcal{O}_\varepsilon\bigl(\lambda(A)\bigr)$. Теорема доказана. □

§ 9. Достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова

Сначала установим связь между свойствами пропорциональной глобальной управляемости полного спектра мультипликативно возмущенной системы (2.4) и пропорциональной локальной управляемости полного спектра замкнутой системы (6.2).

Т е о р е м а 9.1 (см. [44]). *Пусть система* (6.1) *равномерно вполне управляема. Если полный спектр показателей Ляпунова системы* (2.4) *пропорционально глобально управляем, то полный спектр показателей Ляпунова системы* (6.2) *пропорционально локально управляем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из пропорциональной глобальной управляемости полного спектра системы (2.4) следует, что для $\Delta = 1$ существует такое $\widehat{\ell} = \widehat{\ell}(1) > 0$, что для любого набора

$$\mu = \big(\mu_1, \dots, \mu_n\big) \in O_1\big(\lambda(A)\big)$$

существует матрица $R(\cdot) \in \mathcal{R}$, удовлетворяющая оценке (8.1) и обеспечивает выполнение равенства (8.2). Так как (6.1) равномерно вполне управляема, то по теореме 7.4 найдутся $\widehat{\delta} > 0$ и $\widehat{l} > 0$ такие, что для любой системы (2.4) с $R(\cdot) \in \mathcal{R}_{\widehat{\delta}}$ существует допустимое для системы (6.2) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что $\|U\|_\infty \leqslant \widehat{l}\|R - E\|_\infty$, и система (2.4) асимптотически эквивалента системе (6.2). Возьмем $\delta_1 = \min\{1, \widehat{\delta}/\widehat{\ell}\}$. Рассмотрим набор чисел

$$\mu = \big(\mu_1, \dots, \mu_n\big) \in \mathcal{O}_{\delta_1}\big(\lambda(A)\big) \subset \mathcal{O}_1\big(\lambda(A)\big).$$

Из пропорциональной глобальной управляемости полного спектра системы (2.4) следует, что существует матрица $R(\cdot) \in \mathcal{R}$ такая, что

$$\|R - E\|_\infty \leqslant \widehat{\ell} \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j| \leqslant \widehat{\ell}\delta_1 \leqslant \widehat{\delta},$$

и равенство (8.2) выполнено. Так как система (6.1) равномерно вполне управляема, то по теореме 7.4 для этой матрицы $R(\cdot)$ существует допустимое для системы (6.2) матричное управление $U(\cdot)$ такое, что

$$\|U\|_\infty \leqslant \alpha\|R - E\|_\infty \leqslant \alpha\widehat{\ell} \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j(A) - \mu_j|,$$

и такое, что системы (6.2) и (2.4) асимптотически эквивалентны. Поскольку асимптотически эквивалентные системы имеют одинаковый спектр, то теорема доказана. □

Т е о р е м а 9.2 (см. [44]). *Пусть система* (6.1) *равномерно вполне управляема, а полный спектр показателей Ляпунова системы* (1.2) *устойчив. Тогда полный спектр показателей Ляпунова системы* (6.2) *пропорционально локально управляем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует непосредственно из теорем 8.2 и 9.1. □

Сейчас мы покажем на примере, что найденные достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова системы (6.2) не являются необходимыми. Для построения этого примера введем в рассмотрение скалярную функцию натурального аргумента

$$b(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 1, \\ 1 & \text{при} \quad m \in [m_{2j-1}, m_{2j} - 1], \\ 0 & \text{при} \quad m \in [m_{2j}, m_{2j+1} - 1], \end{cases} \tag{9.1}$$

где последовательность $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ определяется рекуррентно: $m_1 = 1$,

$$m_{2j} = jm_{2j-1}, \quad m_{2j+1} = j + m_{2j} \quad \text{для } j \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ рассмотрим функцию

$$f_\alpha(m) = 1 + b(m)\big(e^\alpha - 1\big), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Л е м м а 9.1 (см. [6]). *При каждом $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $f_\alpha(\cdot)$ имеет точное логарифмическое среднее значение, равное α.*

Для доказательства этой леммы нам понадобится одно утверждение. Аналогичное утверждение для функций непрерывного аргумента приведено в [10, с. 148–149].

У т в е р ж д е н и е 9.1 (см. [6]). *Пусть $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Если функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ постоянна на отрезках $[s_k, s_{k+1}-1] \cap \mathbb{N}$, то*

$$\varlimsup_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} f(j) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{s_k} \sum_{j=1}^{s_k-1} f(j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(m) = f_k$ при всех $m \in [s_k, s_{k+1}-1] \cap \mathbb{N}$. Обозначим

$$\varphi(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} f(j).$$

Докажем, что функция $\varphi(\cdot)$ монотонна на каждом из отрезков $J_k \doteq [s_k, s_{k+1}] \cap \mathbb{N}$.

Возьмем любое натуральное $m \in J_k$ такое, что $m+1 \in J_k$. Положим $C_k = \sum\limits_{j=1}^{s_k-1} f(j)$. Если $m > s_k$, то

$$\varphi(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} f(j) = \frac{1}{m}\Big(\sum_{j=1}^{s_k-1} f(j) + \sum_{j=s_k}^{m-1} f(j)\Big) = \frac{1}{m}\big(C_k + (m-s_k)f_k\big) = \frac{1}{m}\big(C_k - s_kf_k\big) + f_k.$$

При $m = s_k$ получаем равенство

$$\varphi(m) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} f(j) = \frac{1}{m} C_k = \frac{1}{m}\big(C_k - s_kf_k\big) + f_k.$$

Аналогично,

$$\varphi(m+1) = \frac{1}{m+1}\big(C_k - s_kf_k\big) + f_k.$$

Следовательно,

$$\varphi(m+1) - \varphi(m) = \frac{1}{m+1}\big(C_k - s_kf_k\big) - \frac{1}{m}\big(C_k - s_kf_k\big) = \frac{s_kf_k - C_k}{m(m+1)}.$$

Таким образом, знак разности $\varphi(m+1) - \varphi(m)$ не зависит от m, поэтому $\varphi(\cdot)$ монотонна на J_k. Это означает, что $\max\limits_{m\in J_k} \varphi(m)$ достигается на концах отрезка J_k.

Пусть $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность натуральных чисел, на которой реализуется

$$\varlimsup_{m\to\infty} \varphi(m).$$

Существует единственное натуральное число k_i такое, что $t_i \in [s_{k_i}, s_{k_i+1} - 1]$. Тогда

$$\varphi(t_i) \leqslant \max\{\varphi(s_{k_i}), \varphi(s_{k_i+1})\}$$

для всех $i \in \mathbb{N}$, следовательно,

$$\varlimsup_{m\to\infty} \varphi(m) = \lim_{i\to\infty} \varphi(t_i) \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \varphi(s_{k_i}) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varphi(s_k).$$

Выполнено также противоположное неравенство

$$\varlimsup_{m\to\infty} \varphi(m) \geqslant \varlimsup_{k\to\infty} \varphi(s_k),$$

поэтому

$$\varlimsup_{m\to\infty} \varphi(m) = \varlimsup_{k\to\infty} \varphi(s_k).$$

Утверждение доказано. □

Доказательство леммы 9.1. Возьмем произвольное значение $\alpha \in \mathbb{R}$ и обозначим $\beta = e^\alpha - 1$. Докажем, что предел $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr)$ существует и равен α. Так как находящаяся под знаком суммы функция постоянна на отрезках $j \in [m_k, m_{k+1} - 1]$, то, в силу утверждения 9.1, для вычисления этого предела достаточно найти лишь пределы по подпоследовательностям $\bigl(m_{2k+1}\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\bigl(m_{2k}\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что $|\ln\bigl(1 + \beta b(m)\bigr)| \leqslant |\alpha|$, поэтому

$$0 \leqslant \frac{1}{m_{2k} - m_{2k-1}} \Biggl| \sum_{j=1}^{m_{2k-1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) \Biggr| \leqslant \frac{m_{2k-1}|\alpha|}{m_{2k} - m_{2k-1}} = \frac{m_{2k-1}|\alpha|}{(k-1)m_{2k-1}} = \frac{|\alpha|}{k-1},$$

следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k} - m_{2k-1}} \sum_{j=1}^{m_{2k-1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k}} \sum_{j=1}^{m_{2k}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k} - m_{2k-1}} \cdot \frac{m_{2k} - m_{2k-1}}{m_{2k}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_{2k-1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) + \sum_{j=m_{2k-1}}^{m_{2k}-1} \ln(1 + \beta) \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k} - m_{2k-1}} \sum_{j=1}^{m_{2k-1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) + \ln(1 + \beta) = \ln(1 + \beta) = \alpha,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k+1}} \sum_{j=1}^{m_{2k+1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k + m_{2k}} \sum_{j=1}^{m_{2k+1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + k/m_{2k}} \cdot \frac{1}{m_{2k}} \sum_{j=1}^{m_{2k+1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k}} \sum_{j=1}^{m_{2k}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k}} \sum_{j=m_{2k}}^{m_{2k+1}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_{2k}} \sum_{j=1}^{m_{2k}-1} \ln\bigl(1 + \beta b(j)\bigr) = \alpha.$$

Итак, существует точный предел $\lim\limits_{m\to\infty} m^{-1}\sum\limits_{j=1}^{m-1}\ln\bigl(1+\beta b(j)\bigr)=\alpha$. Лемма доказана. $\square$

П р и м е р 9.1 (см. [6]). Рассмотрим скалярную функцию натурального аргумента $\varphi(m)=e^{m\sin\ln m}$ и линейную управляемую систему

$$x(m+1)=A(m)x(m)+B(m)u(m),\quad m\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}^2,\quad u\in\mathbb{R}^2, \tag{9.2}$$

где

$$A(m)=\begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0\\ 0 & \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}\end{pmatrix},\quad B(m)=\begin{pmatrix} b(m) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

функция $b(\cdot)$ определена равенством (9.1).

Из примера 3.1 получаем, что полный спектр показателей Ляпунова свободной системы $x(m+1)=A(m)x(m)$ неустойчив и состоит из чисел $\lambda_1(A)=-1/2$, $\lambda_2(A)=0$.

При каждом $K\in\mathbb{N}$ для матрицы Калмана системы (9.2) имеет место равенство

$$W(m_{2K},m_{2K}+K)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & \gamma_K\end{pmatrix},$$

где $\gamma_K>0$. Это означает, что система (9.2) не является равномерно вполне управляемой.

Итак, ни первое, ни второе условия теоремы 9.2 не выполнены. Но оказывается, что полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$x(m+1)=\bigl(A(m)+B(m)U(m)\bigr)x(m),\quad m\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}^2,$$

пропорционально локально управляем. Действительно, возьмем $\delta=1/4$ и для произвольных чисел $\mu_1\in(-3/4,-1/4)$ и $\mu_2\in(-1/4,1/4)$ положим

$$\alpha_1=e^{\mu_1}-e^{-1/2},\quad \alpha_2=\alpha_2(m)=\frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}(e^{\mu_2}-1).$$

Построим матричное управление

$$U(m)=\operatorname{diag}\bigl(\alpha_1,\alpha_2(m)\bigr),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$A(m)+B(m)U(m)=\begin{pmatrix} e^{-1/2} & 0\\ 0 & \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b(m) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2(m)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} e^{-1/2}+b(m)(e^{\mu_1}-e^{-1/2}) & 0\\ 0 & \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)}e^{\mu_2-1}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, замкнутая система

$$x(m+1)=\bigl(A(m)+B(m)U(m)\bigr)x(m),\quad m\in\mathbb{N},\quad x\in\mathbb{R}^2, \tag{9.3}$$

диагональна, поэтому ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из верхних логарифмических средних значений диагональных элементов, т. е. из чисел

$$\lambda_1(A+BU) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\bigl(e^{-1/2} + b(l)(e^{\mu_1} - e^{-1/2})\bigr) =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\Bigl(e^{-1/2}\bigl(1 + b(l)(e^{\mu_1+1/2} - 1)\bigr)\Bigr) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln\bigl(1 + b(l)(e^{\mu_1+1/2} - 1)\bigr),$$

$$\lambda_2(A+BU) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m-1} \ln \frac{\varphi(l+1)}{\varphi(l)} e^{\mu_2-1} =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \prod_{l=1}^{m-1} \frac{\varphi(l+1)}{\varphi(l)} e^{\mu_2-1} = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln\Bigl(\frac{\varphi(m)}{\varphi(1)} e^{(m-1)(\mu_2-1)}\Bigr) =$$

$$= \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{m \sin \ln m}{m} + \lim_{m\to\infty} \frac{(m-1)(\mu_2-1)}{m} = 1 + \mu_2 - 1 = \mu_2.$$

Получаем, что $\lambda_1(A+BU) = \mu_1$.

Итак, построенное управление $U(\cdot)$ обеспечивает выполнение равенств $\lambda_i(A+BU) = \mu_i$, $i = 1, 2$. Докажем, что оно удовлетворяет требуемой липшицевой оценке

$$\|U\|_\infty \leqslant \ell \max_{i=1,2} |\mu_i - \lambda_i(A)|.$$

Действительно, используя оценки (8.9) и (3.3), получим

$$|\alpha_1| = |e^{\mu_1} - e^{-1/2}| = e^{-1/2}|e^{\mu_1+1/2} - 1| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-1/2}\frac{e^{1/4}-1}{1/4}|\mu_1 + 1/2| = 4e^{-1/2}(e^{1/4}-1)|\mu_1 - \lambda_1(A)|,$$

$$|\alpha_2(m)| = \frac{\varphi(m+1)}{\varphi(m)e}|e^{\mu_2} - 1| \leqslant e^{\sqrt{2}-1}\frac{e^{1/4}-1}{1/4}|\mu_2| = 4e^{\sqrt{2}-1}(e^{1/4}-1)|\mu_2 - \lambda_2(A)|.$$

Пусть $\ell \doteq 4e^{\sqrt{2}-1}(e^{1/4}-1)$, тогда

$$\|U\|_\infty \leqslant \max\bigl\{|\alpha_1|, \sup_{m\in\mathbb{N}} |\alpha_2(m)|\bigr\} \leqslant \ell \max_{i=1,2} |\mu_i - \lambda_i(A)|.$$

Таким образом, система (9.3) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова, несмотря на то, что для нее не выполнены условия теоремы 9.2. Следовательно, условия этой теоремы достаточны, но не необходимы для пропорциональной локальной управляемости показателей.

ГЛАВА III. Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей

Как было установлено примером 9.1, найденные во второй главе достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова замкнутой системы (равномерная полная управляемость открытой системы и устойчивость показателей Ляпунова свободной системы) не являются необходимыми. В этой главе при помощи концепции оболочки Бебутова получены необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Здесь мы не отказываемся от условия устойчивости показателей Ляпунова открытой системы, а усиливаем это условие до интегральной разделенности. В § 10 вводится определение оболочки Бебутова системы с дискретным временем и изучаются ее свойства. В § 11 установлено, что если исходная линейная однородная система с дискретным временем интегрально разделена, то всякая система из ее оболочки Бебутова обладает этим свойством. В § 12 изучено свойство равномерной полной управляемости систем из оболочки заданной линейной управляемой системы. В § 14 получены необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова всех систем, входящих в оболочку Бебутова заданной линейной управляемой системы.

§ 10. Динамическая система сдвигов. Оболочка Бебутова

Для произвольной ограниченной функции $F_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{q\times r}$ и любого $s \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $F_s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{q\times r}$, где $F_s(m) \doteq F_0(m+s)$ — сдвиг $F_0(m)$ на s. Обозначим через $\mathfrak{R}(F_0)$ замыкание в топологии поточечной сходимости на $\mathbb{N}$ множества $\{F_s(\cdot)\colon s \in \mathbb{N}\}$. Таким образом, $F \in \mathfrak{R}(F_0)$ в том и только том случае, когда существует неубывающая последовательность $\left(s_j\right)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \|F(m) - F_{s_j}(m)\| = 0$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$. Отметим, что $F \in \mathfrak{R}(F_0)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $J = J(\varepsilon)$, начиная с которого выполнено неравенство

$$\max_{m\leqslant\varepsilon^{-1}} \|F(m) - F_{s_j}(m)\| < \varepsilon.$$

Известно [62, с. 34], что $\mathfrak{R}(F_0)$ метризуемо в метрике

$$\rho(F,\widehat{F}) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \min\{\|F(m) - \widehat{F}(m)\|, m^{-1}\}.$$

Пространство $(\mathfrak{R}(F_0),\rho)$ компактно [62, с. 34]. Это пространство называется *оболочкой Бебутова* функции F_0 (см. [63], [54, с. 32]).

Л е м м а 10.1 (см. [43]). *Если $\|F_0\|_\infty \leqslant a_0$, то $\|F\|_\infty \leqslant a_0$ для любого $F \in \mathfrak{R}(F_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F \in \mathfrak{R}(F_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого $m \in \mathbb{N}$ найдется номер $J = J(m,\varepsilon)$ такой, что при $j \geqslant J$ выполняется неравенство

$$\|F(m) - F_{s_j}(m)\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $j \geqslant J$ имеем

$$\|F(m)\| \leqslant \|F_{s_j}(m)\| + \|F(m) - F_{s_j}(m)\| < a_0 + \varepsilon.$$

Устремляя в полученном неравенстве ε к 0, получим $\|F(m)\| \leqslant a_0$. Это верно для любого $m \in \mathbb{N}$, поэтому $\|F\|_\infty \leqslant a_0$. Лемма доказана. □

Л е м м а 10.2 (см. [43]). *Если $A_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вполне ограничена, причем выполнены неравенства $\|A_0\|_\infty \leqslant a_0$, $\|A_0^{-1}\|_\infty \leqslant a_0$, то каждая $A \in \mathfrak{R}(A_0)$ вполне ограничена, при этом $A^{-1} \in \mathfrak{R}(A_0^{-1})$ и $\|A\|_\infty \leqslant a_0$, $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка для $\|A\|_\infty$ получена в лемме 10.1. Из этой же леммы получаем, что для любой $C \in \mathfrak{R}(A_0^{-1})$ справедливо неравенство $\|C\|_\infty \leqslant a_0$.

Теперь докажем, что всякая $A \in \mathfrak{R}(A_0)$ обратима. Пусть $\big(s_j\big)_{j \in \mathbb{N}}$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, для которой

$$\lim_{j \to \infty} \|A(m) - A_{s_j}(m)\| = 0$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$, и $J = J(m, \varepsilon)$ — номер, начиная с которого выполняется неравенство

$$\|A(m) - A_{s_j}(m)\| < \varepsilon.$$

Тогда нетрудно проверить, что $\det A \in \mathfrak{R}(\det A_0)$, причем

$$\lim_{j \to \infty} |\det A(m) - \det A_{s_j}(m)| = 0.$$

Из (1.1) получаем

$$|\det A_0(m)| \geqslant \frac{1}{\|A_0^{-1}(m)\|^n} \geqslant \frac{1}{a_0^n} \doteq c_0$$

для любого $m \in \mathbb{N}$.

Возьмем любые $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и выберем $J_1 = J_1(m, \varepsilon)$ так, чтобы было выполнено неравенство

$$|\det A(m) - \det A_{s_j}(m)| < \varepsilon$$

для любого $j \geqslant J_1$. Тогда при всех $m \in \mathbb{N}$ и $j \geqslant J_1$ справедливы оценки

$$|\det A(m)| \geqslant |\det A_{s_j}(m)| - |\det A(m) - \det A_{s_j}(m)| > c_0 - \varepsilon.$$

Устремляя здесь ε к 0, мы получим $|\det A(m)| \geqslant c_0$. Это показывает, что матрица $A(m)$ обратима для любого $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, из неравенства (1.1) мы получаем

$$\|A^{-1}(m)\| \leqslant \frac{\|A(m)\|^{m-1}}{|\det A(m)|} \leqslant \frac{a_0^{n-1}}{c_0} = a_0^{2n-1}.$$

Сейчас покажем, что $A^{-1} \in \mathfrak{R}(A_0^{-1})$. Возьмем любые $\varepsilon > 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$J_2 = J_2(m, \varepsilon) = \max\{J(m, \varepsilon), J_1(m, \varepsilon)\}.$$

Предположим, что $j \geqslant J_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \|A^{-1}(m) - A_{s_j}^{-1}(m)\| &= \big\|A_{s_j}^{-1}(m)\big(A_{s_j}(m) - A(m)\big)A^{-1}(m)\big\| \leqslant \\ &\leqslant \|A_{s_j}^{-1}(m)\|\,\|A^{-1}(m)\|\,\|A_{s_j}(m) - A(m)\| < a_0 a_0^{2n-1}\varepsilon = a_0^{2n}\varepsilon. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что $A^{-1} \in \mathfrak{R}(A_0^{-1})$. Поскольку для любого $C \in \mathfrak{R}(A_0^{-1})$ мы имеем $\|C\|_\infty \leqslant a_0$, то и $\|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0$. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k, \tag{10.1}$$

с вполне ограниченной матрицей $A_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и ограниченной матрицей $B_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n\times k}$. Пусть

$$\|A_0\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A_0^{-1}\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|B_0\|_\infty \leqslant a_0.$$

Отождествим систему (10.1) с функцией $\sigma_0(\cdot)$, где

$$\sigma_0(m) \doteq \big(A_0(m), B_0(m)\big) \in \mathbb{R}^{n\times(n+k)},$$

и любую функцию $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ отождествим с линейной управляемой системой (6.1). Пространство $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ называется *оболочкой Бебутова* системы σ_0.

Из лемм 10.1 и 10.2 следует, что для любой $\sigma(\cdot) = (A(\cdot), B(\cdot)) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ выполняются неравенства

$$\|A\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|A^{-1}\|_\infty \leqslant a_0, \quad \|B\|_\infty \leqslant a_0.$$

Поэтому для матрицы Коши свободной системы (1.2) мы имеем оценку

$$\|X_A(m,s)\| \leqslant a_0^{|m-s|}$$

для любых $m, s \in \mathbb{N}$.

Для любых натуральных чисел $s < m$ и системы $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ обозначим через $W_\sigma(s,m)$ матрицу Калмана системы σ.

Л е м м а 10.3 (см. [43]). *Функция $\sigma \mapsto W_\sigma(s,m)$ непрерывна на $\mathfrak{R}(\sigma_0)$ для любых фиксированных $s < m$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть σ, $\widehat{\sigma} \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ таковы, что $\rho(\sigma, \widehat{\sigma}) < \delta$. Тогда выполняются неравенства

$$\max_{m \leqslant \delta^{-1}} \|A(m) - \widehat{A}(m)\| < \delta, \qquad \max_{m \leqslant \delta^{-1}} \|B(m) - \widehat{B}(m)\| < \delta.$$

Пусть $s < m$ — произвольные натуральные числа. Возьмем $\delta < m^{-1}$. Тогда для любого $j \in \{s, \ldots, m-1\}$ мы имеем

$$\|B(j) - \widehat{B}(j)\| < \delta$$

и

$$\begin{gathered}\|X_A(s,j+1) - X_{\widehat{A}}(s,j+1)\| = \|X_A^{-1}(j+1,s) - X_{\widehat{A}}^{-1}(j+1,s)\| \leqslant \\ \leqslant \|X_A^{-1}(j+1,s)\|\,\|X_{\widehat{A}}^{-1}(j+1,s)\|\|X_A(j+1,s) - X_{\widehat{A}}(j+1,s)\| \leqslant \\ \leqslant a_0^{2(m-s)}\|A(j)\cdots A(s) - \widehat{A}(j)\cdots\widehat{A}(s)\| \leqslant \\ \leqslant a_0^{2(m-s)} \sum_{i=s}^{j} a_0^{m-s}\|A(i) - \widehat{A}(i)\| \leqslant (m-s)a_0^{3(m-s)}\delta.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\|W_\sigma(s,m) - W_{\widehat{\sigma}}(s,m)\| \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=s}^{m-1}\Big(\|X_A(s,j+1) - X_{\widehat{A}}(s,j+1)\|\,\|B(j)\|\|B^*(j)\|\,\|X_A^*(s,j+1)\| + \\ + \|X_{\widehat{A}}(s,j+1)\|\,\|B(j) - \widehat{B}(j)\|\|B^*(j)\|\,\|X_A^*(s,j+1)\| + \\ + \|X_{\widehat{A}}(s,j+1)\|\,\|\widehat{B}(j)\|\|B^*(j) - \widehat{B}^*(j)\|\,\|X_A^*(s,j+1)\| + \\ + \|X_{\widehat{A}}(s,j+1)\|\,\|\widehat{B}(j)\|\|\widehat{B}^*(j)\|\,\|X_A^*(s,j+1) - X_{\widehat{A}}^*(s,j+1)\|\Big) \leqslant \\ \leqslant (m-s)\big(2(m-s)a_0^{3(m-s)}a_0^2a_0^{m-s} + 2a_0^{2(m-s)}a_0\big)\delta =: c(s,m)\delta.\end{gathered}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{m^{-1}, \varepsilon c^{-1}(s,m)\}.$$

Тогда из неравенства $\rho(\sigma, \widehat{\sigma}) < \delta$ следует

$$\|W_\sigma(s,m) - W_{\widehat{\sigma}}(s,m)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что функция $\sigma \mapsto W_\sigma(s,m)$ непрерывна. Лемма доказана. $\square$

Для любого $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ и натурального K обозначим через $\mu(\sigma, K)$ наименьшее собственное значение матрицы Калмана $W_\sigma(1, K+1)$. Очевидно, что

$$\mu(\sigma, K) = \min\{\xi^* W_\sigma(1, K+1)\xi \colon \xi \in \mathbb{R}^n,\ \|\xi\| = 1\}.$$

Отметим, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^s$ мы имеем

$$\xi^* W_\sigma(1, K+1)\xi =$$
$$= \sum_{j=1}^{K} \xi^* X_A(1, j+1) B(j) B^*(j) X_A^*(1, j+1)\xi = \sum_{j=1}^{K} \|\xi^* X_A(1, j+1) B(j)\|^2 \geqslant 0,$$

поэтому

$$\mu(\sigma, K) \geqslant 0, \quad \sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0), \quad K \in \mathbb{N}.$$

Из леммы 10.3 и того факта, что собственные значения непрерывно зависят от матриц [40, с. 635], получаем следующее следствие.

Следствие 10.1 (см. [43]). *Для любого фиксированного $K \in \mathbb{N}$ функция $\sigma \mapsto \mu(\sigma, K)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{R}(\sigma_0)$.*

Лемма 10.4 (см. [43]). *Для любого $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ функция $k \mapsto \mu(\sigma, k)$ является неубывающей.*

Доказательство. Пусть $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$. Возьмем любое $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$ такое, что

$$\xi^* W_\sigma(1, m+2)\xi = \mu(\sigma, m+1).$$

Тогда

$$\mu(\sigma, m) \leqslant \xi^* W_\sigma(1, m+1)\xi = \sum_{j=1}^{m} \xi^* X_A(1, j+1) B(j) B^*(j) X_A^*(1, j+1)\xi =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \|\xi^* X_A(1, j+1) B(j)\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m+1} \|\xi^* X_A(1, j+1) B(j)\|^2 = \xi^* W_\sigma(1, m+2)\xi = \mu(\sigma, m+1).$$

Лемма доказана. $\square$

§ 11. Оболочка Бебутова и интегральная разделенность

Теорема 11.1 (см. [7]). *Если система*

$$x(m+1) = A_0(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \in \mathbb{R}^n, \tag{11.1}$$

интегрально разделена, то для каждой $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ система (1.2) *интегрально разделена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как система (11.1) интегрально разделена, то существует преобразование Ляпунова

$$x(m) = L_0(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{11.2}$$

приводящее (11.1) к системе

$$z(m+1) = D_0(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \tag{11.3}$$

с интегрально разделенной диагональной матрицей коэффициентов

$$D_0(m) = \operatorname{diag}\big(d_1^0(m), \ldots, d_n^0(m)\big),$$

т. е. такой, что при некоторых $\gamma > 0$, $a > 1$ и всех натуральных $m > s$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}^0(l)|}{|d_i^0(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Так как преобразование (11.2) связывает системы (11.1) и (11.3), выполнено тождество

$$D_0(m) = L_0^{-1}(m+1)A_0(m)L_0(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{11.4}$$

Пусть $\|A_0\|_\infty \leqslant a_0$, $\|A_0^{-1}\|_\infty \leqslant a_0$, $\|L_0\|_\infty \leqslant \ell$, $\|L_0^{-1}\|_\infty \leqslant \ell$. Тогда

$$\|D_0\|_\infty \leqslant a_0\ell^2, \quad \|D_0^{-1}\|_\infty \leqslant a_0\ell^2. \tag{11.5}$$

Рассмотрим сначала простой сдвиг $A_0(\cdot)$ на $k \in \mathbb{N}$, то есть рассмотрим матрицу $A_k(m) \doteq \doteq A(m+k)$, $m \in \mathbb{N}$. Определим $L_k(m) \doteq L_0(m+k)$ и $D_k(m) \doteq D_0(m+k)$. Тогда ясно, что $L_k(\cdot)$ — матрица Ляпунова.

Из (11.4) получаем тождество

$$\begin{aligned} D_k(m) = D_0(m+k) = L_0^{-1}(m+k+1)A_0(m+k)L_0(m+k) = \\ = L_k^{-1}(m+1)A_k(m)L_k(m), \end{aligned}$$

поэтому преобразование Ляпунова

$$x(m) = L_k(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

связывает системы

$$x(m+1) = A_k(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{11.6}$$

и

$$z(m+1) = D_k(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n. \tag{11.7}$$

При этом

$$D_k(m) = \operatorname{diag}\big(d_1^k(m), \ldots, d_n^k(m)\big),$$

где обозначено $d_i^k(m) \doteq d_i^0(m+k)$ — сдвиг $d_i^0(m)$ на k. Тогда при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $m > s$ выполнены неравенства

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}^k(l)|}{|d_i^k(l)|} = \prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}^0(l+k)|}{|d_i^0(l+k)|} = \prod_{l=s+k}^{m+k-1} \frac{|d_{i+1}^0(l)|}{|d_i^0(l)|} \geqslant \gamma a^{(m+k)-(s+k)} = \gamma a^{m-s},$$

поэтому система (11.7) интегрально разделена. Так как ляпуновское преобразование сохраняет это свойство, то и система (11.6) интегрально разделена.

Пусть теперь $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$. Тогда существует неубывающая последовательность натуральных чисел $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim_{j\to\infty} \|A(m) - A_{s_j}(m)\| = 0$ при каждом $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность функций $\big(L_{s_j}(\cdot)\big)_{j\in\mathbb{N}}$, лежащую в компактном множестве $\mathfrak{R}(L_0)$. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\big(L_{s_j}(\cdot)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится в метрике ρ к некоторой функции $L(\cdot) \in \mathfrak{R}(L_0)$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j\to\infty} \|L(m) - L_{s_j}(m)\| = 0,$$

поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер $J_1 = J_1(m, \varepsilon)$ такой, что при всех $j \geqslant J_1$ выполнено неравенство $\|L_{s_j}(m) - L(m)\| < \varepsilon$. Кроме того, существует номер $J_2 = J_2(m, \varepsilon)$, начиная с которого $\|A_{s_j}(m) - A(m)\| < \varepsilon$. Пусть $J = J(m, \varepsilon) = \max\big\{J_1(m, \varepsilon), J_2(m, \varepsilon)\big\}$.

Рассмотрим матрицу

$$D(m) = L^{-1}(m+1)A(m)L(m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Для каждых $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и $j \geqslant J(m, \varepsilon)$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}
0 \leqslant \|D(m) - D_{s_j}(m)\| = \|L^{-1}(m+1)A(m)L(m) - L_{s_j}^{-1}(m+1)A_{s_j}(m)L_{s_j}(m)\| \leqslant \\
\leqslant \|L^{-1}(m+1)A(m)L(m) - L_{s_j}^{-1}(m+1)A(m)L(m)\| + \\
+ \|L_{s_j}^{-1}(m+1)A(m)L(m) - L_{s_j}^{-1}(m+1)A_{s_j}(m)L(m)\| + \\
+ \|L_{s_j}^{-1}(m+1)A_{s_j}(m)L(m) - L_{s_j}^{-1}(m+1)A_{s_j}(m)L_{s_j}(m)\| \leqslant \\
\leqslant \|L^{-1}(m+1) - L_{s_j}^{-1}(m+1)\| \cdot \|A(m)\| \cdot \|L(m)\| + \\
+ \|L_{s_j}^{-1}(m+1)\| \cdot \|A(m) - A_{s_j}(m)\| \cdot \|L(m)\| + \\
+ \|L_{s_j}^{-1}(m+1)\| \cdot \|A_{s_j}(m)\| \cdot \|L(m) - L_{s_j}(m)\| \leqslant \\
\leqslant \|L^{-1}(m+1)\| \cdot \|L(m+1) - L_{s_j}(m+1)\| \cdot \|L_{s_j}^{-1}(m+1)\| \cdot a_0\ell + \\
+ \varepsilon\ell^2 + a_0\ell\varepsilon \leqslant \ell\big(\ell^2 a_0 + \ell + a_0\big)\varepsilon.
\end{gathered}$$

Следовательно, при каждом $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j\to\infty} \|D(m) - D_{s_j}(m)\| = 0,$$

поэтому $D(\cdot) \in \mathfrak{R}(D_0)$. В силу леммы 10.2 матрица $D(\cdot)$ вполне ограничена, при этом

$$\|D\|_\infty \leqslant a_0\ell^2, \quad \|D^{-1}\|_\infty \leqslant a_0\ell^2, \tag{11.8}$$

поскольку выполнены оценки (11.5).

Пусть $D(m) = \big\{d_{ik}(m)\big\}_{i,k=1}^n$, $D_s(m) = \big\{d_{ik}^s(m)\big\}_{i,k=1}^n$. Так как матрица $D_s(m)$ диагональна, то

$$d_{ik}^s(m) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ d_i^s(m) & \text{при } i = k. \end{cases} \tag{11.9}$$

Тогда при всех $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ и $j \geqslant J(m, \varepsilon)$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant |d_{ik}(m) - d_{ik}^{s_j}(m)| \leqslant \sqrt{n}\|D(m) - D_{s_j}(m)\| \leqslant \sqrt{n}\ell\big(\ell^2 a_0 + \ell + a_0\big)\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая (11.9), получим, что при каждом $i \neq k$

$$d_{ik}(m) = d_{ik}^{s_j}(m) = 0,$$

то есть матрица $D(\cdot)$ диагональна. Пусть $D(m) = \operatorname{diag}\bigl(d_1(m), \ldots, d_n(m)\bigr)$. Из (11.8) при всех $m \in \mathbb{N}$ получаем оценки

$$|d_i(m)| \leqslant \|D(m)\| \leqslant \|D\|_\infty \leqslant a_0\ell^2, \qquad |d_i(m)|^{-1} \leqslant \|D^{-1}(m)\| \leqslant \|D^{-1}\|_\infty \leqslant a_0\ell^2.$$

Следовательно, для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и $j \geqslant J(m, \varepsilon)$

$$\frac{|d_i^{s_j}(m)|}{|d_i(m)|} = \frac{|d_i^{s_j}(m) - d_i(m) + d_i(m)|}{|d_i(m)|} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|d_i(m)| - |d_i^{s_j}(m) - d_i(m)|}{|d_i(m)|} = 1 - \frac{|d_i^{s_j}(m) - d_i(m)|}{|d_i(m)|} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sqrt{n}\ell\bigl(\ell^2 a_0 + \ell + a_0\bigr)\varepsilon \cdot a_0\ell^2 = 1 - \sqrt{n}a_0\ell^3(\ell^2 a_0 + \ell + a_0)\varepsilon =: 1 - \kappa\varepsilon,$$

и, аналогично,

$$\frac{|d_i(m)|}{|d_i^{s_j}(m)|} = \frac{|d_i(m) - d_i^{s_j}(m) + d_i^{s_j}(m)|}{|d_i^{s_j}(m)|} \geqslant \frac{|d_i^{s_j}(m)| - |d_i(m) - d_i^{s_j}(m)|}{|d_i^{s_j}(m)|} =$$
$$= 1 - \frac{|d_i(m) - d_i^{s_j}(m)|}{|d_i^{s_j}(m)|} \geqslant 1 - \sqrt{n}\ell\bigl(\ell^2 a_0 + \ell + a_0\bigr)\varepsilon \cdot a_0\ell^2 = 1 - \kappa\varepsilon.$$

Тогда при всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\varepsilon > 0$, $m > s$ и $j \geqslant \max\limits_{l \in \{s, \ldots, m-1\}} J(l, \varepsilon)$ справедливы оценки

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}(l)|}{|d_i(l)|} = \prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}^{s_j}(l)|}{|d_i^{s_j}(l)|} \cdot \prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}(l)|}{|d_{i+1}^{s_j}(l)|} \cdot \prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_i^{s_j}(l)|}{|d_i(l)|} \geqslant$$
$$\geqslant \gamma a^{m-s} \cdot (1 - \kappa\varepsilon)^{m-s} \cdot (1 - \kappa\varepsilon)^{m-s} = \gamma \cdot \bigl(a(1 - \kappa\varepsilon)^2\bigr)^{m-s}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что при всех натуральных $m > s$ и $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполнено неравенство

$$\prod_{l=s}^{m-1} \frac{|d_{i+1}(l)|}{|d_i(l)|} \geqslant \gamma a^{m-s}.$$

Это означает, что диагональ матрицы $D(\cdot)$ интегрально разделена, поэтому система

$$z(m+1) = D(m)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^n,$$

интегрально разделена. Но преобразование Ляпунова $x(m) = L(m)z(m)$ связывает эту систему с системой (1.2), поэтому и (1.2) интегрально разделена. Теорема доказана. □

§ 12. Оболочка Бебутова и равномерная полная управляемость

В этом параграфе мы будем использовать обозначения

$$W_0(s, m) = W_{\sigma_0}(s, m), \quad W_i(s, m) = W_{\sigma_i}(s, m).$$

Т е о р е м а 12.1 (см. [5, 43]). *Если система σ_0 K-равномерно вполне управляема, то каждая система $\sigma(\cdot) = \bigl(A(\cdot), B(\cdot)\bigr) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ K-равномерно вполне управляема.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого фиксированного натурального i рассмотрим систему $\sigma_i(\cdot) = \big(A_i(\cdot), B_i(\cdot)\big)$, полученную из системы $\sigma_0(\cdot)$ сдвигом на $i \in \mathbb{N}$. Отметим, что для любого $s > j$ матрица Коши $X_{A_i}(s,j)$ системы

$$x(m+1) = A_i(m)x(m)$$

удовлетворяет равенству

$$X_{A_i}(s,j) = A_i(s-1)\cdots A_i(j) = A_0(i+s-1)\cdots A_0(i+j) = X_{A_0}(s+i, j+i),$$

а для $s < j$ мы имеем

$$X_{A_i}(s,j) = X_{A_i}^{-1}(j,s) = X_{A_0}^{-1}(j+i, s+i) = X_{A_0}(s+i, j+i).$$

Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ матрица Калмана $W_i(s, s+K)$ системы σ_i может быть записана в виде

$$W_i(s,s+K) = \sum_{j=s}^{s+K-1} X_{A_i}(s,j+1)B_i(s)B_i^*(j)X_{A_i}^*(s,j+1) =$$

$$= \sum_{j=s}^{s+K-1} X_{A_0}(s+i,j+i+1)B_0(j+i)B_0^*(j+i)X_{A_0}^*(s+i,j+i+1) =$$

$$= \sum_{j=s+i}^{s+i+K-1} X_{A_0}(s+i,j+1)B_0(j)B_0^*(j)X_{A_0}^*(s+i,j+1) = W_0(s+i,s+i+K).$$

Согласно нашему предположению, система σ_0 является K-равномерно вполне управляемой, поэтому для всех $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$W_0(s+i, s+i+K) \geqslant \gamma E,$$

следовательно, для всех $i, s \in \mathbb{N}$

$$W_i(s, s+K) \geqslant \gamma E.$$

Если $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$, то существует такая неубывающая последовательность $(i_j)_{j\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел, что $\lim\limits_{j\to\infty} \rho(\sigma_{i_j}, \sigma) = 0$. Тогда по лемме 10.3 получаем

$$\lim_{j\to\infty} \|W_{i_j}(s,s+K) - W_\sigma(s,s+K)\| = 0, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, мы имеем

$$\xi^* W_\sigma(s,s+K)\xi = \xi^* W_{i_j}(s,s+K)\xi + \xi^*\big(W_\sigma(s,s+K) - W_{i_j}(s,s+K)\big)\xi \geqslant$$

$$\geqslant \gamma - \|W_{i_j}(s,s+K) - W_\sigma(s,s+K)\|.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$ в этом неравенстве, получаем

$$\xi^* W_\sigma(s,s+K)\xi \geqslant \gamma.$$

Это означает, что $W_\sigma(s,s+K) \geqslant \gamma I$. Так число $s \in \mathbb{N}$ произвольно, отсюда следует, что система σ K-равномерно вполне управляема. Теорема доказана. $\square$

Т е о р е м а 12.2 (см. [43]). *Если система σ_0 не является равномерно вполне управляемой, то существует система*

$$\widehat{\sigma}(\cdot) = \big(\widehat{A}(\cdot), \widehat{B}(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$$

и вектор $\widehat{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\|\widehat{\xi}\| = 1$, такие, что

$$\widehat{\xi}^* X_{\widehat{A}}(1, m+1)\widehat{B}(m) = 0$$

для каждого $m \in \mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $K \in \mathbb{N}$. Система σ_0 не является K-равномерно вполне управляемой, поэтому для любого $j \in \mathbb{N}$ существуют число $i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и вектор $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_j\| = 1$, такие, что

$$\xi_j^* W_0(1 + i_j, 1 + i_j + K)\xi_j < j^{-1}.$$

Следовательно,

$$\xi_j^* W_{i_j}(1, K+1)\xi_j < j^{-1}$$

и

$$\mu(\sigma_{i_j}, K) < j^{-1}.$$

Пусть σ^K — предельная точка последовательности (σ_{i_j}). Без ограничения общности будем считать, что $\lim\limits_{j\to\infty} \sigma_{i_j} = \sigma^K$. Из непрерывности функции $\sigma \mapsto \mu(\sigma, K)$ мы имеем

$$0 \leqslant \mu(\sigma^K, K) = \lim_{j\to\infty} \mu(\sigma_{i_j}, K) \leqslant \lim_{j\to\infty} j^{-1} = 0.$$

Тогда

$$\mu(\sigma^K, K) = 0.$$

Пусть $\widehat{\sigma}$ — предельная точка последовательности $(\sigma^K)_{K\in\mathbb{N}}$. Выберем любое натуральное s. Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ найдется $K_j > s$ такое, что

$$|\mu(\sigma^{K_j}, s) - \mu(\widehat{\sigma}, s)| < j^{-1}.$$

По лемме 10.4 функция $s \mapsto \mu(\sigma^{K_j}, s)$ неубывающая, поэтому

$$0 \leqslant \mu(\widehat{\sigma}, s) \leqslant \mu(\sigma^{K_j}, s) + |\mu(\widehat{\sigma}, s) - \mu(\sigma^{K_j}, s)| < \mu(\sigma^{K_j}, K_j) + j^{-1} = j^{-1}$$

для любого $j \in \mathbb{N}$.

Итак, существует система $\widehat{\sigma} \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ такая, что $\mu(\widehat{\sigma}, s) = 0$ для любого $s \in \mathbb{N}$, и, следовательно, для любого натурального числа s существует вектор $\xi_s \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi_s\| = 1$, такой, что

$$0 = \xi_s^* W_{\widehat{\sigma}}(1, s+1)\xi_s = \xi_s^* \sum_{j=1}^{s} X_{\widehat{A}}(1, j+1)\widehat{B}(j)\widehat{B}^*(j)X_{\widehat{A}}^*(1, j+1)\xi_s =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \|\xi_s^* X_{\widehat{A}}(1, j+1)\widehat{B}(j)\|^2.$$

Это означает, что $\xi_s^* \Phi_{\widehat{A}}(1, j+1)\widehat{B}(j) = 0$ для любого $j \in \{1, \ldots, s\}$.

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ определим множество

$$\Xi_s = \Big\{\xi \in \mathbb{R}^n \colon \|\xi\| = 1,\ \xi^* X_{\widehat{A}}(1, j+1)\widehat{B}(j) = 0 \text{ для каждого } j = 1, \ldots, s\Big\}.$$

Всякое Ξ_s непусто, потому что $\xi_s \in \Xi_s$. Более того, ясно, что для любого s имеет место включение $\Xi_s \supset \Xi_{s+1}$. Каждое Ξ_s компактно, поскольку оно ограничено и замкнуто. Мы имеем семейство стягивающихся компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$. По теореме Кантора о пересечении [41, с. 196] найдется $\widehat{\xi} \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} \Xi_s$. Тогда для точки $\widehat{\xi}$ при всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\widehat{\xi}^T X_{\widehat{A}}(1, j+1)\widehat{B}(j) = 0.$$

Теорема доказана. □

Возьмем $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$. Для свободной системы (1.2) рассмотрим сопряженную систему [14, с. 64]

$$\psi(m+1) = \psi(m)A^{-1}(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \psi^* \in \mathbb{R}^n. \tag{12.1}$$

Пусть $\Psi_A(m,s)$ — матрица Коши системы (12.1), то есть $\Psi_A(m,s)$ — это такая матрица, что каждое решение $\psi(\cdot)$ системы (12.1) для любых $m, s \in \mathbb{N}$ удовлетворяет равенству

$$\psi(m) = \psi(s)\Psi_A(m,s).$$

Легко проверить, что матрицы Коши $\Psi_A(m,s)$ и $X_A(m,s)$ систем (12.1) и (1.2) связаны между собой равенством

$$\Psi_A(m,s) = X_A(s,m), \quad m, s \in \mathbb{N}.$$

Это означает, что любое нетривиальное решение сопряженной системы может быть представлено в виде

$$\psi(m) = \xi^* X_A(1,m), \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\xi \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор.

С л е д с т в и е 12.1 (см. [43]). *Если система $\sigma_0(\cdot)$ не является равномерно вполне управляемой, то существует такая система $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$, что некоторое нетривиальное решение $\psi^1(\cdot)$ сопряженной системы* (12.1) *удовлетворяет равенству*

$$\psi^1(m+1)B(m) = 0$$

для любого $m \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 12.3 (см. [7]). *Пусть система* (11.1) *интегрально разделена, а система $\sigma_0(\cdot) = \big(A_0(\cdot), B_0(\cdot)\big)$ не является равномерно вполне управляемой. Тогда существует система $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$, которая некоторым преобразованием Ляпунова* (1.5) *приводится к системе*

$$y(m+1) = F(m)y(m) + G(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k, \tag{12.2}$$

с диагональной матрицей $F(\cdot)$ и матрицей $G(\cdot)$ с нулевой первой строкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку система σ_0 не является равномерно вполне управляемой, в силу следствия 12.1 найдется система

$$\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$$

такая, что сопряженная система (12.1) имеет решение $\psi^1(\cdot)$, для которого выполнено тождество

$$\psi^1(m+1)B(m) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\Psi(\cdot)$ — нормальная фундаментальная матрица системы (12.1), образованная последовательными строками $\psi^1(\cdot), \ldots, \psi^n(\cdot)$.

В силу теоремы 11.1 каждая система $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ является системой с интегральной разделенностью, а сопряженная система наследует это свойство (теорема 5.2), поэтому (12.1) — система с интегральной разделенностью. Тогда, в силу следствия 5.1, для углов $\beta_i(\cdot) = \beta_i(\cdot; \Psi)$ имеют место неравенства

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} \beta_i(m) \geqslant \beta, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\beta \in (0, \pi/2)$. Построим матрицу $L(m)$ со строками $l^1(m), \ldots, l^n(m)$, где

$$l^i(m) = \frac{\psi^i(m)}{\|\psi^i(m)\|}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда $L(\cdot)$ — матрица Ляпунова (см. доказательство достаточности теоремы 4.1 и следствие 4.2). Применим преобразование Ляпунова (1.5) с построенной матрицей $L(\cdot)$ к системе (6.1), получим систему (12.2), где

$$F(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m), \qquad G(m) = L(m+1)B(m).$$

Покажем, что для матриц $F(\cdot)$ и $G(\cdot)$ выполнены требуемые свойства.

Действительно, для первой строки матрицы $G(\cdot)$ при каждом $m \in \mathbb{N}$ имеем равенство

$$e_1^* G(m) = e_1^* L(m+1)B(m) = l^1(m+1)B(m) = \frac{\psi^1(m+1)}{\|\psi^1(m+1)\|} B(m) = 0.$$

Далее, к сопряженной системе (12.1) применим преобразование Ляпунова

$$\psi(m) = \eta(m)L(m), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12.3}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\eta(m+1) = \psi(m+1)L^{-1}(m+1) = \\ = \psi(m)A^{-1}(m)L^{-1}(m+1) = \eta(m)L(m)A^{-1}(m)L^{-1}(m+1),\end{gathered}$$

то есть преобразование (12.3) переводит систему (12.1) в систему

$$\eta(m+1) = \eta(m)C(m), \tag{12.4}$$

где

$$C(m) = L(m)A^{-1}(m)L^{-1}(m+1).$$

Система (12.4) имеет фундаментальную матрицу

$$\mathrm{H}(m) = \operatorname{diag}\bigl(\|\psi^1(m)\|, \ldots, \|\psi^n(m)\|\bigr), \quad m \in \mathbb{N},$$

поскольку выполнено тождество

$$\Psi(m) = \mathrm{H}(m)L(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

и $\Psi(\cdot)$ — фундаментальная матрица системы (12.1). Следовательно, для матрицы $C(\cdot)$ системы (12.4) имеем равенство

$$C(m) = \mathrm{H}(m+1)\mathrm{H}^{-1}(m) = \operatorname{diag}\Bigl(\frac{\|\psi^1(m+1)\|}{\|\psi^1(m)\|}, \ldots, \frac{\|\psi^n(m+1)\|}{\|\psi^n(m)\|}\Bigr),$$

то есть $C(\cdot)$ — диагональна. Но

$$F(m) = L(m+1)A(m)L^{-1}(m) = C^{-1}(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

и поэтому $F(\cdot)$ — диагональна. Теорема доказана. □

§ 13. Оболочка Бебутова и равномерная полная управляемость

Т е о р е м а 13.1 (см. [7, 61]). *Пусть система* (11.1) *интегрально разделена. Тогда система σ_0 равномерно вполне управляема в том и только том случае, когда для каждой $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ соответствующая замкнутая система* (6.2) *обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как система (11.1) интегрально разделена, то при каждом $A(\cdot) \in \mathfrak{R}(A_0)$ система (1.2) интегрально разделена (теорема 11.1), поэтому ее показатели Ляпунова устойчивы (теорема 5.3). Далее, система σ_0 равномерно вполне управляема, следовательно, каждая система $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ равномерно вполне управляема (теорема 12.1). Но тогда для системы (6.1) выполнены все условия теоремы 9.2, из которой вытекает, что система (6.2) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для каждой $\sigma(\cdot) = \big(A(\cdot), B(\cdot)\big) \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$ соответствующая замкнутая система (6.2) обладает свойством пропорциональной локальной управляемости полного спектра показателей Ляпунова. Докажем, что система σ_0 равномерно вполне управляема.

Предположим противное, пусть система σ_0 не является равномерно вполне управляемой. В силу теоремы 12.3 существует система $\sigma \in \mathfrak{R}(\sigma_0)$, которая некоторым преобразованием Ляпунова (1.5) приводится к системе (12.2) с диагональной матрицей $F(\cdot) = \operatorname{diag}\big(f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)\big)$ и матрицей $G(\cdot)$ с нулевой первой строкой. Так как по условию система (11.1) является системой с интегральной разделенностью, то, в силу теоремы 11.1, линейная однородная система (1.2) обладает этим же свойством. Ляпуновское преобразование (1.5) сохраняет свойство интегральной разделенности и приводит систему (1.2) к системе

$$y(m+1) = F(m)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{13.1}$$

поэтому ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив, некратен и состоит из попарно различных чисел $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n$, где

$$\widehat{\lambda}_j \doteq \overline{f_j(\cdot)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Пусть $\lambda(F) = \big(\lambda_1(F), \ldots, \lambda_n(F)\big) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$ — полный спектр системы (13.1), и $k \in \{1, \ldots, n\}$ — такой индекс, что $\widehat{\lambda}_1 = \lambda_k(F)$.

Обозначим

$$\alpha = \frac{1}{4} \min_{i \neq j} |\widehat{\lambda}_i - \widehat{\lambda}_j| > 0.$$

Из устойчивости показателей Ляпунова системы (13.1) вытекает, что найдется такое $\delta_1 > 0$, что для любого допустимого для системы (12.2) матричного управления $V(\cdot)$, удовлетворяющего оценке $\|V\|_\infty < \delta_1$, полный спектр показателей Ляпунова замкнутой системы

$$y(m+1) = \big(F(m) + G(m)V(m)\big)y(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{13.2}$$

лежит в $\mathcal{O}_\alpha\big(\lambda(F)\big)$, т. е. состоит из попарно различных чисел.

Наряду с (13.2) рассмотрим усеченную систему

$$z(m+1) = \big(F_1(m) + G_1(m)V_1(m)\big)z(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{13.3}$$

матрица $F_1 + G_1V_1$ которой получается из $F + GV$ вычеркиванием первой строки и первого столбца. Тогда

$$F_1(m) = \operatorname{diag}\big(f_2(m), \ldots, f_n(m)\big),$$

$G_1(m)$ — это $(n-1)\times k$-матрица, образованная из $G(m)$ отбрасыванием первой строки, а $V_1(m)$ — это $k\times(n-1)$-матрица, образованная из $V(m)$ отбрасыванием первого столбца. Система (13.3) является возмущенной по отношению к диагональной системе

$$z(m+1)=F_1(m)z(m),\quad m\in\mathbb{N},\quad z\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{13.4}$$

диагональ которой интегрально разделена. Так как полные спектры показателей Ляпунова систем (13.1) и (13.4) состоят из наборов верхних логарифмических средних значений функций $f_1,f_2\ldots,f_n$ и $f_2,\ldots,f_n$ соответственно, то полный спектр показателей Ляпунова системы (13.4) состоит из чисел $\widehat{\lambda}_2,\ldots,\widehat{\lambda}_n$, то есть из чисел $\lambda_j(F)$, $j\neq k$. Из интегральной разделенности диагонали матрицы $F_1(\cdot)$ вытекает устойчивость показателей Ляпунова системы (13.4), поэтому существует $\delta_2>0$ такое, что из условия $\|V_1\|_\infty<\delta_2$ следуют неравенства

$$|\lambda_j(F_1)-\lambda_j(F_1+G_1V_1)|<\alpha,\quad j=1,\ldots,n-1.$$

Возьмем $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ и зафиксируем произвольное допустимое для системы (13.2) управление $V(\cdot)$ такое, что $\|V\|_\infty<\delta$.

Пусть $V_1(m)$ — $k\times(n-1)$-матрица, полученная из $V(m)$ вычеркиванием первого столбца. Тогда $V_1(\cdot)$ — допустимое для (13.3) управление, при этом $\|V_1\|_\infty\leqslant\|V\|_\infty<\delta\leqslant\delta_2$.

Рассмотрим нормальную ФСР $z^1(\cdot),\ldots,z^{n-1}(\cdot)$ системы (13.3) такую, что $\lambda[z^i]=$ $=\lambda_i(F_1+G_1V)$;

$$z^i(m)=\operatorname{col}\bigl(z^i_1(m),\ldots,z^i_{n-1}(m)\bigr),\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Положим $y^i(m)\doteq\operatorname{col}\bigl(0,z^i_1(m),\ldots,z^i_{n-1}(m)\bigr)$. Функции $y^1(\cdot),\ldots,y^{n-1}(\cdot)$ являются линейно независимыми решениями системы (13.2), их показатели попарно различны и лежат в α-окрестностях чисел $\lambda_j(F)$ при $j\neq k$. Следовательно, набор показателей этих решений совпадает с набором чисел $\lambda_j(F+GV)$, $j=1,\ldots,n$, $j\neq k$.

Пусть $y^n(\cdot)=\operatorname{col}\bigl(y^n_1(\cdot),\ldots,y^n_n(\cdot)\bigr)$ — любое решение системы (13.2), показатель которого равен $\lambda_k(F+GV)$. Числа $\lambda_1(F+GV),\ldots,\lambda_n(F+GV)$ попарно различны, поэтому функции $y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)$ линейно независимы, а это означает, что первая координата $y^n_1(\cdot)$ решения $y^n(\cdot)$ не равна тождественно нулю (в противном случае функция $z^n(\cdot)=\operatorname{col}\bigl(y^n_2(\cdot),\ldots,y^n_n(\cdot)\bigr)$ — решение системы $(n-1)$-го порядка (13.3), линейно зависимое с решениями $z^1(\cdot),\ldots,z^{n-1}(\cdot)$, что влечет линейную зависимость $y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)$). Но

$$y^n_1(m+1)=f_1(m)y^n_1(m),$$

поэтому

$$\lambda[y^n_1]=\overline{f_1(\cdot)}=\lambda_k(F),$$

Следовательно,

$$\lambda_k(F+GV)=\lambda[y^n]\geqslant\lambda[y^n_1]=\lambda_k(F).$$

Таким образом, функции $y^1(\cdot),\ldots,y^n(\cdot)$ образуют нормальную ФСР системы (13.2), при этом ни один показатель $\lambda_i(F+GV)$ не попадает в левую α-полуокрестность величины $\lambda_k(F)$, и это верно для любого допустимого для системы (13.2) управления $V(\cdot)$ такого, что $\|V\|_\infty<\delta$. Поэтому возмущениями $G(\cdot)V(\cdot)$, где $\|V\|_\infty<\delta$, невозможно добиться выполнения равенства

$$\lambda_k(F+GV)=\lambda_k(F)+\nu_k$$

ни при каком $\nu_k\in(-\alpha,0)$. Это означает, что полный спектр показателей Ляпунова системы (13.2) не обладает свойством пропорциональной локальной управляемости. Так как преобразование Ляпунова сохраняет это свойство (лемма 6.1), то полный спектр системы (6.2) не является пропорционально локально управляемым. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

П р и м е р 13.1 (см. [61]). Рассмотрим линейную управляемую систему

$$x(m+1) = A_0(m)x(m) + B_0(m)u(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{13.5}$$

где

$$A_0(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad B_0(m) = \begin{pmatrix} b(m) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

функция $b(\cdot)$ определена равенством (9.1).

Заметим, что для каждого $K \in \mathbb{N}$ существует номер $j \doteq K$ такой, что для матрицы Калмана системы (13.5) имеют место равенства

$$W(m_{2j}, m_{2j}+K) = \sum_{l=m_{2j}}^{m_{2j}+K-1} X_A(m_{2j}, l+1)B(l)B^*(l)X_A^*(m_{2j}, l+1) =$$

$$= \sum_{l=m_{2j}}^{m_{2j}+K-1} \begin{pmatrix} b^2(l) & 0 \\ 0 & e^{2(m_{2j}-l-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2(m_{2j}-1)} \cdot \frac{e^{-2m_{2j}}(1-e^{-2K})}{1-e^{-2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} \cdot \frac{1-e^{-2K}}{1-e^{-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-e^{-2K}}{e^2-1} \end{pmatrix}.$$

Это означает, что система (13.5) не является равномерно вполне управляемой, так как матрица Калмана содержит нулевую строку.

Свободная система

$$x(m+1) = A_0(m)x(m), \quad m \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{13.6}$$

стационарна, поэтому ее полный спектр показателей Ляпунова устойчив. Показатели Ляпунова этой системы — это числа

$$\lambda_1(A_0) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \prod_{l=1}^{m} |a_1(l)| = 0$$

и

$$\lambda_2(A_0) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \prod_{l=1}^{m} |a_2(l)| = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{m} \ln \prod_{l=1}^{m} e = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln e^m}{m} = 1.$$

Поэтому полный спектр показателей Ляпунова совпадает с набором $(0, 1)$, то есть он некратен, следовательно, (13.6) — система с интегральной разделенностью.

Возьмем любой набор чисел $\big(\mu_1, \mu_2\big) \in \mathcal{O}_{1/2}\big(\lambda(A_0)\big)$, положим

$$\alpha_1 = e^{\mu_1} - 1, \quad \alpha_2 = e^{\mu_2} - e,$$

и подействуем на систему (13.5) обратной связью $u(m) = U(m)x(m)$, где

$$U(m) = \operatorname{diag}\big(\alpha_1, \alpha_2\big).$$

Тогда замкнутая система имеет диагональный вид

$$x(m+1) = \operatorname{diag}\big(1 + b(m)\alpha_1, e + \alpha_2\big)x(m), \tag{13.7}$$

поэтому ее полный спектр показателей Ляпунова состоит из чисел

$$\lambda_1(A_0 + B_0U) = \overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1} \sum_{j=1}^{m-1} \ln(1 + b(j)\alpha_1), \quad \lambda_2(A_0 + B_0U) = \overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1} \sum_{j=1}^{m-1} \ln\big(e + \alpha_2\big).$$

Ясно, что $\lambda_2(A_0+B_0U)=\mu_2$. Из леммы 9.1 следует, что $\lambda_1(A_0+B_0U)=\mu_1$.

Кроме того, из утверждения 8.1 при $|t|<1/2$ получаем оценку $|e^t-1|\leqslant 2(e^{1/2}-1)|t|$, поэтому справедливы следующие неравенства

$$|\alpha_1|=\bigl|e^{\mu_1}-1\bigr|\leqslant 2(e^{1/2}-1)|\mu_1|,$$
$$|\alpha_2|=\bigl|e^{\mu_2}-e\bigr|=e\bigl|e^{\mu_2-1}-1\bigr|\leqslant 2e(e^{1/2}-1)|\mu_2-1|$$

для любого набора $\bigl(\mu_1,\mu_2\bigr)\in\mathcal{O}_{1/2}\bigl(\lambda(A_0)\bigr)$. Тогда справедлива оценка

$$\|U\|_\infty\leqslant 2e(e^{1/2}-1)\max_{j=1,2}\bigl|\mu_j-\lambda_j(A_0)\bigr|,$$

поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (13.7) пропорционально локально управляем, где $\delta=1/2$, $\ell=2e(e^{1/2}-1)$.

Из теоремы 13.1 вытекает, что оболочка Бебутова системы (13.5) содержит систему с неуправляемым полным спектром показателей Ляпунова. Найдем эту систему.

Оболочка Бебутова системы (13.5) содержит в себе систему

$$x(m+1)=A_0(m)x(m)+B(m)u(m),\quad m\in\mathbb{N},\tag{13.8}$$

где

$$B(m)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Действительно, возьмем последовательность $\bigl(m_{2j}\bigr)_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $m\in\mathbb{N}$ произвольно. Тогда

$$\|B_{m_{2j}}(m)-B(m)\|=|b(m_{2j}+m)|.$$

Для каждого $j>m$ выполнены неравенства

$$m_{2j}<m_{2j}+m<m_{2j}+j=m_{2j+1},$$

поэтому $b(m_{2j}+m)=0$. Это означает, что

$$\lim_{j\to\infty}\|B_{m_{2j}}(m)-B(m)\|=0$$

для каждого $m\in\mathbb{N}$, что влечет включение $\bigl(A_0,B\bigr)\in\mathfrak{R}\bigl(A_0,B_0\bigr)$.

Для каждого допустимого матричного управления $U(\cdot)=\{u_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^2$ замкнутая система для системы (13.8) имеет вид

$$x(m+1)=\begin{pmatrix}1&0\\u_{21}(m)&e+u_{22}(m)\end{pmatrix}x(m),\quad m\in\mathbb{N}.\tag{13.9}$$

Каждая фундаментальная система решений этой системы содержит решение $x(\cdot)$ с ненулевой первой координатой $x_1(\cdot)$. Для показателя Ляпунова этого решения справедливо неравенство $\lambda[x]\geqslant\lambda[x_1]=0$. Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ с нулевой первой координатой справедливы оценки $\lambda[x]\geqslant\lambda[x_2]=\overline{e+u_{22}(\cdot)}$. Если $\|U\|_\infty<e/2$, то $|u_{22}(m)|\leqslant\|U\|_\infty<e/2$ для каждого $m\in\mathbb{N}$, поэтому

$$\lambda[x]\geqslant\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\ln|e+u_{22}(j)|\geqslant\varlimsup_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m-1}\ln(e-e/2)=1-\ln 2>0.$$

Таким образом, для каждого допустимого $U(\cdot)$ с достаточно малой $\|U\|_\infty$ выполнены неравенства $\lambda_j(A_0+BU)\geqslant 0$, $j=1,2$. Это означает, что невозможно добиться выполнения равенства $\lambda_1(A_0+BU)=\mu_1$, где μ_1 — отрицательное число, и поэтому полный спектр показателей Ляпунова системы (13.9) не является пропорционально локально управляемым.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075–00232–20–01, проект FEWS–2020–0010, и поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 20–01–00293.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адрианова Л. Я. Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб.: Изд. СПбГУ, 1992.
2. Банщикова И. Н., Попова С. Н. О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 15–26. https://doi.org/10.20537/vm160102
3. Банщикова И. Н. Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 2. С. 169–176. https://doi.org/10.20537/vm160203
4. Банщикова И. Н., Попова С. Н. О свойстве интегральной разделенности систем с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 4. С. 481–498. https://doi.org/10.20537/vm170401
5. Банщикова И. Н. К свойству равномерной полной управляемости систем с дискретным временем // Современные проблемы математики и ее приложений: тезисы Международной (49-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2018. С. 23. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32695424
6. Банщикова И. Н., Макаров Е. К., Попова С. Н. Об условиях пропорциональной локальной управляемости спектра показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 3. С. 301–311. https://doi.org/10.20537/vm190301
7. Банщикова И. Н., Попова С. Н. Необходимые и достаточные условия пропорциональной локальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 122–132. https://doi.org/10.1134/S0374064120010148
8. Борухов В. Т., Кветко О. М. Критерии стабилизируемоси дискретных линейных бесконечномерных систем в метрических и ультраметрических пространствах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 2. С. 3–11. https://elibrary.ru/item.asp?id=14298696
9. Былов Б. Ф. О приведении системы линейных уравнений к диагональному виду // Математический сборник. 1965. Т. 67 (109). № 3. С. 338–344. http://mi.mathnet.ru/msb4370
10. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966.
11. Былов Б. Ф., Изобов Н. А. Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1794–1803. http://mi.mathnet.ru/de820
12. Былов Б. Ф. О приведении линейной системы к блочно-треугольному виду // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 12. С. 2027–2031. http://mi.mathnet.ru/de6381
13. Виноград Р. Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1957. Т. 42 (84). № 2. С. 207–222. http://mi.mathnet.ru/msb5050
14. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
15. Гришин С. А. Некоторые вопросы управления и устойчивости линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 11. С. 1862–1869. http://mi.mathnet.ru/de4694
16. Демидович В. Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. http://mi.mathnet.ru/de759
17. Зайцев В. А. Стабилизация стационарных аффинных управляемых систем с дискретным временем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 12. С. 1658–1669. https://doi.org/10.1134/S0374064115120110
18. Изобов Н. А. О старшем показателе линейной системы с экспоненциальными возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1186–1192. http://mi.mathnet.ru/de753
19. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146. http://mi.mathnet.ru/intm30

20. Изобов Н. А., Зверева Т. Е. Спектр характеристических показателей Ляпунова двухмерной стационарной системы при возмущениях-поворотах // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 11. С. 1964–1977. http://mi.mathnet.ru/de4393
21. Изобов Н. А. Экспоненциальные показатели линейной системы и их вычисление // Доклады АН БССР. 1982. Т. 26. № 1. С. 5–8.
22. Изобов Н. А. О характеристических показателях линейных систем с гробмановскими возмущениями // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 428–437. http://mi.mathnet.ru/de7427
23. Изобов Н. А. О существовании гробмановских спектральных множеств линейных систем положительной меры // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 953–957. http://mi.mathnet.ru/de7507
24. Кандаков А. А., Чудинов К. М. Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88–103. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32303669
25. Кандаков А. А., Чудинов К. М. Эффективные критерии экспоненциальной устойчивости автономных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. № 123. С. 402–414. https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414
26. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 12. С. 30–41. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16951911
27. Леонов Г. А. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 92–96. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=16370856
28. Макаров Е. К., Попова С. Н. К методу поворотов для линейных управляемых систем // Доклады НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 6. С. 13–16. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28159492
29. Макаров Е. К., Попова С. Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларуская навука, 2012.
30. Миллионщиков В. М. Критерий малого изменения направлений решений линейной системы дифференциальных уравнений при малых возмущениях коэффициентов системы // Математические заметки. 1968. Т. 4. № 2. С. 173–180. http://mi.mathnet.ru/mz6759
31. Миллионщиков В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сибирский математический журнал. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104. http://mi.mathnet.ru/smj5620
32. Миллионщиков В. М. Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 10. С. 1755–1784. http://mi.mathnet.ru/de818
33. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970.
34. Попова С. Н. Задачи управления показателями Ляпунова: дис. . . . канд. физ.-матем. наук. УдГУ. Ижевск, 1992.
35. Рахимбердиев М. И., Розов Н. Х. Распределение показателей Ляпунова линейных систем с периодическими коэффициентами, близкими в среднем к постоянным // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1710–1714. http://mi.mathnet.ru/de3507
36. Сергеев И. Н. Точные верхние границы подвижности показателей Ляпунова системы дифференциальных уравнений и поведение показателей при возмущениях, стремящихся к нулю на бесконечности // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 3. С. 438–448. http://mi.mathnet.ru/de3943
37. Сергеев И. Н. Точные границы подвижности показателей Ляпунова линейных систем при малых в среднем возмущениях // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1986. Вып. 11. С. 32–73. https://zbmath.org/?q=an:0619.34049
38. Сурков А. Г. О спектральном множестве линейных систем второго порядка с ограниченными возмущениями. Минск, 1984. (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 22(207)).
39. Тонков Е. Л. К теории линейных управляемых систем. Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2018.

40. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
41. Энгелькинг Р. Общая топология. М: Мир, 1986.
42. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. No. 2. P. 671–692. https://doi.org/10.1137/15m1033666
43. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. Vol. 63. No. 11. P. 3825–3837. https://doi.org/10.1109/tac.2018.2823086
44. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2019. Vol. 57. No. 2. P. 1355–1377. https://doi.org/10.1137/17m1141734
45. Bacciotti A., Biglio A. Some remarks about stability of nonlinear discrete-time control systems // Nonlinear Differential Equations and Applications. 2001. Vol. 8. No. 4. P. 425–438. https://doi.org/10.1007/pl00001456
46. Bittanti S., Bolzern P., De Nicolao G., Engwerda J. C. Comments on “Stabilizability and detectability of discrete-time, time-varying systems” // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992. Vol. 37. Issue 8. P. 1274–1275. https://doi.org/10.1109/9.151126
47. Byrnes C. I., Lin W., Ghosh B. K. Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback // Systems and Control Letters. 1993. Vol. 21. No. 3. P. 255–263. https://doi.org/10.1016/0167-6911(93)90036-6
48. Cheng V. A direct way to stabilize continuous-time and discrete-time linear time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1979. Vol. 24. Issue 4. P. 641–643. https://doi.org/10.1109/tac.1979.1102101
49. Dickinson B. On the fundamental theorem of linear state variable feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1974. Vol. 19. Issue 5. P. 577–579. https://doi.org/10.1109/tac.1974.1100639
50. Elaydi S. An introduction to difference equations. New York: Springer, 2005. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
51. Engwerda J. C. Stabilizability and detectability of discrete-time time-varying systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1990. Vol. 35. Issue 4. P. 425–429. https://doi.org/10.1109/9.52294
52. Grüne L., Wirth F. Feedback stabilization of discrete-time homogeneous semilinear systems // Systems and Control Letters. 1999. Vol. 37. Issue 1. P. 19–30. https://doi.org/10.1016/s0167-6911(98)00110-8
53. Halanay A., Ionescu V. Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation. Basel: Springer, 1994. https://www.springer.com/gp/book/9783764350123
54. Johnson R., Obaya R., Novo S., Núñez G., Fabbri R. Nonautonomous linear Hamiltonian systems: oscillation, spectral theory and control. Cham: Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29025-6
55. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. No 1. P. 102–119. https://zbmath.org/?q=an:0112.06303
56. Klamka J. Controllability of dynamical systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
57. Kwon W., Pearson A. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1978. Vol. 23. No. 3. P. 479–481. https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101749
58. Lin W. Further results on global stabilization of discrete nonlinear systems // Systems and Control Letters. 1996. Vol. 29. No. 1. P. 51–59. https://doi.org/10.1016/0167-6911(96)00037-0
59. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Mathematische Zeitschrift. 1930. Vol. 31. Issue 1. P. 748–766. https://doi.org/10.1007/bf01246445
60. Popova S. N., Banshchikova I. N. Spectral set of a linear system with discrete time // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. No. 5. P. 752–756. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3783-3

61. Popova S. N., Banshchikova I. N. On the property of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum for discrete time-varying systems // Proceedings of 2018 14th International Conference “Stability and oscillations of nonlinear control systems” (Pyatnitskiy’s conference) (STAB): Russia, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of control sciences, May 30 – June 1, 2018. Moscow: IEEE, 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408389
62. Sell G. Topological dynamics and ordinary differential equations (Series Van Nostrand Reinhold mathematical studies). New York: Van Nostrand, 1971.
63. Sell G. R. The Floquet problem for almost periodic linear differential equations. Ordinary and partial differential equations. New York: Springer, 1974. P. 239–251. https://doi.org/10.1007/BFb0065533
64. Sontag E. D. Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems, vol. 6. New York: Springer, 2013. https://www.springer.com/gp/book/9780387984896
65. Tsinias J. Stabilizability of discrete-time nonlinear systems // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1989. Vol. 6. Issue 2. P. 135–150. https://doi.org/10.1093/imamci/6.2.135
66. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. Vol. 12. No. 6. P. 660–665. https://doi.org/10.1109/tac.1967.1098739
67. Zaitsev V. Sufficient conditions for uniform global asymptotic stabilization of discrete-time periodic bilinear systems // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50. Issue 1. P. 11529–11534. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1623

Поступила в редакцию 10.02.2021

Банщикова Ирина Николаевна, старший преподаватель, научный сотрудник, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6687-5008
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Цитирование: И. Н. Банщикова. Локальная управляемость показателей Ляпунова линейных систем с дискретным временем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 3–76.

I. N. Banshchikova

Local assignability of Lyapunov exponents of linear discrete-time system

Keywords: linear discrete-time system, Lyapunov exponents, controllability, stabilizability, dynamic shift system.

MSC2020: 39A06, 39A22, 39A30, 93B55

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-01

We consider sufficient and necessary conditions for the proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of the system

$$x(m+1) = (A(m) + B(m)U(m))\,x(m), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

The properties of stability of the Lyapunov spectrum and integral separation of linear discrete-time systems are studied, description of the spectral set of a linear system in the case of the full spectrum stability is obtained, the property of uniform complete controllability of a linear system with discrete time is studied, and the properties of the Bebutov shell of a linear discrete-time control system are investigated.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00232-20-01, project FEWS-2020-0010, and was funded by RFBR, project number 20–01–00293.

REFERENCES

1. Adrianova L. Ya. *Vvedenie v teoriyu lineinykh sistem differentsial'nykh uravnenii* (Introduction to the theory of linear systems of differential equations), St. Petersburg: Petersburg State University, 1992.
2. Banshchikova I. N., Popova S. N. On the spectral set of a linear discrete system with stable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 1, pp. 15–26 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160102
3. Banshchikova I. N. An example of a linear discrete system with unstable Lyapunov exponents, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 2, pp. 169–176 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm160203
4. Banshchikova I. N., Popova S. N. On the property of integral separation of discrete-time systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 4, pp. 481–498 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm170401
5. Banshchikova I. N. To the property of uniform complete controllability of discrete-time systems, *Modern problems in mathematics and its applications*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2018, p. 23 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32695424
6. Banshchikova I. N., Makarov E. K., Popova S. N. On the conditions of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum of a linear discrete-time system, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2019, vol. 29, issue 3, pp. 301–311 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm190301
7. Banshchikova I. N., Popova S. N. Necessary and sufficient conditions for proportional local controllability of Lyapunov exponents in linear discrete-time systems, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, issue 1, pp. 120–130. https://doi.org/10.1134/S0012266120010139
8. Borukhov V. T., Kvetko O. M. Stabilizability criteria for discrete linear finite-dimensional systems in metric and ultrametric spaces, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2010, vol. 49, issue 2, pp. 169–177. https://doi.org/10.1134/S1064230710020012
9. Bylov B. F. On reduction of a system of linear equations to a diagonal form, *Matematicheskii Sbornik (Novaya Seriya)*, 1965, vol. 67 (109), issue 3, pp. 338–344 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/msb4370

10. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova* (Theory of Lyapunov exponents), Moscow: Nauka, 1966.
11. Bylov B. F., Izobov N. A. Necessary and sufficient conditions for the stability of the characteristic exponents of a linear system, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1794–1803 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de820
12. Bylov B. F. Reduction of a linear system to block-triangular form, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 12, pp. 2027–2031 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de6381
13. Vinograd R. E. On the central characteristic index of a system of differential equations, *Matematicheskii Sbornik (Novaya Seriya)*, 1957, vol. 42 (84), no. 2, pp. 207–222 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/msb5050
14. Gaishun I. V. *Sistemy s diskretnym vremenem* (Discrete-time systems), Minsk: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2001.
15. Grishin S. A. Some questions on the control and stability of linear systems, *Differ. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 11, pp. 1862–1869 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4694
16. Demidovich V. B. A certain criterion for the stability of difference equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1247–1255 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de759
17. Zaitsev V. A. Stabilization of stationary affine control systems with discrete time, *Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 12, pp. 1637–1648. https://doi.org/10.1134/S0012266115120113
18. Izobov N. A. The highest exponent of a linear system with exponential perturbations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 7, pp. 1186–1192 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de753
19. Izobov N. A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, pp. 46–96. https://doi.org/10.1007/BF01091661
20. Izobov N. A., Zvereva T. E. The spectrum of characteristic exponents of a two-dimensional stationary system with perturbations-rotations *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 11, pp. 1964–1977 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de4393
21. Izobov N. A. Exponential exponents of a linear system and their computation, *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 1982, vol. 26, no. 1, pp. 5–8.
22. Izobov N. A. Characteristic exponents of linear systems with Grobman perturbations, *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 3, pp. 299–306. http://mi.mathnet.ru/eng/de7427
23. Izobov N. A. On the existence of Grobman spectral sets of positive measure for linear systems, *Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 6, pp. 666–669. http://mi.mathnet.ru/eng/de7507
24. Kandakov A. A., Chudinov K. M. Effective stability criterion for a discrete dynamical system, *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, no. 4, pp. 88–103 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32303669
25. Kandakov A. A., Chudinov K. M. Effective criteria of exponential stability of autonomous difference equations, *Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 402–414 (in Russian). https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414
26. Kulikov A. Yu., Malygina V. V. Stability of a linear difference equation and estimation of its fundamental solution, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 12, pp. 23–33. https://doi.org/10.3103/S1066369X11120048
27. Leonov G. A. The Brockett problem for linear discrete control systems, *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, no. 5, pp. 777–781. https://doi.org/10.1023/A:1015497921140
28. Makarov E. K., Popova S. N. On the method of rotations for linear controlled systems, *Doklady Natsional'noi Akademii Nauk Belarusi*, 1998, vol. 42, no. 6, pp. 13–16 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:1040.93509
29. Makarov E. K., Popova S. N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of time-dependent linear systems), Minsk: Belorusskaya Nauka, 2012.
30. Millionshchikov V. M. A criterion for a small change in the direction of the solutions of a linear system of differential equations as the result of small disturbances in the coefficients of the system, *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 595–600. https://doi.org/10.1007/BF01094958
31. Millionshchikov V. M. A proof of the attainability of the central exponents of linear systems, *Siberian*

Mathematical Journal, 1969, vol. 10, no. 1, pp. 69–73. https://doi.org/10.1007/BF01208409
32. Millionshchikov V. M. Structurally stable properties of linear systems of differential equations, *Differ. Uravn.*, 1969, vol. 5, no. 10, pp. 1755–1784 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de818
33. Popov V. M. *Giperustoichivost' avtomaticheskikh sistem* (Hiperstabilitatea sistemelor automate), Moscow: Nauka, 1970.
34. Popova S. N. *Control problems for Lyapunov exponents*, Can. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Izhevsk, 1992. (In Russian).
35. Rakhimberdiev M. I., Rozov N. Kh. Distribution of Ljapunov exponents in linear systems with periodic coefficients that are nearly constant in the mean, *Differ. Uravn.*, 1978, vol. 14, no. 9, pp. 1710–1714 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de3507
36. Sergeev I. N. Sharp upper bounds of mobility of the Ljapunov exponents of a system of differential equations and the behavior of the exponents under perturbations approaching, *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 3, pp. 438–448 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de3943
37. Sergeev I. N. Exact bounds for the mobility of Lyapunov indices of linear systems in the case of small (on the average) perturbations, *Trudy Seminara Imeni I. G. Petrovskogo*, vol. 11, pp. 32–73 (in Russian). https://zbmath.org/?q=an:0619.34049
38. Surkov A. G. *O spektral'nom mnozhestve lineinykh sistem vtorogo poryadka s ogranichennymi vozmushcheniyami* (On the spectral set of second-order linear systems with limited perturbations), Minsk, 1984.
39. Tonkov E. L. *K teorii lineinykh upravlyaemykh sistem* (To the theory of linear control systems), Izhevsk: Udmurt State University, 2018.
40. Horn R. A., Johnson C. R. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1986. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989.
41. Engelking R. *General topology*, Lemgo: Heldermann Verlag, 1989.
42. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem for discrete time-varying linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2017, vol. 55, no. 2, pp. 671–692. https://doi.org/10.1137/15m1033666
43. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Necessary and sufficient conditions for assignability of the Lyapunov spectrum of discrete linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 11, pp. 3825–3837. https://doi.org/10.1109/tac.2018.2823086
44. Babiarz A., Banshchikova I., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Proportional local assignability of Lyapunov spectrum of linear discrete time-varying systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2019, vol. 57, no. 2, pp. 1355–1377. https://doi.org/10.1137/17m1141734
45. Bacciotti A., Biglio A. Some remarks about stability of nonlinear discrete-time control systems, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2001, vol. 8, no. 4, pp. 425–438. https://doi.org/10.1007/pl00001456
46. Bittanti S., Bolzern P., De Nicolao G., Engwerda J. C. Comments on "Stabilizability and detectability of discrete-time, time-varying systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, vol. 37, issue 8, pp. 1274–1275. https://doi.org/10.1109/9.151126
47. Byrnes C. I., Lin W., Ghosh B. K. Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback, *Systems and Control Letters*, 1993, vol. 21, no. 3, pp. 255–263. https://doi.org/10.1016/0167-6911(93)90036-6
48. Cheng V. A direct way to stabilize continuous-time and discrete-time linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, vol. 24, issue 4, pp. 641–643. https://doi.org/10.1109/tac.1979.1102101
49. Dickinson B. On the fundamental theorem of linear state variable feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, vol. 19, issue 5, pp. 577–579. https://doi.org/10.1109/tac.1974.1100639
50. Elaydi S. *An introduction to difference equations*, New York: Springer, 2005. https://doi.org/10.1007/0-387-27602-5
51. Engwerda J. C. Stabilizability and detectability of discrete-time time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, vol. 35, issue 4, pp. 425–429. https://doi.org/10.1109/9.52294
52. Grüne L., Wirth F. Feedback stabilization of discrete-time homogeneous semilinear systems, *Systems*

and Control Letters, 1999, vol. 37, issue 1, pp. 19–30. https://doi.org/10.1016/s0167-6911(98)00110-8
53. Halanay A., Ionescu V. *Time-varying discrete linear systems: input-output operators, Riccati equations, disturbance attenuation*, Basel: Springer, 1994. https://www.springer.com/gp/book/9783764350123
54. Johnson R., Obaya R., Novo S., Núñez G., Fabbri R. *Nonautonomous linear Hamiltonian systems: oscillation, spectral theory and control*, Cham: Springer, 2016. https://doi.org/10.1007/978-3-319-29025-6
55. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana*, 1960, vol. 5, no 1, pp. 102–119. https://zbmath.org/?q=an:0112.06303
56. Klamka J. *Controllability of dynamical systems*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
57. Kwon W., Pearson A. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, vol. 23, no. 3, pp. 479–481. https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101749
58. Lin W. Further results on global stabilization of discrete nonlinear systems, *Systems and Control Letters*, 1996, vol. 29, no. 1, pp. 51–59. https://doi.org/10.1016/0167-6911(96)00037-0
59. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme, *Mathematische Zeitschrift*, 1930, vol. 31, issue 1, pp. 748–766. https://doi.org/10.1007/bf01246445
60. Popova S. N., Banshchikova I. N. Spectral set of a linear system with discrete time, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 752–756. https://doi.org/10.1007/s10958-018-3783-3
61. Popova S. N., Banshchikova I. N. On the property of proportional local assignability of the Lyapunov spectrum for discrete time-varying systems // Proceedings of 2018 14th International Conference "Stability and oscillations of nonlinear control systems" (Pyatnitskiy's conference) (STAB): Russia, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of control sciences, May 30 – June 1, 2018. Moscow: IEEE, 2018. https://doi.org/10.1109/STAB.2018.8408389
62. Sell G. *Topological dynamics and ordinary differential equations (Series Van Nostrand Reinhold mathematical studies)*, New York: Van Nostrand, 1971.
63. Sell G. R. The Floquet problem for almost periodic linear differential equations. Ordinary and partial differential equations. New York: Springer, 1974. P. 239–251. https://doi.org/10.1007/BFb0065533
64. Sontag E. D. *Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems, vol. 6*, New York: Springer, 2013. https://www.springer.com/gp/book/9780387984896
65. Tsinias J. Stabilizability of discrete-time nonlinear systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1989, vol. 6, issue 2, pp. 135–150. https://doi.org/10.1093/imamci/6.2.135
66. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. 12, no. 6, pp. 660–665. https://doi.org/10.1109/tac.1967.1098739
67. Zaitsev V. Sufficient conditions for uniform global asymptotic stabilization of discrete-time periodic bilinear systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, issue 1, pp. 11529–11534. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1623

Received 10.02.2021

Banshchikova Irina Nikolaevna, Senior Lecturer, Researcher, Department of Differential Equation, Laboratory of Mathematical Control Theory, Udmurt State University, ul. Universitetskaya, 1, Izhevsk, 426034, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6687-5008
E-mail: banshhikova.irina@mail.ru

Citation: I. N. Banshchikova. Local assignability of Lyapunov exponents of linear discrete-time system, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 3–76.