Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2021. Том 57. С. 156–169

УДК 519.63

© *В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова*

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДРОБНЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Для дробного диффузионно-волнового уравнения с нелинейным эффектом функционального запаздывания конструируется неявный численный метод. Схема основана на L2-методе аппроксимации дробной производной порядка от 1 до 2, интерполяции и экстраполяции с заданными свойствами дискретной предыстории и аналоге метода Кранка–Никольсон. С помощью идей общей теории разностных схем с наследственностью исследуется порядок сходимости метода. Порядок сходимости метода существеннее, чем в ранее известных методах, зависит от порядка стартовых значений. Основным моментом доказательства является использование устойчивости L2-метода. Приводятся результаты сравнения численных экспериментов с другими схемами: чисто неявным методом и чисто явным методом, эти результаты показали в целом преимущества предложенной схемы.

Ключевые слова: дробное диффузионно-волновое уравнение, функциональное запаздывание, интерполяция, L2-метод, схема Кранка–Никольсон, порядок сходимости.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-07

Введение

Эффект запаздывания широко распространен в моделировании с помощью уравнений с частными производными различных явлений [1, 2] и, в силу сложности объекта, на первый план выходит разработка численных алгоритмов и обоснование их сходимости [3]. В последнее время особое место в исследованиях занимают уравнения с дробными частными производными [4]. Если дробная производная по времени имеет порядок $1 < \alpha < 2$, уравнение называется диффузионно-волновым, и оно наследует свойства как параболических, так и гиперболических уравнений. Среди многочисленных работ по численным методам решений линейных диффузионно-волновых уравнений отметим пионерскую работу [5], в которой фактически было обосновано наличие устойчивости и сходимости метода, основанного на замене дробного дифференциального оператора Капуто специальным разностным оператором. Позже этот метод получил название L2-метод [4]. Для дробных диффузионно-волновых уравнений распределенного порядка численные методы были рассмотрены в [6, 7]. В работе [8] для диффузионно-волновых уравнений с постоянным сосредоточенным запаздыванием был построен чисто неявный метод, основанный на L2-алгоритме, его сходимость была обоснована с помощью новой сложной техники применения дискретных дробных аналогов неравенств Гронуолла. Эта техника, в сочетании с другими методами исследования порядков сходимости, применялась для различных задач с дробными производными в [9–12].

В данной работе для дробных диффузионно-волновых уравнений с эффектом запаздывания общего вида строится аналог метода Кранка–Никольсон с применением L2-метода для аппроксимации дробной производной и интерполяции с экстраполяцией дискретной предыстории для учета эффекта запаздывания. Сходимость метода устанавливается с помощью результатов работы [5] и методики исследования порядков сходимости общей разностной схемы систем с наследственностью [3].

§ 1. Формулировка задачи

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)), \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant T,\quad 0 \leqslant x \leqslant X$ — независимые переменные, $u(x,t)$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s), \tau \leqslant s < 0\}$ — предыстория искомой функции к моменту t, τ — величина запаздывания. Дробная производная Капуто порядка α, $1 < \alpha < 2$, определяется формулой

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{F''(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-1}} d\xi, \quad t > 0.$$

Заданы граничные условия

$$u(0,t) = u_0(t), \quad u(X,t) = u_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

и начальные условия

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Мы будем предполагать, что решение $u(x,t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно.

Обозначим через $Q = Q[-\tau,0)$ множество функций $v(s)$, кусочно непрерывных на полуинтервале $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа. Определим норму функций на Q соотношением $\|v(\cdot)\|_Q = \sup_{s\in[-\tau,0)} |v(s)|$. Дополнительно будем предполагать, что функционал $f(x,t,u,v(\cdot))$ определен на $[0,X] \times [0,T] \times R \times Q$ и липшицев по последним двум аргументам, т. е. найдется такая постоянная L_f, что для всех $x \in [0,X]$, $t \in [0,T]$, $u^1 \in R$, $u^2 \in R$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$|f(x,t,u^1,v^1(\cdot)) - f(x,t,u^2,v^2(\cdot))| \leqslant L_f(|u^1-u^2| + \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q). \tag{1.4}$$

§ 2. Разностная схема

Введем шаг по времени $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, где M_0 — натуральное число, и пусть $M = [\frac{T}{\Delta}]$. Введем точки $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \ldots, M$. Разобьем отрезок $[0,X]$ на части с шагом $h = X/N$, точками $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$. Аппроксимацию функции $u(x_i,t_j)$ в узлах сетки обозначим u_i^j.

На множестве чисел $\{V^j\}_{j=0}^{n+1}$, $n \geqslant 2$, введем разностный оператор, который аппроксимирует производную Капуто (L2-метод, [4, с. 49])

$$D_\Delta^\alpha V^n = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{k=-1}^{n} w_k V^{n-k},$$

где при $n = 2$

$$w_k = \begin{cases} 1, & k=-1, \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0, \\ (-2)2^{2-\alpha} + 3, & k = 1, \\ 2^{2-\alpha} - 1, & k = 2, \end{cases}$$

и при $n > 2$

$$w_k = \begin{cases} 1, & k=-1, \\ 2^{2-\alpha} - 3, & k = 0, \\ (k+2)^{2-\alpha} - 3(k+1)^{2-\alpha} + & \\ \quad + 3(k)^{2-\alpha} - (k-1)^{2-\alpha}, & 1 \leqslant k \leqslant n-2, \\ -2n^{2-\alpha} + 3(n-1)^{2-\alpha} - (n-2)^{2-\alpha}, & k = n-1, \\ n^{2-\alpha} - (n-1)^{2-\alpha}, & k = n. \end{cases}$$

Также разностный оператор можно представить в виде

$$D_\Delta^\alpha V^n = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}(\delta V^j - \delta V^{j-1}),$$
$$a_i = (i+1)^{2-\alpha} - i^{2-\alpha}, \quad \delta V^j = V^{j+1} - V^j.$$

Если точное решение задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t, тогда [4, с. 49]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t_n)}{\partial t^\alpha} = D_\Delta^\alpha u(x,t_n) + Q_n, \quad |Q_n| \leqslant C\Delta^{3-\alpha}. \tag{2.1}$$

Для каждого фиксированного $i = 0,\ldots,N$ введем дискретную предысторию к моменту t_m, $m = 0,\ldots,M$: $\{u_i^j\}_m = \{u_i^j, m - M_0 \leqslant j \leqslant m\}$.

Оператором интерполяции (с экстраполяцией на полшага) дискретной предыстории назовем отображение I, ставящее в соответствие дискретной предыстории $\{u_i^j\}_m$ функцию $u_i^m(t)$, определенную на $[t_m - \tau, t_m + \frac{\Delta}{2}]$.

Будем говорить, что оператор интерполяции имеет порядок p на точном решении, если существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что для всех i, m и $t \in [t_m - \tau, t_m + \frac{\Delta}{2}]$ выполняется неравенство

$$|u_i^m(t) - u(x_i,t)| \leqslant C_1 \max_{m-M_0 \leqslant j \leqslant m} |u_i^j - u(x_i,t_j)| + C_2\Delta^p.$$

В дальнейшем для рассматриваемого метода мы будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$u_i^m(t) = \frac{1}{\Delta}((t_j - t)u_i^{j-1} + (t - t_{j-1})u_i^j), \ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j, \ j \leqslant m. \tag{2.2}$$

$$u_i^m(t) = \frac{1}{\Delta}((t_m - t)u_i^{m-1} + (t - t_{m-1})u_i^m), \ t_m \leqslant t \leqslant t_m + \frac{\Delta}{2}. \tag{2.3}$$

В частности, при кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением $u_i^m(t_m + \frac{\Delta}{2}) = \frac{3}{2}u_i^m - \frac{1}{2}u_i^{m-1}$, это будет использоваться при конструировании метода.

Этот оператор интерполяции имеет второй порядок, если точное решение дважды непрерывно дифференцируемо по t [13, с. 98, 102]. Отметим также, что оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением является липшицевым с константой $L_I = \frac{3}{2}$ в следующем смысле: если имеется две предыстории $\{u_i^j\}_m = \{u_i^j, m - M_0 \leqslant j \leqslant m\}$ и $\{v_i^j\}_m = \{v_i^j, m - M_0 \leqslant j \leqslant m\}$, и, соответственно, две функции, полученные с помощью интерполяции (2.2) с экстраполяцией (2.3) и

$$v_i^m(t) = \frac{1}{\Delta}((t_j - t)v_i^{j-1} + (t - t_{j-1})v_i^j), \ t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j, \ j \leqslant m,$$

$$v_i^m(t) = \frac{1}{\Delta}((t_m - t)v_i^{m-1} + (t - t_{m-1})v_i^m), \ t_m \leqslant t \leqslant t_m + \frac{\Delta}{2},$$

тогда для всех $t_{m-M_0} \leqslant t \leqslant t_m + \frac{\Delta}{2}$ выполняется

$$|u_i^m(t) - v_i^m(t)| \leqslant L_I \max_{m-M_0 \leqslant j \leqslant m} |u_i^j - v_i^j|. \tag{2.4}$$

Введем разностный оператор, который аппроксимирует вторую производную по x

$$\delta_x^2 u_i^m = \frac{u_{i-1}^m - 2u_i^m + u_{i+1}^m}{h^2}.$$

Если точное решение задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ четырежды непрерывно дифференцируемо по x, то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x_i,t_m) = \delta_x^2 u_i^m + P_m,\ |P_m| \leqslant Ch^2. \tag{2.5}$$

Для $m = 1,2,\ldots,M-1$ рассмотрим аналог метода Кранка–Никольсон

$$D_\Delta^\alpha u_i^m = \frac{1}{2}\delta_x^2 u_i^{m+1} + \frac{1}{2}\delta_x^2 u_i^m + f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, \frac{3}{2}u_i^m - \frac{1}{2}u_i^{m-1}, u^m_{t_m+\frac{\Delta}{2}}(x_i,\cdot)), \tag{2.6}$$

с начальными условиями $u_i^j = \varphi(x_i,t_j),\ j = -M_0,\ldots,0,\ i = 1,\ldots,N-1$, и граничными условиями $u_0^j = u_0(t_j),\ j = 0,\ldots,m$, и $u_N^j = u_1(t_j),\ j = 0,\ldots,m$.

Здесь $u^m(t) = u_i^m(t)$ для $t \in [\max\{0, t_m - \tau\}, t_m + \frac{\Delta}{2}]$ — результат кусочно-линейной интерполяции (2.2) с экстраполяцией продолжением (2.2), а для $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ $u^m(t) = u_i^m(t) = \varphi(x_i,t)$.

Для каждого $m = 1,2,\ldots,M-1$ метод сводится к решению линейной системы относительно u_i^{m+1}, трехдиагональной структуры с диагональным преобладанием, которая однозначно разрешима.

Заметим, что для применения метода (2.6), кроме начальных условий необходимы стартовые значения (разгон) u_i^1. Будем говорить, разгон имеет порядок Δ^p, если $|u(x_i,t_1) - u_i^1| \leqslant c\Delta^p$, $i = 1,\ldots,N-1$. В частности, можно взять

$$u_i^1 = 3u_i^0 - 3u_i^{-1} + u^{-2} = 3\varphi(x_i,t_0) - 3\varphi(x_i,t_{-1}) + \varphi(x_i,t_{-2}). \tag{2.7}$$

Если точное решение задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ трижды непрерывно дифференцируемо по t, то этот способ разгона имеет порядок Δ^3.

Подставим в разностную схему (2.6) выражения для операторов, приведем подобные, умножим уравнение на $\Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)$, получим, учитывая, что $w_{-1} = 1$, $w_0 = 2^{2-\alpha} - 3$,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sigma u_{i-1}^{m+1} + (1+\sigma)u_i^{m+1} - \frac{1}{2}\sigma u_{i+1}^{m+1} = \frac{1}{2}\sigma u_{i-1}^m - (2^{2-\alpha} - 3 + \sigma)u_i^m + \\
+ \frac{1}{2}\sigma u_{i+1}^m - \Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)\sum_{k=1}^{m} w_k u_i^{m-k} + \\
+ \Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha) f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, \frac{3}{2}u_i^m - \frac{1}{2}u_i^{m-1}, u^m_{t_m+\frac{\Delta}{2}}(x_i,\cdot)),
\end{aligned}$$

где $\sigma = \frac{\Delta^\alpha}{h^2}\Gamma(3-\alpha)$.

§ 3. Анализ погрешности

Определим погрешность метода (2.6) в узлах $\varepsilon_i^j = u(x_i,t_j) - u_i^j$, $j = 1,\ldots,M$, $i = 0,\ldots,N$.

Будем говорить, что погрешность имеет порядок $\Delta^p + h^q$, если существует постоянная C такая, что для всех $i = 1,\ldots,N-1$, $m = 1,\ldots,M$ выполняется $|\varepsilon_i^m| \leqslant C(\Delta^p + h^q)$. Цель дальнейших рассуждений — доказать, что погрешность имеет порядок $\Delta^{3-\alpha} + h^2$.

Для $i = 1,\ldots,N-1$ и $m = 1,\ldots,M-1$ невязкой (без интерполяции) метода (2.6) назовем сеточную функцию

$$\begin{aligned}
\psi_i^m = D_\Delta^\alpha u(x_i,t_m) - \frac{1}{2}\delta_x^2 u(x_i,t_{m+1}) - \frac{1}{2}\delta_x^2 u(x_i,t_m) - \\
- f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, u(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}), u_{t_m+\frac{\Delta}{2}}(x_i,\cdot)).
\end{aligned}$$

Из оценок (2.1) и (2.5), а также из определения точного решения уравнения (1.1) в точке $(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2})$ следует результат.

Л е м м а 3.1 (Порядок невязки без интерполяции). *Если точное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *четырежды непрерывно дифференцируемо по* x *и дважды непрерывно дифференцируемо по* t, *то для невязки без интерполяции метода* (2.6) *выполняется*

$$|\psi_i^m| \leqslant C(h^2 + \Delta^{3-\alpha}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad m = 1, \ldots, M-1.$$

Невязкой с интерполяцией метода (2.6) назовем сеточную функцию

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_i^m = D_\Delta^\alpha u(x_i, t_m) - \frac{1}{2}\delta_x^2 u(x_i, t_{m+1}) - \frac{1}{2}\delta_x^2 u(x_i, t_m) - \\ - f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, \hat{u}(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}), \hat{u}_{t_m+\frac{\Delta}{2}}(x_i, \cdot)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $\hat{u}^m(x_i, t)$ для $t \in [\max\{0, t_m - \tau\}, t_m + \frac{\Delta}{2}]$ — результат кусочно-линейной интерполяции (2.2) с экстраполяцией (2.3) дискретной предыстории точного решения, а для t из отрезка $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ выполняется $\hat{u}^m(x_i, t) = \varphi(x_i, t)$.

Л е м м а 3.2 (Порядок невязки с кусочно-линейной интерполяцией). *При условиях предыдущей леммы для невязки метода* (2.6) *с кусочно-линейной интерполяцией* (2.2) *и с экстраполяцией* (2.3) *выполняется*

$$|\hat{\psi}_i^m| \leqslant C(h^2 + \Delta^{3-\alpha}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad m = 1, \ldots, M-1.$$

Утверждение леммы получается из утверждения леммы 3.1 и того факта, что кусочно линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет второй порядок методикой [3].

Используя (2.6) и (3.1), запишем уравнения для погрешности

$$D_\Delta^\alpha \varepsilon_i^m = \frac{1}{2}\delta_x^2 \varepsilon_i^{m+1} + \frac{1}{2}\delta_x^2 D_\Delta^\alpha \varepsilon_i^m + \hat{\psi}_i^m + \delta f_i^m, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad m = 1, \ldots, M-1, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned} \delta f_i^m = f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, \hat{u}(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}), \hat{u}_{t_m+\frac{\Delta}{2}}(x_i, \cdot)) - \\ - f(x_i, t_m + \frac{\Delta}{2}, \frac{3}{2}u_i^m - \frac{1}{2}u_i^{m-1}, u_{t_m+\frac{\Delta}{2}}^m(x_i, \cdot)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из краевых условий получаем $\varepsilon_0^m = \varepsilon_N^m = 0$, $m = 0, \ldots, M$. Из начальных условий получаем $\varepsilon_i^0 = 0$, $i = 1, \ldots, N-1$.

Если стартовые значения взяты в виде (2.7), то при условии дважды непрерывной дифференцируемости по t точного решения $u(x,t)$ выполняется

$$|\varepsilon_i^1| \leqslant c\Delta^2, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Подставляя выражения для разностных операторов, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma\varepsilon_{i-1}^{m+1} + (1+\sigma)\varepsilon_i^{m+1} - \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_{i+1}^{m+1} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_{i-1}^m - (2^{2-\alpha} - 3 + \sigma)\varepsilon_i^m + \\ + \frac{1}{2}\sigma\varepsilon_{i+1}^m + \Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)\big(- \sum_{k=1}^{m} w_k \varepsilon_i^{n-k} + \hat{\psi}_i^m + \delta f_i^m\big). \end{aligned}$$

Введем вектор погрешности $\varepsilon^m = (\varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m, \ldots, \varepsilon_{N-1}^m)^T$, (^{T} — знак транспонирования) и матрицы

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1+\sigma & -\frac{1}{2}\sigma & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -\frac{1}{2}\sigma & 1+\sigma & -\frac{1}{2}\sigma & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -\frac{1}{2}\sigma & 1+\sigma \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3-2^{2-\alpha}-\sigma & \frac{1}{2}\sigma & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{1}{2}\sigma & 3-2^{2-\alpha}-\sigma & \frac{1}{2}\sigma & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2}\sigma & 3-2^{2-\alpha}-\sigma \end{pmatrix},$$

$$A_k = \begin{pmatrix} -\Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)w_k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)w_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\Delta^\alpha\Gamma(3-\alpha)w_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m,$$

$$\delta F_m = \begin{pmatrix} \Gamma(3-\alpha)\delta f_1^m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Gamma(3-\alpha)\delta f_i^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Gamma(3-\alpha)\delta f_{N-1}^m \end{pmatrix},$$

$$\Psi_m = \begin{pmatrix} \Gamma(3-\alpha)\hat{\psi}_1^m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \Gamma(3-\alpha)\hat{\psi}_i^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Gamma(3-\alpha)\hat{\psi}_{N-1}^m \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение для погрешности перепишется в виде

$$A_{-1}\varepsilon^{m+1} = A_0\varepsilon^m + \sum_{k=1}^{m} A_k\varepsilon^{n-k} + \Delta^\alpha \delta F_m + \Delta^\alpha \Psi_m.$$

Учитывая, что матрица A_{-1} невырожденная, уравнение можно переписать в явной форме

$$\varepsilon^{m+1} = \sum_{k=0}^{m} B_k\varepsilon^{n-k} + \Delta^\alpha \delta\hat{F}_m + \Delta^\alpha \hat{\Psi}_m,$$

где

$$B_k = A_{-1}^{-1}A_K, \quad k = 0, 1, \dots, m, \qquad \delta\hat{F}_m = A_{-1}^{-1}\delta F_m, \qquad \hat{\Psi}_m = A_{-1}^{-1}\Psi_m.$$

Введем вектор погрешности с памятью $\{\varepsilon\}^m = (\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m)^T$, и матрицу $S_m = (B_m, B_{m-1}, \dots, B_1, B_0)$, тогда уравнение для погрешности перепишется в виде

$$\varepsilon^{m+1} = S_m\{\varepsilon\}^m + \Delta^\alpha \delta\hat{F}_m + \Delta^\alpha \hat{\Psi}_m, \quad m = 1, \dots, M-1.$$

Введем матрицы

$$\tilde{S}_m = (E, E, \dots, E, S_m),$$
$$\delta\tilde{F}_m = (O, O, \dots, O, \delta\hat{F}_m),$$
$$\tilde{\Psi}_m = (O, O, \dots, O, \hat{\Psi}_m),$$

где E — единичная матрица размерности $(N-1)\times(N-1)$, O — нулевая матрица размерности $(N-1)\times(N-1)$, получим уравнение

$$\{\varepsilon\}^{m+1} = \tilde{S}_m\{\varepsilon\}^m + \Delta^\alpha \delta\tilde{F}_m + \Delta^\alpha \tilde{\Psi}_m, \quad m = 1, \ldots, M-1. \tag{3.4}$$

Приведение уравнения для погрешности, точнее, для погрешности с памятью к явной векторной форме (3.4) дает возможность применить для анализа порядка погрешности методику общей схемы систем с последействием [3]. Доказательство опирается на устойчивость L2-метода. Приведем этот результат.

На множестве векторов $z = (0, z_1, z_2, \ldots, z_{N-1}, 0)$, введем нормы

$$\|z\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|z_i|, \qquad \|z\|_h = \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{N}(z_i - z_{i-1})^2},$$

связанные соотношением

$$\|z\| \leqslant \frac{\sqrt{X}}{2}\|z\|_h.$$

Л е м м а 3.3. *Пусть v_i^m при $i = 1, \ldots, N-1$ решение уравнения*

$$D_\Delta^\alpha v_i^m - \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}a_m(v_i^1 - v_i^0 - q_i\Delta) = \frac{1}{2}\delta_x^2 v_i^{m+1} + \frac{1}{2}\delta_x^2 v_i^m + P_i^m, \tag{3.5}$$

с начальными условиями $v_i^0 = \phi_i \ldots, N-1$ и граничными условиями $u_0^j = u_N^j = 0$, $j = 0, \ldots, M$. Тогда

$$\|v^{m+1}\|_h^2 \leqslant \|v^0\|_h^2 + \frac{t_{m+1}^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}h\sum_{i=1}^{N-1}q_i^2 + \Gamma(2-\alpha)t_{m+1}^{\alpha-1}\Delta\sum_{k=1}^{m}\left[h\sum_{i=1}^{N-1}(P_i^k)^2\right], \quad m \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Это утверждение повторяет лемму 3.2 из [5] с точностью до обозначений, принятых в данной статье.

Заметим, что коэффициенты однородной части уравнений (3.5) совпадут с коэффициентами однородной части уравнения для погрешности (3.2), если числа q_i выбраны из условий

$$q_i = \frac{v_i^1 - v_i^0}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

В дальнейшем будем считать это условие для уравнения (3.5) выполненным.

Т е о р е м а 3.1. *Если точное решение задачи* (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ *четырежды непрерывно дифференцируемо по x и дважды непрерывно дифференцируемо по t, разгон имеет порядок Δ^3, тогда метод* (2.6) *сходится с порядком $h^2 + \Delta^{3-\alpha}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение для погрешности (3.2) получает форму уравнения (3.5) при $v_i^m = \varepsilon_i^m$, если положить

$$P_i^m = \hat{\psi}_i^m + \delta f_i^m, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad m = 1, \ldots, M-1.$$

Кроме того, из (3.6) и $\varepsilon_i^0 = 0$, следует

$$q_i = \frac{\varepsilon_i^1}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, N-1.$$

Тогда из леммы 3.3 получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{m+1}\|_h^2 &\leqslant \frac{t_{m+1}^{2-\alpha}h}{\Gamma(3-\alpha)\Delta^2}\sum_{i=1}^{N-1}(\varepsilon_i^1)^2 + \Gamma(2-\alpha)t_{m+1}^{\alpha-1}\Delta\sum_{k=1}^{m}\left[h\sum_{i=1}^{N-1}(\hat{\psi}_i^k+\delta f_i^k)^2\right] \leqslant \\ &\leqslant \frac{T^{2-\alpha}X}{\Gamma(3-\alpha)\Delta^2}\|\varepsilon^1\|^2 + \Gamma(2-\alpha)T^{\alpha-1}X\Delta\sum_{k=1}^{m}\|\hat{\psi}^k+\delta f^k\|^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\hat{\psi}^m = (\hat{\psi}_1^m, \hat{\psi}_2^m, \ldots, \hat{\psi}_{N-1}^m)^T$, $\delta f^m = (\delta f_1^m, \delta f_2^m, \ldots, \delta f_{N-1}^m)^T$.

Оценим слагаемые в правой части (3.7).

Так как разгон имеет порядок Δ^3, то существует постоянная C_0 такая, что $\|\varepsilon^1\| \leqslant C_0\Delta^3$, откуда

$$\frac{T^{2-\alpha}X}{\Gamma(3-\alpha)\Delta^2}\|\varepsilon^1\|^2 \leqslant \frac{T^{2-\alpha}X}{\Gamma(3-\alpha)}C_0^2\Delta^4. \tag{3.8}$$

Из леммы 3.2 следует, что для всех $m = 1, \ldots, M-1$ выполняется

$$\|\hat{\psi}^m\| \leqslant C(h^2 + \Delta^{3-\alpha}) = \delta.$$

Зафиксируем $k = 1, \ldots, m$. Возможны два варианта.

(A) $\|\delta f^k\| \leqslant \delta$, тогда $\|\hat{\psi}^k + \delta f^k\|^2 \leqslant 4\delta^2$.

(B) $\|\delta f^k\| > \delta$, тогда $\|\delta f^k\| > \|\hat{\psi}^k\|$, и $\|\hat{\psi}^k + \delta f^k\|^2 \leqslant 4\|\delta f^k\|^2$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m}\|\hat{\psi}^k+\delta f^k\|^2 = \sum_{(A),k=1}^{m}\|\hat{\psi}^k+\delta f^k\|^2 + \sum_{(B),k=1}^{m}\|\hat{\psi}^k+\delta f^k\|^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{m}\|\delta f^k\|^2 + 4m\delta^2. \tag{3.9}$$

Оценим величину $\|\delta f^k\|$, используя определение (3.3), липшицевость функции f (1.4) и липшицевость с константой $L_I = \frac{3}{2}$ оператора интерполяции с экстраполяцией (2.4):

$$\|\delta f^k\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\delta f_i^k| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N-1}\{2L_f L_I \max_{k-M_0\leqslant j\leqslant k}|\varepsilon_i^j|\} \leqslant 3L_f \max_{k-M_0\leqslant j\leqslant k}\|\varepsilon^j\|. \tag{3.10}$$

Кроме того, воспользуемся связью норм $\|\varepsilon^m\|^2 \leqslant \frac{X}{4}\|\varepsilon^m\|_h^2$, и, подставляя (3.8), (3.9), (3.10) в (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{m+1}\|^2 \leqslant \frac{T^{2-\alpha}X^2}{4\Gamma(3-\alpha)}C_0^2\Delta^4 + X^2\Gamma(2-\alpha)T^{\alpha}C^2(h^2+\Delta^{3-\alpha})^2 + \\ + \Delta X^2\Gamma(2-\alpha)T^{\alpha-1}(3L_f)^2\sum_{k=1}^{m}\max_{k-M_0\leqslant j\leqslant k}\|\varepsilon^j\|^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Для краткости записи введем величины

$$D = \frac{T^{2-\alpha}X^2}{4\Gamma(3-\alpha)}C_0^2\Delta^4 + X^2\Gamma(2-\alpha)T^{\alpha}C^2(h^2+\Delta^{3-\alpha})^2,$$

$$\hat{C} = X^2\Gamma(2-\alpha)T^{\alpha-1}(3L_f)^2,$$

тогда (3.11) перепишется в виде

$$\|\varepsilon^{m+1}\|^2 \leqslant D + \hat{C}\Delta\sum_{k=1}^{m}\max_{k-M_0\leqslant j\leqslant k}\|\varepsilon^j\|^2. \tag{3.12}$$

Индукцией по $m = 0, \dots, M-1$ докажем оценку

$$\|\varepsilon^{m+1}\|^2 \leqslant D(1+\hat{C}\Delta)^m. \tag{3.13}$$

База индукции. При $m = 0$ оценка (3.13) следует из (3.12).

Шаг индукции. Пусть оценка (3.13) верна для всех индексов от 1 до m. Покажем, что оценка справедлива и для $m+1$. Зафиксируем номер $k \leqslant m$. Пусть $j_0 = j_0(k)$ — тот индекс, на котором достигается $\max\limits_{k-M_0 \leqslant j \leqslant k} \|\varepsilon^j\|^2$. Так как $\varepsilon^j = 0$ для $j \leqslant 0$, то выполняется $1 \leqslant j_0 \leqslant m$, тогда по индуктивному предположению

$$\max_{k-M_0 \leqslant j \leqslant k} \|\varepsilon^j\|^2 = \|\varepsilon^{j_0}\|^2 \leqslant D(1+\hat{C}\Delta)^{j_0-1} \leqslant D(1+\hat{C}\Delta)^{k-1}.$$

Из полученной оценки и (3.12) вытекает

$$\|\varepsilon^{m+1}\|^2 \leqslant D + \hat{C}\Delta \sum_{k=1}^{m} D(1+\hat{C}\Delta)^k = D(1+\hat{C}\Delta)^m.$$

Таким образом, оценка (3.13) доказана, и из нее получаем оценку

$$\|\varepsilon^m\|^2 \leqslant D \exp{(\hat{C}T)}, \quad m = 1, \dots, M,$$

или

$$\|\varepsilon^m\| \leqslant \sqrt{D} \exp{(\frac{1}{2}\hat{C}T)}, \quad m = 1, \dots, M. \tag{3.14}$$

Так как по определению величины D выполняется

$$\sqrt{D} \leqslant \check{C}(h^2 + \Delta^{3-\alpha}),$$

из (3.14) вытекает утверждение теоремы.

□

§ 4. Примеры численных расчетов

Обозначим максимальную погрешность при фиксированном t через $\varepsilon_{\Delta,h}$

$$\varepsilon_{\Delta,h} = \max_{0 \leqslant i \leqslant N} |(x_i, t_j) - u_i^j|.$$

Также будем рассматривать величины, характеризующие порядок сходимости

$$\rho^x_{\Delta,h} = \log_2 \left(\frac{\varepsilon_{\Delta,2h}}{\varepsilon_{\Delta,h}}\right), \qquad \rho^t_{\Delta,h} = \log_2 \left(\frac{\varepsilon_{2\Delta,h}}{\varepsilon_{\Delta,h}}\right).$$

П р и м е р 4.1.

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x,t) + u(x,t-\tau) + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} e^x - 2t^2 e^x - (t-\tau)^2 e^x, \tag{4.1}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\tau = 0.1$, $\alpha = 1.5$.

Заданы граничные

$$u(0,t) = t^2, \quad u(X,t) = et^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и начальные условия

$$u(x,t) = t^2 e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0.$$

Уравнение имеет точное решение $u(x,t) = t^2 e^x$.

Таблица 1. Погрешности приближенного решения уравнения (4.1) различными методами при $t = 1$ при различных Δ и h

Δ	h	Явный метод $\varepsilon_{\Delta,h}$	Явный метод $\rho^x_{\Delta,h}$	Неявный метод [8] $\varepsilon_{\Delta,h}$	Неявный метод [8] $\rho^x_{\Delta,h}$	метод К-Н (2.6) $\varepsilon_{\Delta,h}$	метод К-Н (2.6) $\rho^x_{\Delta,h}$
0.005	0.5×2^{-1}	8.427×10^{-5}	-	3.226×10^{-3}	-	2.052×10^{-3}	-
	0.5×2^{-2}	6.901×10^{-4}	-3.034	2.572×10^{-3}	0.327	1.326×10^{-3}	0.631
	0.5×2^{-3}	8.451×10^{-4}	-0.292	2.413×10^{-3}	0.092	1.149×10^{-3}	0.206
0.0025	0.5×2^{-1}	4.138×10^{-4}	-	2.076×10^{-3}	-	1.513×10^{-3}	-
	0.5×2^{-2}	2.290×10^{-4}	0.854	1.410×10^{-3}	0.559	7.849×10^{-4}	0.947
	0.5×2^{-3}	3.930×10^{-4}	-0.779	1.244×10^{-3}	0.181	6.047×10^{-4}	0.376
0.00125	0.5×2^{-1}	6.620×10^{-4}	-	1.225×10^{-3}	-	1.244×10^{-3}	-
	0.5×2^{-2}	1.363×10^{-4}	5.602	8.221×10^{-4}	8.626	5.150×10^{-4}	1.272
	0.5×2^{-3}	1.674×10^{-4}	-3.619	6.530×10^{-4}	0.332	3.329×10^{-4}	0.630

Таблица 2. Погрешности приближенного решения уравнения (4.1) различными методами при $t = 1$ при различных Δ и h

h	Δ	Явный $\varepsilon_{\Delta,h}$	Явный $\rho^t_{\Delta,h}$	Неявный [8] $\varepsilon_{\Delta,h}$	Неявный [8] $\rho^t_{\Delta,h}$	метод К-Н (2.6) $\varepsilon_{\Delta,h}$	метод К-Н (2.6) $\rho^t_{\Delta,h}$
0.05	0.005×2^{-1}	4.129×10^{-4}	-	1.225×10^{-3}	-	5.832×10^{-4}	-
	0.005×2^{-2}	1.877×10^{-4}	1.137	6.334×10^{-4}	0.327	3.110×10^{-4}	0.631
	0.005×2^{-3}	7.530×10^{-5}	1.318	3.359×10^{-4}	0.952	1.752×10^{-4}	0.907
0.025	0.005×2^{-1}	4.406×10^{-4}	-	1.198×10^{-3}	-	5.534×10^{-4}	-
	0.005×2^{-2}	2.155×10^{-4}	1.032	6.056×10^{-4}	0.984	2.812×10^{-4}	0.977
	0.005×2^{-3}	1.030×10^{-4}	1.064	3.080×10^{-4}	0.976	1.453×10^{-4}	0.952
0.0125	0.005×2^{-1}	2.122×10^{161}	-	1.191×10^{-3}	-	5.452×10^{-4}	-
	0.005×2^{-2}	2.231×10^{-4}	30.036	5.981×10^{-4}	0.993	2.729×10^{-4}	0.999
	0.005×2^{-3}	1.108×10^{-4}	1.010	3.003×10^{-4}	0.994	1.370×10^{-4}	0.994

П р и м е р 4.2.

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \int_{-t/2}^{0} u(x,t+s)\,ds + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} \sin\pi x + u^2(x,t) - t^4 \sin^2 \pi x + \\ + t^2\pi^2 \sin\pi x - \frac{3}{8} t^3 \sin\pi x, \tag{4.2}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha = 1.5$.

Заданы граничные

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и начальные условия

$$u(x,t) = t^2 \sin\pi x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -0.5 \leqslant t \leqslant 0.$$

Уравнение имеет точное решение $u(x,t) = t^2 \sin\pi x$.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 19–01–00019.

Таблица 3. Погрешности приближенного решения уравнения (4.2) различными методами при $t = 0.75$ при различных Δ и h

		Явный метод		метод К-Н (2.6)	
Δ	h	$\varepsilon_{\Delta,h}$	$\rho^x_{\Delta,h}$	$\varepsilon_{\Delta,h}$	$\rho^x_{\Delta,h}$
0.05	0.5×2^{-1}	3.6382×10^{-2}	-	2.0945×10^{-2}	
	0.5×2^{-2}	2.3294×10^{-2}	0.6432	4.5599×10^{-3}	2.1995
	0.5×2^{-3}	1.7389	-6.2220	1.5834×10^{-4}	4.8479
0.025	0.5×2^{-1}	3.4235×10^{-2}	-	2.1824×10^{-2}	-
	0.5×2^{-2}	1.9908×10^{-2}	0.7821	5.3020×10^{-3}	2.0413
	0.5×2^{-3}	1.6351×10^{-2}	0.2840	8.1191×10^{-4}	2.7071
0.0125	0.5×2^{-1}	3.1475×10^{-2}	-	2.2263×10^{-2}	-
	0.5×2^{-2}	1.6698×10^{-2}	0.09145	5.6735×10^{-3}	1.9723
	0.5×2^{-3}	1.3031×10^{-2}	0.3577	1.1656×10^{-3}	2.2831

Таблица 4. Погрешности приближенного решения уравнения (4.2) различными методами при $t = 0.75$ при различных Δ и h

		Явный		метод К-Н (2.6)	
h	Δ	$\varepsilon_{\Delta,h}$	$\rho^t_{\Delta,h}$	$\varepsilon_{\Delta,h}$	$\rho^t_{\Delta,h}$
0.5	0.125×2^{-1}	1.0849×10^{-1}	-	1.8312×10^{-2}	-
	0.125×2^{-2}	1.0294×10^{-1}	0.0757	1.3925×10^{-2}	0.3950
	0.125×2^{-3}	9.7816×10^{-2}	0.0736	1.1158×10^{-3}	0.1633
0.25	0.125×2^{-1}	4.3161×10^{-2}	-	4.1892×10^{-3}	-
	0.125×2^{-2}	3.7766×10^{-2}	0.1926	2.339×10^{-3}	0.8404
	0.125×2^{-3}	0.1653×10^{-2}	0.7621	1.5348×10^{-3}	0.6082
0.125	0.125×2^{-1}	2.7069×10^{-2}	-	1.4861×10^{-3}	-
	0.125×2^{-2}	2.1908×10^{-2}	0.3052	2.0618×10^{-3}	0.4723
	0.125×2^{-2}	1.8091×10^{-2}	0.2767	2.9966×10^{-4}	2.7825

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Liu P.-P. Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay // Applied Mathematics and Computation. 2015. Vol. 265. P. 275–291. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.028
3. Пименов В. Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. https://elibrary.ru/item.asp?id=26520733
4. Li C., Zeng F. Numerical methods for fractional calculus. Boca Raton: CRC Press, 2015.
5. Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for diffusion-wave system // Applied Numerical Mathematics. 2006. Vol. 56. Issue 2. P. 193–209. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.03.003
6. Ye H., Liu F., Anh V. Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 298. P. 652–660. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.06.025
7. Hendy A. S., De Staelen R. H., Pimenov V. G. A semi-linear delayed diffusion-wave system with distributed order in time // Numerical Algorithms. 2018. Vol. 77. No. 3. P. 885–903. https://doi.org/10.1007/s11075-017-0344-7

8. Pimenov V., Tashirova E. Convergence of the L2-method for a fractional diffusion-wave equations with delay // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2312. 050016. P. 1–8. https://doi.org/10.1063/5.0035432
9. Li D., Liao H.-L., Sun W., Wang J., Zhang J. Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // Communications in Computational Physics. 2018. Vol. 24. No. 1. P. 86–103. https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2017-0080
10. Li L., Zhou B., Chen X., Wang Z. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction-diffusion equations with delay // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 337. P. 144–152. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057
11. Hendy A. S., Macías-Díaz J. E. A novel discrete Gronwall inequality in the analysis of difference schemes for time-fractional multi-delayed diffusion equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 73. P. 110–119. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.02.005
12. Hendy A. S., Zaky M. A. Global consistency analysis of L1-Galerkin spectral schemes for coupled nonlinear space-time fractional Schrödinger equations // Applied Numerical Mathematics. 2020. Vol. 156. P. 276–302. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.002
13. Ким А. В., Пименов В. Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.–Ижевск: РХД, 2004.

Поступила в редакцию 04.03.2021

Пименов Владимир Германович, д. ф.-м. н., профессор, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4042-6079
E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Таширова Екатерина Евгеньевна, к. ф.-м. н., доцент, кафедра вычислительной математики и компьютерных наук, Уральский федеральный университет, 620000, Россия, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5054-176X
E-mail: linetisa@yandex.ru

Цитирование: В. Г. Пименов, Е. Е. Таширова. Численный метод для дробных диффузионно-волновых уравнений с функциональным запаздыванием // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 57. С. 156–169.

V. G. Pimenov, E. E. Tashirova

Numerical method for fractional diffusion-wave equations with functional delay

Keywords: fractional diffusion wave equation, functional delay, L2-method, interpolation, Crank–Nicholson scheme, order of convergence.

MSC2020: 65M06, 65M12, 65M15, 65Q20

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-57-07

For a fractional diffusion-wave equation with a nonlinear effect of functional delay, an implicit numerical method is constructed. The scheme is based on the L2-method of approximation of the fractional derivative of the order from 1 to 2, interpolation and extrapolation with the given properties of discrete prehistory and an analogue of the Crank–Nicolson method. The order of convergence of the method is investigated using the ideas of the general theory of difference schemes with heredity. The order of convergence of the method is more significant than in previously known methods, depending on the order of the starting values. The main point of the proof is the use of the stability of the L2-method. The results of comparing numerical experiments with other schemes are presented: a purely implicit method and a purely explicit method, these results showed, in general, the advantages of the proposed scheme.

Funding. The study funded by RFBR, project number 19–01–00019.

REFERENCES

1. Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations*, New York: Springer, 1996. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1
2. Liu P.-P. Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay, *Applied Mathematics and Computation*, 2015, vol. 265, pp. 275–291. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.028
3. Pimenov V. G. *Raznostnye metody resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu* (Difference methods for solving of partial differential equations with heredity), Yekaterinburg: Ural Federal University, 2014. https://elibrary.ru/item.asp?id=26520733
4. Li C., Zeng F. *Numerical methods for fractional calculus*, Boca Raton: CRC Press, 2015.
5. Sun Z., Wu X. A fully discrete difference scheme for diffusion-wave system, *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, issue 2, pp. 193–209. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2005.03.003
6. Ye H., Liu F., Anh V. Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains, *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 298, pp. 652–660. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.06.025
7. Hendy A. S., De Staelen R. H., Pimenov V. G. A semi-linear delayed diffusion-wave system with distributed order in time, *Numerical Algorithms*, 2018, vol. 77, no. 3, pp. 885–903. https://doi.org/10.1007/s11075-017-0344-7
8. Pimenov V., Tashirova E. Convergence of the L2-method for a fractional diffusion-wave equations with delay, *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2312, 050016, pp. 1–8. https://doi.org/10.1063/5.0035432
9. Li D., Liao H.-L., Sun W., Wang J., Zhang J. Analysis of L1-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems, *Communications in Computational Physics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 86–103. https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2017-0080
10. Li L., Zhou B., Chen X., Wang Z. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction-diffusion equations with delay, *Applied Mathematics and Computation*, 2018, vol. 337, pp. 144–152. https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.057
11. Hendy A. S., Macías-Díaz J. E. A novel discrete Gronwall inequality in the analysis of difference schemes for time-fractional multi-delayed diffusion equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, vol. 73, pp. 110–119. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.02.005

12. Hendy A. S., Zaky M. A. Global consistency analysis of L1-Galerkin spectral schemes for coupled nonlinear space-time fractional Schrodinger equations, *Applied Numerical Mathematics*, 2020, vol. 156, pp. 276–302. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.05.002
13. Kim A. V., Pimenov V. G. *i-Gladkii analiz i chislennye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravnenii* (i-Smooth analysis and numerical methods for solving functional differential equations), Izhevsk: RCD, 2004.

Received 04.03.2021

Pimenov Vladimir Germanovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4042-6079
E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Tashirova Ekaterina Evgen'evna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Computer Sciences, Ural Federal University, pr. Lenina, 51, Yekaterinburg, 620000, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5054-176X
E-mail: linetisa@yandex.ru

Citation: V. G. Pimenov, E. E. Tashirova. Numerical method for fractional diffusion-wave equations with functional delay, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 57, pp. 156–169.