МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ № 7 (826)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

ТЕМА НОМЕРА

ЗНАКИ И ЭМБЛЕМЫ

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
ru.freepik.com, www.klipartz.com
www.pngegg.com

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437
от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 17.09.2021
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

В. БАРАНОВ,
О. БАРАНОВА,
г. Ижевск

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ НА КЛЕТЧАТЫХ ДОСКАХ

Часто возникают задачи с вопросом «Какое наибольшее (наименьшее) количество объектов можно (нужно)...» Решать такие задачи помогает принцип Дирихле, самая популярная формулировка которого такова: «Если в n клетках сидит m кроликов, причем $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит по крайней мере два кролика». Это следствие свойства неравенств: «Если в каждой из n клеток сидит не более одного кролика, то всего в клетках находится не более n кроликов». В некоторых задачах непосредственно из условия становится понятно, что следует считать «кроликами», а что «клетками», в других требуется изрядное воображение, чтобы это понять.

Разберем несколько способов применения принципа Дирихле, в основном в задачах на клетчатых досках. Один из способов применения принципа Дирихле — это метод разбиения на меньшие части. Метод заключается в том, что «большой» объект мы разбиваем на меньшие, не пересекающиеся части, в каждой из которых можно сделать оценку.

1. Какое наибольшее количество ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 8.

Решение. Разобьем доску на восемь вертикалей. По условию задачи, в каждой вертикали может стоять не больше одной ладьи. Получается, что на доске может стоять не больше восьми ладей. Пример расстановки: ладьи на главной диагонали.

В этой задаче наглядно иллюстрируется принцип Дирихле: «кролики» — это ладьи, «клетки» — это вертикали доски.

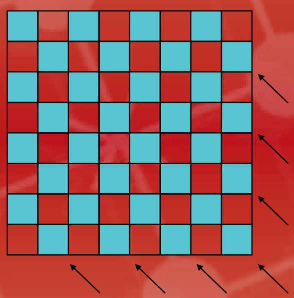


Рис. 1

2. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 16.

Указание. Разбейте доску на 16 квадратов размером 2×2.

3. Какое наибольшее количество слонов можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Ответ: 14.

Решение. Так как слоны бьют по диагонали, то будем разбивать доску на «клетки»-диагонали. Заметим, что слон, стоящий на черной клетке, бьет только черные клетки. Представим все черные клетки доски как семь диагоналей (рис. 1).

По условию задачи, на каждой диагонали может стоять не более одного слона. Получается, что на черные клетки доски можно поставить не более семи слонов. Аналогично не более семи слонов можно поставить на белые клетки доски. Значит, всего можно поставить не больше 14 слонов.

Пример строится несложно.

Замечание. Можно не делить слонов на стоящих в черных и белых клетках. Всю доску можно разбить на 15 диагоналей, параллельных главной диагонали a1–h8. При этом нужно заметить, что на две диагонали, содержащие по одной клетке (a8 и h1), нельзя одновременно поставить двух слонов.

4. Какое наименьшее количество клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 была отмеченная клетка?

Ответ: 21.

Решение. Выделим на доске двадцать один непересекающийся прямоугольник 1×3 (рис. 2).

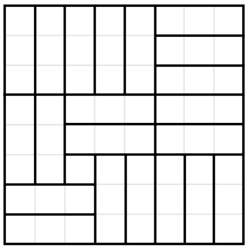


Рис. 2

Чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 оказалась отмеченная клетка, необходимо отметить не меньше 21 клетки. На рисунке 3 приведен пример на 21 клетку с редкой диагональной раскраской.

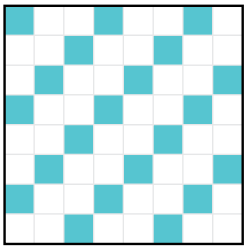


Рис. 3

5. Какое наибольшее количество клеток на доске можно закрасить так, чтобы не оказалось ни одного полностью закрашенного уголка из трех клеток, если : а) доска 8×8; б) доска 7×7?

Ответ: а) 32; б) 28.

Решение. а) Разобьем доску на 16 квадратов размером 2×2, как в задаче 2. В каждом квадрате можно закрасить не больше двух клеток. Значит, всего на доске может быть закрашено не больше 32 клеток. Пример — шахматная раскраска.

б) В отличие от пункта «а», доску не удастся разбить на удобные для оценки квадраты 2×2. Разместим эти квадраты с углов насколько это возможно, оставшуюся часть разобьем на два уголка из четырех и один уголок из пяти клеток (рис. 4).

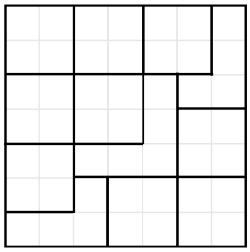


Рис. 4

В каждом квадрате 2×2 можно закрасить не больше двух клеток, в уголке из четырех клеток — не больше трех, в уголке из пяти клеток — не больше четырех. Получится, что всего можно закрасить не больше $2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 4 = 28$ клеток. Пример — раскраска «зебра», то есть закрашиваются 1-, 3-, 5- и 7-я вертикали.

Замечание. Обратим внимание, что в этой задаче мы разбили доску на различные по форме области, в каждой из которых сделали различные оценки.

6. Какое наименьшее количество клеток на доске 8×8 необходимо отметить так, чтобы в каждом уголке из четырех клеток нашлась отмеченная клетка?

Ответ: 21.

Решение. Возникает желание разбить доску 8×8 на 16 непересекающихся уголков из четырех клеток. Получается, что нам нужно отметить не меньше 16 клеток. Однако пример на 16 клеток построить не удастся.

Сделаем более точную оценку. Рассмотрим прямоугольник 2×3. В каждом таком прямоугольнике необходимо отметить не меньше двух клеток (прямой перебор показывает, что одной клетки недостаточно). Получается, что нужно отмечать 2 клетки из шести, что больше, чем одна из четырех, то есть оценка более точная.

Проведем строгие рассуждения. Разобьем доску 8×8 на 10 прямоугольников 2×3 и один уголок из четырех клеток (рис. 5).

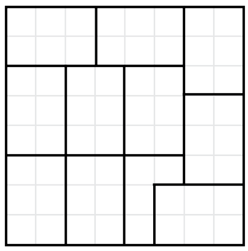


Рис. 5

Тогда необходимо отметить не меньше $2 \cdot 10 + 1 = 21$ клетки. Пример такой же, как в задаче 4. Действительно, каждый уголок из четырех клеток содержит прямоугольник 1×3, значит, в каждом уголке будет находиться хотя бы одна отмеченная клетка.

7. Какое наибольшее количество фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное количество фишек?

Ответ: 48.

Указание. Все клетки одного цвета на шахматной доске можно выделить в восемь диагоналей с нечетным числом клеток. Всего шестнадцать непересекающихся диагоналей, фишки не могут быть поставлены на все клетки.

8. Какое наименьшее количество уголков из трех клеток необходимо вырезать из доски 8×8 так, чтобы нельзя было больше вырезать ни одного уголка?

Ответ: 11.

Решение. Каждый уголок из трех клеток вкладывается в квадрат 2×2. Разобьем доску 8×8 на 16 квадратов размером 2×2. В каждом таком квадрате должно быть вырезано не меньше двух клеток, значит, всего необходимо вырезать не меньше 32 клеток. Следовательно, понадобится вырезать не меньше 11 уголков (рис. 6).

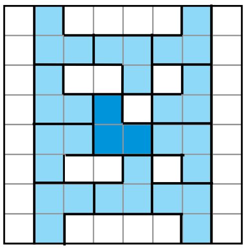


Рис. 6

9. Какое наименьшее количество клеток доски 2×7 необходимо закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед?

Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим любую клетку на доске и все смежные с ней клетки по стороне. Заметим, что среди этих клеток должна найтись хотя бы одна закрашенная. Разобьем доску 2×7 на четыре части, как показано на рисунке 7.

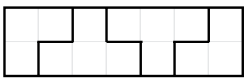


Рис. 7

В каждой части должна присутствовать хотя бы одна закрашенная клетка, иначе в этой части найдется клетка, смежная с другими в группе, которая не будет иметь закрашенную соседнюю клетку. Значит, на доске должно быть закрашено не меньше четырех клеток (рис. 8).

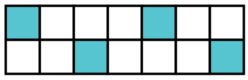


Рис. 8

10. Правильный треугольник разбит на 25 маленьких правильных треугольников. Какое наименьшее количество маленьких треугольников нужно закрасить, чтобы у каждой незакрашенной клетки был хотя бы один закрашенный сосед? (Соседние треугольники — это треугольники, которые имеют общую сторону.)

Ответ: 7.

Решение. Разобьем треугольник на семь неодинаковых частей (рис. 9).

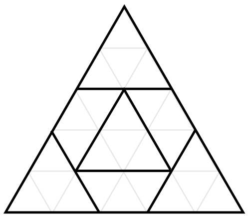


Рис. 9

В каждой из частей должен найтись закрашенный треугольник, иначе в этой части найдется незакрашенный треугольник, не имеющий закрашенного соседа. Отсюда получим оценку, что всего должно быть закрашено не меньше семи треугольников (рис. 10).

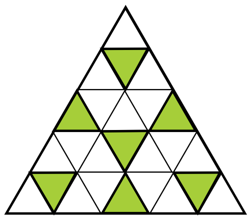
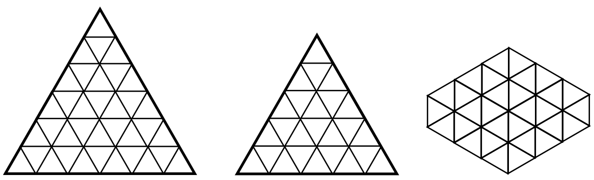


Рис. 10

11. Какое наибольшее количество треугольников можно закрасить в следующих фигурах (рис. 11) так, чтобы закрашенные треугольники не имели общих точек?

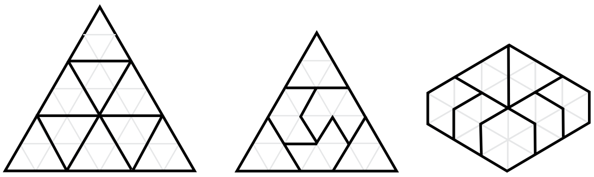
Ответ: а) 9; б) 6; в) 7.



а) б) в)

Рис. 11

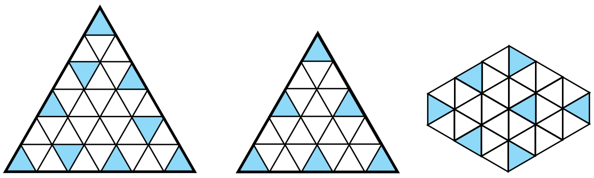
Решение. Разобьем фигуры на меньшие части таким образом, чтобы любые два треугольника в одной части имели общую точку. Первую фигуру удается разбить на 9 одинаковых, а вторую на 6 неодинаковых частей, третью — на 7 неодинаковых частей (рис. 12).



а) б) в)

Рис. 12

В каждой из частей можно закрасить не больше одного треугольника. Отсюда получим ответ: в первой фигуре — 9, во второй — 6, в третьей — 7 (рис. 13).



а) б) в)

Рис. 13

К этой задаче мы еще вернемся чуть позже, при обсуждении метода подсчета узлов.

12. На совместной конференции партии лжецов и партии правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда, по 8 человек в каждом. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

Ответ: 8.

Решение. Так как правдолюб всегда говорит правду, то среди его соседей (слева, справа, спереди или сзади) обязательно найдется лжец. Напоминает задачу 9. Рассмотрим доску 8×4. Будем считать, что каждый член президиума занимает определенную клетку. Будем считать лжеца закрашенной клеткой, правдолюба — незакрашенной. По условию задачи, у каждой незакрашенной клетки должна найтись соседняя по стороне закрашенная клетка. Выделим на доске восемь областей (рис. 14).

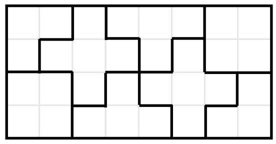


Рис. 14

В каждой из областей должна найтись закрашенная клетка, значит, закрашенных клеток не меньше 8. На рисунке 15 показан пример расположения восьми лжецов в президиуме.

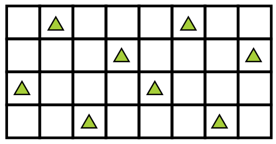


Рис. 15

Еще раз обратим внимание, что в последних задачах части разбиения были различными, что вызывает определенные трудности при решении. Далее мы перейдем к классу задач, в которых удобнее при решении подсчитывать узлы решетки, а не клетки. Узлами на клетчатой доске мы называем вершины клеток. В следующих задачах роль «кроликов» будут играть узлы.

13. Какое наибольшее количество кораблей 1×4 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Решение. Считать клетки в этой задаче не имеет смысла, так как достаточное количество клеток не всегда обеспечивает возможность поставить корабли по правилам морского боя. Расстановку кораблей по правилам морского боя помогает исследовать следующее соображение: корабли стоят на клетчатой доске по правилам морского боя, если и только если они не имеют общих узлов сетки. То есть каждому кораблю мы можем поставить в соответствие узлы сетки, причем один узел не может соответствовать различным кораблям. На доске 10×10 имеется 121 узел. Каждый корабль 1×4 имеет 10 узлов, независимо от расположения на доске (рис. 16).

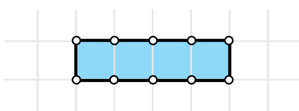


Рис. 16

Расставленные по правилам морского боя корабли не могут иметь общих узлов, поэтому n кораблям, расставленным по правилам морского боя, будет соответствовать $10n$ различных узлов. Их не больше 121. Значит, на доске 10×10 нельзя разместить больше 12 кораблей 1×4 (рис. 17).

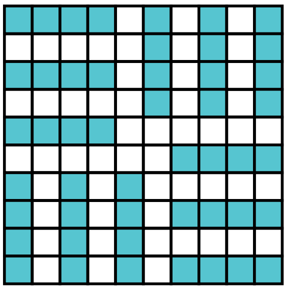


Рис. 17

Вернемся к *задаче 11.* Метод разбиения на меньшие части требовал воображения, чтобы эти части и разбиение придумать. Решим эту задачу при помощи подсчета узлов.

Заметим, что каждому закрашенному треугольнику соответствуют ровно три узла доски, при этом, по условию задачи, ни один узел не может соответствовать более чем одному закрашенному треугольнику (иначе у двух закрашенных треугольников найдется общая точка). Посчитаем узлы в фигурах. В пункте «а» — 28 узлов, в «б» — 21, в «в» — 23. Получим, что в фигурах может быть закрашено не больше, чем: а) $[28/3] = 9$; б) $[21/3] = 7$; в) $[23/3] = 7$ треугольников.

Примеры для пунктов «а» и «в» на 9 и 7 треугольников построены. В решении задачи 11, пункт «б», методом разбиения на меньшие части показано, что точная оценка — 6.

Метод подсчета узлов сразу дает точную оценку в пунктах «а» и «в» и неточную оценку в пункте «б».

Таким образом, мы видим, что метод подсчета узлов в некоторых задачах более выгоден, а в некоторых требует дополнительных соображений. Заранее сказать, какой метод более предпочтительный в конкретной задаче, невозможно.

14. Какое наибольшее количество кораблей 1×1 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 25.

Решение. Один из способов доказательства — метод разбиения на меньшие части, аналогично решению задачи 2 о расстановке на шахматной доске не бьющих друг друга королей. Полезно обратить внимание на похожесть этих задач. Решим задачу при помощи подсчета узлов. Так как каждый корабль 1×1 содержит 4 узла, то подсчет узлов даст оценку $[121/4] = 30$. Она неточная. Расставить 30 кораблей по правилам морского боя не получится.

Используем раскраску «горох» для узлов сетки (рис. 18).

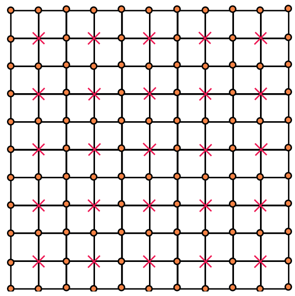


Рис. 18

Каждому кораблю 1×1 будет соответствовать ровно один окрашенный узел. При этом один узел не может соответствовать больше чем одному кораблю. Таким образом, нельзя расставить по правилам морского боя кораблей 1×1 больше, чем отмеченных узлов, то есть 25. Пример на 25 кораблей построить несложно.

В этой задаче мы использовали не только подсчет узлов, но еще применили метод раскраски узлов.

15. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Решение. Каждый корабль 1×3 содержит 8 узлов. Получим, что на доску 10×10 невозможно поставить больше $[121/8] = 15$ кораблей по правилам морского боя. Однако эта оценка неточная. Раскрасим 12 узлов, как показано на рисунке 19.

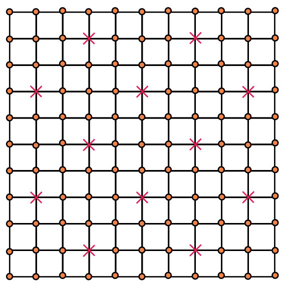


Рис. 19

Если пронумеровать линии сетки по вертикали и горизонтали от 1 до 11, то мы покрасили узлы, обе координаты которых четные, но только одна из них делится на 4.

Каждому кораблю 1×3 будет соответствовать ровно один окрашенный узел. Действительно, каждый корабль 1×3 содержит ровно одну длинную сторону, лежащую на линии с четным номером, и из четырех узлов на этой стороне ровно один окрашен.

Получим, что поставить больше 12 кораблей 1×3 по правилам морского боя невозможно, так как иначе один узел будет соответствовать двум кораблям. Кажется удивительным тот факт, что наибольшее количество кораблей 1×3 и 1×4, которые можно поставить на доску 10×10 по правилам морского боя, одно и то же. Пример на 12 кораблей построить несложно (можно взять пример из задачи 13 и уменьшить каждый корабль на одну клетку).

16. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 8×8 так, чтобы все узлы клетчатой решетки оказались закрашенными?

Ответ: 25.

Решение. Разобьем все узлы на четыре группы так, чтобы каждый квадрат 1×1, расположенный по линиям сетки, содержал по одному узлу каждой группы (рис. 20).

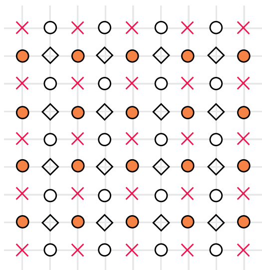


Рис. 20

Видим, что 81 узел можно разбить на четыре группы, содержащие по 25, 16, 20, 20 узлов. Так как мы делаем оценку на наименьшее значение, то для более точной оценки выберем группу с наибольшим числом узлов. У нас 25 узлов в первой группе. При закрашивании квадрата мы закрашиваем ровно один узел из этой группы. Значит, чтобы закрасить все узлы, нужно не меньше 25 квадратов (рис. 21).

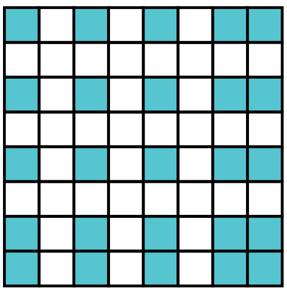


Рис. 21

17. Какое наибольшее количество диагоналей в квадратах доски 8×8 можно провести так, чтобы они не имели общих концов?

Ответ: 36.

Решение. Раскрасим узлы доски в раскраску «зебра» (рис. 22).

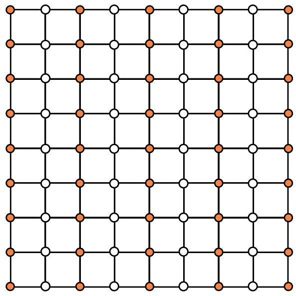


Рис. 22

Получим на доске 45 черных и 36 белых узлов. Каждая диагональ соединяет один черный и один белый узел. Так как мы делаем оценку на наибольшее значение, то для более точной оценки выберем группу с меньшим числом узлов, то есть белые. Каждой проведенной диагонали соответствует ровно один белый узел, при этом, согласно условию, никакой узел не может соответствовать более чем одной диагонали.

Тогда провести диагоналей можно не больше, чем белых узлов, то есть не больше 36 (рис. 23).

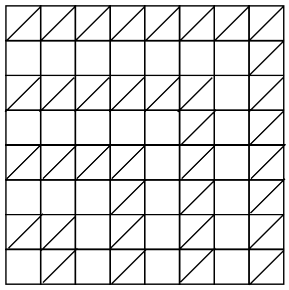


Рис. 23

Принцип Дирихле позволяет делать оценки, если установлена связь (соответствие) между объектами. Мы рассмотрели два способа применения принципа Дирихле на клетчатых досках. Помимо разбиения на меньшие части и метода подсчета узлов, можно еще считать перегородки, направления, использовать метод отмеченных множеств.

Главное — понять, что в конкретной задаче удобно считать «кроликами», а что «клетками».