ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 208, № 1
июль, 2021

 Ю. П. Чубурин*, **Т. С. Тинюкова**†

ПОВЕДЕНИЕ АНДРЕЕВСКИХ СОСТОЯНИЙ ПРИ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

Рассматриваются три одномерные сверхпроводящие структуры: 1) с p-волновой сверхпроводимостью; 2) основная в экспериментах модель нанопроволоки с s-волновой сверхпроводимостью, порожденной объемным сверхпроводником благодаря эффекту близости в присутствии внешнего магнитного поля и спин-орбитального взаимодействия Рашбы; 3) граница двумерного топологического изолятора при наличии s-волнового сверхпроводящего порядка и внешнего магнитного поля. Получены строгие аналитические результаты для модели сверхпроводник–(магнитная) примесь–сверхпроводник. С помощью гамильтониана Боголюбова–де Жена изучено поведение возникающих в данных структурах устойчивых состояний с энергиями вблизи граничных точек энергетической щели типа "электрон" ("дырка") для первой модели и "электрон плюс дырка" для двух других моделей при переходе системы из топологической фазы в тривиальную. Оказалось, что в топологическом фазовом переходе большую роль играют резонансные (распадающиеся) состояния, причем происходящий при этом переворот спинов, а также изменение знака заряда происходят благодаря переходу локализованных состояний в резонансные и наоборот с изменением их энергий на противоположные при закрытии щели. Результаты согласуются с отсутствием пика кондактанса при нулевой разности потенциалов в тривиальной топологической фазе в недавнем эксперименте.

Ключевые слова: гамильтониан Боголюбова–де Жена, сверхпроводящая щель, андреевское локализованное состояние, майорановское локализованное состояние, резонансное состояние.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10025

Работа Ю. П. Чубурина поддержана программой финансирования АААА-А16-116021010082-8. Работа Т. С. Тинюковой выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 075-00232-20-01, проект FEWS-2020-0010[1].

*Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Ижевск, Россия. E-mail: chuburin@udman.ru

†Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия. E-mail: ttinyukova@mail.ru

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается большой интерес к майорановским локализованным состояниям (МЛС), возникающим в гетероструктурах сверхпроводник–нормальный металл (S-N) или сверхпроводник–нормальный металл–сверхпроводник (S-N-S) на границе сверхпроводника в топологической фазе [1]–[5]. МЛС представляют собой нейтральные квазичастицы типа "электрон плюс дырка" с нулевой энергией, подчиняющиеся неабелевой квантовой статистике и весьма перспективные для использования в квантовых вычислениях [2], [3], [5], [6].

В эксперименте возникновение МЛС главным образом связывается с появлением пика дифференциального кондактанса при нулевой разности потенциалов в топологической фазе одномерной сверхпроводящей структуры [7]–[10]. Однако в последние годы выяснилось, что подобный эффект возникает также в тривиальной фазе и вызван наличием андреевских локализованных состояний (АЛС) [11]–[14]. В связи с этим возникает вопрос: что происходит с локализованными состояниями при переходе из топологической фазы в тривиальную (или наоборот)? Известно, например, что при таком переходе спины как электронных, так и дырочных компонент квазичастичных состояний изменяют свое направление на противоположное [15], [16]. Также в недавнем экперименте [17] исследовалось возникновение пиков кондактанса в процессе топологического фазового перехода. Оказалось, что при закрытии сверхпроводящей щели, происходящем в таком переходе, в тривиальной фазе отсутствует пик кондактанса, а значит, отсутствуют и АЛС.

В настоящей статье рассматриваются три одномерные сверхпроводящие структуры: 1) с классической p-волновой сверхпроводимостью; 2) основная в экспериментах модель нанопроволоки с s-волновой сверхпроводимостью, порожденной объемным сверхпроводником благодаря эффекту близости в присутствии внешнего магнитного поля и спин-орбитального взаимодействия Рашбы; 3) граница двумерного топологического изолятора при наличии s-волнового сверхпроводящего порядка и внешнего магнитного поля. С целью получения строгих аналитических результатов вместо структуры S-N-S рассматриваем ее упрощенную модель сверхпроводник–(магнитная) примесь–сверхпроводник, причем примесь описывается дельта-образным потенциалом. Это приводит к сильному перекрытию волновых функций, в частности МЛС-подобные локализованные состояния не будут пространственно разделены, что исключает их использование в приложениях. Однако заметим, что эти состояния, вообще говоря, можно пространственно разделить с помощью внешнего магнитного поля [18], [19].

С помощью уравнения Боголюбова–де Жена (БдЖ) в статье изучается поведение возникающих в рассматриваемых структурах устойчивых состояний типа "электрон" ("дырка") для первой модели и "электрон плюс дырка" для двух других моделей с энергиями вблизи границ сверхпроводящей щели (см. [20], [21]) при переходе системы из топологической фазы в тривиальную. Как известно, наличие топологической или тривиальной фазы определяется соотношением параметров системы, при этом в момент фазового перехода ширина сверхпроводящей щели уменьшается до нуля [2], [5]. Оказалось, что большую роль в фазовом переходе играют резонансные (распадающиеся) состояния, причем происходящий при этом переворот спинов [15], [16] происходит не мгновенно, и этот процесс связан с переходом локализованных квазичастиц в резонансные и наоборот с изменением их энергий на противоположные. Кроме того, в статье объясняется установленное в эксперименте [17] отсутствие АЛС при закрытии щели в тривиальной фазе.

Далее под АЛС будут пониматься любые локализованные состояния, а под МЛС – АЛС с нулевой энергией, удовлетворяющие условиям сопряжения (см. ниже (2) или (22)), стандартные пространственно разделенные МЛС в рамках принятой простой модели возникнуть не могут из-за упомянутого перекрытия волновых функций.

2. СЛУЧАЙ p-ВОЛНОВОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПОРЯДКА

Гамильтониан БдЖ в рассматриваемом случае имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \mu & -\Delta\partial_x \\ \Delta\partial_x & \partial_x^2 + \mu \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\Delta \neq 0$ – вещественный параметр сверхпроводящего порядка, μ – химический потенциал. Гамильтониан (1) действует на функции вида $\Psi(x) = (\psi_{\mathrm{e}}(x), \psi_{\mathrm{h}}(x))^{\mathrm{T}}$, где индекс T означает транспонирование; $\psi_{\mathrm{e}}(x)$ и $\psi_{\mathrm{h}}(x)$ – электронная и дырочная компоненты соответственно. АЛС с нулевой энергией по определению является МЛС, если выполнено условие сопряжения [22]

$$\psi_{\mathrm{e}}^*(x) = \psi_{\mathrm{h}}(x). \tag{2}$$

Обозначая через F преобразование Фурье, для гамильтониана (1) в импульсном представлении получаем

$$\widetilde{H}(p) - E = \begin{pmatrix} p^2 - \mu - E & -ip\Delta \\ ip\Delta & -p^2 + \mu - E \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{H}(p) = FHF^{-1}$, E – энергия квазичастицы. Закон дисперсии $\det(\widetilde{H}(p) - E) = 0$ имеет вид

$$E^2 = \left(p^2 - \mu + \frac{\Delta^2}{2}\right)^2 + \mu\Delta^2 - \frac{\Delta^4}{4}. \tag{3}$$

В случае $\mu < \Delta^2/2$ спектр H определяется неравенством $|E| \geqslant |\mu|$. В дальнейшем предполагаем, что

$$|\mu| \ll |\Delta|, \tag{4}$$

так что сверхпроводящая щель, равная $(-|\mu|, |\mu|)$, мала. Функция Грина гамильтониана H имеет вид [21], [23]

$$G(x-x', E) = \\ = \begin{pmatrix} -g_+^{(1)} e^{ip_+|x-x'|} - g_-^{(2)} e^{ip_-|x-x'|} & \dfrac{\Delta}{4a}\left(e^{ip_+|x-x'|} - e^{ip_-|x-x'|}\right) \times \\ & \times \operatorname{sgn}(x-x') \\ -\dfrac{\Delta}{4a}\left(e^{ip_+|x-x'|} - e^{ip_-|x-x'|}\right) \times & g_-^{(1)} e^{ip_+|x-x'|} + g_+^{(2)} e^{ip_-|x-x'|} \\ \times \operatorname{sgn}(x-x') & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где

$$a = \sqrt{E^2 + \frac{\Delta^4}{4} - \mu\Delta^2}, \qquad p_\pm = \sqrt{\mu \pm a - \frac{\Delta^2}{2}},$$
$$g_\pm^{(1)} = \frac{a - \Delta^2/2 \pm E}{4ip_+ a}, \qquad g_\pm^{(2)} = \frac{a + \Delta^2/2 \pm E}{4ip_- a}. \tag{6}$$

Рассмотрим возмущенный гамильтониан $H + V$, где потенциал

$$V = Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \delta(x) \tag{7}$$

описывает примесь; здесь Z – вещественный параметр, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Будем рассматривать энергии E локализованных или резонансных (с конечным временем жизни) состояний такие, что

$$|E| < |\mu|. \tag{8}$$

Пользуясь (4), (6), (8), находим

$$a = \frac{\Delta^2}{2} - \mu + \frac{E^2 - \mu^2}{\Delta^2}, \tag{9}$$

откуда согласно (6) имеем

$$p_+ = \frac{i\sqrt{\mu^2 - E^2}}{|\Delta|}, \qquad p_- = i|\Delta|. \tag{10}$$

Следовательно (см. (5), (6)), точки $E = \pm\mu$ являются точками ветвления функции Грина $G(x - x', E)$. В силу (8) локализованным состояниям отвечает положительный корень в (10), вследствие чего их волновые функции экспоненциально убывают. На втором листе функции Грина находятся резонансные состояния; перед корнем в (10) появляется знак $-$, и волновые функции экспоненциально возрастают; время жизни состояния обратно пропорционально $|p_+|$ [24], [25] (подробнее см. в конце раздела). Как локализованные, так и резонансные состояния будем изучать с помощью уравнения Дайсона

$$\Psi = -(H - E)^{-1} V \Psi. \tag{11}$$

Предположим вначале, что система находится в топологической фазе $\mu > 0$ (см. [2], [5]). Используя (3)–(10), запишем (11) в виде

$$\psi_{\mathrm{e}}(x) = \frac{Z}{2\Delta}\left(\left(\sqrt{\frac{\mu - E}{\mu + E}} e^{ip_+|x|} - e^{ip_-|x|}\right)\operatorname{sgn}(\Delta)\psi_{\mathrm{e}}(0) + (e^{ip_+|x|} - e^{ip_-|x|})\operatorname{sgn}(x)\psi_{\mathrm{h}}(0)\right),$$
$$\psi_{\mathrm{h}}(x) = \frac{Z}{2\Delta}\left((e^{ip_+|x|} - e^{ip_-|x|})\operatorname{sgn}(x)\psi_{\mathrm{e}}(0) + \left(\sqrt{\frac{\mu + E}{\mu - E}} e^{ip_+|x|} - e^{ip_-|x|}\right)\right)\operatorname{sgn}(\Delta)\psi_{\mathrm{h}}(0). \tag{12}$$

В дальнейшем нас интересуют только устойчивые АЛС, возникающие при малых Z. Полагая в (12) $x = 0$, получаем, что система (12) имеет ненулевое решение, если

$$\frac{Z}{2|\Delta|}\left(\sqrt{\frac{\mu - E}{\mu + E}} - 1\right) = 1, \qquad \psi_{\mathrm{h}}(0) = 0 \tag{13}$$

или

$$\frac{Z}{2|\Delta|}\left(\sqrt{\frac{\mu+E}{\mu-E}}-1\right)=1, \qquad \psi_{\mathrm{e}}(0)=0. \tag{14}$$

Перепишем первое равенство (13) в виде

$$2|\Delta|\sqrt{\mu+E}=Z(\sqrt{\mu-E}-\sqrt{\mu+E}).$$

Следовательно, для малых $Z>0$ существует энергетический уровень (здесь и далее отбрасываем несущественные малые слагаемые)

$$E=-\mu\left(1-\frac{Z^2}{2\Delta^2}\right), \tag{15}$$

причем он находится вблизи нижней границы щели. Из (10), (15) следует, что

$$p_+=\frac{i|\mu||Z|}{\Delta^2} \tag{16}$$

(значение p_- одно и то же для всех случаев). Пользуясь (12), (13), находим волновую функцию для нижнего уровня $\Psi(x)=(1,0)^{\mathrm{T}}e^{ip_+|x|}$, это электроноподобная слабо локализованная квазичастица.

Уравнения (14) описывают АЛС вблизи верхней границы. Аналогично находим

$$E=\mu\left(1-\frac{Z^2}{2\Delta^2}\right)$$

для малых $Z>0$ и волновую функцию $\Psi(x)=(0,1)^{\mathrm{T}}e^{ip_+|x|}$, описывающую слабо локализованную дырочноподобную квазичастицу.

В случае тривиальной фазы $\mu<0$ аналогично получаем для верхнего уровня равенство

$$E=|\mu|\left(1-\frac{Z^2}{2\Delta^2}\right) \tag{17}$$

при условии $Z<0$, причем равенство (16) остается справедливым, а волновая функция имеет вид $\Psi(x)=(1,0)^{\mathrm{T}}e^{ip_+|x|}$. Нижний уровень описывается равенством (17) при замене E на $-E$ и при $Z<0$. При этом $\Psi(x)=(0,1)^{\mathrm{T}}e^{ip_+|x|}$.

При уменьшении $\mu>0$ до нуля два АЛС, отвечающие двум граничным точкам энергетической щели, в пределе образуют два состояния с волновой функцией, не зависящей от x вида $(1,\pm1)^{\mathrm{T}}$.

Заметим, что, в отличие от статьи [21], в которой величина μ, характеризующая фазу и энергетическую щель, предполагалась постоянной, здесь предполагается постоянной величина Z, а μ для реализации фазового перехода изменяется от положительных до отрицательных значений. В простом случае p-волновой сверхпроводимости здесь, в отличие от разделов 3, 4, это не приводит к существенным изменениям предположений и результатов по сравнению с работой [20].

Рассмотрим для определенности первое равенство в (13), описывающее нижнюю границу щели в топологической фазе. Из него видно, что для малых μ мала также и величина $\varepsilon = \mu + E$, т. е. энергия АЛС, отсчитываемая от нижней границы щели. Приближенно запишем это равенство в виде

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\mu} Z}{\sqrt{2}|\Delta|}. \tag{18}$$

Отсюда в силу (10) получаем

$$p_+ = \frac{i\sqrt{\varepsilon}\sqrt{2\mu}}{|\Delta|},$$

и первое равенство в (12) можно приближенно записать в виде

$$\psi_{\mathrm{e}}(x) = \frac{Z\sqrt{2\mu}}{2\Delta\sqrt{\varepsilon}} e^{-\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{2\mu}/|\Delta|)|x|}, \tag{19}$$

где $\sqrt{\varepsilon}$ – импульс частицы (относительно границы щели). С точностью до множителей функция $\psi_{\mathrm{e}}(x)$ представляет собой функцию Грина гамильтониана $-\partial_x^2$

$$-\frac{1}{2ip} e^{ip|x-x'|}$$

при $x' = 0$. Переходя на второй лист римановой поверхности функции $\sqrt{\varepsilon}$ (совпадающей с римановой поверхностью функции Грина) с разрезом вдоль $(0, \infty)$, т. е. прибавляя 2π к аргументу функции $\sqrt{\varepsilon}$, получим изменение знака корня с $+$ на $-$. В силу (19) это приведет к экспоненциальному росту волновой функции, т. е. к превращению локализованного состояния в резонансное, при этом согласно (18) для существования уровня знак Z нужно изменить на противоположный.

Итак, в топологической фазе первое уравнение в (12) порождает электроноподобное АЛС для $Z > 0$ и резонансное электроноподобное состояние для $Z < 0$ с энергиями вблизи нижней границы щели. Аналогично второе уравнение (12) порождает дырочноподобное АЛС для $Z > 0$ и резонансное дырочноподобное состояние для $Z < 0$ с энергиями вблизи верхней границы щели. В тривиальной фазе электроны и дырки меняются местами, а знаки Z при этом меняются на противоположные.

В случае $Z > 0$ при переходе из топологической фазы в тривиальную электрон на нижней границе щели и дырка на верхней границе превращаются в резонансные состояния, причем электрон оказывается на верхней границе, а дырка – на нижней. Это же происходит при $Z < 0$, если локализованные и резонансные состояния поменять местами (см. рис. 1).

3. СВЕРХПРОВОДЯЩАЯ s-ВОЛНОВАЯ НАНОПРОВОЛОКА

Рассмотрим гамильтониан БдЖ для сверхпроводящей нанопроволоки [2], [22], [26], [27] вида

$$H_s = \begin{pmatrix} -\sigma_0\partial_x^2 + M\sigma_z - i\alpha\sigma_y\partial_x & i\sigma_y\Delta \\ -i\sigma_y\Delta & \sigma_0\partial_x^2 - M\sigma_z - i\alpha\sigma_y\partial_x \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где σ_0 – единичная матрица размера 2×2, $\sigma_{x,y,z}$ – матрицы Паули, $\Delta = \mathrm{const} \neq 0$ – параметр сверхпроводящего порядка, M описывает поперечное поле Зеемана, α – величина спин-орбитального взаимодействия Рашбы. Гамильтониан H_s описывает

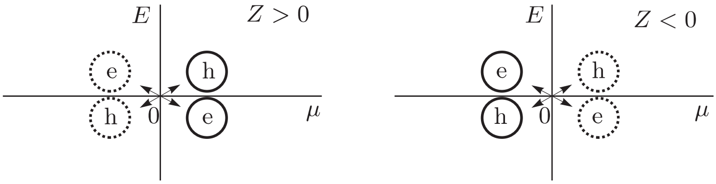

Рис. 1. Поведение квазичастиц при топологическом фазовом переходе в случае p-волновой сверхпроводимости; e обозначает электрон, h – дырку, сплошная граница отвечает локализованному состоянию, пунктирная – резонансному.

структуру с s-волновой сверхпроводимостью, индуцированной благодаря эффекту близости “материнским” сверхпроводником. Гамильтониан действует на спиноры Намбу вида

$$\Psi(x) = (\psi_{\mathrm{e}\uparrow}(x), \psi_{\mathrm{e}\downarrow}(x), \psi_{\mathrm{h}\uparrow}(x), \psi_{\mathrm{h}\downarrow}(x))^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

где стрелка $\uparrow$ ($\downarrow$) указывает направление спина вверх (вниз), первые две и последние две компоненты описывают электроны и дырки соответственно. Под МЛС в данном случае понимаются АЛС с нулевой энергией, описываемые волновыми функциями вида (21), удовлетворяющими условиям сопряжения [1], [22], [28]

$$\psi_{\mathrm{e}\uparrow}(x)^* = \psi_{\mathrm{h}\downarrow}(x), \qquad \psi_{\mathrm{e}\downarrow}(x)^* = \psi_{\mathrm{h}\uparrow}(x). \tag{22}$$

Рассматриваются частицы с малыми импульсами p, поэтому в дальнейшем пренебрегаем величинами p^γ, $\gamma > 2$.

В импульсном представлении имеем

$$\widetilde{H}_s(p) = \begin{pmatrix} \sigma_0 p^2 + M\sigma_z + \alpha\sigma_y p - \sigma_0 E & i\sigma_y\Delta \\ -i\sigma_y\Delta & -\sigma_0 p^2 - M\sigma_z + \alpha\sigma_y p - \sigma_0 E \end{pmatrix}.$$

С учетом сделанного приближения

$$\det(\widetilde{H}_s(p) - E) = 2\alpha^2(M^2 - \Delta^2 - E^2)(p^2 - a^2),$$

где

$$a^2 = \frac{4\Delta^2 E^2 - (M^2 - \Delta^2 - E^2)^2}{2\alpha^2(M^2 - \Delta^2 - E^2)}. \tag{23}$$

Закон дисперсии $\det(\widetilde{H}_s(p) - E) = 0$ имеет вид [21]

$$E^2 = (\Delta \pm \sqrt{M^2 + \alpha^2 p^2}).$$

Следовательно, спектр H_s описывается неравенством $|E| \geqslant \big||M| - |\Delta|\big|$. Функция Грина гамильтониана H_s имеет вид [21]

$$G_s(x - x', E) = (g_{ij}(x - x', E))\big|_{i,j=1}^4,$$

где

$$
\begin{aligned}
&g_{11}(x-x',E)=-g_{33}(x-x',-E)=\frac{-(M+E)^2+\Delta^2+\alpha^2(M+E)}{2\alpha^2(M^2-\Delta^2-E^2)}\delta(x-x')-\\
&\qquad-\frac{(-(M+E)^2+\Delta^2+\alpha^2(M+E))a^2+(M-E)((M+E)^2-\Delta^2)}{4ia\alpha^2(M^2-\Delta^2-E^2)}e^{ia|x-x'|},\\
&g_{12}(x-x',E)=-g_{21}(x-x',E)=g_{34}(x-x',E)=-g_{43}(x-x',E)=\\
&\qquad=\frac{1}{4\alpha}e^{ia|x-x'|}\operatorname{sgn}(x-x'),\\
&g_{13}(x-x',E)=-g_{31}(x-x',E)=g_{24}(x-x',E)=-g_{42}(x-x',E)=\\
&\qquad=\frac{E\Delta}{2\alpha(M^2-\Delta^2-E^2)}e^{ia|x-x'|}\operatorname{sgn}(x-x'),\\
&g_{14}(x-x',E)=g_{41}(x-x',E)=-g_{23}(x-x',-E)=-g_{32}(x-x',-E)=\\
&\qquad=\frac{\Delta}{2(M^2-\Delta^2-E^2)}\delta(x-x')+\frac{\Delta(\alpha^2a^2+(M+E)^2-\Delta^2)}{4ia\alpha^2(M^2-\Delta^2-E^2)}e^{ia|x-x'|},\\
&g_{22}(x-x',E)=-g_{44}(x-x',-E)=\frac{-(M-E)^2+\Delta^2-\alpha^2(M-E)}{2\alpha^2(M^2-\Delta^2-E^2)}\delta(x-x')+\\
&\qquad+\frac{((M-E)^2-\Delta^2+\alpha^2(M-E))a^2+(M+E)((M-E)^2-\Delta^2)}{4ia\alpha^2(M^2-\Delta^2-E^2)}e^{ia|x-x'|}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Обозначим через

$$(\psi,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\varphi^*(x)\,dx$$

скалярное произведение. Пусть φ_0 – четная неотрицательная непрерывная функция, не равная нулю лишь в малой окрестности точки $x=0$ и такая, что

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_0(x)\,dx=1.$$

Далее будем рассматривать возмущенный гамильтониан H_s+V, где V – сепарабельный потенциал (см. [29], [30]), определяемый формулой

$$(V\Psi)(x)=(V_m\Psi)(x)=m((\psi_{\mathrm{e}\uparrow},\varphi_0),-(\psi_{\mathrm{e}\downarrow},\varphi_0),-(\psi_{\mathrm{h}\uparrow},\varphi_0),(\psi_{\mathrm{h}\downarrow},\varphi_0))^{\mathrm{T}}\varphi_0(x) \tag{25}$$

или формулой

$$(V\Psi)(x)=(V_Z\Psi)(x)=Z((\psi_{\mathrm{e}\uparrow},\varphi_0),(\psi_{\mathrm{e}\downarrow},\varphi_0),-(\psi_{\mathrm{h}\uparrow},\varphi_0),-(\psi_{\mathrm{h}\downarrow},\varphi_0))^{T}\varphi_0(x). \tag{26}$$

В случае (25) потенциал V описывает локальное возмущение поля Зеемана, а в случае (26) – примесь.

Для функций, мало изменяющихся вблизи нуля, в том числе для волновых функций с малым импульсом, рассматриваемых ниже, сепарабельный потенциал действует подобно дельта-функции (использование самой дельта-функции здесь невозможно вследствие появления слагаемого с δ^2 из-за специфики функции Грина).

Собственные значения и собственные функции гамильтониана $H_s + V$ будем исследовать, как и в разделе 2, с помощью уравнения Дайсона

$$\Psi = -(H_s - E)^{-1} V \Psi. \tag{27}$$

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$M, \Delta, \alpha > 0, \qquad |M - \Delta| \ll M(\Delta), \alpha^2, \tag{28}$$

а также условия для уровней

$$|E| < (1 + \sigma)|M - \Delta|, \qquad \sigma > 0 \tag{29}$$

(для рассматриваемой в этом разделе модели энергии локализованных состояний могут выходить за пределы сверхпроводящей щели). Из (23), (28), (29) находим

$$a^2 = \frac{\Delta(E^2 - (M - \Delta)^2)}{\alpha^2(M - \Delta)} = O(M - \Delta). \tag{30}$$

Далее имеем

$$\begin{gathered} (M \pm E)^2 - \Delta^2 = 2\Delta(M - \Delta \pm E) + O(M - \Delta)^2, \\ M^2 - \Delta^2 - E^2 = 2\Delta(M - \Delta) + O(M - \Delta)^2. \end{gathered} \tag{31}$$

Рассмотрим сначала случай топологической фазы $M - \Delta > 0$ (см. [2], [5]). Предположим, что E находится внутри энергетической щели, т. е. $|E/(M - \Delta)| < 1$. С помощью (30), (31), равенства (24) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
&g_{11}(x - x', E) = -g_{33}(x - x', -E) = \frac{1}{4(M - \Delta)}\delta(x - x') + \\
&\qquad\qquad + \frac{\sqrt{\Delta}(1 + E/(M - \Delta))^2}{8\alpha\sqrt{M - \Delta}\sqrt{1 - (E/(M - \Delta))^2}} e^{ia|x - x'|}, \\
&g_{12}(x - x', E) = -g_{21}(x - x', E) = g_{34}(x - x', E) = -g_{43}(x - x', E) = \\
&\quad = \frac{1}{4\alpha} e^{ia|x - x'|} \operatorname{sgn}(x - x'), \\
&g_{13}(x - x', E) = -g_{31}(x - x', E) = g_{24}(x - x', E) = -g_{42}(x - x', E) = \\
&\quad = \frac{E}{4\alpha(M - \Delta)} e^{ia|x - x'|} \operatorname{sgn}(x - x'), \\
&g_{14}(x - x', E) = g_{41}(x - x', E) = -g_{23}(x - x', -E) = -g_{32}(x - x', -E) = \\
&\quad = -\frac{1}{4(M - \Delta)}\delta(x - x') - \frac{\sqrt{\Delta}(1 + E/(M - \Delta))^2}{8\alpha\sqrt{M - \Delta}\sqrt{1 - (E/(M - \Delta))^2}} e^{ia|x - x'|}, \\
&g_{22}(x - x', E) = -g_{44}(x - x', -E) = -\frac{1}{4(M - \Delta)}\delta(x - x') - \\
&\qquad\qquad - \frac{\sqrt{\Delta}(1 - E/(M - \Delta))^2}{8\alpha\sqrt{M - \Delta}\sqrt{1 - (E/(M - \Delta))^2}} e^{ia|x - x'|}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Введем обозначения $x_{\mathrm{e}\uparrow(\downarrow)} = (\psi_{\mathrm{e}\uparrow(\downarrow)}, \varphi_0)$, $x_{\mathrm{h}\uparrow(\downarrow)} = (\psi_{\mathrm{h}\uparrow(\downarrow)}, \varphi_0)$. Выбирая потенциал (25) и используя (32), запишем уравнение Дайсона (27) в виде

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{e}\uparrow} &= \frac{m}{4}\Bigg(-\frac{x_{\mathrm{e}\uparrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) - \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{e}\uparrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} + \\
&\quad + \frac{\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{e}\downarrow}}{\alpha} + \frac{E\,\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{h}\uparrow}}{\alpha(M-\Delta)} + \\
&\quad + \frac{x_{\mathrm{h}\downarrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{h}\downarrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\Bigg), \\
\psi_{\mathrm{e}\downarrow} &= \frac{m}{4}\Bigg(\frac{\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{e}\uparrow}}{\alpha} - \frac{x_{e\downarrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\Delta}(1-E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{e}\downarrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} + \frac{x_{\mathrm{h}\uparrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\Delta}(1-E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{h}\uparrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} - \frac{E\,\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{h}\downarrow}}{\alpha(M-\Delta)}\Bigg), \\
\psi_{\mathrm{h}\uparrow} &= \frac{m}{4}\Bigg(\frac{E\,\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{e}\uparrow}}{\alpha(M-\Delta)} + \frac{x_{\mathrm{e}\downarrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) + \\
&\quad + \frac{\sqrt{\Delta}(1-E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{e}\downarrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} - \frac{x_{\mathrm{h}\uparrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) - \\
&\quad - \frac{\sqrt{\Delta}(1-E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{h}\uparrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} - \frac{\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{h}\downarrow}}{\alpha}\Bigg), \\
\psi_{\mathrm{h}\downarrow} &= \frac{m}{4}\Bigg(\frac{x_{\mathrm{e}\uparrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{e}\uparrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}} + \\
&\quad + \frac{E\,\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{e}\downarrow}}{\alpha(M-\Delta)} + \frac{\operatorname{sgn}(x) e^{ia|x|} x_{\mathrm{h}\uparrow}}{\alpha} - \\
&\quad - \frac{x_{\mathrm{h}\downarrow}}{M-\Delta}\varphi_0(x) - \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2 x_{\mathrm{h}\downarrow} e^{ia|x|}}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\Bigg).
\end{aligned} \tag{33}$$

Умножая уравнения (33) скалярно на $\varphi_0(x)$ и полагая $C = (\varphi_0, \varphi_0)$, получаем две независимые линейные системы. Первая система имеет вид

$$\begin{pmatrix}
1 + \frac{m}{4}\left(\frac{C}{M-\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\right) & -\frac{m}{4}\left(\frac{C}{M-\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\right) \\
-\frac{m}{4}\left(\frac{C}{M-\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\right) & 1 + \frac{m}{4}\left(\frac{C}{M-\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\right)
\end{pmatrix} \times$$

$$\times (x_{\mathrm{e}\uparrow}, x_{\mathrm{h}\downarrow})^{\mathrm{T}} = 0, \tag{34}$$

вторая система получается из (34) заменами $E \to -E$, $(x_{\mathrm{e}\uparrow}, x_{\mathrm{h}\downarrow})^{\mathrm{T}} \to (x_{\mathrm{e}\downarrow}, x_{\mathrm{h}\uparrow})^{\mathrm{T}}$. Выпишем условие существования ненулевого решения системы (34):

$$1 + \frac{m}{2}\left(\frac{C}{M-\Delta} + \frac{\sqrt{\Delta}(1+E/(M-\Delta))^2}{2\alpha\sqrt{M-\Delta}\sqrt{1-(E/(M-\Delta))^2}}\right) = 0,$$

что эквивалентно

$$4\alpha(M-\Delta)\sqrt{1-\frac{E}{M-\Delta}}+2\alpha mC\sqrt{1-\frac{E}{M-\Delta}}+ \\ +m\sqrt{\Delta}\sqrt{M-\Delta}\left(1+\frac{E}{M-\Delta}\right)^{3/2}=0. \qquad (35)$$

Пусть $m=\mathrm{const}$, $M-\Delta\approx 0$, тогда (35) можно записать в виде

$$2\alpha C\sqrt{1-\frac{E}{M-\Delta}}=-\sqrt{\Delta(M-\Delta)}\left(1+\frac{E}{(M-\Delta)}\right)^{3/2}. \qquad (36)$$

Следовательно, для того чтобы энергетический уровень существовал, корень в левой части (36) должен быть отрицательным. Из (36) вытекает, что E находится вблизи верхней границы щели $M-\Delta$. В силу (36) имеем

$$4\alpha^2C^2\left(1-\frac{E}{M-\Delta}\right)=\Delta(M-\Delta)\left(1+\frac{E}{M-\Delta}\right)^3. \qquad (37)$$

Положим $x=1-E/(M-\Delta)$ и рассмотрим (37) как уравнение на неподвижную точку [31]

$$x=f(x),$$

где $f(x)=(\Delta/(4\alpha^2C^2))(M-\Delta)(2-x)^3$. Легко видеть, что $f(x)$ – сжимающее отображение в окрестности нуля [31]. При этом коэффициент перед $(2-x)^3$ сколь угодно мал, поэтому можно ограничиться первым приближением. В качестве нулевого приближения естественно выбрать $x_0=0$, тогда первое приближение имеет вид $x_1=2\Delta(M-\Delta)/(\alpha^2C^2)$. Таким образом, с учетом отрицательности корня равенство (37) принимает следующий вид:

$$\sqrt{1-\frac{E}{M-\Delta}}\approx-\frac{\sqrt{2\Delta(M-\Delta)}}{\alpha C}. \qquad (38)$$

Заметим, что формула (38) существенно отличается от аналогичной формулы в работе [21], полученной для $M-\Delta=\mathrm{const}$ и $m\to 0$.

При выполнении (38) уравнение (34) принимает вид

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{\mathrm{e}\uparrow}\\ x_{\mathrm{h}\downarrow}\end{pmatrix}=0,$$

откуда $x_{\mathrm{e}\uparrow}=-x_{\mathrm{h}\downarrow}$. Положим $x_{\mathrm{e}\uparrow}=-x_{\mathrm{h}\downarrow}=1$. Согласно (30), (38) (учитываем также знак корня в левой части (38)) имеем $a=-i\sqrt{\varepsilon\Delta}/\alpha$, где $\sqrt{\varepsilon\Delta}>0$, $\varepsilon=M-\Delta-E$ (с точностью до знака величина ε – энергия, отсчитываемая от верхней границы энергетической щели). Из (33), пренебрегая слагаемыми с коэффициентами порядка единицы перед экспонентами, а также слагаемым $-m/(2(M-\Delta))\varphi_0(x)$, поскольку его норма в $L^2(-\infty,\infty)$ конечна, в отличие от оставшегося слагаемого, получаем

$$\psi_{\mathrm{e}\uparrow}(x)=-\psi_{\mathrm{h}\downarrow}(x)=-\frac{m\sqrt{\Delta}}{\alpha\sqrt{2\varepsilon}}e^{(\sqrt{2\varepsilon\Delta}/\alpha)|x|}. \qquad (39)$$

Выражение (39) с точностью до коэффициентов является функцией Грина гамильтониана $-\partial_x^2$ с энергией на втором листе римановой поверхности (см. раздел 2). Таким образом, волновая функция рассматриваемого состояния имеет вид $\Psi(x)=(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}e^{(\sqrt{2\varepsilon\Delta}/\alpha)|x|}$, и это состояние является резонансным.

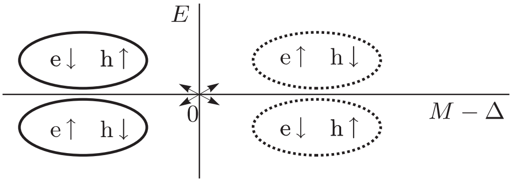

Рис. 2. Поведение квазичастиц “электрон плюс дырка” при топологическом фазовом переходе в случае s-волновой сверхпроводимости; стрелки ↑, ↓ показывают направление спина, e обозначает электрон, h – дырку, сплошная граница отвечает локализованному состоянию, пунктирная – резонансному.

Для энергии вблизи нижней границы щели $-(M-\Delta)$ имеем уравнение (38) и волновую функцию вида $\Psi(x) = (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}} e^{(\sqrt{2\varepsilon\Delta}/\alpha)|x|}$ с заменой E на $-E$.

В пределе $M - \Delta \to 0$ получим два не зависящих от x состояния вида $\Psi_1(x) = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\Psi_2(x) = (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

Потенциал (26) не порождает каких-либо состояний в энергетической щели, так как определитель системы (34) при замене m на соответствующие $\pm Z$ равен единице.

В случае тривиальной фазы имеем $M - \Delta < 0$ [2], [5]. При этом согласно (30) необходимо считать, что $|E| > |M - \Delta|$, иначе волновые функции не относятся ни к локализованным, ни к резонансным состояниям.

В тривиальной фазе уровни, близкие к нижней границе щели, описываются равенством

$$E = -|M - \Delta|\left(1 + \frac{2\Delta|M - \Delta|}{\alpha^2 C^2}\right), \tag{40}$$

а волновая функция локализована и имеет вид $\Psi(x) = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}} e^{-(\sqrt{2\Delta}/\alpha)\sqrt{\varepsilon}|x|}$, где $\varepsilon = -E - |M - \Delta|$. Для верхней границы, после замены E на $-E$, уровень описывается формулой (40), $\Psi(x) = (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}} e^{-(\sqrt{2\Delta}/\alpha)\sqrt{\varepsilon}|x|}$.

Итак, при закрытии щели в топологической фазе энергия $E \approx M - \Delta$ резонансной квазичастицы, описываемой волновой функцией $(1,0,0,-1)^{\mathrm{T}} e^{(\sqrt{2\varepsilon\Delta}/\alpha)|x|}$, будучи внутри щели, уменьшается до нуля (см. рис. 2), при этом время жизни квазичастицы растет до бесконечности. Далее в тривиальной фазе энергия опускается ниже нуля, выходя из щели в непрерывный спектр уже вблизи нижней границы ($E \approx -(\Delta - M)$), при этом локализация квазичастицы вблизи $x = 0$ растет. Аналогично энергия резонансной квазичастицы с волновой функцией $(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}} e^{(\sqrt{2\varepsilon\Delta}/\alpha)|x|}$ поднимается по оси E, и квазичастица становится локализованной. В обоих случаях сохраняется направление спинов у электрона и дырки. Мгновенного “переворота” спинов нет; смена направления спинов – следствие процесса, в котором квазичастицы меняются местами.

Рассмотренную модель при $M - \Delta \approx 0$ можно приблизить к более реалистичной модели s-волновой нанопроволоки, описывающей структуру “нормальный металл–сверхпроводник–нормальный металл”, где длина сверхпроводящего участка достаточно велика. Для этого следует расширить область действия локального магнитного поля и, изменяя параметр m, перейти к другой фазе в этой области (см. [18], [19]). Тогда два перекрывающиеся состояния с энергиями вблизи границ щели, будучи майораноподобными, должны сдвинуться соответственно к двум граничным точкам области действия локального поля, так как в этих точках изменяется топологическая фаза.

В случае тривиальной фазы при действии потенциала (25) энергии квазичастиц находятся вне щели в непрерывном спектре, такие локализованные частицы неустойчивы и легко переходят в резонансные состояния [32], внутри же щели устойчивых локализованных состояний нет. Таким образом, при топологическом фазовом переходе из тривиальной фазы в топологическую пик кондактанса вплоть до закрытия щели должен отсутствовать, что подтверждается экспериментом [17]. С другой стороны, в топологической фазе при очень малой энергетической щели время жизни резонансных квазичастиц, энергии которых принадлежат этой щели, практически бесконечно, так что эти частицы способны породить пик кондактанса, что и наблюдается в данном эксперименте.

4. СЛУЧАЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕЙ ГРАНИЦЫ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА

Рассмотрим гамильтониан БдЖ для s-волновой сверхпроводящей границы двумерного топологического изолятора [5], [22], [33]–[36]

$$H_{\mathrm{TI}} = \begin{pmatrix} -i\sigma_x\partial_x + M\sigma_z & i\sigma_y\Delta \\ -i\sigma_y\Delta & -i\sigma_x\partial_x - M\sigma_z \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $\Delta = \mathrm{const} \neq 0$ – вещественный спаривающий потенциал, M – параметр поперечного поля Зеемана. Гамильтониан (41), как и в разделе 3, действует на спиноры вида (21). Закон дисперсии имеет вид

$$E^2 = (M \pm \Delta)^2 + p^2, \tag{42}$$

так что спектр H_{TI} определяется неравенством $|E| \geqslant \big||M| - |\Delta|\big|$.

Как и выше, для нахождения энергетических уровней E и соответствующих волновых функций будем использовать уравнение Дайсона

$$\Psi = -(H_{\mathrm{TI}} - E)^{-1} V\Psi, \tag{43}$$

где

$$V = V_m = m \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix} \delta(x) \tag{44}$$

или

$$V = V_Z = Z \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \delta(x), \tag{45}$$

σ_0 – единичная матрица размера 2×2. Потенциал (44) моделирует локальное изменение поля Зеемана, а потенциал (45) – примесь. Функция Грина потенциала H_{TI} имеет вид [20]

$$G(x-x',E) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} g_E^+(x-x') & g^+(x-x') & g^-(x-x') & g_E^-(x-x') \\ g^+(x-x') & -g_{-E}^+(x-x') & -g_{-E}^-(x-x') & g^-(x-x') \\ g^-(x-x') & -g_{-E}^-(x-x') & -g_{-E}^+(x-x') & g^+(x-x') \\ g_E^-(x-x') & g^-(x-x') & g^+(x-x') & g_E^+(x-x') \end{pmatrix}, \tag{46}$$

где

$$g_E^{\pm}(x-x') = \sqrt{\frac{M+\Delta+E}{M+\Delta-E}}e^{ip_1|x-x'|} \pm \operatorname{sgn}(M-\Delta)\sqrt{\frac{M-\Delta+E}{M-\Delta-E}}e^{ip_2|x-x'|},$$
$$g^{\pm}(x-x') = i\big(e^{ip_1|x-x'|} \pm e^{ip_2|x-x'|}\big)\operatorname{sgn}(x-x'),$$

а $p_{1,2}$ находятся из закона (42) так, чтобы функция Грина убывала на бесконечности.

Далее предполагается, что $M, \Delta > 0$, $|M-\Delta| \ll M(\Delta)$ и $|E| < |M-\Delta|$. Тогда из (42) находим

$$\begin{aligned} p_1 &= \pm\sqrt{E^2-(M+\Delta)^2} \approx \pm 2i\Delta, \\ p_2 &= \pm\sqrt{E^2-(M-\Delta)^2} \approx \pm i\sqrt{(M-\Delta)^2-E^2}. \end{aligned} \tag{47}$$

Рассмотрим гамильтониан с потенциалом (44) для топологической фазы $\Delta - M > 0$ [2], [5]. Будем искать энергии АЛС вблизи границ щели, предполагая, что $|E| < \Delta - M$. Положим $\varepsilon = \Delta - M - E$. Пользуясь (46), (47) и пренебрегая при этом слагаемыми с коэффициентами порядка единицы и более по параметру ε, запишем функцию Грина (46) в виде

$$G(x-x',E) = \frac{\sqrt{\Delta-M}e^{ip_2|x-x'|}}{2\sqrt{2\varepsilon}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Уравнение Дайсона (43) согласно (44), (48) примет вид

$$\psi_{e\downarrow}(x) = -\psi_{h\uparrow}(x) = \frac{m\sqrt{\Delta-M}e^{ip_2|x|}}{2\sqrt{2\varepsilon}}(\psi_{e\downarrow}(0)-\psi_{h\uparrow}(0)). \tag{49}$$

Выпишем в случае малых $m > 0$ условие существования ненулевого решения системы (49):

$$1 - \frac{m\sqrt{\Delta-M}}{\sqrt{2\varepsilon}} = 0. \tag{50}$$

Из (50) получаем

$$E = (\Delta-M)\left(1-\frac{m^2}{2}\right) \approx \Delta - M. \tag{51}$$

В силу (47), (49) волновая функция АЛС имеет вид

$$\Psi(x) = (0,1,-1,0)^{\mathrm{T}}e^{-\sqrt{2\varepsilon(\Delta-M)}|x|}.$$

Заменяя E на $-E$, получаем из (51) формулу для уровня $E \approx -(\Delta-M)$, а также выражение для волновой функции соответствующего АЛС:

$$\Psi(x) = (1,0,0,-1)^{\mathrm{T}}e^{-\sqrt{2\varepsilon(\Delta-M)}|x|}$$

при условии $m < 0$ (смена знака m обусловлена видом потенциала (44)).

В тривиальной фазе $M - \Delta > 0$ и функция Грина принимает вид

$$G(x - x', E) = \frac{\sqrt{M - \Delta} e^{ip_2|x-x'|}}{2\sqrt{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = M - \Delta - E > 0$. Как и выше, для $E \approx M - \Delta$ получаем условие существования уровня

$$1 + \frac{m\sqrt{M - \Delta}}{\sqrt{2\varepsilon}} = 0, \tag{52}$$

откуда следует, что m мало и $m < 0$. Выпишем волновую функцию

$$\Psi(x) = (1, 0, 0, -1)^{\mathrm{T}} e^{-\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)}|x|}.$$

Для $E \approx -(M - \Delta)$ имеем $m > 0$, в (52) и в ε меняем E на $-E$, волновая функция принимает вид $\Psi(x) = (0, 1, -1, 0)^{\mathrm{T}} e^{-\sqrt{2\varepsilon(M-\Delta)}|x|}$.

Во всех рассмотренных случаях в составе функции Грина для границы топологического изолятора имеется выражение вида

$$\frac{\sqrt{|M - \Delta|}}{2\sqrt{2\varepsilon}} e^{-\sqrt{2\varepsilon|M-\Delta||x-x'|}}, \tag{53}$$

где ε – с точностью до знака – энергия вблизи границы щели. Выражение (53) представляет собой, как и в предыдущих разделах (с точностью до постоянных множителей), функцию Грина оператора $-\partial_x^2$. При переходе на второй лист римановой поверхности функции Грина $G_{\mathrm{TI}}(x - x', E)$ получаем изменение знака $\sqrt{\varepsilon}$, т. е. согласно (50), (52) при одновременном изменении знака m переход квазичастицы в резонансное состояние.

В случае потенциала (45), как и в разделе 3, уравнение Дайсона не имеет ненулевых решений.

Таким образом, при $m > 0$ при переходе из топологической фазы в тривиальную АЛС с энергией вблизи верхней границы щели переходит в АЛС с энергией вблизи нижней границы с сохранением спинов у электрона и дырки, а резонансная квазичастица с противоположными спинами с энергией вблизи нижней границы – в резонансную квазичастицу с энергией вблизи верхней границы. При $m < 0$ происходит то же самое, но при этом резонансные и локализованные квазичастицы меняются местами (см. рис. 3).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены наиболее распространенные при исследовании майорановских состояний одномерные сверхпроводящие структуры. С помощью функции Грина гамильтониана БдЖ и уравнения Дайсона аналитически изучаются энергетические уровни и волновые функции возникающих в данных структурах при возмущении гамильтониана устойчивых состояний с энергиями вблизи границ сверхпроводящей щели при переходе из топологической фазы в тривиальную. Оказывается, что в фазовом переходе большую роль играют резонансные (распадающиеся) состояния,

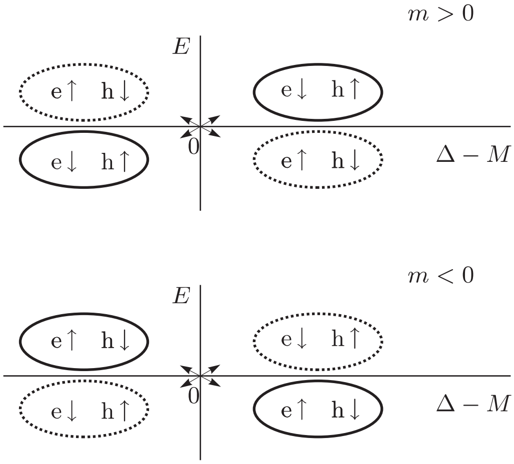

Рис. 3. Поведение квазичастиц “электрон плюс дырка” при топологическом фазовом переходе в случае топологического изолятора для разных знаков параметра m; стрелки ↑, ↓ показывают направление спина, e обозначает электрон, h – дырку, сплошная граница отвечает локализованному состоянию, пунктирная – резонансному.

причем происходящий при этом переворот спинов, а также изменение знака заряда на противоположный [15], [16] происходят при закрытии щели благодаря переходу локализованных состояний в резонансные и наоборот с изменением их энергий на противоположные (см. рис. 1–3). Результаты статьи согласуются с отсутствием пика кондактанса при нулевой разности потенциалов в тривиальной топологической фазе в недавнем эксперименте [17].

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S. R. Elliot, M. Franz, “Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle, and solid-state physics”, *Rev. Modern Phys.*, **87**:1 (2015), 137–163.

[2] J. Alicea, “New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems”, *Rep. Prog. Phys.*, **75**:7 (2012), 076501, 36 pp.

[3] M. Sato, S. Fujimoto, “Majorana fermions and topology in superconductors”, *J. Phys. Soc. Japan*, **85**:7 (2016), 072001, 32 pp.

[4] R. M. Lutchyn, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, Y. Oreg, “Majorana zero modes in superconductor-semiconductor heterostructures”, *Nat. Rev. Mater.*, **3**:5 (2018), 52–68.

[5] F. von Oppen, Y. Peng, F. Pientka, “Topological superconducting phases in one dimension”, *Topological Aspects of Condensed Matter Physics*: *Lecture Notes of the Les Houches Summer School* (École de Physique des Houches, Session CIII, 4–29 August, 2014), eds. C. Chamon, M. O. Goerbig, R. Moessner, L. F. Cugliandolo, Oxford Univ. Press, Oxford, 2017, 389–449.

[6] S. Das Sarma, A. Nag, J. D. Sau, “How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires”, *Phys. Rev. B*, **94**:3 (2016), 035143, 17 pp.

[7] K. Sengupta, I. Zutic, H.-J. Kwon, V. M. Yakovenko, S. Das Sarma, "Midgap edge states and pairing symmetry of quasi-one-dimensional organic superconductors", *Phys. Rev. B*, **63**:14 (2001), 144531, 6 pp.

[8] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, "Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices", *Science*, **336**:6084 (2012), 1003–1007.

[9] A. Das, Y. Ronen, Y. Most, Y. Oreg, M. Heiblum, H. Shtrikman, "Zero-bias peaks and splitting in an Al–InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions", *Nature Phys.*, **8** (2012), 887–895.

[10] M. T. Deng, S. Vaitiėkenas, E. B. Hansen, J. Danon, M. Leijnse, K. Flensberg, J. Nygård, P. Krogstrup, C. M. Marcus, "Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system", *Science*, **354**:6319 (2016), 1557–1562.

[11] C.-X. Liu, J. D. Sau, T. D. Stanescu, S. Das Sarma, "Andreev bound states versus Majorana bound states in quantum dot-nanowire-superconductor hybrid structures: Trivial versus topological zero-bias conductance peaks", *Phys. Rev. B*, **96**:7 (2017), 075161, 20 pp.

[12] C. Moore, C. Zeng, T. D. Stanescu, S. Tewari, "Quantized zero bias conductance plateau in semiconductor-superconductor heterostructures without non-Abelian Majorana zero modes", *Phys. Rev. B*, **98** (2018), 155314, 6 pp., arXiv: 1804.03164.

[13] A. Vuik, B. Nijholt, A. R. Akhmerov, M. Wimmer, "Reproducing topological properties with quasi-Majorana states", *SciPost Phys.*, **7** (2019), 061, 24 pp., arXiv: 1806.02801.

[14] Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин, "Роль майороноподобных локализованных состояний в андреевском отражении и эффекте Джозефсона в случае топологического изолятора", *ТМФ*, **202**:1 (2020), 81–97.

[15] P. Szumniak, D. Chevallier, D. Loss, J. Klinovaja, "Spin and charge signatures of topological superconductivity in Rashba nanowires", *Phys. Rev. B*, **96**:4 (2017), 041401, 5 pp.

[16] M. Serina, D. Loss, J. Klinovaja, "Boundary spin polarization as a robust signature of a topological phase transition in Majorana nanowires", *Phys. Rev. B*, **98**:3 (2018), 035419, 10 pp.

[17] D. Puglia, E. A. Martinez, G. C. Ménard et al., *Closing of the induced gap in a hybrid superconductor–semiconductor nanowire*, arXiv: 2006.01275.

[18] Yu. P. Chuburin, "Existence of Majorana bound states near impurities in the case of a small superconducting gap", *Phys. E*, **89** (2017), 130–133.

[19] Ю. П. Чубурин, "Существование майорановских локализованных состояний в сверхпроводящей нанопроволоке вблизи примеси", *ТМФ*, **197**:2 (2018), 279–289.

[20] Yu. P. Chuburin, T. S. Tinyukova, "The emergence of bound states in a superconducting gap at the topological insulator edge", *Phys. Lett. A*, **384**:27 (2020), 126694, 7 pp.

[21] Т. С. Тинюкова, Ю. П. Чубурин, "Взаимный переход андреевских и майорановских локализованных состояний в сверхпроводящей щели", *ТМФ*, **205**:3 (2020), 484–501.

[22] C. W. J. Beenakker, "Random-matrix theory of Majorana fermions and topological superconductors", *Rev. Modern Phys.*, **87**:3 (2015), 1037–1066.

[23] Т. С. Тинюкова, "Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:2 (2018), 222–230.

[24] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния: квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Мир, М., 1985.

[25] Ю. П. Чубурин, "О малых возмущениях оператора Шредингера с периодическим потенциалом", *ТМФ*, **110**:3 (1997), 443–453.

[26] S. D. Sarma, A. Nag, J. D. Sau, "How to infer non-Abelian statistics and topological visibility from tunneling conductance properties of realistic Majorana nanowires", *Phys. Rev. B*, **94**:3 (2016), 035143, 17 pp.

[27] D. Chevallier, P. Simon, C. Bena, “From Andreev bound states to Majorana fermions in topological wires on superconducting substrates: A story of mutation”, *Phys. Rev. B*, **88**:16 (2013), 165401, 6 pp.

[28] R. Aguado, “Majorana quasiparticles in condensed matter”, *Riv. Nuovo Cimento*, **40**:11 (2017), 523–593, arXiv: 1711.00011.

[29] Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, *Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике*, Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1975.

[30] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares, O. Rojo, “Linear to quadratic crossover of Cooper-pair dispersion relation”, *Phys. C*, **351**:4 (2001), 341–348.

[31] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ*: *теория и приложения*, Мир, М., 1969.

[32] Ю. П. Чубурин, “Закон распада квазистационарного состояния оператора Шредингера для кристаллической пленки”, *ТМФ*, **151**:2 (2007), 248–260.

[33] G. Tkachov, E. M. Hankiewicz, “Helical Andreev bound states and superconducting Klein tunneling in topological insulator Josephson junctions”, *Phys. Rev. B*, **88**:7 (2013), 075401, 8 pp., arXiv: 1304.1893.

[34] J. Linder, Yu. Tanaka, T. Yokoyama, A. Sudbo, N. Nagaosa, “Interplay between superconductivity and ferromagnetism on a topological insulator”, *Phys. Rev. B*, **81**:18 (2010), 184525, 11 pp.

[35] C. T. Olund, E. Zhao, “Current-phase relation for Josephson effect through helical metal”, *Phys. Rev. B*, **86**:21 (2012), 214515, 7 pp.

[36] F. Crepin, B. Trauzettel, F. Dolcini, “Signatures of Majorana bound states in transport properties of hybrid structures based on helical liquids”, *Phys. Rev. B*, **89**:20 (2014), 205115, 12 pp.

Поступила в редакцию 9.12.2020,
после доработки 10.02.2021,
принята к публикации 11.02.2021