Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета

2021. Том 58. С. 48–58

УДК 517.977

© *И. В. Иместьев, В. И. Ухоботов*

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ С НЕВЫПУКЛЫМИ ВЕКТОГРАММАМИ УПРАВЛЕНИЙ

В конечномерном нормированном пространстве рассматривается дискретная игровая задача заданной продолжительности. Терминальное множество определяется условием принадлежности нормы фазового вектора заданному отрезку с положительными концами. Множество, определяемое данным условием, названо в статье кольцом. В каждый момент времени вектограммой управлений первого игрока является некоторое кольцо. Управления второго игрока в каждый момент времени берутся из шаров с заданными радиусами. Цель первого игрока заключается в том, чтобы в фиксированный момент времени привести фазовый вектор на терминальное множество. Цель второго игрока противоположна. В рассматриваемой задаче найдены необходимые и достаточные условия окончания и построены оптимальные управления игроков.

Ключевые слова: игра, управление, вектограмма, терминальное множество.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-03

Введение

В статье рассматривается дискретный конфликтно-управляемый процесс (см., например, [1, с. 65–87], [2–7]). Дискретные процессы управления возникают, как правило, при решении прикладных задач. Это связано с тем, что получить информацию о состоянии реальных управляемых систем и скорректировать в них управления (см, например, [6]) возможно только в дискретные моменты времени. Кроме того, принцип действия некоторых элементов, входящих в систему, может быть дискретным.

Задачи управления дискретными динамическими системами, подверженными воздействию со стороны неконтролируемых помех, могут быть рассмотрены в рамках теории адаптивного управления (см, например, [2, 5]). К таким задачам применим также игровой подход (см, например, [3, 4, 7]).

Актуальными являются дискретные задачи преследования с невыпуклым терминальным множеством. Так, например, в работах [8, 9] рассмотрена дискретная задача преследования, в которой вектограммами игроков являются n–мерные шары, а терминальным множеством является кольцо (множество, которое определяется условием принадлежности нормы фазового вектора отрезку с положительными концами). В работе [8] построено семейство множеств, определяющее необходимые и достаточные условия возможности окончания в этой задаче. В работе [9] по указанному семейству множеств из [8] построены оптимальные управления игроков. Используя построенные управления, проведено компьютерное моделирование игрового процесса. Также получено решение для постановки задачи, в которой у первого игрока в заранее неизвестный ему момент времени происходит изменение в динамике

В данной статье рассматривается модификация задачи из [8, 9], в которой вектограммы первого игрока могут быть n–мерными кольцами. Кроме того, в рассматриваемой постановке задачи предполагается дискриминация первого игрока. Для данной задачи найдены необходимые и достаточные условия окончания, а также построены соответствующие оптимальные управления игроков.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается дискретная игровая задача с заданной продолжительностью $N \geqslant 1$, уравнение движения в которой имеет вид:

$$z(i+1) = z(i) - u + b(i)v, \tag{1.1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, $u \in S(a_1(i), a_2(i))$ — управление первого игрока, $v \in S$ — управление второго игрока, $0 \leqslant a_1(i) \leqslant a_2(i)$, $b(i) \geqslant 0$, $i = \overline{0, N-1}$. Здесь обозначено

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \|s\| \leqslant 1\}, \quad S(\delta_1, \delta_2) = \{s \in \mathbb{R}^n \colon \delta_1 \leqslant \|s\| \leqslant \delta_2\}$$

при $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2$.

Правило перехода от $z(i)$ к $z(i+1)$, $i = \overline{0, N-1}$. В момент времени i, зная значение $z(i)$, первый игрок выбирает управление $u \in S(a_1(i), a_2(i))$, сообщая о своем выборе второму игроку.

Затем второй игрок, зная $z(i)$ и выбранное управление первого игрока, выбирает управление $v \in S$. После этого для двух выбранных управлений по формуле (1.1) реализуется $z(i+1)$.

Пусть заданы числа $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$. Цель первого игрока заключается в осуществлении включения

$$z(N) \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{1.2}$$

Цель второго игрока противоположна.

§ 2. Необходимые и достаточные условия окончания

Для каждого $i = \overline{0, N-1}$ требуется определить множество позиций $z(i)$, откуда первый игрок может гарантировать включение (1.2) при любом допустимом управлении второго игрока. Введем оператор программного поглощения T_k [10], который для каждого числа $k = 0, \ldots, N$ и каждому множеству $Y \subset \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_k(Y)$, определяемое следующим образом: точка $z \in T_k(Y)$ тогда и только тогда, когда существует управление $u(k) \in S(a_1(k), a_2(k))$, гарантирующее включение

$$z(k+1) = z(k) - u(k) + b(k)v(k) \in Y$$

при любом управлении $v(k) \in S$ второго игрока. Отсюда получим, что

$$T_k(Y) = (Y \dot{-} b(k)S) + S(a_1(k), a_2(k)). \tag{2.1}$$

Здесь $A + B$ — сумма Минковского множеств $A + B = \{z = a + b \in \mathbb{R}^n \colon a \in A, b \in B\}$; $A \dot{-} B$ — геометрическая разность множеств $A \dot{-} B = \{z \in \mathbb{R}^n \colon z + B \subset A\}$ [11].

Положим $T_k(\varnothing) = \varnothing$. Обозначим

$$W(i) = T_i(T_{i+1}(\ldots(T_{N-1}(Y)))), \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{2.2}$$

Используя введенный оператор программного поглощения, получим, что множество $z(i)$, откуда первый игрок может гарантировать выполнение (1.2), можно записать как $W(i)$.

Для вычисления оператора (2.1) при $Y = S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ потребуются следующие леммы.

Л е м м а 2.1 (см. [12]). *Для любых чисел* $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ *и* $\delta \geqslant 0$ *выполнено равенство*

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta S = S(\max(0; \varepsilon_1 - \delta), \varepsilon_2 + \delta).$$

Л е м м а 2.2 (см. [12]). *Для любых чисел* $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ *и* $\delta \geqslant 0$ *выполнено равенство*

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \dot{-} \delta S = \begin{cases} S(f(\varepsilon_1, \delta), \varepsilon_2 - \delta) & \textit{при} \quad f(\varepsilon_1, \delta) + \delta \leqslant \varepsilon_2, \\ \varnothing & \textit{при} \quad f(\varepsilon_1, \delta) + \delta > \varepsilon_2, \end{cases}$$

где $f(0, \delta) = 0$ *при любом* $\delta \geqslant 0$; $f(\sigma, \delta) = \sigma + \delta$ *при любых* $\sigma > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$.

Л е м м а 2.3. *Пусть заданы числа* $\varepsilon \geqslant 0$, $a \geqslant 0$ *и вектор* $z \in \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ *такие, что*

$$\max(\varepsilon - a; a - \varepsilon) \leqslant \|z\| \leqslant a + \varepsilon. \tag{2.3}$$

Тогда существует решение уравнения $\|z - u\| = \varepsilon$ *при* $u \in S(a, a) \subset \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное утверждению леммы.

Пусть $\|z - u\| > \varepsilon$ при любом $u \in S(a, a)$. Предположим, что $\|z\| \geqslant a$. Тогда $\|z\| - a > \varepsilon$. Следовательно, $a + \varepsilon < \|z\|$, что противоречит второму неравенству в (2.3). Предположим, что $\|z\| < a$. Тогда $a - \|z\| > \varepsilon$. Следовательно, $\|z\| < a - \varepsilon$, что противоречит первому неравенству в (2.3).

Пусть $\|z - u\| < \varepsilon$ при любом $u \in S(a, a)$. Тогда $\|z\| + a < \varepsilon$. Следовательно, $\|z\| < \varepsilon - a$, что противоречит первому неравенству в (2.3).

Пусть существует $u_1 \in S(a, a)$ такое, что $\|z - u_1\| > \varepsilon$, и существует $u_2 \in S(a, a)$ такое, что $\|z - u_2\| < \varepsilon$. Из того, что функция $g(u) = \|z - u\|$ является непрерывной, а множество $S(a, a)$ при $n > 1$ является связным компактом, следует существование решения уравнения $g(u) = \varepsilon$. □

Л е м м а 2.4. *Для любых чисел* $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta_2$ *и* $0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$ *выполнено равенство*

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_2) = S(F(\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \delta_2 + \varepsilon_2), \tag{2.4}$$

если $S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset \mathbb{R}^n$, $S(\delta_1, \delta_2) \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Здесь обозначено

$$F(\delta_1, \delta_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{cases} \max(0; \delta_1 - \varepsilon_2) \text{ при } \delta_1 > \varepsilon_1, \\ \max(0; \varepsilon_1 - \delta_2) \text{ при } \delta_1 \leqslant \varepsilon_1. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $\delta_1 \leqslant \varepsilon_1$. Тогда равенство (2.4) примет вид

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_2) = S(\max(0; \varepsilon_1 - \delta_2), \delta_2 + \varepsilon_2). \tag{2.5}$$

Пусть $\delta_1 = 0$. Тогда получим утверждении леммы 2.1 с $\delta = \delta_2$.

Пусть $\delta_1 > 0$. Заметим, что, согласно лемме 2.1, имеет место равенство

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta_2 S = S(\max(0; \varepsilon_1 - \delta_2), \delta_2 + \varepsilon_2).$$

Отсюда, из разложения $\delta_2 S = \delta_1 S \cup S(\delta_1, \delta_2)$ и свойства суммы Минковского

$$A + (B \bigcup C) = (A + B) \bigcup (A + C)$$

получим

$$(S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta_1 S) \bigcup (S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_2)) = S(\max(0; \varepsilon_1 - \delta_2), \delta_2 + \varepsilon_2).$$

Если покажем включение

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta_1 S \subseteq S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_1), \tag{2.6}$$

то получим требуемое равенство (2.5).

Пусть точка z принадлежит множеству в левой части включения (2.6). Представим z как $z = u + (z - u)$, где $u \in S(\delta_1, \delta_1)$. Если показать включение $z - u \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то это будет означать, что $z \in S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + S(\delta_1, \delta_1)$. Тогда отсюда и из произвольности z получим включение (2.6).

Из леммы 2.1 следует равенство

$$S(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \delta_1 S = S(\varepsilon_1 - \delta_1, \varepsilon_2 + \delta_1).$$

Случай 1. Пусть $\varepsilon_1 + \delta_1 < \|z\| \leqslant \varepsilon_2 + \delta_1$. Возьмем

$$u = \frac{\delta_1 z}{\|z\|} \in S(\delta_1, \delta_1).$$

Тогда $\varepsilon_1 < \|z - u\| = \|z\| - \delta_1 \leqslant \varepsilon_2$.

Случай 2. Пусть $\varepsilon_1 - \delta_1 \leqslant \|z\| \leqslant \varepsilon_1 + \delta_1$. Воспользуемся леммой 2.3 с $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $a = \delta_1$, откуда получим, что существует $u \in S(\delta_1, \delta_1)$, при котором $\|z - u\| = \varepsilon_1$.

Равенство (2.4) в случае $\delta_1 > \varepsilon_1$ доказывается аналогично. □

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $W(N) = S(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. При $i = \overline{0, N-1}$ множество $W(i)$ определяется следующим образом. Если $W(i+1) = \varnothing$, то $W(i) = \varnothing$. Иначе*

$$W(i) = \begin{cases} S(f_1(i), f_2(i)) & \textit{при } f\Big(f_1(i+1), b(i)\Big) \leqslant f_2(i+1) - b(i), \\ \varnothing & \textit{при } f\Big(f_1(i+1), b(i)\Big) > f_2(i+1) - b(i). \end{cases}$$

Здесь обозначено

$$f_2(i) = f_2(i+1) + a_2(i) - b(i), \tag{2.7}$$

$$f_1(i) = F\Bigg(f\Big(f_1(i+1), b(i)\Big), f_2(i+1) - b(i), a_1(i), a_2(i)\Bigg). \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы 2.1 непосредственно следует из формул (2.1), (2.2) и лемм 2.2, 2.4.

§ 3. Задача преследования

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $z(i) \in W(i)$, тогда найдется управление первого игрока $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$, гарантирующее выполнение включения $z(i+1) \in W(i+1)$ при любом управлении второго игрока $v(i) \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что из условия $z(i) \in W(i)$ следуют неравенства

$$f_1(i) \leqslant \|z(i)\| \leqslant f_2(i); \tag{3.1}$$

$$f_2(i+1) - b(i) \geqslant 0 \text{ при } f_1(i+1) = 0, \quad f_1(i+1) + b(i) \leqslant f_2(i+1) - b(i) \text{ при } f_1(i+1) > 0. \tag{3.2}$$

Кроме того, из условия $W(i) \neq \varnothing$ следует $W(i+1) \neq \varnothing$. Таким образом, для доказательства включения $z(i+1) \in W(i+1)$ достаточно показать, что

$$f_1(i+1) \leqslant \|z(i+1)\| \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 1. Пусть $f_1(i+1) = 0$.

Случай 1.1. Пусть $a_2(i) < \|z(i)\|$. Тогда первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{a_2(i) z(i)}{\|z(i)\|}.$$

Отсюда, из (2.7) и второго неравенства в (3.1) получим

$$\|z(i+1)\| \leqslant \|z(i)\| - a_2(i) + b(i) \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 1.2. Пусть $a_1(i) \leqslant \|z(i)\| \leqslant a_2(i)$. Тогда первый игрок берет управление $u(i) = z(i)$. Отсюда и из первого условия в (3.2) получим неравенства

$$\|z(i+1)\| \leqslant b(i) \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 1.3. Пусть $\|z(i)\| < a_1(i)$.

Случай 1.3.1. Пусть

$$a_1(i) - f_2(i+1) + b(i) \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Тогда первый игрок берет управление

$$u(i) = \frac{a_1(i)z(i)}{\|z(i)\|} \text{ при } \|z(i)\| > 0, \quad u(i) = a_1(i)s \text{ при } \|z(i)\| = 0. \tag{3.4}$$

где s — любой вектор с $\|s\| = 1$. Отсюда, используя (3.3), получим неравенства

$$\|z(i+1)\| \leqslant \|z(i) - u(i)\| + b(i) \leqslant a_1(i) + b(i) \leqslant f_2(i+1).$$

Случай 1.3.2. Пусть $f_1(i) = a_1(i) - f_2(i+1) + b(i) > 0$. Следовательно, выполнены неравенства

$$a_1(i) - f_2(i+1) + b(i) \leqslant \|z(i)\| < a_1(i). \tag{3.5}$$

Покажем, что при $u(i)$ (3.4) верно неравенство $\|z(i) - u(i)\| \leqslant f_2(i+1) - b(i)$. Предположим противное $\|z(i) - u(i)\| > f_2(i+1) - b(i)$. Тогда, используя второе неравенство из (3.5), имеем $a_1(i) - \|z(i)\| > f_2(i+1) - b(i)$. Отсюда получим противоречие с первым неравенством из (3.5).

Таким образом, получим

$$\|z(i+1)\| \leqslant \|z(i) - u(i)\| + b(i) \leqslant f_2(i+1) - b(i) + b(i) = f_2(i+1).$$

Случай 2. Пусть $f_1(i+1) > 0$.

Учитывая второе неравенство в (3.2), предположим, что первый игрок выбрал такое управление $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$, что

$$f_1(i+1) + b(i) \leqslant \|z(i) - u(i)\| \leqslant f_2(i+1) - b(i). \tag{3.6}$$

Тогда, согласно (1.1),

$$f_1(i+1) \leqslant \|z(i) - u(i)\| - b(i) \leqslant \|z(i+1)\| \leqslant \|z(i) - u(i)\| + b(i) \leqslant f_2(i+1).$$

Далее, для различных случаев построим $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$, при которых выполняются неравенства (3.6).

Случай 2.1. Пусть

$$f_2(i+1) - b(i) + a_1(i) \leqslant \|z(i)\| \leqslant f_2(i+1) - b(i) + a_2(i).$$

Первый игрок берет управление

$$u(i) = z(i) - \frac{(f_2(i+1) - b(i))z(i)}{\|z(i)\|} \in S(a_1(i), a_2(i)).$$

Тогда $\|z(i) - u(i)\| = f_2(i+1) - b(i)$, откуда следует выполнение (3.6).

Случай 2.2. Пусть

$$f_1(i+1) + b(i) + a_1(i) < \|z(i)\| < f_2(i+1) - b(i) + a_1(i). \tag{3.7}$$

Первый игрок берет управление $u(i)$ (3.4). Можно показать, что $\|z(i)-u(i)\| = \|z(i)\|-a_1(i)$. Отсюда и из (3.7) получим неравенства

$$f_1(i+1) + b(i) < \|z(i) - u(i)\| < f_2(i+1) - b(i),$$

а, следовательно, $z(i) - u(i)$ удовлетворяет (3.6).

Случай 2.3. Пусть

$$\max(a_1(i) - f_1(i+1) - b(i); f_1(i+1) + b(i) - a_1(i)) < \|z(i)\| \leqslant a_1(i) + f_1(i+1) + b(i).$$

Воспользуемся леммой 2.3 с $\varepsilon = f_1(i+1)+b(i)$ и $a = a_1(i)$, откуда получим, что существует $u(i) \in S(a_1(i), a_1(i)) \subset S(a_1(i), a_2(i))$, при котором $\|z(i) - u(i)\| = f_1(i+1) + b(i)$.

Случай 2.4. Пусть

$$f_1(i) \leqslant \|z(i)\| \leqslant \max(a_1(i) - f_1(i+1) - b(i); f_1(i+1) + b(i) - a_1(i)). \tag{3.8}$$

Случай 2.4.1. Пусть $a_1(i) > f_1(i+1)+b(i)$. Тогда, согласно (2.8), неравенства (3.8) примут вид

$$\max(a_1(i) - f_2(i+1) + b(i); 0) \leqslant \|z(i)\| \leqslant a_1(i) - f_1(i+1) - b(i). \tag{3.9}$$

Первый игрок берет управление $u(i)$ (3.4). Можно показать, что $\|z(i)-u(i)\| = a_1(i)-\|z(i)\|$. Отсюда и из (3.9) следует

$$-f_2(i+1) + b(i) \leqslant \|z(i)\| - a_1(i) = -\|z(i) - u(i)\| \leqslant -f_1(i+1) - b(i).$$

Отсюда получим, что для $z(i) - u(i)$ выполнены неравенства (3.6).

Случай 2.4.2. Пусть $a_1(i) \leqslant f_1(i+1)+b(i)$. Тогда, согласно (2.8), неравенства (3.8) примут вид

$$\max(f_1(i+1) + b(i) - a_2(i); 0) \leqslant \|z(i)\| \leqslant f_1(i+1) + b(i) - a_1(i).$$

Первый игрок берет управление

$$u(i) = z(i) - \frac{(f_1(i+1) + b(i))z(i)}{\|z(i)\|} \in S(a_1(i), a_2(i)).$$

Тогда $\|z(i) - u(i)\| = f_1(i+1) + b(i)$. □

З а м е ч а н и е 1. Покажем, как можно построить управление $u(i)$ в случае 2.3 доказательства теоремы 3.1. Отметим, что в данном случае $\|z(i)\| > 0$. Будем искать вектор $u(i)$ как линейную комбинацию следующего вида:

$$u(i) = d_1 \frac{z(i)}{\|z(i)\|} + d_2 \tilde{w}, \tag{3.10}$$

где d_1, $d_2 \in \mathbb{R}$; $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n$ — любой вектор, для которого выполнено $\langle z(i), \tilde{w} \rangle = 0$ и $\|\tilde{w}\| = 1$. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Согласно случаю 2.3 доказательства предыдущей теоремы, вектор $u(i)$ удовлетворяет следующим равенствам

$$\|z(i) - u(i)\| = f_1(i+1) + b(i), \tag{3.11}$$

$$\|u(i)\| = a_1(i). \tag{3.12}$$

Поставим (3.10) в (3.11) и в (3.12). Получим равенства

$$(\|z(i)\| - d_1)^2 + d_2^2 = (f_1(i+1) + b(i))^2,$$

$$d_1^2 + d_2^2 = (a_1(i))^2,$$

соответственно. Отсюда получим

$$d_1 = \frac{\|z(i)\|^2 + (a_1(i))^2 - (f_1(i+1) + b(i))^2}{2\|z(i)\|},$$

$$d_2 = \pm\sqrt{(a_1(i))^2 - \left(\frac{\|z(i)\|^2 + (a_1(i))^2 - (f_1(i+1) + b(i))^2}{2\|z(i)\|}\right)^2}.$$

§ 4. Задача уклонения

Т е о р е м а 4.1. *Пусть $z(i) \notin W(i)$, тогда для любого управления первого игрока $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$ найдется управление второго игрока $v(i) \in S$, гарантирующее выполнение условия $z(i+1) \notin W(i+1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Случай 1. Пусть $W(i) \neq \varnothing$ и $W(i+1) \neq \varnothing$. Тогда условие $z(i) \notin W(i)$ равносильно выполнению одного из неравенств $\|z(i)\| > f_2(i)$ или $\|z(i)\| < f_1(i)$.

Случай 1.1. Пусть $\|z(i)\| > f_2(i)$. Тогда второй игрок берет управление

$$v(i) = \frac{z(i) - u(i)}{\|z(i) - u(i)\|} \text{ при } \|z(i) - u(i)\| > 0; \quad v(i) = s \text{ при } \|z(i) - u(i)\| = 0, \tag{4.1}$$

где s — любой вектор с $\|s\| = 1$. Отсюда, из (1.1) и (2.7) получим

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) - u(i)\| + b(i) \geqslant \|z(i)\| - a_2(i) + b(i) > f_2(i+1).$$

Случай 1.2. Пусть

$$\|z(i)\| < f_1(i). \tag{4.2}$$

Случай 1.2.1. Пусть

$$f_1(i) = f_1(i+1) - a_2(i) + b(i). \tag{4.3}$$

Отметим, что в этом случае $f_1(i+1) > 0$.

Пусть $\|z(i) - u(i)\| > b(i)$. Тогда второй игрок берет управление

$$v(i) = -\frac{z(i) - u(i)}{\|z(i) - u(i)\|}.$$

Отсюда, из (4.2) и (4.3) получим

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) - u(i)\| - b(i) \leqslant \|z(i)\| + a_2(i) - b(i) < f_1(i+1).$$

Пусть $\|z(i) - u(i)\| \leqslant b(i)$. Тогда второй игрок берет управление

$$v(i) = -\frac{z(i) - u(i)}{b(i)} \text{ при } b(i) > 0; \quad v(i) = s \text{ при } b(i) = 0,$$

где s — любой вектор с $\|s\| = 1$. Отсюда получим

$$\|z(i+1)\| = 0 < f_1(i+1).$$

Случай 1.2.2. Пусть

$$f_1(i) = a_1(i) - f_2(i+1) + b(i). \tag{4.4}$$

Тогда второй игрок берет управление (4.1). Отсюда, из (4.2) и (4.4) следуют неравенства

$$\|z(i+1)\| = \|z(i) - u(i)\| + b(i) \geqslant \|u(i)\| - \|z(i)\| + b(i) \geqslant$$

$$\geqslant a_1(i) - \|z(i)\| + b(i) > f_2(i+1).$$

Случай 2. Пусть $W(i) = \varnothing$ и $W(i+1) \neq \varnothing$. Из этих условий следует, что

$$f_2(i+1) - b(i) < 0 \text{ при } f_1(i+1) = 0, \quad f_2(i+1) - b(i) < f_1(i+1) + b(i) \text{ при } f_1(i+1) > 0.$$

Таким образом, при любом $u(i) \in S(a_1(i), a_2(i))$ должно выполниться одно из неравенств

$$\|z(i) - u(i)\| > f_2(i+1) - b(i) \tag{4.5}$$

или

$$\|z(i) - u(i)\| < f_1(i+1) + b(i). \tag{4.6}$$

Причем неравенство (4.6) может быть выполнено только при $f_1(i+1) > 0$.

Пусть выполнено неравенство (4.5). Заметим, что управление (4.1) гарантирует равенство $\|z(i+1)\| = \|z(i) - u(i)\| + b(i)$. Отсюда получим $\|z(i+1)\| > f_2(i+1)$.

Пусть выполнено неравенство (4.6). Заметим, что управление $v(i)$, описанное в случае 1.2.1 доказательства данной теоремы, гарантирует равенство

$$\|z(i+1)\| = \max(\|z(i) - u(i)\| - b(i); 0).$$

Отсюда получим $\|z(i+1)\| < f_1(i+1)$.

Случай 3. Пусть $W(i+1) = \varnothing$. Тогда второй игрок может брать любое управление $v(i) \in S$. □

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00105).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Шориков А. Ф. Алгоритм адаптивного минимаксного управления для процесса преследования-уклонения в дискретных динамических системах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 2. С. 215–235. http://mi.mathnet.ru/timm522
3. Raxmanov A., Ibragimov G. Linear discrete pursuit game with phase constraints // The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014. Article ID: 435103, 5 p. https://doi.org/10.1155/2014/435103
4. Bopardikar S. D., Suri S. k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the hyenas // Theoretical Computer Science. 2014. Vol. 522. P. 13–23. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.12.001
5. Соколов В. Ф. Задачи адаптивного оптимального управления дискретными системами с ограниченным возмущением и линейными показателями качества // Автоматика и телемеханика. 2018. Вып. 6. С. 155–171. http://mi.mathnet.ru/at15092
6. Ухоботов В. И., Стабулит И. С. Динамическая задача управления при наличии помехи и с заданным множеством моментов коррекций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 74–81. https://doi.org/10.20537/vm180107
7. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments // Systems and Control Letters. 2019. Vol. 125. P. 22–28. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
8. Никитина С. А., Ухоботов В. И. Дискретная динамическая задача управления с терминальным множеством в форме кольца // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19. № 2. С. 120–121.

9. Изместьев И. В. Дискретная игровая задача с терминальным множеством в форме кольца // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 18–30. https://doi.org/10.35634/vm200102
10. Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
11. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766. http://mi.mathnet.ru/dan33242
12. Ухоботов В. И. Однотипная дифференциальная игра с терминальным множеством в форме кольца // Некоторые задачи динамики и управления: сб. науч. трудов. Челябинский государственный университет. Челябинск, 2005. С. 108–123.

Поступила в редакцию 03.11.2021

Изместьев Игорь Вячеславович, к. ф.-м. н., Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
научный сотрудник, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Ухоботов Виктор Иванович, д. ф.-м. н., профессор, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, 454001, Россия, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Цитирование: И. В. Изместьев, В. И. Ухоботов. Об одной дискретной игровой задаче с невыпуклыми вектограммами управлений // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 48–58.

I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov

On a discrete game problem with non-convex control vectograms

Keywords: game, control, vectogram, terminal set.

MSC2020: 91A23, 49N75

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-03

In a normed space of finite dimension, a discrete game problem with fixed duration is considered. The terminal set is determined by the condition that the norm of the phase vector belongs to a segment with positive ends. In this paper, a set defined by this condition is called a ring. At each moment, the vectogram of the first player's controls is a certain ring. The controls of the second player at each moment are taken from balls with given radii. The goal of the first player is to lead a phase vector to the terminal set at a fixed time. The goal of the second player is the opposite. In this paper, necessary and sufficient termination conditions are found, and optimal controls of the players are constructed.

Funding. The study was funded by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*, New York: John Wiley and Sons, 1965.
   Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow: Mir, 1967.
2. Shorikov A. F. An algorithm of adaptive minimax control for the pursuit–evasion process in discrete-time dynamical system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, suppl. 2, pp. 173–190. https://zbmath.org/?q=an:1116.49314
3. Raxmanov A., Ibragimov G. Linear discrete pursuit game with phase constraints, *The Scientific World Journal*, 2014, article ID: 435103, 5 p. https://doi.org/10.1155/2014/435103
4. Bopardikar S. D., Suri S. k-Capture in multiagent pursuit evasion, or the lion and the hyenas, *Theoretical Computer Science*, 2014, vol. 522, pp. 13–23. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2013.12.001
5. Sokolov V. F. Problems of adaptive optimal control of discrete-time systems under bounded disturbance and linear performance indexes, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 6, pp. 1086–1099. https://doi.org/10.1134/S0005117918060085
6. Ukhobotov V. I., Stabulit I. S. Dynamic control problem under interference with a given set of correction momenta, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2018, vol. 28, issue 1, pp. 74–81 (in Russian). https://doi.org/10.20537/vm180107
7. Casini M., Criscuoli M., Garulli A. A discrete-time pursuit–evasion game in convex polygonal environments, *Systems and Control Letters*, 2019, vol. 125, pp. 22–28.
   https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2018.12.008
8. Nikitina S. A., Ukhobotov V. I. Discrete dynamic control problem with terminal set in form of ring, *Vestnik Rossiiskoi Akademii Estestvennykh Nauk*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 120–121 (in Russian).
9. Izmest'ev I. V. Discrete game problem with ring-shaped terminal set, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 1, pp. 18–30 (in Russian).
   https://doi.org/10.35634/vm200102
10. Pshenichnyi B. N., Sagaidak M. I. Differential games of prescribed duration, *Cybernetics*, 1970, vol. 6, no. 2, pp. 72–83. https://doi.org/10.1007/BF01070503
11. Pontryagin L. S. Linear differential games. II, *Soviet Mathematics. Doklady*, 1967, vol. 8, pp. 910–912. https://zbmath.org/?q=an:0157.16401
12. Ukhobotov V. I. Single-type differential game with terminal set in form of a ring, *Nekotorye zadachi dinamiki i upravleniya: sbornik nauchnykh trudov* (Some problems of dynamic and control: Transactions), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 2005, pp. 108–123 (in Russian).

Received 03.11.2021

Igor' Vyacheslavovich Izmest'ev, Candidate of Physics and Mathematics, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Researcher, Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0134-8466
E-mail: j748e8@gmail.com

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia;
Head of Department of Control Theory and Optimization, Chelyabinsk State University, ul. Brat'ev Kashirinykh, 129, Chelyabinsk, 454001, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2130-6482
E-mail: ukh@csu.ru

Citation: I. V. Izmest'ev, V. I. Ukhobotov. On a discrete game problem with non-convex control vectograms, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 48–58.