Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета
2021. Том 58. С. 73–93

УДК 517.938

© *В. Н. Ушаков, А. В. Ушаков, О. А. Кувшинов*

О КОНСТРУИРОВАНИИ РАЗРЕШАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Изучается задача о сближении управляемой системы с компактом в конечномерном евклидовом пространстве в фиксированный момент времени. Предлагается метод конструирования решения задачи, в основе которого лежит идеология максимального сдвига движения управляемой системы на множество разрешимости задачи о сближении.

Ключевые слова: управление, управляемая система, задача о сближении, множество достижимости, интегральная воронка, дуальная управляемая система.

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-05

Введение

В работе рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени. Изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством в этом пространстве в конечный момент времени из заданного промежутка времени [1–5]. Задача о сближении в такой постановке является одной из ключевых задач теории управления, приковывающей к себе внимание многочисленных исследователей. Она является базовой при изучении ряда других крупных задач теории управления и, в частности, задачи об оптимальном быстродействии, задачи о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством к фиксированному моменту времени, а также различных задач о сближении при наличии фазовых ограничений.

Настоящая работа продолжает и дополняет исследования [1–5, 12–14], посвященные задаче о сближении. Задача о сближении сформулирована и исследуется в общей постановке, которая охватывает бесчисленное множество конкретных задач о сближении. Несмотря на простую формулировку, задача о сближении в общей постановке настолько сложна, что исключается возможность создания метода, обеспечивающего ее точное решение. Это обстоятельство вынуждает разрабатывать методы, ориентированные на конструирование приближенных решений задачи о сближении, т. е. методов, обеспечивающих приведение движений системы в достаточно малые окрестности целевого множества.

В настоящей работе описан метод решения задачи о сближении, основанной так же, как и в [12], на конструировании программного управления, максимально сдвигающего движение управляемой системы в направлении на множество разрешимости задачи.

При этом, в отличие от [12], здесь мы считаем, что как сечения множества разрешимости, так и сечения интегральных воронок управляемой системы вычислены приближенно с определенной заранее заданной степенью точности. На эту степень точности наложены определенные ограничения с целью обеспечения корректности приближенного решения задачи о сближении.

Особо отметим, что в работе при описании метода конструирования разрешающего управления ключевыми являются такие понятия, как множество достижимости и интегральная воронка управляемой системы, а также множество разрешимости задачи о сближении, которые можно трактовать как интегральную воронку. Этой важной тематике интегральных воронок и множеств достижимости динамических систем посвящены многочисленные исследования, в которых представлены различные методы оценки и приближенного вычисления множеств достижимости и интегральных воронок [4–9, 17, 18]. На базе этих методов созданы вычислительные алгоритмы и программы для решения конкретных задач управления. Эти методы и алгоритмы совершенствуются с развитием вычислительных технологий.

Работа примыкает к исследованиям [7–18].

§ 1. Постановка задачи о сближении управляемой системы с компактом в $\mathbb{R}^n$

На промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u); \tag{1.1}$$

здесь $x \in \mathbb{R}^n, u \in P$ — вектор управления, $P \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство компактов в $\mathbb{R}^n$ с хаусдорфовой метрикой $d(X_*, X^*) = \max\bigl(h(X_*, X^*), h(X^*, X_*)\bigr)$, где $h(X_*, X^*) = \max\limits_{x_* \in X_*} \rho(x_*, X^*)$, а $\rho(x_*, X^*) = \min ||x_* - x^*||$ — расстояние от точки x_* до X^*, $||x||$ — евклидова норма $x \in \mathbb{R}^n$.

Предполагается, что система (1.1) удовлетворяет условиям:

A) вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$ и для любой ограниченной и замкнутой области $G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L_* = L_*(G) \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x_*, u) - f(t, x^*, u)|| \leqslant L_* ||x_* - x^*||, \quad (t, x_*) \text{ и } (t, x^*) \text{ из } G, u \in P;$$

B) существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$||f(t, x, u)|| \leqslant \gamma(1 + ||x||), \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P;$$

C) $F(t, x) = \{f(t, x, u) \colon u \in P\}$ — выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ при $(t, x, u) \in G \times P$.

Без условия **C** при решении рассматриваемой ниже задачи о сближении можно обойтись. Тем не менее условие **C** введено для упрощения последующих выкладок.

Пусть $x_* \in \mathbb{R}^n$, $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$. При условиях **A**, **B**, **C** множества достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$ и $X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$ системы (1.1) в момент t^* есть компакты в $\mathbb{R}^n$.

Из множеств $\bigl(t^*, X(t^*, t_*, x_*)\bigr)$ и $\bigl(t^*, X(t^*, t_*, X_*)\bigr)$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$, составляются интегральные воронки системы (1.1)

$$X(t_*, x_*) = \bigcup_{t^* \in [t_*, \vartheta]} \bigl(t^*, X(t^*, t_*, x_*)\bigr),$$
$$X(t_*, X_*) = \bigcup_{t^* \in [t_*, \vartheta]} \bigl(t^*, X(t^*, t_*, X_*)\bigr);$$

здесь обозначено $(t, X) = \{(t, x) \colon x \in X\}$, $X \subset \mathbb{R}^n$.

Как известно [1–9, 12–14], множества достижимости и интегральные воронки управляемых систем играют важную роль при изучении и решении различных задач теории управления, в том числе, и задач о сближении управляемых систем.

В настоящей работе будет показано, как можно использовать множества достижимости и интегральные воронки для конструирования решений задачи о сближении.

Полагаем, что, наряду с системой (1.1), задано множество $M \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с M в момент времени ϑ.

З а д а ч а 1.1 (о сближении системы (1.1) с M).

Пусть $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Требуется определить допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x^*(t_0) = x^{(0)}$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $x^*(\vartheta) \in M$.

Очевидно, что задача 1.1 разрешима не при любых $x^{(0)}, \vartheta$ и M.

При условиях **A**, **B**, **C** на систему (1.1) представим и проанализируем схему решения задачи 1.1. В этой схеме для конструирования разрешающего программного управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ мы применяем множество разрешимости $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ задачи 1.1, которое трактуется в терминах так называемого обратного времени как интегральная воронка дуальной к системе (1.1) управляемой системы с начальным множеством M. При этом мы прибегаем при конструировании управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ к использованию свойства слабой инвариантности множества W относительно системы (1.1) [12–14].

Учитывая условия, наложенные на систему (1.1), и ограниченность целевого множества M, можно указать такую ограниченную и замкнутую область G в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, что все исходные позиции (t_*, x_*) системы (1.1), из которых, как из начальных, разрешима задача о сближении системы (1.1) с M, будут содержаться в G. Считаем также, что область G настолько велика, что всевозможные движения $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $(t_*, x_*) \in G$, удовлетворяют включению $\big(t, x(t)\big) \in G$.

Именно эту область $G \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ мы рассматриваем в последующих рассуждениях и выкладках, вместе с отвечающими ей константами $L_* = L_*(G)$ и $K = K(G) = \max\{||f||\colon f \in F(t,x), (t,x) \in G\}$.

Множество разрешимости $W \subset G$ задачи (1.1), занимающее важное место в схеме решения задачи 1.1, мы определяем как множество всех тех позиций $(t_*, x_*) \in G$, из которых, как из начальных, разрешима задача 1.1.

Множество W может быть описано в терминах управляемой системы на промежутке $[t_0, \vartheta]$, дуальной к системе (1.1).

Уточним, что имеем в виду. А именно, наряду с «прямым» временем $t \in [t_0, \vartheta]$ введем так называемое «обратное» время $\tau \in [t_0, \vartheta]\colon \tau = t_0 + \vartheta - t, t \in [t_0, \vartheta]$.

Системе (1.1) сопоставим управляемую систему в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{dz}{d\tau} = h(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{1.2}$$

здесь $h(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, $(\tau, z, v) \in G \times P$.

Множество W определяется при этом соотношением

$$W = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} \big(t, W(t)\big), \quad W(t) = Z(\tau) \text{ при } t + \tau = t_0 + \vartheta;$$

здесь $Z(\tau)$ — сечения в $\mathbb{R}^n$ интегральной воронки $Z = Z(t_0, M) \subset G$ системы (1.2), т. е. $Z = \bigcup\limits_{\tau \in [t_0, \vartheta]} \big(\tau, Z(\tau)\big)$.

Одна из наиболее важных проблем в теории управления динамическими системами заключается в разработке методов и алгоритмов вычисления и приближенного вычисления интегральных воронок и, соответственно, множеств достижимости. Этой проблеме посвящены многочисленные исследования [3–9, 17, 18]. Множество $Z = Z(t_0, M)$ для задачи 1.1 в настоящей работе можно, вообще говоря, сконструировать лишь приближенно. Подробному изложению некоторых подходов к приближенному конструированию интегральных воронок управляемых систем посвящены, например, работы [7–9, 17, 18].

Особенность этой работы в том, что мы не приводим конкретные схемы приближенного вычисления интегральных воронок Z и, стало быть, множеств разрешимости W. Мы здесь полагаем, что множество W уже вычислено приближенно. В соответствии с этим считаем также, что множества достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$, $(t_*, x_*) \in G$, вычисляются также приближенно.

Исходя из этих положений, опишем в следующем параграфе метод приближенного конструирования разрешающего управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, в задаче 1.1.

§ 2. Приближенное конструирование управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, в задаче 1.1

Для конструирования управления $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, в задаче 1.1 будем использовать множество разрешимости W в этой задаче, которое удовлетворяет краевому условию $W(\vartheta) = M$.

Начнем с того, что зададим на оси t некоторое разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с равными шагами $\Delta_j = t_{j+1} - t_j = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0)$, $j = \overline{0, N-1}$.

Предполагаем, что множества $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, вычислены приближенно как некоторые компактные множества $W^a(t_j)$ $\Big(\big(t_j, W^a(t_j)\big) \subset G\Big)$ с погрешностью, не превосходящей некоторой заданной величины $\varepsilon(\Delta) > 0$:

$$d\big(W(t_j), W^a(t_j)\big) \leqslant \varepsilon(\Delta), \quad j = \overline{0, N};$$

здесь $\varepsilon(\delta)$, $\delta > 0$, — функция, удовлетворяющая предельному соотношению $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Предполагаем также, что на множестве G задано многозначное отображение $(t, x) \mapsto$ $\mapsto F^{(\delta)}(t, x) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\delta > 0$, удовлетворяющее условиям:

D) $d\big(F^{(\delta)}(t, x), F(t, x)\big) \leqslant \varkappa^*(\delta)$, $(t, x) \in G$, $\delta > 0$, $\varkappa^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$;

E) $d\big(F^{(\delta)}(t, x^{(1)}), F^{(\delta)}(t, x^{(2)})\big) \leqslant L^*||x^{(1)} - x^{(2)}||$, $(t, x^{(1)})$ и $(t, x^{(2)})$ из G, $\delta > 0$.

Отметим при этом, что мы не обсуждаем здесь схему задания множеств $W^a(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, и $F^{(\delta)}(t, x)$, $(t, x) \in G$, $\delta > 0$.

При условиях **D** и **E** рассмотрим, наряду с множествами достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$, множества $X^a(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta F^{(\delta)}(t_*, x_*)$, где $\delta = t^* - t_* > 0$.

Сравним множества $X(t^*, t_*, x_*)$ и $X^a(t^*, t_*, x_*)$, $(t_*, x_*) \in G$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$. Для этого оценим сверху хаусдорфово расстояние между ними

$$d\big(X(t^*, t_*, x_*), X^a(t^*, t_*, x_*)\big). \tag{2.1}$$

Для сравнения привлечем множества $\widetilde{X}(t^*, t_*, x_*) = x_* + \delta F(t_*, x_*)$ — промежуточные в смысле оценок между множествами $X(t^*, t_*, x_*)$ и $X^a(t^*, t_*, x_*)$.

Из условия **A** на систему (1.1) следует, что для области G существует такая функция $\omega^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, для которой выполняется соотношение

$$\begin{gathered} ||f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)|| \leqslant \omega^*(|t_* - t^*| + ||x_* - x^*||), \\ (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } G, u \in P. \end{gathered} \tag{2.2}$$

В качестве функции $\omega^*(\delta)$, $\delta > 0$, удовлетворяющей неравенству (2.2), можно взять, например, модуль непрерывности $\mu^*(\delta)$, $\delta > 0$, вектор-функции $f(t, x, u)$ на G по совокупности t, x:

$$\begin{gathered} \mu^*(\delta) = \max\{||f(t_*, x_*, u) - f(t^*, x^*, u)||\colon (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } G, \\ |t_* - t^*| + ||x_* - x^*|| \leqslant \delta,\ u \in P\}, \quad \delta > 0. \end{gathered}$$

Из определения множества $F(t,x)$, $(t,x) \in G$, и (2.2) следует оценка

$$d\big(F(t_*,x_*),F(t^*,x^*)\big) \leqslant \omega^*(|t_*-t^*|+||x_*-x^*||), \quad (t_*,x_*) \text{ и } (t^*,x^*) \text{ из } G. \tag{2.3}$$

Также из условия **A** следует оценка

$$d\big(F(t,x_*),F(t,x^*)\big) \leqslant L_*||x_*-x^*||, \quad (t,x_*) \text{ и } (t,x^*) \text{ из } G. \tag{2.4}$$

Оценками (2.3), (2.4) мы воспользуемся при выводе оценки сверху величины (2.1).

В самом деле, справедливо неравенство

$$\begin{gathered} d\big(X(t^*,t_*,x_*),X^a(t^*,t_*,x_*)\big) \leqslant d\big(X(t^*,t_*,x_*),\widetilde{X}(t^*,t_*,x_*)\big) + \\ + d\big(\widetilde{X}(t^*,t_*,x_*),X^a(t^*,t_*,x_*)\big). \end{gathered} \tag{2.5}$$

Справедлива следующая оценка (см., например, [12, 13]):

$$\begin{gathered} d\big(X(t,t_*,x_*),\widetilde{X}(t^*,t_*,x_*)\big) \leqslant \omega(\delta) = \delta\omega^*\big((1+K)\delta\big), \\ t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \vartheta, \ \ t^*-t_*=\delta, \ \ (t_*,x_*) \in G; \end{gathered} \tag{2.6}$$

здесь $K \in (0,\infty)$ определено на с. 75.

Также справедлива следующая оценка, вытекающая из условия **D**:

$$\begin{gathered} d\big(\widetilde{X}(t,t_*,x_*),X^a(t,t_*,x_*)\big) \leqslant \varkappa(\delta) = \delta\varkappa^*(\delta), \\ t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \vartheta, \ \ t^*-t_*=\delta, \ \ (t_*,x_*) \in G; \end{gathered} \tag{2.7}$$

Суммируя оценки (2.6) и (2.7), получаем из (2.5)

$$\begin{gathered} d\big(X(t,t_*,x_*),X^a(t,t_*,x_*)\big) \leqslant \varphi(\delta) = \omega(\delta)+\varkappa(\delta), \\ t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \vartheta, \ \ t^*-t_*=\delta, \ \ (t_*,x_*) \in G; \end{gathered} \tag{2.8}$$

здесь $\varphi(\delta) = \delta\big(\omega^*\big((1+K)\delta\big)+\varkappa^*(\delta)\big) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$ как величина более высокого порядка, чем первый.

Получив на базе условий **A**–**E** некоторые предварительные оценки, приступим к пошаговому конструированию разрешающего управления $u^*(t)$ на $[t_0,\vartheta]$. Управление $u^*(t)$ будем формировать, приняв за основу идею максимальной сдвижки движения $x^*(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$, порожденного этим управлением, в направлении на множество W. Точнее говоря, будем конструировать управление $u^*(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, исходя из идеи максимального притягивания некоторой аппроксимации $\widetilde{x}(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$, движения $x^*(t)$ системы (1.1) к множеству W^a, аппроксимирующему множество W.

Итак, рассмотрим начальный промежуток $[t_0,t_1]$ разбиения Г. Выберем произвольную точку $\widetilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$ в качестве начальной точки и рассмотрим множество

$$X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)}) = \big\{\widetilde{x}^{(1)} = \widetilde{x}^{(0)} + \Delta f \colon f \in F^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})\big\}\,.$$

Определим вектор $f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)}) \in F^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ равенством $\widetilde{x}^{(1)} = \widetilde{x}^{(0)} + \Delta f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$, где $\widetilde{x}^{(1)}$ — ближайшая в $X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ точка к множеству $W^a(t_1)$.

Обозначим через $x^{(0)}$ ближайшую к $\widetilde{x}^{(0)}$ точку в множестве $W(t_0)$; тогда $||x^{(0)}-\widetilde{x}^{(0)}|| \leqslant \varepsilon(\Delta)$ и, кроме того, справедливо соотношение

$$X(t_1,t_0,x^{(0)}) \bigcap W(t_1) \neq \varnothing,$$

из которого следует

$$X^a(t_1,t_0,x^{(0)})_{\varphi(\Delta)} \bigcap W(t_1) \neq \varnothing.$$

Также справедливо соотношение

$$d\big(X^a(t_1,t_0,x^{(0)}),X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})\big)\leqslant e^{L^*\Delta}||x^{(0)}-\widetilde{x}^{(0)}||,$$

вытекающее из условия **E**.

Таким образом, выполняются соотношения

$$X^a(t_1,t_0,x^{(0)})\bigcap W(t_1)_{\varphi(\Delta)}\neq\varnothing,\qquad d\big(X^a(t_1,t_0,x^{(0)}),X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})\big)\leqslant e^{L^*\Delta}\varepsilon(\Delta);$$

здесь W_σ —σ-окрестность множества W, $\sigma>0$.

Из этих соотношений следует

$$X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})\bigcap W(t_1)_{e^{L^*\Delta}\varepsilon(\Delta)+\varphi(\Delta)}\neq\varnothing,$$

и, следовательно, имеет место

$$X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})\bigcap W(t_1)_{\zeta_1(\Delta)}\neq\varnothing,$$

здесь обозначено $\zeta_1(\Delta)=e^{L^*\Delta}\big(\zeta_0(\Delta)+2\varepsilon(\Delta)\big)+\varphi(\Delta)$, $\zeta_0(\Delta)=\varepsilon(\Delta)$, $\Delta>0$.

Из последнего соотношения, учитывая $d\big(W(t_1),W^a(t_1)\big)\leqslant\varepsilon(\Delta)$, получаем

$$X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})\bigcap W^a(t_1)_{\zeta_1(\Delta)+\varepsilon(\Delta)}\neq\varnothing,$$

и, значит,

$$\begin{aligned}&\rho\big(\widetilde{x}^{(1)},W^a(t_1)\big)\leqslant\zeta_1(\Delta)+\varepsilon(\Delta),\\&\rho\big(\widetilde{x}^{(1)},W(t_1)\big)\leqslant\zeta_1(\Delta)+2\varepsilon(\Delta).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Завершая рассмотрение начального промежутка $[t_0,t_1]$ разбиения Γ и отвечающих ему оценок, определим управление $u^*(t)$ системой (1.1) на этом промежутке равенством $u^*(t)=u^{(0)}$, $t\in[t_0,t_1)$, где $f(t_0,\widetilde{x}^{(0)},u^{(0)})$ — ближайший в $F(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ вектор к $f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})\in$ $\in F^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$.

Управлению $u^*(t)$, $t\in[t_0,t_1]$, сопоставим начальное звено

$$\widetilde{x}(t)=\widetilde{x}^{(0)}+(t-t_0)f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)}),\qquad t\in[t_0,t_1],$$

ломаной $\widetilde{x}(t)$, которую будем формировать на промежутке $[t_0,\vartheta]$.

З а м е ч а н и е 1. Выделим некоторые основные этапы конструирования постоянного управления $u^*(t)=u^{(0)}$ на промежутке $[t_0,t_1]$ разбиения Γ.

Конструирование управления $u^*(t)$ на $[t_0,t_1]$ складывается из двух последовательных этапов.

На первом этапе в множестве $F^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ выбирается такой вектор $f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$, что точка $\widetilde{x}^{(1)}=\widetilde{x}^{(0)}+f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ есть ближайшая в $X^a(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ к множеству $W^a(t_1)$.

На втором этапе в множестве $F(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ выбирается вектор $f(t_0,\widetilde{x}^{(0)},u^{(0)})$, ближайший к вектору $f^{(\Delta)}(t_0,\widetilde{x}^{(0)})$. Такой выбор вектора $f(t_0,\widetilde{x}^{(0)},u^{(0)})$, фактически означающий выбор вектора $u^{(0)}\in P$, эквивалентен тому, что в множестве $\widetilde{X}(t_1,t_0,\widetilde{x}^{(0)})$ выбирается точка $\widetilde{x}^{(0)}+$ $+\Delta f(t_0,\widetilde{x}^{(0)},u^{(0)})$, наиболее близкая к $\widetilde{x}^{(1)}$ (см. рис. 1).

Описанная выше двухэтапная процедура выбора вектора u^0 в множестве P, осуществленная в рамках аппроксимаций, трактуется нами как процедура максимального притяжения движения управляемой системы (1.1) к множеству W.

Точно такая же процедура выбора векторов $u^{(j)}\in P$, которым соответствует управление $u^*(t)=u^{(j)}$, реализуется на следующих промежутках $[t_j,t_{j+1}]$, $j=\overline{1,N-1}$, разбиения Γ.

Итак, рассмотрим промежуток $[t_1,t_2]$ разбиения Γ и множество $X^a(t_2,t_1,\widetilde{x}^{(1)})$.

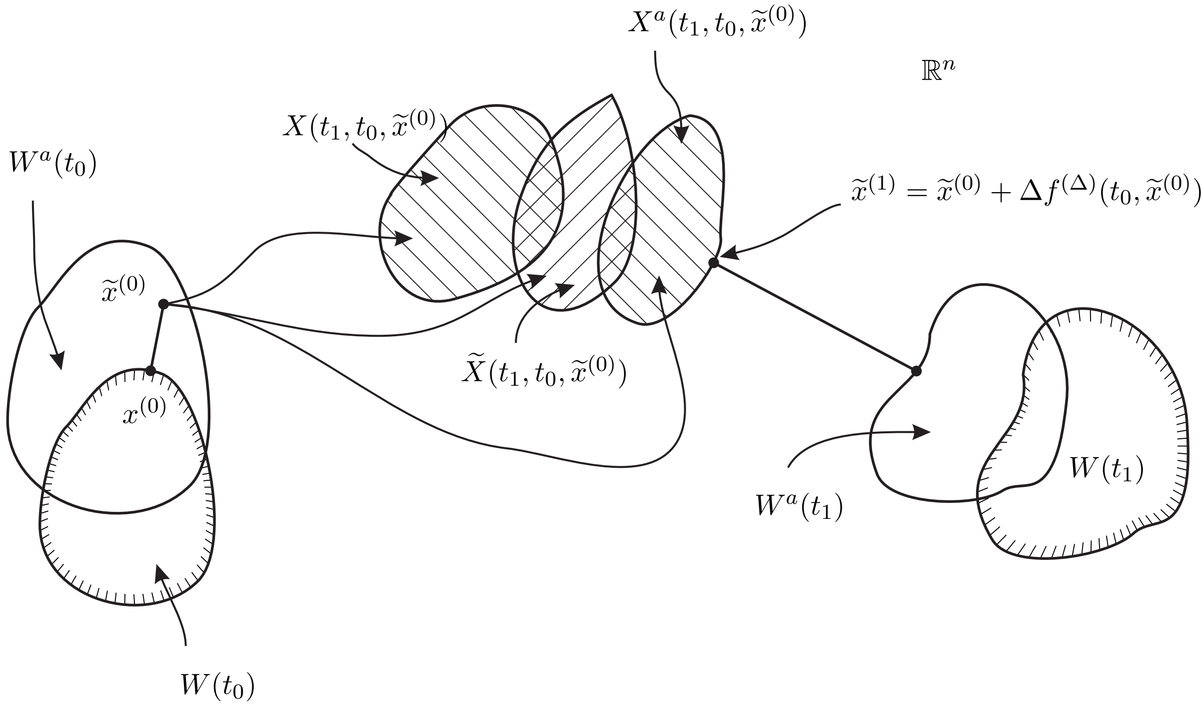


Рис. 1. К построению управления $u^*(t) = u^{(0)}$ на $[t_0, t_1]$

Определим вектор $f^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)}) \in F^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)})$ равенством $\widetilde{x}^{(2)} = \widetilde{x}^{(1)} + \Delta f^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)})$, где $\widetilde{x}^{(2)}$ — ближайшая в $X^a(t_2,t_1,\widetilde{x}^{(1)})$ точка к множеству $W^a(t_2)$.

Пусть $x^{(1)}$ — ближайшая к $\widetilde{x}^{(1)}$ точка в множестве $W(t_1)$. Справедливы соотношения

$$X^a(t_2,t_1,x^{(1)}) \bigcap W(t_2)_{\varphi(\Delta)} \neq \varnothing,$$
$$d\big(X^a(t_2,t_1,x^{(1)}), X^a(t_2,t_1,\widetilde{x}^{(1)})\big) \leqslant e^{L^*\Delta}||x^{(1)} - \widetilde{x}^{(1)}||. \tag{2.10}$$

Из (2.10), учитывая соотношение

$$||\widetilde{x}^{(1)} - x^{(1)}|| = \rho\big(\widetilde{x}^{(1)}, W(t_1)\big) \leqslant \zeta_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta),$$

получаем оценку

$$d\big(X^a(t_2,t_1,x^{(1)}), X^a(t_2,t_1,\widetilde{x}^{(1)})\big) \leqslant e^{L^*\Delta}\big(\zeta_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big). \tag{2.11}$$

Принимая во внимание (2.10), (2.11), получаем

$$X^a(t_2,t_1,\widetilde{x}^{(1)}) \bigcap W(t_2)_{\zeta_2(\Delta)} \neq \varnothing; \tag{2.12}$$

здесь $\zeta_2(\Delta) = e^{L^*\Delta}\big(\zeta_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta)$.

Из (2.12) и оценки $d\big(W(t_2), W^a(t_2)\big) \leqslant \varepsilon(\Delta)$ следует

$$\rho\big(\widetilde{x}^{(2)}, W^a(t_2)\big) \leqslant \zeta_2(\Delta) + \varepsilon(\Delta), \qquad \rho\big(\widetilde{x}^{(2)}, W(t_2)\big) \leqslant \zeta_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta).$$

Завершим рассмотрение промежутка $[t_1, t_2]$ разбиения Γ и отвечающих ему оценок определением управления $u^*(t)$ на этом промежутке: полагаем $u^*(t) = u^{(1)}$, $t \in [t_1, t_2)$, где $f(t_1,\widetilde{x}^{(1)},u^{(1)})$ — ближайший в $F(t_1,\widetilde{x}^{(1)})$ вектор к $f^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)}) \in F^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)})$.

Управлению $u^*(t)$, $t \in [t_1, t_2)$, сопоставим звено $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}^{(1)} + (t - t_1)f^{(\Delta)}(t_1,\widetilde{x}^{(1)})$, $t \in [t_1, t_2]$, ломаной $\widetilde{x}(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

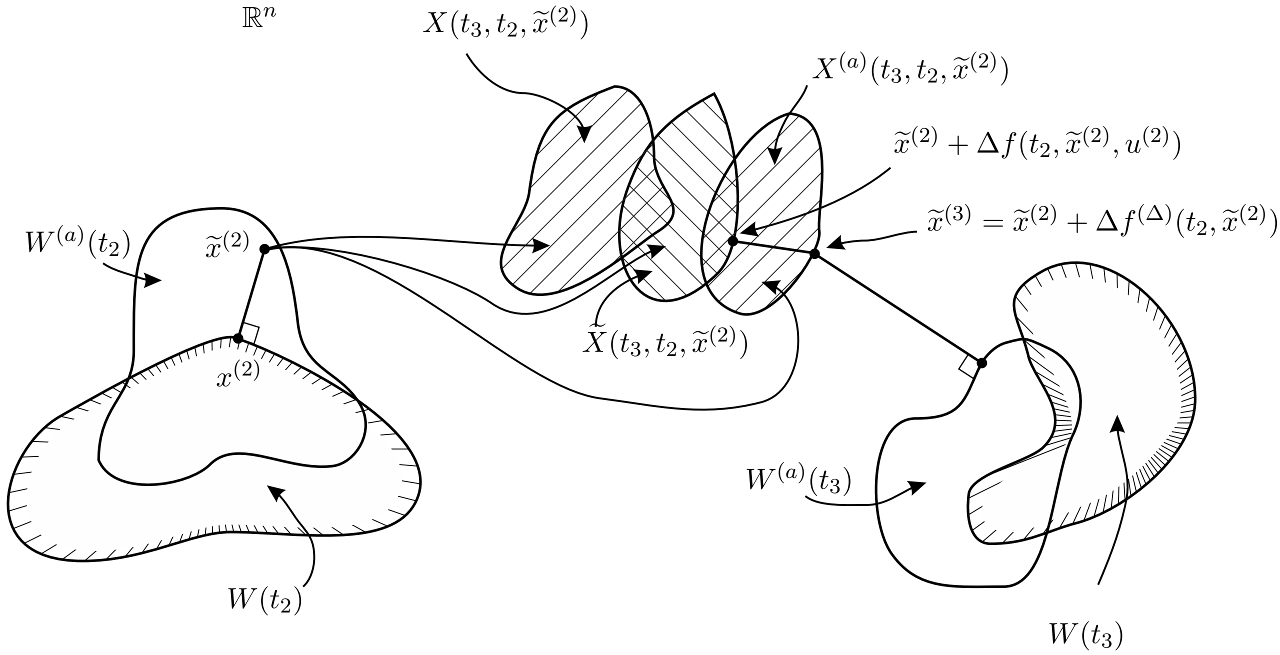


Рис. 2. К построению управления $u^*(t) = u^{(2)}$ на $[t_2, t_3]$

Далее рассмотрим промежуток $[t_2, t_3]$ разбиения Γ и множество $X^a(t_3, t_2, \widetilde{x}^{(2)})$.

Определим вектор $f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \in F^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$ равенством $\widetilde{x}^{(3)} = \widetilde{x}^{(2)} + \Delta f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$, где $\widetilde{x}^{(3)}$ — ближайшая в $X^a(t_3, t_2, \widetilde{x}^{(2)})$ точка к множеству $W^a(t_3)$ (см. рис. 2).

Пусть $x^{(2)}$ — ближайшая в $W(t_2)$ точка к $\widetilde{x}^{(2)}$. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered} X^a(t_3, t_2, x^{(2)}) \bigcap W(t_3)_{\varphi(\Delta)} \neq \varnothing, \\ d\big(X^a(t_3, t_2, x^{(2)}), X^a(t_3, t_2, \widetilde{x}^{(2)})\big) \leqslant e^{L^*\Delta}\big(\zeta_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Из (2.13) следует

$$X^a(t_3, t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \bigcap W(t_3)_{\zeta_3(\Delta)} \neq \varnothing; \tag{2.14}$$

здесь обозначено $\zeta_3(\Delta) = e^{L^*\Delta}\big(\zeta_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta)$.

Из (2.14) и оценки $d\big(W(t_3), W^a(t_3)\big) \leqslant \varepsilon(\Delta)$ получаем

$$X^a(t_3, t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \bigcap W^a(t_3)_{\zeta_3(\Delta)+\varepsilon(\Delta)} \neq \varnothing,$$

и, значит,

$$\rho\big(\widetilde{x}^{(3)}, W^a(t_3)\big) \leqslant \zeta_3(\Delta) + \varepsilon(\Delta), \qquad \rho\big(\widetilde{x}^{(3)}, W(t_3)\big) \leqslant \zeta_3(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta).$$

Завершая рассмотрение промежутка $[t_2, t_3]$ и отвечающих ему оценок, зададим управление $u^*(t)$ системой (1.1) на этом промежутке равенством $u^*(t) = u^{(2)}$, $t \in [t_2, t_3)$, где $f(t_2, \widetilde{x}^{(2)}, u^{(2)})$ — ближайший в $F(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$ вектор к $f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \in F^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$.

Управлению $u^*(t)$, $t \in [t_2, t_3)$ сопоставим звено $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}^{(2)} + (t - t_2)f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$, $t \in [t_2, t_3]$, ломаной $\widetilde{x}(t)$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$.

Выпишем подробные выражения для величин $\zeta_1(\Delta), \zeta_2(\Delta), \zeta_3(\Delta)$:

$$\begin{gathered} \zeta_1(\Delta) = e^{L^*\Delta}\big(\zeta_0(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta) = e^{L^*\Delta}\zeta_0(\Delta) + e^{L^*\Delta}2\varepsilon(\Delta) + \varphi(\Delta), \\ \zeta_2(\Delta) = e^{L^*\Delta}\big(\zeta_1(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta) = \\ = e^{2L^*\Delta}\zeta_0(\Delta) + (e^{2L^*\Delta} + e^{L^*\Delta})2\varepsilon(\Delta) + (e^{L^*(\Delta)} + 1)\varphi(\Delta), \\ \zeta_3(\Delta) = e^{L^*\Delta}\big(\zeta_2(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta) = \\ = e^{3L^*\Delta}\zeta_0(\Delta) + (e^{3L^*\Delta} + e^{2L^*\Delta} + e^{L^*\Delta})2\varepsilon(\Delta) + (e^{2L^*\Delta} + e^{L^*\Delta} + 1)\varphi(\Delta). \end{gathered}$$

Проведя анализ выражений, представляющих величины $\zeta_1(\Delta)$, $\zeta_2(\Delta)$, $\zeta_3(\Delta)$, устанавливаем, что последующие величины зависят однотипно от предыдущих. Эту рекуррентную зависимость распространим на величины

$$\zeta_{j+1}(\Delta) = e^{L^*(\Delta)}\big(\zeta_j(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)\big) + \varphi(\Delta), \qquad j = \overline{3, N-1},$$

так что $\zeta_{j+1}(\Delta)$, $j = \overline{0, N-1}$, удовлетворяет соотношению

$$X^a(t_{j+1}, t_j, \widetilde{x}^{(j)}) \bigcap W(t_{j+1})_{\zeta_{j+1}(\Delta)} \neq \varnothing,$$

из которого, в свою очередь, вытекает

$$\rho\big(\widetilde{x}^{(j+1)}, W(t_{j+1})\big) \leqslant \zeta_{j+1}(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta), \qquad j = \overline{0, N-1}.$$

Здесь $\widetilde{x}^{(j+1)}$ — узловая точка ломаной $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}^{(j)} + (t - t_j) f^{(\Delta)}(t_j, \widetilde{x}^{(j)})$, $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}^{(0)}$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$.

Для величины $\zeta_{j+1}(\Delta)$ имеет место представление

$$\zeta_{j+1}(\Delta) = e^{(j+1)L^*\Delta}\zeta_0(\Delta) + \sum_{k=1}^{j+1} e^{kL^*\Delta} \cdot 2\varepsilon(\Delta) + \sum_{k=0}^{j} e^{kL^*\Delta} \cdot \varphi(\Delta), \qquad j = \overline{0, N-1}. \quad (2.15)$$

Это представление легко обосновывается с помощью метода математической индукции. Напомним, что в нем $\zeta^0(\Delta) = \varepsilon(\Delta)$, $\Delta > 0$.

Поскольку для нас основной интерес представляет момент $t_N = \vartheta \in \Gamma$, в который мы рассматриваем сближение управляемой системы (1.1) с M, то запишем (2.15) для $j = N - 1$:

$$\zeta_N(\Delta) = e^{L^*N\Delta}\varepsilon(\Delta) + \sum_{k=1}^{N} e^{L^*k\Delta} \cdot 2\varepsilon(\Delta) + \sum_{k=0}^{N-1} e^{L^*k\Delta} \cdot \varphi(\Delta).$$

Учитывая это равенство и оценку $\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) = \rho\big(\widetilde{x}^{(N)}, W(t_N)\big) \leqslant \zeta_N(\Delta) + 2\varepsilon(\Delta)$, получаем

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant e^{L^*(\vartheta - t_0)} \cdot \varepsilon(\Delta) + \sum_{k=0}^{N} e^{kL^*\Delta} \cdot 2\varepsilon(\Delta) + \sum_{k=1}^{N-1} e^{kL^*\Delta} \cdot \varphi(\Delta),$$

т. е.

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant e^{L^*(\vartheta - t_0)} \cdot \varepsilon(\Delta) + \frac{e^{(N+1)L^*\Delta} - 1}{e^{L^*\Delta} - 1} 2\varepsilon(\Delta) + \frac{e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{e^{L^*\Delta} - 1}\varphi(\Delta). \quad (2.16)$$

Оценим сверху правую часть этого неравенства, предполагая, что, наряду с условиями **A**–**E**, выполнено следующее условие на диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$:

F) $0 < \Delta < \frac{1}{L^*}\ln(1 + \frac{3}{2}L^*\Delta)$.

При этом условии на диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ имеем во втором слагаемом правой части оценки (2.16)

$$\frac{e^{(N+1)L^*\Delta} - 1}{e^{L^*\Delta} - 1} < \frac{(1 + \frac{3}{2}L^*\Delta)e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{e^{L^*\Delta} - 1} < \frac{(1 + \frac{3}{2}L^*\Delta)e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{L^*\Delta} =$$
$$= \frac{e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{L^*\Delta} + \frac{3}{2}e^{L^*(\vartheta - t_0)}.$$

Учитывая это неравенство, получаем для величины $\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M)$ следующую оценку

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) < 4e^{L^*(\vartheta - t_0)} \cdot \varepsilon(\Delta) + 2\frac{e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big) + \frac{e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varphi(\Delta)\big). \quad (2.17)$$

Ранее в этом параграфе (с. 76) функция $\varepsilon(\delta)$, $\delta > 0$, была определена как удовлетворяющая условию $\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Оказывается, такой сходимости функции $\varepsilon(\delta)$ к нулю недостаточно для сходимости правой части оценки (2.17) к нулю при $\Delta \downarrow 0$.

Для того, чтобы правая часть оценки (2.17) сходилась к нулю при $\Delta \downarrow 0$, зададим функцию $\varepsilon(\delta)$ как удовлетворяющую условию $\delta^{-1}\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. При таком задании функции $\varepsilon(\delta)$, $\delta > 0$, правая часть оценки (2.17) стремится к нулю при $\delta \downarrow 0$ и имеет порядок по $\Delta \downarrow 0$, равный минимальному из порядков величин $\Delta^{-1}\varepsilon(\delta)$ и $\Delta^{-1}\varphi(\delta) = \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + \varkappa^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

Замечание 2. Выскажем некоторые соображения относительно функций $\varepsilon(\delta)$ и $\varphi(\delta)$, $\delta > 0$. Множества $W^a(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, есть аппроксимации множеств $W(t_j)$, $t_j \in \Gamma$, которые в терминах «обратного» времени $\tau = t_0 + \vartheta - t$ представляют собой сечения $Z(\tau_i)$, $\tau_i = t_0 + \vartheta - t_j$, интегральной воронки $Z = Z(t_0, M)$ системы (1.2), дуальной к системе (1.1).

В то же время множества $X^a(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ есть аппроксимации множеств достижимости $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ — сечений интегральных воронок $X(t_j, x^{(j)})$ системы (1.1). Таким образом, можно сказать, что множества $W^a(t_j)$ и $X^a(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ есть аппроксимации сечений $W(t_j)$ и $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ интегральных воронок, связанных с системой (1.1).

Поэтому представляется вполне естественным при конструировании аппроксимаций $W^a(t_j)$ и $X^a(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ множеств $W(t_j)$ и $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ стеснить их одними и теми же ограничениями

$$d\big(W(t_j), W^a(t_j)\big) \leqslant \varepsilon(\Delta), \qquad d\big(X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}), X^a(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})\big) \leqslant \varphi(\Delta),$$

где $\varepsilon(\Delta) = \varphi(\Delta)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

В этом частном случае оценка (2.17) принимает вид

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant 4e^{L^*(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + 3\frac{e^{L^*(\vartheta - t_0)} - 1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big). \quad (2.18)$$

Учитывая, что $\delta^{-1}\varepsilon(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, получаем, что правая часть оценки (2.18) стремится к нулю при $\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0$. Порядок ее стремления к нулю определяется порядком стремления к нулю величины

$$\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) = \Delta^{-1}\varphi(\Delta) = \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + \varkappa^*(\Delta), \qquad \Delta > 0.$$

При этом ранее в этом параграфе (с. 76) было отмечено, что функция $\omega^*(\delta)$, $\delta > 0$, может быть определена как модуль непрерывности $\mu^*(\delta)$, $\delta > 0$, вектор-функции $f(t, x, u)$ по совокупности переменных t, x на G.

Конструирование же аппроксимаций $F^a(t, x)$, $(t, x) \in G$, выпуклых множеств $F(t, x) = \mathrm{co}\,\{f(t, x, u) \colon u \in P\}$ находится в нашем распоряжении и зависит от нас, насколько малой мы зададим функцию $\varkappa^*(\delta)$, $\delta > 0$. Так, например, для управляемых систем (1.1) вида

$$f(t, x, u) = \varphi(t, x) + B(t, x)u, \quad u \in P,$$

где матрица-функция $B(t, x)$ — непрерывная и невырожденная в области G, а $P = B(0; r)$ — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbb{O} \in \mathbb{R}^n$ и радиуса $r \in (0, \infty)$, мы получаем, что множество $F(t, x) = \varphi(t, x) + B(t, x)P$, $(t, x) \in G$, есть эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\varphi(t, x)$.

Введя в рассмотрение конечную сеть $P^{(\Delta)}$ в P и множество $F^{(\Delta)}(t,x) = \varphi(t,x) + B(t,x)P^{(\Delta)}$, $(t,x) \in G$, мы можем выбором сети обеспечить для любой заранее заданной функции $\varkappa^*(\delta) \downarrow 0$, $\delta \downarrow 0$, оценку

$$d\big(F(t,x), F^{(\Delta)}(t,x)\big) = d(B(t,x)P, B(t,x)P^{(\Delta)}) \leqslant \varkappa^*(\Delta), \qquad \Delta = \Delta(\Gamma), \quad (t,x) \in G.$$

В самом деле, справедливо неравенство

$$d(B(t,x)P, B(t,x)P^{(\Delta)}) \leqslant \max_{(t,x,u)\in G\times P} ||B(t,x)u - B(t,x)u^{(\Delta)}|| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(t,x)\in G} ||B(t,x)|| \cdot \max_{u\in P} ||u - u^{(\Delta)}|| \leqslant K^* \max_{u\in P} ||u - u^{(\Delta)}||;$$

здесь $||B(t,x)|| = \big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}(t,x)^2\big)^{\frac{1}{2}}$ — норма матрицы $B(t,x) = \big(b_{ij}(t,x)\big)$ и $u^{(\Delta)}$ — ближайшая в сети $P^{(\Delta)}$ точка к точке $u \in P$.

Из неравенства $K^* \max\limits_{u\in P} ||u - u^{(\Delta)}|| \leqslant \varkappa^*(\Delta)$ следует, что мы должны выбрать конечную сеть $P^{(\Delta)}$ в P так, чтобы $d(P, P^{(\Delta)}) \leqslant {K^*}^{-1}\varkappa^*(\Delta)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Отметим также, что в некоторых задачах о сближении системы (1.1) с M аппроксимации $F^{(\Delta)}(t,x)$, $(t,x) \in G$, могут определяться равенством

$$F^{(\Delta)}(t,x) = F(t,x), \quad (t,x) \in G.$$

В этих задачах мы получаем $\varkappa^*(\Delta) = 0$, $\Delta > 0$, и тогда $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) = \omega^*\big((1+K)\Delta\big)$, $\Delta > 0$.

Рассмотрим еще один важный класс управляемых систем (1.1) — стационарные управляемые системы: $f(t,x,u) = f(x,u)$, $(t,x,u) \in G \times P$.

Для таких систем модуль непрерывности $\mu^*(\delta)$, $\delta > 0$, по переменной x на множестве G выглядит так:

$$\mu^*(\delta) = \max\left\{||f(x_*,u) - f(x^*,u)||\colon (t,x_*) \text{ и } (t,x^*) \text{ из } G, ||x_* - x^*|| \leqslant \delta,\ u \in P\right\}, \quad \delta > 0.$$

Учитывая условие **A**, имеем

$$\mu^*(\delta) \leqslant L_*||x_* - x^*|| \leqslant L_*\delta, \quad (t,x_*) \text{ и } (t,x^*) \text{ из } G,\ ||x_* - x^*|| \leqslant \delta,$$

и тогда оценка (2.3) переходит в следующую оценку

$$d\big(F(x_*), F(x^*)\big) \leqslant L_*\delta, \quad (t,x_*) \text{ и } (t,x^*) \text{ из } G,\ ||x_* - x^*|| \leqslant \delta, \quad \delta > 0;$$

здесь $F(x) = \mathrm{co}\,\{f(x,u)\colon u \in P\}$, $(t,x) \in G$.

Из этой оценки очевидным образом следует

$$d\big(X(t,t_*,x_*), \widetilde{X}(t,t_*,x_*)\big) \leqslant L_*K\delta^2,$$
$$(t_*,x_*) \in G,\ \ t^* - t_* = \delta,\ \ t_0 \leqslant t_* \leqslant t \leqslant t^* \leqslant \vartheta,\ \ \delta > 0. \tag{2.19}$$

Значит, в случае стационарной системы (1.1) можем в качестве функции $\omega^*(\delta)$ взять функцию

$$\omega^*(\delta) = L_*K\delta, \quad \delta > 0.$$

При такой замене в случае стационарной системы (1.1) функции $\omega^*\big((1+K)\delta\big)$ на функцию $\omega^*(\delta) = L_*K\delta$, $\delta > 0$, оценка (2.17) имеет вид

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant 4e^{L^*(\vartheta - t_0)}\varepsilon(\Delta) + 2\frac{e^{L^*(\vartheta-t_0)} - 1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big) + \frac{e^{L^*(\vartheta-t_0)} - 1}{L^*}\big(L_*K\Delta + \varkappa^*(\Delta)\big),$$

т. е.

$$\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant 4e^{L^*(\vartheta-t_0)}(\varepsilon(\Delta) + \frac{1}{2}\frac{L_*}{L^*}K\Delta) + 2\frac{e^{L^*(\vartheta-t_0)}-1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta) + \varkappa^*(\Delta)\big). \qquad (2.20)$$

Видим, что порядок правой части оценки (2.20) по $\Delta \downarrow 0$ определяется как минимальный из порядков функций $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)$, Δ и $\varkappa^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

На этом завершаем анализ сходимости величины $\rho(\widetilde{x}^{(N)}, M)$ к нулю при $\Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(\vartheta - t_0) \downarrow 0$.

Мы установили окрестность целевого множества M, в которую гарантировано попадание концевой точки $\widetilde{x}^{(N)} = \widetilde{x}(\vartheta)$ ломаной $\widetilde{x}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $\widetilde{x}(t_0) \in \widetilde{x}^{(0)}$, порожденной кусочно-постоянным управлением $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, отвечающим разбиению Γ. Выясним теперь, в какую окрестность множества M приводит управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x^*(t_0) = \widetilde{x}^{(0)} \in W^a(t_0)$, в момент ϑ.

Движение $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x^*(t_0) = \widetilde{x}^{(0)}$, системы (1.1), порожденное управлением

$$u^*(t) = u^{(j)} \in P \text{ при } t \in [t_j, t_{j+1}),\ j = \overline{0, N-1},$$

удовлетворяет соотношениям

$$x^*(t) = x^*(t_j) + \int_{t_j}^{t} f(\tau, x^*(\tau), u^{(j)})\, d\tau, t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Рассмотрим движение $x^*(t)$ последовательно по шагам $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{0, N-1}$, и сравним точки $x^*(t_j)$ этого движения с точками $\widetilde{x}^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$, ломаной $\widetilde{x}(t)$ на $[t_0, \vartheta]$.

На начальном шаге $[t_0, t_1]$ разбиения Γ имеем (см. рис. 3)

$$x^*(t_1) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^{(0)})\, dt, \qquad \widetilde{x}^{(1)} = \widetilde{x}^{(0)} + (t_1 - t_0) f^{(\Delta)}(t_0, \widetilde{x}^{(0)}),$$

откуда следует равенство

$$x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)} = \int_{t_0}^{t_1} \big(f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}(t_0, \widetilde{x}^{(0)})\big)\, dt.$$

Согласно определению области G, имеем $(t_0, \widetilde{x}^{(0)}) = \big(t_0, x^*(t_0)\big) \in G$, $\big(t, x^*(t)\big) \in G$, при $t \in [t_0, t_1]$.

Принимая это во внимание, оценим величину

$$||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}(t_0, \widetilde{x}^{(0)})|| = ||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)||, \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Учитывая, что вектор $f(t_0, x^*(t_0), u^{(0)})$ — ближайший в множестве $F\big(t_0, x^*(t_0)\big)$ к вектору $f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big) \in F^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)$, получаем при $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} ||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)|| &\leqslant ||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x^*(t_0), u^{(0)})|| + \\ &+ ||f(t_0, x^*(t_0), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)|| \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + \varkappa^*(\Delta), \end{aligned} \qquad (2.21)$$

т. е.

$$||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)|| \leqslant \varphi^*(\Delta),$$

где $\varphi^*(\Delta) = \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + \varkappa^*(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$.

Из оценки (2.21) вытекает

$$\begin{aligned} ||x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)}|| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} ||f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f^{(\Delta)}\big(t_0, x^*(t_0)\big)||\, dt \leqslant \\ \leqslant \varphi(\Delta) = \Delta\varphi^*(\Delta), \quad \Delta > 0. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

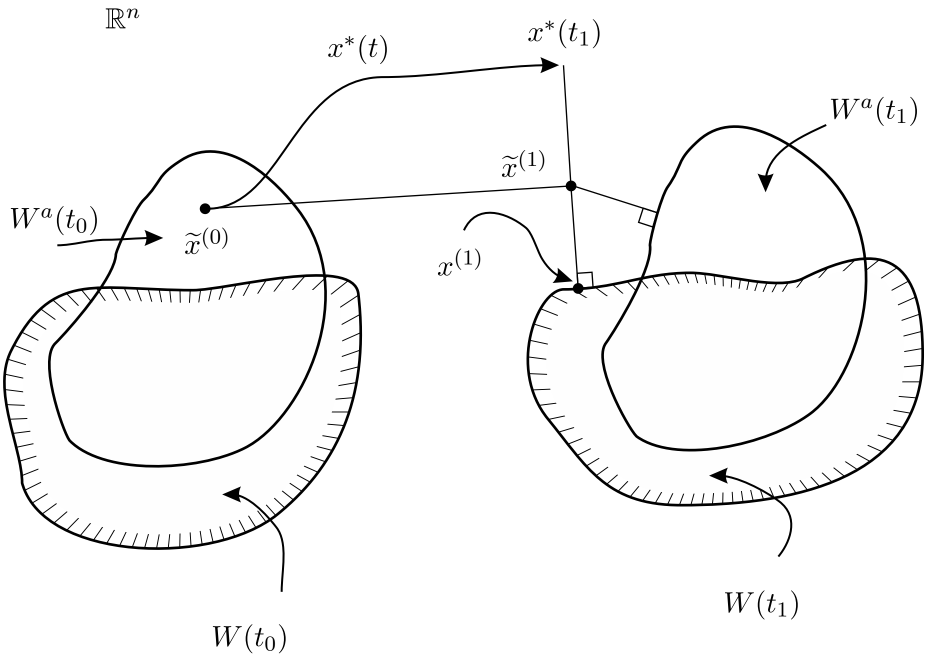


Рис. 3. Оценка величины $||x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)}||$

На следующем шаге $[t_1, t_2]$ разбиения Γ имеем (см. рис. 4)

$$x^*(t_2) = x^*(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(t, x^*(t), u^{(1)})\,dt, \qquad \widetilde{x}^{(2)} = \widetilde{x}^{(1)} + (t_2 - t_1) f^{(\Delta)}(t_1, \widetilde{x}^{(1)}),$$

откуда следует равенство

$$x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)} = (x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)}) + \int_{t_1}^{t_2} \big(f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f^{(\Delta)}(t_1, \widetilde{x}^{(1)})\big)\,dt.$$

Принимая во внимание включения $(t_1, \widetilde{x}^{(1)}) \in G$ и $\big(t, x^*(t)\big) \in G$, $t \in [t_0, \vartheta]$, а также учитывая, что вектор $f(t_1, \widetilde{x}^{(1)}, u^{(1)})$ — ближайший вектор в множестве $F\big(t_1, \widetilde{x}^{(1)}\big)$ к вектору $f^{(\Delta)}(t_1, \widetilde{x}^{(1)}) \in F^{(\Delta)}(t_1, \widetilde{x}^{(1)})$, получаем

$$\begin{gathered} ||f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f^{(\Delta)}\big(t_1, \widetilde{x}(t_1)\big)|| \leqslant ||f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)})|| + \\ + ||f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)}) - f(t_1, \widetilde{x}^{(1)}, u^{(1)})|| + ||f(t_1, \widetilde{x}^{(1)}, u^{(1)}) - f^{(\Delta)}(t_1, \widetilde{x}^{(1)})|| \leqslant \\ \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + L_*||x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)}|| + \varkappa^*(\Delta) \leqslant \\ \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + L_*\varphi(\Delta) + \varkappa^*(\Delta) = \varphi^*(\Delta) + L_*\varphi(\Delta), \end{gathered}$$

где $\varphi^*(\Delta) = \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + \varkappa^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

Учитывая это неравенство и $||x^*(t_1) - \widetilde{x}^{(1)}|| \leqslant \varphi(\Delta)$, получаем оценку

$$||x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)}|| \leqslant \varphi(\Delta) + \Delta\varphi^*(\Delta) + \Delta L_*\varphi(\Delta) \leqslant \varphi(\Delta) + e^{L_*\Delta}\varphi(\Delta). \tag{2.23}$$

Далее рассмотрим следующий промежуток $[t_2, t_3]$ разбиения Γ. Справедливы равенства

$$x^*(t_3) = x^*(t_2) + \int_{t_2}^{t_3} f(t, x^*(t), u^{(2)})\,dt, \qquad \widetilde{x}^{(3)} = \widetilde{x}^{(2)} + \int_{t_2}^{t_3} f^{\Delta}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})\,dt,$$

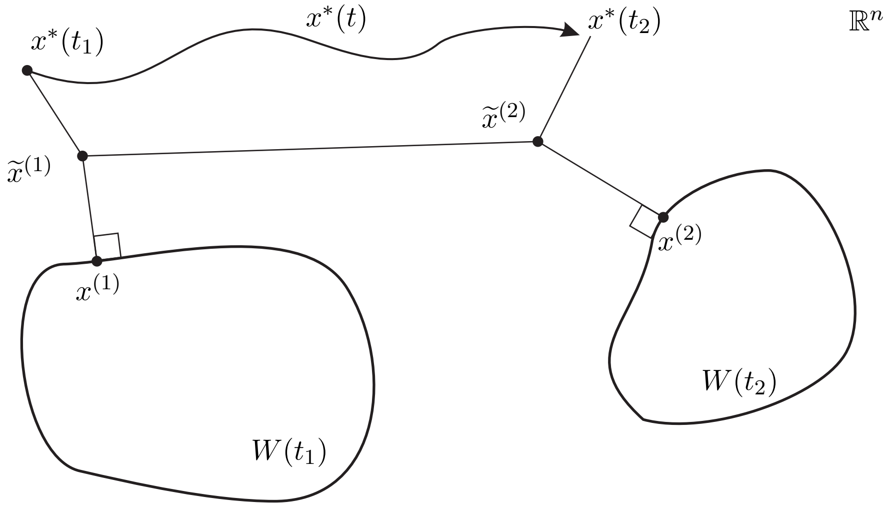


Рис. 4. Оценка величины $||x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)}||$

из которых вытекает

$$x^*(t_3) - \widetilde{x}^{(3)} = (x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)}) + \int_{t_2}^{t_3} \big(f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})\big)\, dt.$$

Учитывая включения $(t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \in G$, $\big(t, x^*(t)\big) \in G$ при $t \in [t_2, t_3]$ и то, что $f(t_2, \widetilde{x}^{(2)}, u^{(2)})$ — ближайший вектор в $F(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$ к вектору $f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)}) \in F^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})$, получаем

$$\begin{gathered} ||f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})|| \leqslant ||f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, x^*(t_2), u^{(2)})|| + \\ + ||f(t_2, x^*(t_2), u^{(2)}) - f(t_2, \widetilde{x}^{(2)}, u^{(2)})|| + ||f(t_2, \widetilde{x}^{(2)}, u^{(2)}) - f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})|| \leqslant \\ \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big) + L_*||x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)}|| + \varkappa^*(\Delta) \leqslant \\ \leqslant \varphi^*(\Delta) + L_*\big(\varphi(\Delta) + e^{L_*\Delta}\varphi(\Delta)\big), \quad t \in [t_2, t_3]. \end{gathered}$$

Из этого неравенства и (2.23) следует

$$\begin{gathered} ||x^*(t_3) - \widetilde{x}^{(3)}|| \leqslant ||x^*(t_2) - \widetilde{x}^{(2)}|| + \int_{t_2}^{t_3} ||f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f^{(\Delta)}(t_2, \widetilde{x}^{(2)})||\, dt \leqslant \\ \leqslant \big(\varphi(\Delta) + e^{L_*\Delta}\varphi(\Delta)\big) + \Delta\varphi^*(\Delta) + \Delta L_*\big(\varphi(\Delta) + e^{L_*\Delta}\varphi(\Delta)\big) \leqslant \\ \leqslant e^{L_*\Delta}\big(\varphi(\Delta) + e^{L_*\Delta}\varphi(\Delta)\big) + \varphi(\Delta). \end{gathered}$$

Эту оценку запишем в виде

$$||x^*(t_3) - \widetilde{x}^{(3)}|| \leqslant \sum_{k=0}^{2} e^{kL_*\Delta}\varphi(\Delta).$$

Рассмотрение следующих промежутков $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{3, N-1}$, и сравнение соответствующих им точек $x^*(t_j)$ и $\widetilde{x}^{(j)}$ дает оценку

$$||x^*(t_j) - \widetilde{x}^{(j)}|| \leqslant \sum_{k=0}^{j-1} e^{kL_*\Delta}\varphi(\Delta), \quad j = \overline{4, N-1}. \tag{2.24}$$

В частности, для последней пары точек $x^*(t_N)$, $\widetilde{x}^{(N)}$ получаем оценку (см. рис. 5):

$$||x^*(t_N) - \widetilde{x}^{(N)}|| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} e^{kL_*\Delta}\varphi(\Delta) \leqslant \frac{e^{L_*(\vartheta-t_0)}-1}{e^{L_*\Delta}-1}\varphi(\Delta) < \frac{e^{L_*(\vartheta-t_0)}-1}{L_*}\big(\Delta^{-1}\varphi(\Delta)\big). \quad (2.25)$$

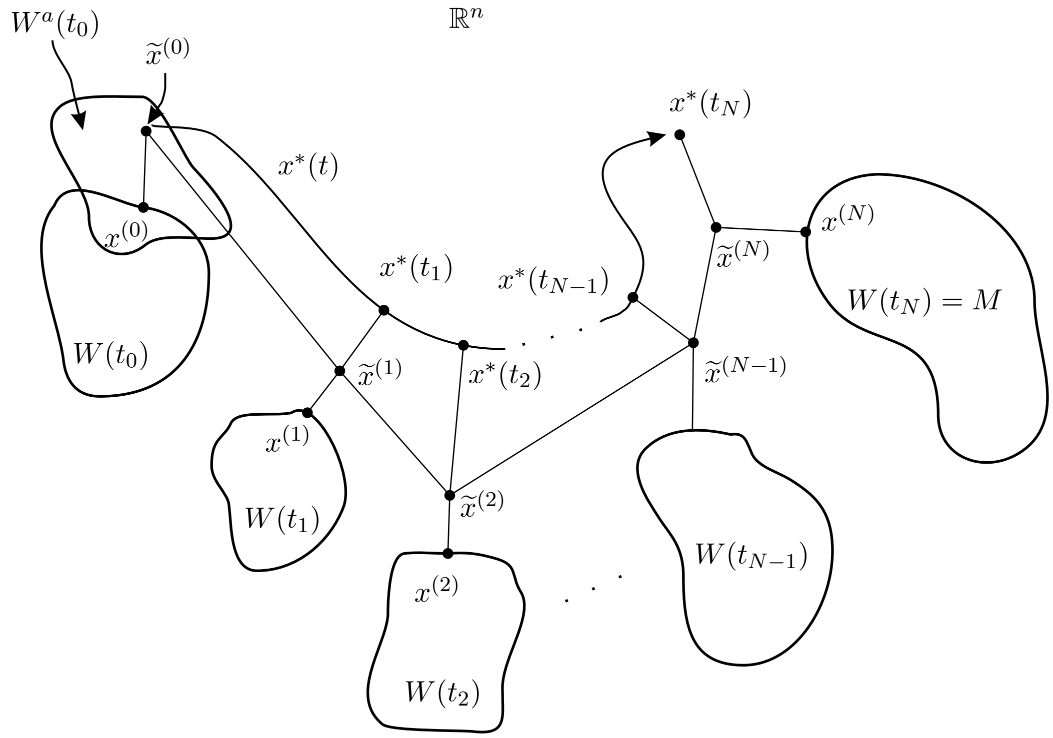


Рис. 5. Оценка расстояния от $x^*(t_N)$ до M

Из оценок (2.17), (2.25) вытекает оценка отклонения концевой точки $x^*(t_N)$ движения $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1.1) от целевого множества M:

$$\begin{aligned}\rho(x^*(t_N), M) &\leqslant ||x^*(t_N) - \widetilde{x}^{(N)}|| + \rho(\widetilde{x}^{(N)}, M) \leqslant 4e^{L^*(\vartheta-t_0)}\varepsilon(\Delta) + \\ &+ 2\frac{e^{L^*(\vartheta-t_0)}-1}{L^*}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big) + \big(\frac{e^{L^*(\vartheta-t_0)}-1}{L^*} + \frac{e^{L_*(\vartheta-t_0)}-1}{L_*}\big)\big(\Delta^{-1}\varphi(\Delta)\big).\end{aligned} \quad (2.26)$$

З а м е ч а н и е 3. Если константы L_* и L^* в условиях **A** и **E** заменить константой $L \geqslant \max(L_*, L^*)$, то из оценки (2.26) будет следовать более грубая, но имеющая более простой вид оценка

$$\rho(x^*(t_N), M) \leqslant 4e^{L(\vartheta-t_0)}\varepsilon(\Delta) + 2\frac{e^{L(\vartheta-t_0)}-1}{L}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big) + 2\frac{e^{L(\vartheta-t_0)}-1}{L}\big(\Delta^{-1}\varphi(\Delta)\big). \quad (2.27)$$

Следующее за (2.27) огрубление оценки (2.26) заключается в отбрасывании из правой части оценки (2.27) минус единицы

$$\rho(x^*(t_N), M) \leqslant e^{L(\vartheta-t_0)}\Big(4\varepsilon(\Delta) + 2L^{-1}\big(\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big) + 2L^{-1}\big(\Delta^{-1}\varphi(\Delta)\big)\Big), \qquad \Delta = \Delta(\Gamma). \quad (2.28)$$

Если теперь в рамках этого замечания допустить, что величины $\varepsilon(\Delta)$ и $\varphi(\Delta)$, $\Delta > 0$, заданы удовлетворяющими равенству $\varepsilon(\Delta) = \varphi(\Delta)$, $\Delta > 0$, то оценка (2.28) примет совсем простой вид

$$\rho(x^*(t_N), M) \leqslant 4e^{L(\vartheta-t_0)}\big(\varepsilon(\Delta) + L^{-1}\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)\big), \qquad \Delta = \Delta(\Gamma). \quad (2.29)$$

В этом случае порядок правой части оценки (2.29) по $\Delta \downarrow 0$ определяется порядком величины $\Delta^{-1}\varepsilon(\Delta)$.

§ 3. Пример

Рассмотрим задачу об управлении маятником при помощи маховика. На рис. 6 приведена схема рассматриваемой механической системы. Стержень длиной L и массой m может вращаться в плоскости вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости чертежа.

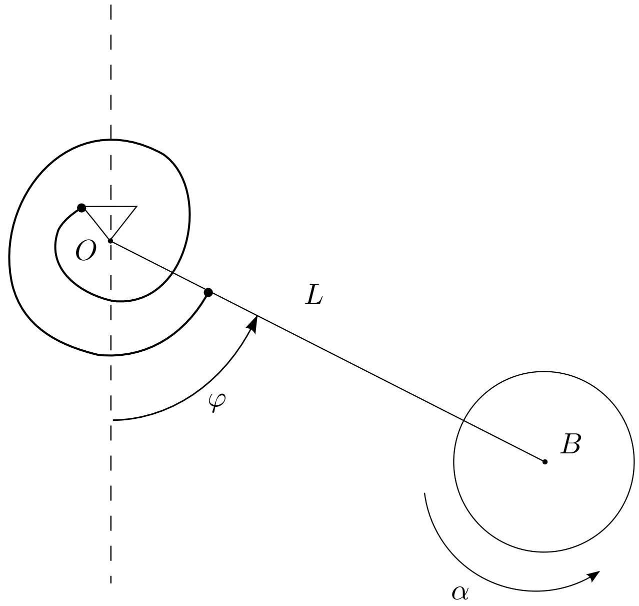


Рис. 6. Система маятника, управляемого маховиком

Момент инерции стержня относительно точки O равен J. Расстояние от точки O до центра масс стержня обозначим l.

Симметричный относительно своей оси вращения маховик смонтирован так, что его центр находится в точке B. Маховик может вращаться вокруг оси, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости чертежа. Ось вращения маховика является осью ротора электродвигателя. Суммарная масса маховика и электродвигателя равна M, а суммарный момент инерции маховика и электродвигателя относительно их оси вращения равен J^*.

Считаем, что в шарнире O присутствуют силы вязкого трения и повороту стержня OB препятствует спиралевидная пружина с жесткостью n.

Введем переменные $x_1 = \varphi$, $x_2 = \varphi'$, $x_3 = \alpha'$. Тогда уравнения движения системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = -\sin(x_1) - \sigma x_1 - \gamma x_2 + a x_3 - b u, \\ \dot{x_3} = \sin(x_1) + \sigma x_1 + \gamma x_2 - \delta a x_3 + \delta b u. \end{cases}$$

Сформулируем задачу.

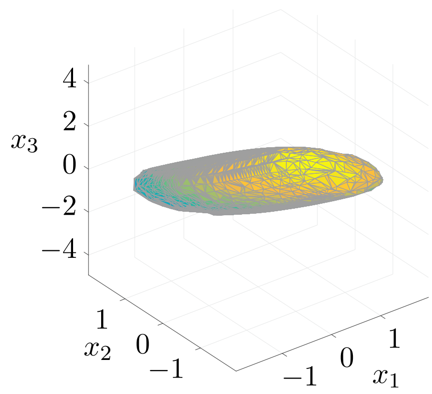
Пусть заданы целевое множество M — шар в $\mathbb{R}^3$ радиуса $r = 1$ с центром в точке $O = (0, 0, 0)$, начальное положение системы $x_0 = (-0.589, 0.185, 0.353300)$ и интервал времени $[t_0, \vartheta] = [0, 1]$.

Требуется сконструировать управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, приводящее движение системы $x^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, в момент времени $\vartheta = 1$ на целевое множество M.

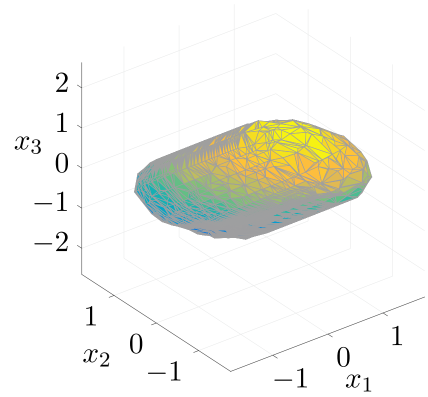
На рис. 7, 8, 9 графически представлены результаты моделирования.

Расчеты выполнялись при следующих значениях параметров: $\sigma = 0.1$, $\gamma = 0.1$, $a = 0.0195$, $b = 1$.

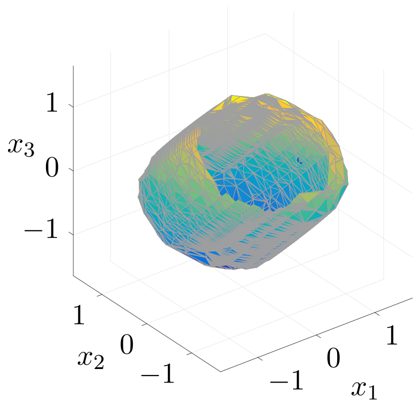
Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-00928-21-01, проект FEWS-2020-0010. При выполнении исследований были использованы вычислительные ресурсы центра коллективного пользования ИММ УрО РАН «Суперкомпьютерный центр ИММ УрО РАН».



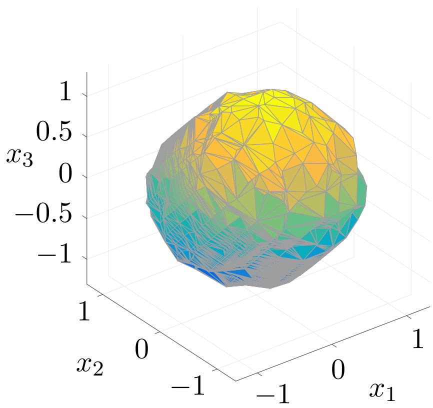
а) $t = 0$



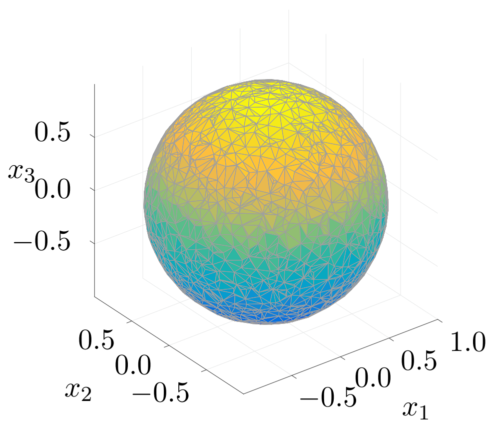
б) $t = 0.25$



в) $t = 0.5$



г) $t = 0.75$



д) $t = 1$

Рис. 7. Сечения множества разрешимости $W^a(t)$ при различных значениях t

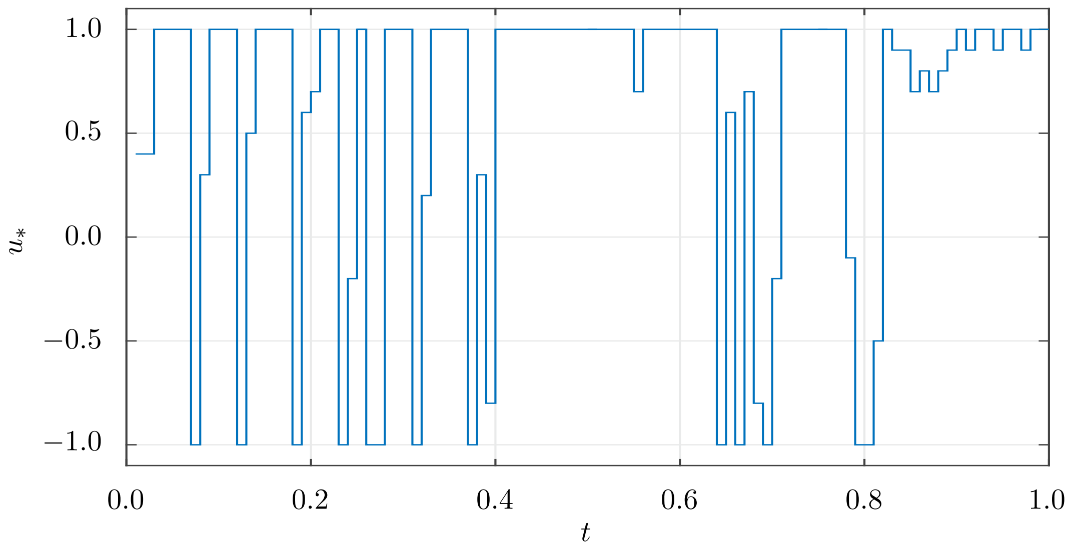


Рис. 8. Разрешающее управление $u^*(t)$

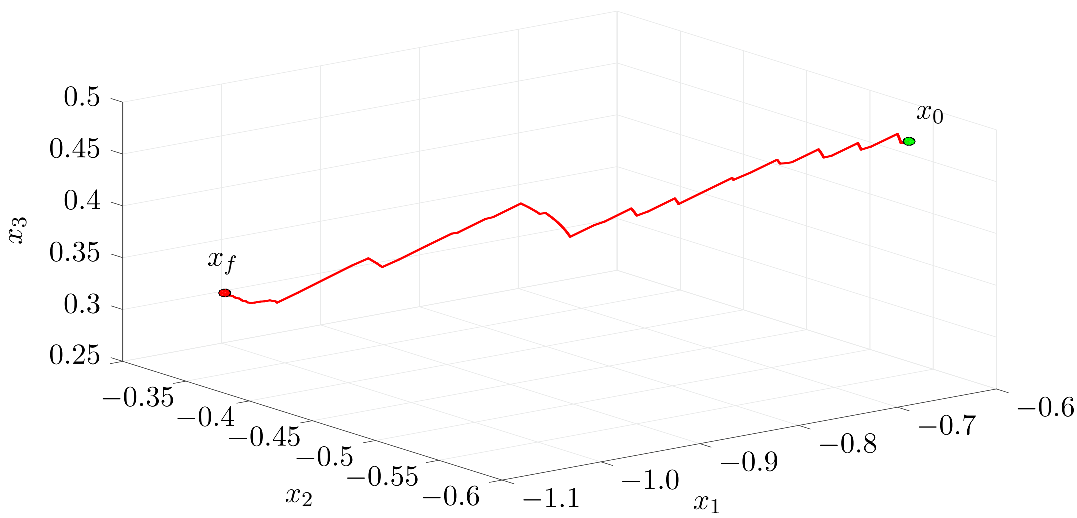


Рис. 9. Траектория движения $x^*(t)$, $x_f \in M$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. Куржанский А. Б. Избранные труды. М.: Изд-во Московского университета, 2009.
4. Kurzhanski A. B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1996.
5. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 131–140. http://mi.mathnet.ru/timm497
6. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.

7. Никольский М. С. Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34.
8. Гусев М. И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94. http://mi.mathnet.ru/timm428
9. Филиппова Т. Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 223–232. http://mi.mathnet.ru/timm539
10. Ананьевский И. М. Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2001. Вып. 3. С. 3–15. http://mi.mathnet.ru/at1743
11. Ананьевский И. М. Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11. http://mi.mathnet.ru/de10757
12. Ушаков В. Н., Матвийчук А. Р., Паршиков Г. В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 275–284. http://mi.mathnet.ru/timm953
13. Матвийчук А. Р., Ухоботов В. И., Ушаков А. В., Ушаков В. Н. Задача о сближении нелинейной управляемой системы на конечном промежутке времени // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 165–187. https://elibrary.ru/item.asp?id=29364164
14. Ершов А. А., Ушаков В. Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Математический сборник. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99. https://doi.org/10.4213/sm8761
15. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.
16. Безнос А. В., Гришин А. А., Ленский А. В., Охоцимский Д. Е., Формальский А. М. Управление маятником при помощи маховика // Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике. М.: Изд-во Московского ун-та, 2019. С. 94–118.
17. Ушаков В. Н., Хрипунов А. П. О приближенном построении интегральных воронок дифференциальных включений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1994. Т. 34. № 7. С. 965–977. http://mi.mathnet.ru/zvmmf2529
18. Гусейнов Х. Г., Моисеев А. Н., Ушаков В. Н. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. № 2. С. 179–187. https://elibrary.ru/item.asp?id=32805283

Поступила в редакцию 13.07.2021

Ушаков Владимир Николаевич, д. ф.-м. н., главный научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Ушаков Андрей Владимирович, младший научный сотрудник, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3004-4245
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Кувшинов Олег Александрович, математик, отдел динамических систем, Институт математики и механики УрО РАН, 620219, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6827-1809
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Цитирование: В. Н. Ушаков, А. В. Ушаков, О. А. Кувшинов. О конструировании разрешающего управления в задаче о сближении в фиксированный момент времени // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2021. Т. 58. С. 73–93.

V. N. Ushakov, A. V. Ushakov, O. A. Kuvshinov

On the construction of resolving control in the problem of getting close at a fixed time moment

Keywords: control, controlled system, getting close problem, reachable set, integral funnel, dual controlled system.

MSC2020: 37B65, 37E05

DOI: 10.35634/2226-3594-2021-58-05

The problem of getting close of a controlled system with a compact space in a finite-dimensional Euclidean space at a fixed time is studied. A method of constructing a solution to the problem is proposed which is based on the ideology of the maximum shift of the motion of the controlled system by the solvability set of the getting close problem.

Funding. This research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of state assignment No. 075-00928-21-01, project FEWS-2020-0010. The research was performed using computing resources of the collective use center of IMM UB RAS "Supercomputer center of IMM UB RAS".

REFERENCES

1. Krasovskii N. N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* (Control of a dynamical system), Moscow: Nauka, 1985.
2. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Game-theoretical control problems*, New York: Springer, 1988. Original Russian text published in Krasovskii N. N., Subbotin A. I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka, 1974.
3. Kurzhanski A. B. *Izbrannye trudy* (Selected works), Moscow: Moscow State University, 1977.
4. Kurzhanski A. B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*, Boston: Birkhäuser, 1996.
5. Kryazhimskii A. V., Osipov Yu. S. On an algorithmic criterion of the solvability of game problems for linear controlled systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, suppl. 1, pp. 154–162. https://zbmath.org/?q=an:1116.49325
6. Chernous'ko F. L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* (Evaluation of phase state of dynamical systems), Moscow: Nauka, 1988.
7. Nikol'skii M. S. Approximation of the feasibility set for a differential inclusion, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. XV. Vychisl. Mat. Kibernet.*, 1987, no. 4, pp. 31–34.
8. Gusev M. I. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 134–146. https://doi.org/10.1134/S008154381006012X
9. Filippova T. F. Differential equations for ellipsoidal estimates for reachable sets of a nonlinear dynamical control system, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. 75–84. https://doi.org/10.1134/S0081543810070072
10. Anan'evskii I. M. Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters, *Automation and Remote Control*, 2001, vol. 62, no. 3, pp. 343–355. https://doi.org/10.1023/A:1002832924913
11. Anan'evskii I. M. Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 1, pp. 1–10. https://doi.org/10.1023/A:1025170521270
12. Ushakov V. N., Matviichuk A. R., Parshikov G. V. A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the feasibility set, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 135–144. https://doi.org/10.1134/S0081543814020126
13. Matviychuk A. R., Ukhobotov V. I., Ushakov A. V., Ushakov V. N. The approach problem of a nonlinear controlled system in a finite time interval, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 114–128. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.005

14. Ershov A. A., Ushakov V. N. An approach problem for a control system with an unknown parameter, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352. https://doi.org/10.1070/SM8761
15. Polyak B. T., Khlebnikov M. V., Shcherbakov P. S. *Upravlenie lineinymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: tekhnika lineinykh matrichnykh neravenstv* (Control of linear systems subjected to exogenous disturbances: the linear matrix inequality technique), Moscow: Lenand, 2014.
16. Beznos A. V., Grishin A. A., Lenskii A. V., Okhotsimskii D. E., Formal'skii A. M. Pendulum control with the handwheel, *Spetspraktikum po teoreticheskoi i prikladnoi mekhanike*, Moscow: Moscow State University, 2019, pp. 94–118.
17. Ushakov V. N. Khripunov A. P. The construction of approximate integral funnels of differential inclusions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1994, vol. 34, no. 7, pp. 833–842. https://zbmath.org/?q=an:0839.93009
18. Guseinov Kh. G., Moiseev A. N., Ushakov V. N. On approximations of attainability sets of control systems, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 179–187. https://elibrary.ru/item.asp?id=32805283

Received 13.07.2021

Vladimir Nikolaevich Ushakov, Doctor of Physics and Mathematics, Principal Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0527-5375
E-mail: ushak@imm.uran.ru

Andrei Vladimirovich Ushakov, Junior Researcher, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3004-4245
E-mail: aushakov.pk@gmail.com

Oleg Aleksandrovich Kuvshinov, Mathematician, Department of Dynamical Systems, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620219, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6827-1809
E-mail: okuvshinov@inbox.ru

Citation: V. N. Ushakov, A. V. Ushakov, O. A. Kuvshinov. On the construction of resolving control in the problem of getting close at a fixed time moment, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2021, vol. 58, pp. 73–93.