Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра теоретической физики

И. С. Мамаев

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Учебное пособие

Ижевск
2021

УДК 531.011/075.8
ББК 22.311.3я73
М 22

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ.

Рецензент: д-р ф.-м. наук А. А. Килин.

Пособие подготовлено в Уральском математическом центре (соглашение № 075-02-2021-1383).

М 22 **Мамаев И. С.** Нелинейные уравнения математической физики. Конечномерные модели движения тел в жидкости: Учеб. пособие / И. С. Мамаев. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. — 62 с.

В данном пособии рассматриваются нелинейные уравнения движения, описывающие движение гладкого твердого тела в жидкости под действием внешних периодических сил и момента сил, а также за счет параметрического возбуждения, возникающего при периодическом движении внутренней массы. На конкретных примерах плоскопараллельного движения круглого и эллиптического профилей представлены основные результаты анализа, полученные аналитически и с использованием современных компьютерных методов исследования нелинейных динамических систем, включая построение бифуркационных диаграмм, карт динамических режимов и т. д.

Пособие предназначено для студентов старших курсов, аспирантов и преподавателей университетов. При исследовании рассматриваемых задач от пользователя требуются навыки программирования и использования компьютерных систем аналитических вычислений.

УДК 531.011/075.8
ББК 22.311.3я73

ISBN 978-5-4312-0935-2

Содержание

Предисловие

Содержание данного учебного пособия составляют дополнительные разделы, изучаемые студентами Удмуртского государственного университета (УдГУ) при освоении дисциплины «Нелинейные уравнения математической физики» и «Вычислительная математика в физических задачах», рекомендации для решения задач теории динамических систем, описываемых нелинейными уравнениями, с использованием современных методов анализа. При написании преследовалась цель продемонстрировать основные аналитические и численные методы решения конкретных задач по возможности в наиболее простой и ясной форме при сохранении необходимой научной строгости. Вычислительные процедуры по построению двумерных отображений и карт динамических режимов, необходимых для анализа рассматриваемых нелинейных систем, выполнены с использованием собственной программной разработки автора пособия — программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос» (свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 2011611415; авторы: Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А.).

Материал в пособии разделен на три основные части. В первой части описана математическая модель движения гладкого тела в вязкой жидкости под действием внешних сил и момента сил, а также при периодическом движении внутренней массы, приведены уравнения движения. Во второй части подробно проанализировано плоскопараллельное движение кругового профиля в жидкости при ненулевой постоянной циркуляции под действием внешних периодических силы и момента. Разобраны различные интегрируемые случаи. В третьей части рассмотрена динамика плоскопараллельного движения эллиптического профиля, содержащего внутри себя подвижную материальную точку, в среде с трением. Для рассмотренной системы построены карта динамических режимов, показателей Ляпунова, однопараметрические бифуркационные диаграммы, карты величин перемещения за фиксированное число периодов. Кроме изложения теоретического материала, примеров решения задач, в данном пособии приведен перечень аудиторных и контрольных задач и задач для самостоятельного решения. Для некоторых примеров приведены решения с графическими иллюстрациями, полученными с помощью среды программирования Microsoft Visual Studio на языке C/C++, пакета gnu octave, компьютерной программы для аналитических вычислений Maple и программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос», что способствует лучшему пониманию предмета.

Необходимость издания данного пособия обусловлена отсутствием современных изданий по данной тематике в библиотечном фонде УдГУ. В основу пособия положены лекции, читаемые в Институте математики, информационных технологий и физики в УдГУ для студентов направления «Прикладные математика и физика» (в рамках дисциплин «Нелинейные уравнения математической физики» и «Вычислительная математика в физических задачах»).

Целью издания данного учебного пособия является формирование знаний и навыков, достаточных для квалифицированного решения задач по определенным разделам теоретической механики, теории непрерывных динамических систем для исследования конкретных задач механики, гидродинамики, а также формирование целостной системы базовых знаний об основных понятиях, результатах, методах и приемах качественного исследования динамических систем, описывающих движение твердого тела в среде с трением. Для успешного освоения курса с использованием данного пособия студенту необходимо владеть знаниями курса общей физики, теоретической механики, численных методов. Также курс предполагает наличие знаний по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, курсов математического анализа. Для ознакомления с возможностями комплекса «Компьютерная динамика: хаос» и при исследовании новых задач от пользователя требуются навыки программирования и использования компьютерных систем аналитических вычислений.

Методическое пособие рассчитано на высокий уровень физико-математической подготовки студентов и необходимо для освоения следующих компетенций:

– способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач;

– способность использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин;

– способность применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки).

Пособие предназначено для студентов бакалавриата, магистратуры, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений университетов, а также для специалистов в области теоретической механики. Читателю рекомендуется также ознакомиться с ранее изданными учебно-методическими пособиями, в которых описаны примеры использования программы «Компьютерная динамика: хаос» при исследовании динамических систем с непрерывным временем, в частности задач вихревой гидродинамики [1] и неголономной механики [2, 3], а также систем с дискретным временем [4]. При исследовании некоторых задач, в частности при построении двумерных отображений, от пользователя требуются навыки программирования и использования компьютерных систем аналитических вычислений. Основные синтаксические конструкции языков octave и C/C++ с примерами использования этих конструкций и решениями простейших алгоритмических задач с пояснениями можно найти в [5, 6].

Введение

При описании свободного движения твердого тела в идеальной жидкости обычно используют уравнения Кирхгофа [7], которые справедливы при условии, что жидкость является несжимаемой, безвихревой, невязкой и покоится на бесконечности. В случае плоскопараллельного движения к этим уравнениям можно добавить члены, учитывающие влияние постоянной циркуляции [8, 9]. В работе [10] было показано, что движение тела под действием сил, обусловленных циркуляцией, будет совершаться в некоторой кольцевой области, размеры которой зависят от параметров тела и величины циркуляции. Управляемое движение в случае циркуляции, изменяемой с помощью ротора Флетнера, изучалось в работе [11]. Анализ движения тела при безциркуляционном обтекании с учетом силы тяжести представлен в работе [12], а с учетом циркуляции — в [9].

Моделирование движения тяжелых тел в идеальной жидкости приводит к равноускоренным движениям, которые в экспериментах практически не наблюдаются (см., например, [13]). Поэтому для корректного описания движения в таких случаях необходимо учитывать вязкое трение с помощью различных феноменологических моделей или определять вязкие силы и моменты сил с помощью численного решения уравнений Навье–Стокса. Обзор различных феноменологических моделей вязкого сопротивления в контексте задачи Максвелла о падающей пластинке выполнен в работе [14].

В последнее время активно обсуждается задача о передвижении тела без использования внешних подвижных элементов, инициированная проблемами мобильной робототехники. В частности, в работе [15] впервые была рассмотрена задача о самопродвижении в идеальной жидкости тела с подвижными внутренними массами, были указаны первые интегралы движения и условия, необходимые для неограниченного перемещения тела. Идеи работы [15], изложенные в рамках модели идеальной жидкости, получили развитие, например, в [16, 18]. Экспериментальное исследование самопродвижения в жидкости за счет внутренних масс представлено в [19]. В работе [20] рассмотрено передвижение тела в сопротивляющейся среде за счет несимметричных колебаний внутренней массы, определены условия, при которых средняя скорость системы максимальна. В [21] движение тела за счет внутренней массы моделируется на основе совместного решения уравнений движения тела и уравнений Навье–Стокса.

В первой части данного учебного пособия приводится математическая модель системы, описывающей движение твердого тела в жидкости под действием внешних периодических сил и момента сил, а также за счет параметрического возбуждения, возникающего при периодическом движении внутренней массы, приводятся уравнения движения системы. Во второй части мы рассматриваем конкретный пример движения кругового профиля. Уравнения движения кругового профиля представляют собой неавтономную систему, периодически зависящую от времени, что позволяет применить результаты описанных выше работ для исследования нашей системы. Показано, что в частном случае движения кругового профиля в идеальной жидкости уравнения движения являются гамильтоновыми и аналогичны уравнениям движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле и переменном электрическом поле. Указаны условия возникновения резонансов, приводящих к неограниченному росту кинетической энергии профиля и его неограниченному перемещению. В случае, когда средняя величина внешнего момента отлична от нуля, угловая скорость растет неограниченно, а проекция фазовой траектории на плоскость скоростей асимптотически стремится к некоторой окружности. Впервые подобный эффект был найден в задаче о падении тяжелой пластинки в идеальной жидкости [13].

Достаточно часто для описания движения тел в жидкости используется неголономная модель, что, вообще говоря, некорректно с точки зрения классической механики. Хорошо известно, что неголономная модель описывает лишь системы с идеальным качением, а неголономные связи могут быть получены при предельном переходе в модели с проскальзыванием.

Значительные успехи в анализе неголономных систем, имеющих подвижные внутренние элементы, достигнуты в недавних работах [22, 23]. Было показано, что за счет колебаний внутренней массы с постоянной амплитудой и частотой сани Чаплыгина могут двигаться из состояния покоя с ускорением. Отметим, что возможность таких режимов представляет интерес для мобильной роботехники.

В связи с обнаруженными в неголономных системах эффектами [22, 23], в третьей части пособия мы исследуем движение эллиптического профиля в идеальной и вязкой (с линейным по скоростям трением [14]) жидкостях за счет перемещения в теле материальной точки. При нулевой диссипации мы имеем модель идеальной жидкости, а при стремлении коэффициента вязкости к бесконечности (в анизотропном случае) получается неголономная система. Движение рассматриваемой системы описывается тремя неавтономными уравнениями, и для ее исследования мы применяем метод построения отображений Пуанкаре. Для модели уравнений в идеальной жидкости построены двумерные точечные отображения, а для случая вязкой жидкости — трехмерные, не сохраняющие фазовый объем. В третьей части доказана невозможность неограниченного ускорения в идеальной жидкости при помощи методов КАМ-теории. На основе компьютерного моделирования показано, что в рассматриваемой системе в вязкой жидкости реализуются только режимы движения, соответствующие предельным циклам, квазипериодическим движениям или странным аттракторам. Для исследования бифуркаций построены карты динамических режимов, карты показателей Ляпунова и бифуркационные диаграммы. В системе была обнаружена бифуркация Неймарка–Сакера, приводящая к возникновению инвариантных притягивающих кривых на отображении. Также найдены бифуркации удвоения периода, приводящие к фейгенбаумовской универсальности, однако каскады таких бифуркаций в системе не обнаружены.

1. Математическая модель

1.1. Основные предположения и кинематические соотношения

Рассмотрим феноменологическое описание плоскопараллельного движения эллиптического тела в вязкой жидкости под действием периодического возмущения. Относительно рассматриваемой системы примем следующие предположения.

- Тело совершает плоскопараллельное движение.
- Со стороны жидкости на тело действуют силы и моменты, обусловленные эффектом присоединенных масс, возникновением постоянной циркуляции, вязким трением. Будем считать, что вязкие силы и момент пропорциональны соответствующим компонентам скорости тела, как в работе [25].
- На тело действуют сила и момент сил, изменяющиеся периодически в системе координат, связанной с телом.
- Профиль обладает нулевой плавучестью. Результирующий момент сил от силы тяжести и силы Архимеда равен нулю.

В рамках принятых предположений рассмотрим следующую задачу:

исследовать режимы движения описанной системы и возможность неограниченного роста ее кинетической энергии.

Для описания движения тела введем две системы координат: неподвижную Oxy и подвижную $O_b x_1 x_2$, жестко связанную с телом (см. рис. 1). Положение начала подвижной системы координат O_b и направления осей $O_b x_1$ и $O_b x_2$ выбираются таким образом, чтобы упростить вид кинетической энергии системы. Для эллиптического и кругового профилей будем считать, что начало O_b подвижной системы координат расположено в геометрическом центре тела, а оси подвижной системы координат совпадают с его геометрическими осями.

Положение тела относительно неподвижной системы координат будем определять с помощью радиус-вектора $\boldsymbol{r} = (x, y)$ начала подвижной систе-

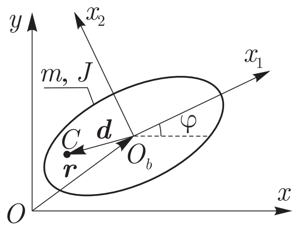


Рис. 1. Oxy — неподвижная система координат, $O_b x_1 x_2$ — подвижная система координат

мы координат O_b, а ориентацию с помощью угла φ между положительными направлениями осей Ox и $O_b x_1$, отсчитываемым от оси Ox против часовой стрелки. Таким образом, конфигурационное пространство тела $\mathcal{Q} = \{\boldsymbol{q} = (x, y, \varphi)\}$ совпадает с группой движений плоскости $SE(2)$.

Как в большинстве задач о движении твердого тела, уравнения динамики в данном случае удобнее записывать в подвижных осях. Поэтому скорость точки O_b относительно неподвижной системы координат мы будем проецировать на подвижные оси: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Угловую скорость тела обозначим ω. Тогда будут справедливы следующие кинематические соотношения [17]:

$$\dot{x} = v_1 \cos\varphi - v_2 \sin\varphi, \quad \dot{y} = v_1 \sin\varphi + v_2 \cos\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \tag{1}$$

Безусловно рассматриваемая система носит модельный характер. Тем не менее отметим, что, в принципе, периодические силы и момент, описанные во втором допущении, можно создать с помощью водоструйных двигателей, способных втягивать и выбрасывать воду. При этом объемы втянутой и отброшенной жидкости должны быть равными, чтобы не изменять плавучесть системы. Кроме того, сопла двигателей необходимо разместить таким образом, чтобы не исказить эллиптическую форму профиля.

1.2. Уравнения движения

Движение твердого тела в идеальной жидкости при наличии циркуляции описывается уравнениями Чаплыгина [8, 9], обобщающими уравнения

Кирхгофа [7]. Дополним уравнения Чаплыгина линейными по скоростям слагаемыми для моделирования вязкого трения и членами, определяющими внешнее периодическое воздействие:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_1}\right) &= \omega\frac{\partial T}{\partial v_2} - \mu_1 v_1 + f_1(t) - \Gamma v_2 - \zeta'\omega,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_2}\right) &= -\omega\frac{\partial T}{\partial v_1} - \mu_2 v_2 + f_2(t) + \Gamma v_1 + \chi'\omega,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) &= v_2\frac{\partial T}{\partial v_1} - v_1\frac{\partial T}{\partial v_2} - \mu_3\omega + g(t) + \zeta' v_1 - \chi' v_2.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Здесь T — кинетическая энергия системы (тело + жидкость + подвижная масса), Γ — циркуляция скорости жидкости вокруг тела, μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициенты вязкого сопротивления, ζ', χ' — параметры, связанные с влиянием циркуляции на гидродинамически асимметричное тело (они пропорциональны Γ и, следовательно, обращаются в ноль одновременно с Γ), $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g(t)$ — проекции внешней силы на подвижные оси и внешний момент сил соответственно, периодически изменяющиеся со временем с одним и тем же периодом τ. В дальнейшем для иллюстрации возникающих динамических эффектов мы будем использовать следующие явные зависимости для проекций сил и момента сил:

$$
f_1(t) = f_1^{(0)} + \delta_1 \sin\Omega t, \quad f_2(t) = f_2^{(0)} + \delta_2 \sin\Omega t,
$$
$$
g(t) = g^{(0)} + \varepsilon \sin\Omega t,
$$

где $\Omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$ — круговая частота.

Далее рассмотрим более подробно два частных случая системы: без внутренних масс с внешним воздействием и с внутренней движущейся массой без внешнего воздействия.

1.2.1. Система без движущихся внутренних масс

Рассмотрим случай движения гладкого эллиптического профиля ($\zeta' = 0, \chi' = 0$) в жидкости без движущихся внутренних масс. В этом случае кинетическая энергия тела задается следующим выражением:

$$T_b = \frac{1}{2}m\big((v_1 - d_2\omega)^2 + (v_2 + d_1\omega)^2\big) + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

где d_1, d_2 — компоненты радиус-вектора центра масс тела (точка C на рис. 1), m — масса профиля, J — центральный момент инерции тела.

В силу выбора подвижной системы координат кинетическая энергия жидкости задается следующей диагональной квадратичной формой:

$$T_f = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3\omega^2\right),$$

где λ_1, λ_2 — коэффициенты присоединенных масс, λ_3 — коэффициент присоединенного момента инерции.

Суммарная кинетическая энергия системы «тело + жидкость» может быть представлена в следующей форме:

$$T = T_b + T_f = \frac{1}{2}\left(Av_1^2 + Bv_2^2 + I\omega^2\right) - c_2v_1\omega + c_1v_2\omega, \tag{3}$$
$$A = m + \lambda_1, \quad B = m + \lambda_2, \quad I = J + m(d_1^2 + d_2^2) + \lambda_3,$$
$$c_1 = md_1, \quad c_2 = md_2.$$

Определим импульс системы $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ и момент импульса M следующим образом:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial v_1} = Av_1 - c_2\omega, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial v_2} = Bv_2 + c_1\omega,$$
$$M = \frac{\partial T}{\partial \omega} = -c_2v_1 + c_1v_2 + I\omega.$$

С учетом этого определения и кинематических соотношений (1) полная система *уравнений движения рассматриваемой системы представляется в форме*

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \omega p_2 - \Gamma v_2 - \mu_1 v_1 + f_1(t),\\ \dot{p}_2 &= -\omega p_1 + \Gamma v_1 - \mu_2 v_2 + f_2(t),\\ \dot{M} &= p_1v_2 - p_2v_1 - \mu_3\omega + g(t),\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = v_1\cos\varphi - v_2\sin\varphi, \quad \dot{y} = v_1\sin\varphi + v_2\cos\varphi, \quad \dot{\varphi} = \omega. \tag{4.2}$$

Мы видим, что первые три уравнения (4) образуют замкнутую подсистему, описывающую эволюцию скоростей профиля. Это позволяет в случае τ-периодической зависимости $f_1(t)$, $f_2(t)$, $g(t)$ использовать для численного исследования динамики трехмерное отображение за период:

$$\Pi^3_{t_0}:\ \mathbb{R}^3(v_1, v_2, \omega) \to \mathbb{R}^3(v_1, v_2, \omega), \tag{5}$$

которое каждой точке $\big(v_1(t_0), v_2(t_0), \omega(t_0)\big)$ траектории системы (4.1) в момент времени t_0 ставит в соответствие точку $\big(v_1(t_0{+}\tau), v_2(t_0{+}\tau), \omega(t_0{+}\tau)\big)$ на той же траектории в момент времени $t_0 + \tau$.

Законы сохранения и инвариантная мера. В отсутствие диссипации и внешних возмущений:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = 0, \quad f_1(t) = f_2(t) = 0, \quad g(t) = 0,$$

система уравнений (4) допускает три первых интеграла движения [9, 17]:

$$\begin{gathered}
P_x = p_1\cos\varphi - p_2\sin\varphi + \Gamma y = \mathrm{const},\\
P_y = p_1\sin\varphi + p_2\cos\varphi - \Gamma x = \mathrm{const},\\
L = M + xP_y - yP_x + \frac{\Gamma}{2}\big(x^2 + y^2\big) = \mathrm{const},
\end{gathered} \tag{6}$$

являющихся обобщением законов сохранения импульса и момента импульса для твердого тела, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости при наличии постоянной циркуляции. Кроме того, в рассматриваемом случае система (4.1) допускает интеграл энергии

$$E = \frac{1}{2}\big(Av_1^2 + Bv_2^2 + I\omega^2\big) - c_2v_1\omega + c_1v_2\omega = \mathrm{const}. \tag{7}$$

При движении профиля в идеальной жидкости ($\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$) система (4.1), описывающая динамику скоростей, обладает стандартной инвариантной мерой:

$$\widehat{\mu} = dv_1 \wedge dv_2 \wedge d\omega.$$

Кроме того, полная система (4) также имеет меру:

$$\widehat{\mu}_0 = dv_1 \wedge dv_2 \wedge d\omega \wedge dx \wedge dy \wedge d\varphi.$$

Другими словами, в этом случае система является консервативной, а в ее фазовом пространстве не могут существовать аттракторы и репеллеры, как обычные, так и хаотические.

В то же время в общем случае ни общая система (4), ни подсистема (4.1) не представляются в гамильтоновой форме (с гамильтонианом явно зависящим от времени). Это связано с тем, что внешняя сила в данном случае является непотенциальной.

Следует отметить, что в отсутствие диссипации и внешних возмущений ($f_1(t) = f_2(t) = 0$, $g(t) = 0$) функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $M(t)$ являются ограниченными функциями времени вследствие существования интеграла энергии (7). Кроме того, в силу интегралов (6) при $\Gamma \neq 0$ движение тела будет совершаться в ограниченной области плоскости Oxy. Как показано в [24], функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $M(t)$, $x(t)$, $y(t)$ остаются также ограниченными и в случае, когда параметры системы (момент инерции, положение центра масс и т. п.) периодически меняются со временем.

1.2.2. Система в отсутствие внешних сил и момента

Рассмотрим случай движения гладкого профиля в жидкости без внешних периодических сил и момента сил ($f_1 = f_2 = 0, g = 0$).

Выберем положение начала системы координат $O_b x_1 x_2$ и направления ее осей таким образом, чтобы выражение кинетической энергии жидкости приняло диагональный вид:

$$T_f = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 \omega^2\right),$$

где λ_1, λ_2 — присоединенные массы, λ_3 — присоединенный момент инерции.

Кинетическая энергия тела определяется выражением:

$$T_b = \frac{1}{2}m\left((v_1 - d_2\omega)^2 + (v_2 + d_1\omega)^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_0 + m(d_1^2 + d_2^2)\right)\omega^2,$$

где m — масса тела, I_0 — момент инерции тела относительно точки O_b, (d_1, d_2) — радиус-вектор положения центра масс тела.

Положение материальной точки, создающей параметрическое возбуждение, будем задавать в системе координат $O_b x_1 x_2$ радиус-вектором

$$\boldsymbol{\rho}(t) = (\xi(t), \eta(t)) = (a, b\cos\Omega t), \tag{8}$$

где a, b, Ω — постоянные параметры. С учетом (8) выражение кинетической энергии материальной точки массы m_p может быть записано в следующем виде:

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \left(\left(v_1 + \dot{\xi}(t) - \eta(t)\omega \right)^2 + (v_2 + \dot{\eta}(t) + \xi(t)\omega)^2 \right).$$

Таким образом, кинетическая энергия всей системы, с точностью до известной функции времени $\frac{1}{2} m_p \left(\dot{\xi}^2(t) + \dot{\eta}^2(t) \right)$ и множителя m, может быть представлена в форме:

$$\begin{gathered} T = \frac{1}{2}\left(A v_1^2 + B v_2^2 + I(t)\omega^2 \right) - c_2(t) v_1 \omega + c_1(t) v_2 \omega + \\ + \dot{c}_1(t) v_1 + \dot{c}_2(t) v_2 + k(t)\omega, \end{gathered} \tag{9}$$

$$A = \frac{m + m_p + \lambda_1}{m_p}, \quad B = \frac{m + m_p + \lambda_2}{m_p}, \quad I(t) = \widetilde{I} + \left(\xi^2(t) + \eta^2(t) \right),$$

$$\widetilde{I} = \frac{I_0 + \lambda_3}{m_p}, \quad k(t) = \xi(t)\dot{\eta}(t) - \eta(t)\dot{\xi}(t),$$

$$c_1(t) = \frac{m}{m_p} d_1 + \xi(t), \quad c_2(t) = \frac{m}{m_p} d_2 + \eta(t).$$

Здесь $I(t)$ — момент инерции системы относительно точки O_b, $k(t)$ — гиростатический момент, возникающий вследствие движения материальной точки.

Если движение тела управляется за счет перемещения нескольких материальных точек с координатами (ξ_i, η_i) и массами m_i, то в выражении (9) необходимо полагать

$$\xi(t) = \frac{1}{m}\sum m_i\xi_i(t), \quad \eta(t) = \frac{1}{m}\sum m_i\eta_i,$$
$$k(t) = \frac{1}{m}\sum m_i(\xi_i(t)\dot{\eta}_i(t) - \eta_i(t)\dot{\xi}_i(t)),$$
$$\xi^2(t) = \frac{1}{m}\sum m_i\xi_i^2(t), \quad \eta^2(t) = \frac{1}{m}\sum m_i\eta_i^2(t), \quad m = \sum m_i.$$

Определим импульс системы $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, момент импульса M и гамильтониан:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial T}{\partial v_1} = Av_1 - c_2(t)\omega + \dot{c}_1(t), \\ p_2 &= \frac{\partial T}{\partial v_2} = Bv_2 + c_1(t)\omega + \dot{c}_2(t), \\ M &= \frac{\partial T}{\partial \omega} = -c_2(t)v_1 + c_1(t)v_2 + I(t)\omega + k(t), \end{aligned} \tag{10}$$

$$H = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}) + M\omega - T = \frac{1}{2\Delta}\left(\boldsymbol{P}, \mathbf{C}\boldsymbol{P}\right), \tag{11}$$
$$\boldsymbol{P} = \left(p_1 - \dot{c}_1(t), p_2 - \dot{c}_2(t), M - k(t)\right), \quad \Delta = ABI(t) - Ac_1^2(t) - Bc_2^2(t),$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} BI(t) - c_1^2(t) & -c_1(t)c_2(t) & Bc_2(t) \\ -c_1(t)c_2(t) & AI(t) - c_2^2(t) & -Ac_1(t) \\ Bc_2(t) & -Ac_1(t) & AB \end{pmatrix}.$$

С учетом (10), (11) уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2\frac{\partial H}{\partial M} - \Gamma\frac{\partial H}{\partial p_2} - \zeta\frac{\partial H}{\partial M} - \mu_1\frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_2 &= -p_1\frac{\partial H}{\partial M} + \Gamma\frac{\partial H}{\partial p_1} + \chi\frac{\partial H}{\partial M} - \mu_2\frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot{M} &= p_1\frac{\partial H}{\partial p_2} - p_2\frac{\partial H}{\partial p_1} + \zeta\frac{\partial H}{\partial p_1} - \chi\frac{\partial H}{\partial p_2} - \mu_3\frac{\partial H}{\partial M}, \end{aligned} \tag{12}$$
$$\Gamma = \frac{\Gamma'}{m_p}, \quad \zeta = \frac{\zeta'}{m_p}, \quad \chi = \frac{\chi'}{m_p}, \quad \mu_i = \frac{\mu_i'}{m_p}.$$

Динамика в отсутствие диссипации. В отсутствие диссипации ($\mu_k = 0$, $k = 1, 2, 3$) уравнения (1), (12) являются гамильтоновыми с гамильтонианом (11) и могут быть записаны в следующей форме

$$\dot{z}_i = \{z_i, H\} = \sum \{z_i, z_j\} \frac{\partial H}{\partial z_j}, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{z} = (p_1, p_2, M, x, y, \varphi)$, а $\{z_i, z_j\}$ — базисные скобки, имеющие вид

$$\begin{gathered}
\{M, p_1\} = -p_2 + \zeta, \quad \{M, p_2\} = p_1 - \chi, \quad \{p_1, p_2\} = -\Gamma, \\
\{M, \varphi\} = -1, \quad \{M, x\} = \{M, y\} = 0, \quad \{p_1, \varphi\} = \{p_2, \varphi\} = 0, \\
\{p_1, x\} = \{p_2, y\} = -\cos\varphi, \quad \{p_2, x\} = -\{p_1, y\} = \sin\varphi, \\
\{x, \varphi\} = \{y, \varphi\} = 0, \quad \{x, y\} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

В этом случае вследствие того, что гамильтониан (11) не зависит явно от координат x, y, полная система уравнений (13) допускает два первых интеграла движения

$$\begin{aligned}
p_x &= p_1 \cos\varphi - p_2 \sin\varphi + \Gamma y + \zeta \sin\varphi - \chi \cos\varphi = \mathrm{const}, \\
p_y &= p_1 \sin\varphi + p_2 \cos\varphi - \Gamma x - \zeta \cos\varphi - \chi \sin\varphi = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Кроме того, от системы (13) отделяется замкнутая подсистема относительно p_1, p_2, M, обладающая функцией Казимира:

$$F = \frac{1}{2}\Big((p_1 - \chi)^2 + (p_2 - \zeta)^2\Big) + \Gamma M. \tag{16}$$

В работе [10] с помощью интегралов (15), (16) показано, что свободное движение системы всегда происходит в замкнутой области. Такое доказательство возможно из-за существования интеграла энергии в случае свободного движения.

На заданной поверхности уровня интегралов $p_x = p_x^{(0)}$, $p_y = p_y^{(0)}$, где $p_x^{(0)}$, $p_y^{(0)}$ — фиксированные постоянные, исключим из интегралов (15), (16) переменные p_1 и p_2, получим следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2}\left(\left(p_x^{(0)} - \Gamma y\right)^2 + \left(p_y^{(0)} + \Gamma x\right)^2\right) + \Gamma M. \tag{17}$$

Из выражения (17) видно, что неограниченное удаление рассматриваемой системы от начального положения в идеальной жидкости (т. е.

при $\mu_k = 0$, $k = 1, 2, 3$) при ненулевой циркуляции ($\Gamma \neq 0$) под действием параметрического возбуждения, но при отсутствии внешних сил, возможно тогда и только тогда, когда кинетический момент $M(t)$ возрастает по абсолютной величине.

На заданном уровне f интеграла (16) уравнения движения системы могут быть представлены в канонической гамильтоновой форме

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{M} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \tag{18}$$

где гамильтониан (11) выражается как функция θ, M при помощи замены

$$\begin{gathered} p_1 = \chi + \sqrt{2(f - \Gamma M)}\cos\theta, \quad p_2 = \zeta + \sqrt{2(f - \Gamma M)}\sin\theta, \\ \theta = \arctan\frac{p_2 - \zeta}{p_1 - \chi}. \end{gathered} \tag{19}$$

Поскольку гамильтониан (11) является периодической функцией времени, то уравнения (18) задают естественное отображение за период:

$$\Pi_2 : \mathcal{M}^2 \to \mathcal{M}^2, \quad \mathcal{M}^2 = \{z = (\theta, M) \mid \theta \in \mathbb{S}^1, M \in S_\Gamma\},$$

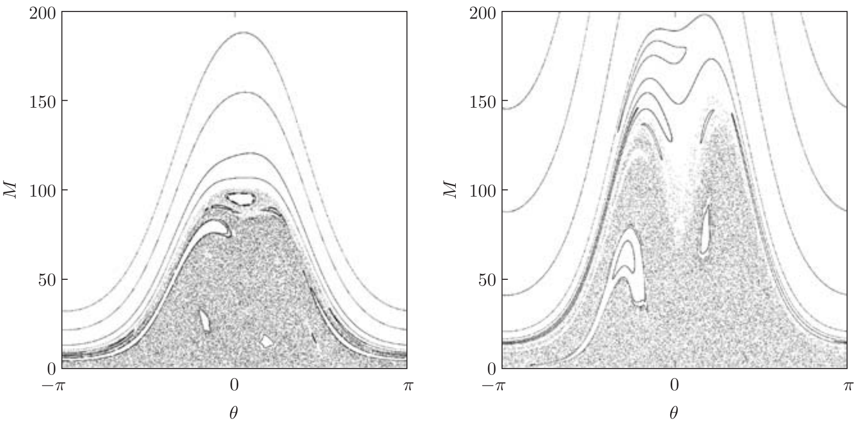
где $S_\Gamma \in \left(-\infty, \dfrac{f}{\Gamma}\right]$ при $\Gamma > 0$ и $S_\Gamma \in \left[\dfrac{f}{\Gamma}, +\infty\right)$ при $\Gamma < 0$.

Примеры двумерных отображений для закона движения внутренней массы (8) приведены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при больших значениях M фазовое пространство расслаивается на инвариантные торы (которым в отображении Π_2 соответствуют инвариантные кривые), и, следовательно, ускоренных движений не наблюдается.

Для того, чтобы показать существование инвариантных КАМ-торов, препятствующих ускорению, представим гамильтониан в переменных θ, M в следующей форме:

$$\begin{gathered} H = \frac{AB}{2\Delta(t)}M^2\left(1 + G(\theta, t)M^{-1/2} + O(M^{-1})\right), \\ G(\theta, t) = \frac{c_1(t)}{B}\sin\theta - \frac{c_2(t)}{A}\cos\theta. \end{gathered} \tag{20}$$



a) b)

Рис. 2. Двумерные отображения для системы (18) с законом движения внутренней массы (8) и значениями параметров $A = 0.5$, $B = 5$, $\Omega = 20$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $d_1 = d_2 = 0$, $F = 1$: a) $\Gamma = -10$; b) $\Gamma = -20$

Введем малый параметр при помощи замены переменных и времени

$$\theta \to \theta, \quad M \to \frac{1}{\varepsilon^2} M, \quad t \to \varepsilon^2 t, \tag{21}$$

получим

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \widetilde{H}_\varepsilon}{\partial M}, \quad \dot{M} = -\frac{\partial \widetilde{H}_\varepsilon}{\partial \theta}, \tag{22}$$

где гамильтониан $\widetilde{H}_\varepsilon$ аналитически зависит от ε:

$$\widetilde{H}_\varepsilon = \frac{AB}{2\Delta(\varepsilon^2 t)} M^2 \left(1 + 2\varepsilon G(\theta, \varepsilon^2 t) M^{-1/2} + O(\varepsilon^2)\right).$$

Мы видим, что при $\varepsilon = 0$ система (22) допускает интеграл

$$F_0 = M = \text{const},$$

который расслаивает фазовое пространство

$$\widetilde{\mathcal{M}}^3 = \{(M, \theta \mod 2\pi, t \mod T)\}$$

системы (22) на инвариантные торы. При этом отношение частот на них непостоянно: пропорционально или обратно пропорционально M.

Согласно КАМ-теореме [26], если отношение частот диофантово, то при достаточно малых ε соответствующие торы сохраняются (слегка деформируясь). Согласно (21) в исходной системе (18) им соответствуют сохраняющиеся инвариантные торы при больших значениях M, сечение которых через период представляет собой инвариантные кривые, причем их графики являются однозначными функциями угла θ. Это остается справедливым и при $\Gamma = 0$, так как разложение по M в гамильтониане (20) начинается с M^{-1}.

Таким образом, *для всякой траектории системы* (12) *с гамильтонианом* (11) *в отсутствие трения функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, $M(t)$ ограничены во все моменты времени.*

Как было отмечено выше, если $\Gamma \neq 0$, то отсюда следует, что траектория тела также оказывается ограниченной.

В работе [15] было указано, что если внутренняя масса движется по самопересекающемуся контуру, то возможно неограниченное перемещение гидродинамически асимметричного тела при нулевой циркуляции. По аналогии с работой [15] рассмотрим случай, когда внутренняя масса движется по закону

$$\xi = a + b\sin\Omega t\cos^2\frac{\Omega t}{2}, \quad \eta = b\sin\Omega t\sin^2\frac{\Omega t}{2}. \tag{23}$$

Двумерные отображения для закона движения внутренней массы (23) показаны на рис. 3. Мы видим, что, хотя ускорения не наблюдается, стохастический слой при сравнимых амплитудах движения массы существенно расширяется.

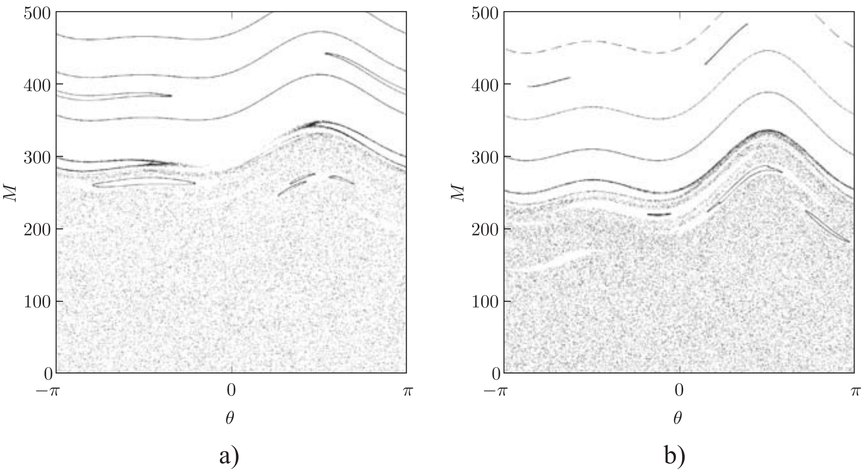


Рис. 3. Двумерные отображения для системы (18) с законом движения внутренней массы (23) и значениями параметров $A = 0.5$, $B = 5$, $\Omega = 20$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $F = 1$: a) $\Gamma = -10$; b) $\Gamma = -20$

1.3. Задачи

1.1. Используя уравнения движения (4), покажите, что величины P_x, P_y, L (6) являются интегралами движения в отсутствие диссипации и внешних возмущений.

1.2. Используя уравнения движения (4), покажите, что энергия E (7) сохраняется в отсутствие диссипации и внешних возмущений в системе. Определите, как изменяется энергия системы в случае $\mu_1 \neq 0$.

1.3. Вычислите базисные скобки $\{z_i, z_j\}$ системы (12) в отсутствие диссипации (см. (14)), где $\boldsymbol{z} = (p_1, p_2, M, x, y, \varphi)$.

1.4. Используя уравнения движения (13), покажите, что величины p_x, p_y (15) являются интегралами движения системы в отсутствие диссипации.

1.5. Постройте двумерное отображение для системы (18) с законом движения внутренней массы (8) (см. рис. 2) при параметрах $A = 0.5$, $B = 5$, $\Omega = 20$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $d_1 = d_2 = 0$, $F = 1$, $\Gamma = -30$.

1.6. Постройте двумерное отображение за период для системы (18) с законом движения внутренней массы

$$\xi = a + b\sin\Omega t\cos^{2k}\frac{\Omega t}{2}, \quad \eta = b\sin\Omega t\sin^{2n}\frac{\Omega t}{2}$$

при $k = 2, n = 2$ и параметрах $A = 0.5$, $B = 5$, $\Omega = 20$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $F = 1$, $\Gamma = -10$.

1.7. Постройте двумерное отображение за период для системы (18) с законом движения внутренней массы

$$\xi = a + b\sin\Omega t\cos^{2k}\frac{\Omega t}{2}, \quad \eta = b\sin\Omega t\sin^{2n}\frac{\Omega t}{2}$$

при $k = 3, n = 2$ и параметрах $A = 0.5$, $B = 5$, $\Omega = 20$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $F = 1$, $\Gamma = -20$.

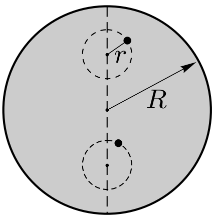


Рис. 4

1.8. Вычислите кинетическую энергию системы, состоящей из круглого профиля радиусом R, который движется в идеальной жидкости без внешнего воздействия и управляется за счет перемещения двух материальных точек с одинаковыми массами. Внутренние массы движутся по окружностям радиусом r с угловыми скоростями β_1 и β_2, как показано на рис. 4 (см. указание на стр. 17, а также [16]).

1.9. Запишите уравнения (12) в случае движения уравновешенного тела эллиптической формы (координаты центра масс тела равны нулю $d_1 = d_2 = 0$ и $\chi = \zeta = 0$). В получившихся уравнениях выполните замену времени

$$t = \frac{2\pi\tau}{\Omega}.$$

1.10. Используя результат задачи 1.9 (см. также стр. 38), постройте отображение Пуанкаре для системы (12) и вычислите максимальный показатель Ляпунова при параметрах $A = 1.25$, $B = 5$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$,

$\Omega = 20$, $\Gamma = 20$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 0.705$. Сравните результат при использовании разных методов интегрирования (метод Эйлера, метод Рунге–Кутты 4 порядка, явный и неявный методы средней точки, метод Фельберга 7 порядка с автоматическим выбором шага интегрирования [33]).

1.11. Используя результат задачи 1.9 (см. также стр. 38), постройте инвариантную кривую для системы (12) при параметрах $A = 1.25$, $B = 5$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $\Omega = 20$, $\Gamma = 39.5$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.0945$, $\mu_3 = 0.705$. Сравните результат при использовании разных методов интегрирования (метод Эйлера, метод Рунге–Кутты 4 порядка, явный и неявный методы средней точки, метод Фельберга 7 порядка с автоматическим выбором шага интегрирования [33]).

1.12. Постройте карту динамических режимов системы (12) на плоскости (μ_2, Γ) при параметрах $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \mu_1 = 0.1, \mu_3 = 0.705$ в интервале значений $0.1 < \mu_3 < 0.2$, $20 < \Gamma < 30$. Определите области, которые соответствуют предельным циклам различных периодов и хаотическим режимам.

1.13. Постройте бифуркационную диаграмму системы (12) для динамической переменной p_2 при изменении параметра $15 < \Gamma < 20$ при параметрах $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.15, \mu_3 = 0.705$. Определите значения Γ, при которых происходит бифуркация удвоения периода.

1.14. Постройте бифуркационную диаграмму системы (12) для динамической переменной p_2 при изменении параметра $15 < \Gamma < 20$ при параметрах $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.15, \mu_3 = 0.705$. Определите значения Γ, при которых происходит бифуркация удвоения периода.

1.15. Постройте траекторию системы (12) на фазовой плоскости (p_1, p_2) и траекторию в абсолютном пространстве при значениях параметров $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \Gamma = 39, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.185, \mu_3 = 0.705$.

1.16. Постройте траекторию системы (12) на фазовой плоскости (p_1, p_2) и траекторию в абсолютном пространстве при значениях параметров $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \Gamma = 39, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.183, \mu_3 = 0.705$.

1.17. Постройте траекторию системы (12) в абсолютном пространстве при значениях параметров $A = 1, B = 2, \widetilde{I} = 0.5, \alpha = 0.1, a = 0.52, \Omega = 0.4, \Gamma = 0, \mu_1 = 0.1, \mu_2 = 0.5, \mu_3 = 0.1$.

1.18. Постройте отображение Пуанкаре системы (12) и вычислите максимальный показатель Ляпунова при значениях параметров $A = 1.25, B = 5, \widetilde{I} = 0.705, a = 1, b = 1, \Omega = 20, \Gamma = 15, \mu_1 = \mu_2 = 0.1, \mu_3 = 0.705$.

2. Динамика кругового профиля

Рассмотрим систему (4) в случае уравновешенного кругового профиля без движущихся внутренних масс (см. раздел 1.2.1):

$$A = B, \quad c_1 = c_2 = 0.$$

В этом простейшем случае может быть выполнен полный качественный анализ поведения тела. Кроме того, найденные закономерности могут служить основой в исследовании движения при деформациях круговой формы профиля, в частности эллиптических профилей с небольшим эксцентриситетом.

После простейшей перенормировки

$$\frac{\Gamma}{A} \to \Gamma, \quad \frac{f_k(t)}{A} \to f_k(t), \quad \frac{g(t)}{I} \to g(t)$$

уравнения движения (12) примут вид

$$\dot{v}_1 = \omega v_2 - \Gamma v_2 + f_1(t), \quad \dot{v}_2 = -\omega v_1 + \Gamma v_1 + f_2(t), \quad \dot{\omega} = g(t). \tag{24}$$

Нетрудно видеть, что третье уравнение (24) отделяется и может быть независимо проинтегрировано в виде:

$$\omega = G(t) = \omega_0 + \int\limits_0^t g(t')dt', \quad \varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^t G(t')dt', \tag{25}$$

где ω_0 и φ_0 — начальные значения угловой скорости ω и угла φ.

После подстановки (25) в первые уравнения (24) получим замкнутую систему

$$\dot{v}_1 = (G(t) - \Gamma)v_2 + f_1(t), \quad \dot{v}_2 = -(G(t) - \Gamma)v_1 + f_2(t). \tag{26}$$

Перейдем в неподвижную систему координат Oxy и представим уравнения движения (26) в комплексной форме, для этого определим величины

$$\begin{gathered} Z = x + iy, \quad \dot{Z} = \dot{x} + i\dot{y} = (v_1 + iv_2)e^{i\varphi(t)}, \\ F(t) = F_x + iF_y = \big(f_1(t) + if_2(t)\big)e^{i\varphi(t)}, \end{gathered} \tag{27}$$

с учетом которых уравнения (26) примут вид

$$\ddot{Z} = i\Gamma \dot{Z} + F(t). \tag{28}$$

Таким образом, мы видим, что уравнения (28) совпадают с уравнениями движения заряженной частицы единичной массы по плоскости в переменном электрическом поле (с напряженностью, пропорциональной F) и постоянном магнитном поле (с магнитной индукцией, пропорциональной Γ) в нерелятивистском (классическом) приближении. В данном разделе мы будем рассматривать только случай $\Gamma \neq 0$.

Как известно [32], уравнения (28) можно представить в гамильтоновой форме

$$\begin{gathered}
\dot{x} = \{x, H\}, \quad \dot{y} = \{y, H\}, \\
\dot{p}_x = \{p_x, H\}, \quad \dot{p}_y = \{p_y, H\},
\end{gathered}$$

где функция Гамильтона и ненулевые скобки Пуассона определяются соотношениями:

$$\begin{gathered}
H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - F_x(t)x - F_y(t)y, \\
\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = 1, \quad \{p_x, p_y\} = -\Gamma.
\end{gathered}$$

В рассматриваемом случае решение системы (28) выражается в форме последовательных квадратур

$$\begin{gathered}
\dot{Z}(t) = V_0 e^{i\Gamma t} + \widehat{V}(t), \quad \widehat{V}(t) = e^{i\Gamma t}\int_0^t e^{-i\Gamma t'} F(t')dt', \\
Z(t) = Z_0 - \frac{iV_0}{\Gamma}\left(e^{i\Gamma t} - 1\right) + \int\limits_0^t \widehat{V}(t')dt'.
\end{gathered} \tag{29}$$

Поскольку f_1, f_2, g имеют одинаковый период $\tau = \dfrac{2\pi}{\Omega}$, то

$$f_k(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_k^{(m)} e^{im\Omega t}, \quad g(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g^{(m)} e^{im\Omega t}. \tag{30}$$

В этом случае, как известно, квадратуры (25) могут быть записаны в форме

$$\omega = \overline{g}t + \widehat{\omega}(t), \quad \overline{g} = \langle g(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau g(t)dt, \tag{31}$$

где $\widehat{\omega}(t)$ — τ-периодическая функция. Соответственно, для угла получим

$$\varphi = \frac{1}{2}\overline{g}t^2 + \overline{\omega}t + \varphi_0 + \widehat{\varphi}(t), \quad \overline{\omega} = \langle \widehat{\omega}(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \widehat{\omega}(t)dt, \tag{32}$$

где $\widehat{\varphi}$ — также τ-периодическая функция.

Случай $\overline{g} = 0$. Начнем анализ с наиболее естественного с физической точки зрения случая $\overline{g} = 0$. При этом, как видно из (31), угловая скорость профиля остается ограниченной, и квадратуры (29) представляют собой квазипериодические функции, их свойства достаточно подробно изложены в [31].

В данном случае поведение системы существенным образом зависит от существования соотношений между частотами ($\overline{\omega}$, Ω, Γ) системы — *резонансов*. Дадим сначала их определение. Подставим (32) в (27) и для внешней силы получим следующее представление:

$$F(t) = e^{i\left(\varphi_0 + \overline{\omega}t + \widehat{\varphi}(t)\right)}\left(f_1(t) + if_2(t)\right) = \\ = e^{i\varphi_0}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\widehat{f}_1^{(m)} + i\widehat{f}_2^{(m)}\right)e^{i(\overline{\omega}+m\Omega)t},$$

где $\widehat{f}_1^{(m)}$, $\widehat{f}_2^{(m)}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье τ-периодической комплекснозначной функции

$$\widehat{f}(t) = \left(f_1(t) + if_2(t)\right)e^{i\widehat{\varphi}(t)}. \tag{33}$$

Назовем *резонансами* такие ситуации, что при некотором $m \in \mathbb{Z}$ выполнены соотношения:

тип A: $m\Omega + \overline{\omega} - \Gamma = 0$ и при этом $\widehat{f}_1^{(m)} \neq 0$ или $\widehat{f}_2^{(m)} \neq 0$;

тип B: $m\Omega + \overline{\omega} = 0$ и при этом $\widehat{f}_1^{(m)} \neq 0$ или $\widehat{f}_2^{(m)} \neq 0$.

Подставляя соответствующие Фурье-разложения в квадратуры (29) и интегрируя почленно, мы заключаем, что в зависимости от наличия или отсутствия резонансов возможны три типа поведения системы.

1) *Резонансы отсутствуют*: величина перемещения $|Z(t) - Z(0)|$ и модуль скорости $|\dot{Z}(t)|$ профиля остаются ограниченными при $t \in (-\infty, \ +\infty)$.
2) *Имеются резонансы типа A*: модуль скорости $|\dot{Z}(t)|$ растет линейно со временем, а величина перемещения $|Z(t) - Z_0|$ растет линейно при $\Gamma \neq 0$ и квадратично при $\Gamma = 0$.
3) *Имеются резонансы типа B* ($\Gamma \neq 0$): модуль скорости профиля $|\dot{Z}(t)|$ остается ограниченной, а величина перемещения $|Z(t) - Z_0|$ растет линейно со временем.

С геометрической точки зрения, отображение за период в пространстве скоростей $\Pi_{t_0}^3(v_1, v_2, \omega)$, определенное выше (5), в данном случае расслаивается на инвариантные плоскости $\omega = \mathrm{const}$ (см. рис. 5). Действительно, согласно (31), в этом случае $\omega(t + \tau) = \omega(t)$. Среди этих инвариантных плоскостей имеется счетный (либо конечный) набор *резонансных плоскостей* (резонансы *типа A*), на которых траектории отображения $\Pi_{t_0}^3$ неограничены и задаются прямыми линиями. На остальных плоскостях траектории представляют собой окружности, и в нерезонансном случае с помощью квадратур (29) ограничение отображения $\Pi_{t_0}^3$ на инвариантную плоскость $\omega = \mathrm{const}$ определяется в явном виде:

$$v^{n+1} = \big(v^n + \alpha_0\big)e^{i(\Gamma - \overline{\omega})\tau},$$

$$v = v_1 + iv_2, \quad \alpha_0 = e^{-i\widehat{\varphi}(t_0)} \int\limits_0^\tau e^{i(\overline{\omega} - \Gamma)t} e^{i\widehat{\varphi}(t_0 + t)} f(t_0 + t) dt.$$

Случай $\overline{g} \neq 0$. В данной ситуации внешняя сила представляется в форме разложения в ряд следующим образом:

$$F(t) = e^{i\varphi_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Big(\widehat{f}_1^{(m)} + i\widehat{f}_2^{(m)}\Big) e^{i\left(\frac{1}{2}\overline{g}t^2 + (\overline{\omega} + m\Omega)t\right)}. \qquad (34)$$

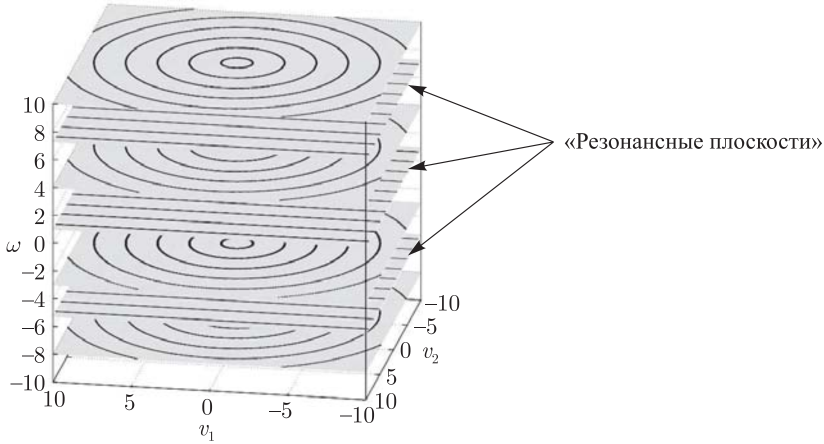


Рис. 5. Отображение за период. Хорошо видны «резонансные плоскости», на которых траектории отображения имеют прямолинейную форму. Значения параметров: $\Omega = 2\pi$, $\Gamma = 1$, $f_1(t) = -0.02$, $f_2(t) = 0.1 \sin \Omega t$, $g(t) = 0$

Подставим (34) в (29) и выполним почленное интегрирование, в результате чего получим для скорости профиля разложение

$$\dot{Z}(t) = C_0 e^{i\Gamma t} + \sqrt{\frac{\pi}{\overline{g}}}\, e^{i(\varphi_0 + \Gamma t)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{f}_1^{(m)} + i\widehat{f}_2^{(m)}\right) e^{-i\frac{\omega_m^2}{2\overline{g}}} \times \\ \times \left(C\left(\frac{\overline{g}t + \omega_m}{\sqrt{\pi\overline{\overline{g}}}}\right) + iS\left(\frac{\overline{g}t + \omega_m}{\sqrt{\pi\overline{\overline{g}}}}\right)\right), \quad (35)$$

где $\omega_m = m\Omega + \overline{\omega} - \Gamma$, C_0 — константа интегрирования (отличная от начальной скорости), $C(z)$ и $S(z)$ — интегралы Френеля, задаваемые соотношениями

$$C(z) = \int\limits_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad S(z) = \int\limits_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt.$$

В силу того, что $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = \lim\limits_{t\to\infty} S(t) = \frac{1}{2}$, при росте значения t кривая

$\dot{Z}(t)$ будет асимптотически приближаться к окружности

$$\dot{Z}_{lim}(t) = \left(C_0 + \sqrt{\frac{\pi}{2\overline{g}}}\, e^{i\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{f}_1^{(m)} + i\widehat{f}_2^{(m)}\right) e^{-i\frac{\omega_m^2}{2\overline{g}}} \right) e^{i\Gamma t}, \qquad (36)$$

на плоскости $(\dot{x}, \dot{y})$. Откуда следует, что *модуль скорости профиля $|\dot{Z}(t)|$ остается ограниченной функцией времени, но частота ее осцилляций растет линейно по времени*. Кроме того, непосредственное интегрирование (36) показывает, что *при достаточно больших t центр профиля будет двигаться вблизи окружности*.

Таким образом, мы видим, что система (4), с одной стороны, является консервативной, а с другой стороны обладает предельным циклом (если игнорировать угол поворота и угловую скорость). Это явление встречается и в гамильтоновых системах (в частности, в задаче о падении пластинки в идеальной жидкости в отсутствие циркуляции [12, 13]) и называется асимптотической устойчивостью по части переменных.

Рассмотрим теперь в качестве примера упомянутый выше случай (см. раздел 1.2), когда внешняя сила и момент содержат по одной гармонике и представляются в форме

$$f_1(t) = f_1^{(0)} + \delta_1 \sin \Omega t, \quad f_2(t) = f_2^{(0)} + \delta_2 \sin \Omega t,$$
$$g(t) = g^{(0)} + \varepsilon \sin \Omega t, \quad \varepsilon > 0.$$

Соответствующие коэффициенты разложений (30) принимают вид

$$f_k^{(1)} = -f_k^{(-1)} = -\frac{i\delta_1}{2}, \quad g^{(1)} = -g^{(-1)} = -\frac{i\varepsilon}{2}.$$

При этом угол поворота профиля задается соотношениями

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{1}{2} g^{(0)} t^2 + \overline{\omega} t + \widehat{\varphi}(t),$$
$$\overline{\omega} = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{\Omega}, \quad \widehat{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2} \sin \Omega t,$$

где φ_0, ω_0 — начальные угол и угловая скорость соответственно. Отметим, что условия $\varepsilon > 0$ можно добиться подходящим выбором начала отсчета времени.

В зависимости от параметров $g^{(0)}$, ε возникают различные ситуации.

1. $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon = 0$ — профиль свободно вращается с постоянной скоростью $\omega = \omega_0$.

При этом возникает лишь конечное число резонансов.

тип A: 1) $\omega_0 - \Gamma = 0$, при $f_1^{(0)} \neq 0$ или $f_2^{(0)} \neq 0$;
2) $\pm\Omega + \omega_0 - \Gamma = 0$, при $\delta_1 \neq 0$ или $\delta_2 \neq 0$;

тип B: 1) $\omega_0 = 0$, при $f_1^{(0)} \neq 0$ или $f_2^{(0)} \neq 0$;
2) $\pm\Omega + \omega_0 = 0$, при $\delta_1 \neq 0$ или $\delta_2 \neq 0$.

Характерный вид поведения скорости профиля и его траекторий в отсутствие резонансов показан на рис. 6, при наличии резонанса *типа A* — на рис. 7, резонанса *типа B* — на рис. 8.

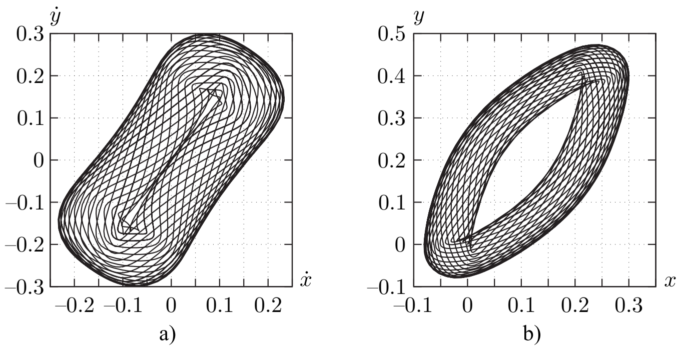


Рис. 6. Характерный вид эволюции скорости a) и траектории центра профиля b) в отсутствие резонансов. Значения параметров: $\Omega = 2$, $\Gamma = 1.52$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = -0.1$, $g^{(0)} = \varepsilon = 0$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -1$, $\varphi_0 = 0$

2. $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon \neq 0$ — в этом случае угловая скорость профиля колеблется около среднего значения $\omega = \omega_0 + \varepsilon/\Omega$, где ω_0 — начальная угловая скорость. Угол поворота задается соотношениями

$$\varphi = \varphi_0 + \overline{\omega} t + \widehat{\varphi}(t), \quad \widehat{\varphi}(t) = -\frac{\varepsilon}{\Omega^2} \sin \Omega t.$$

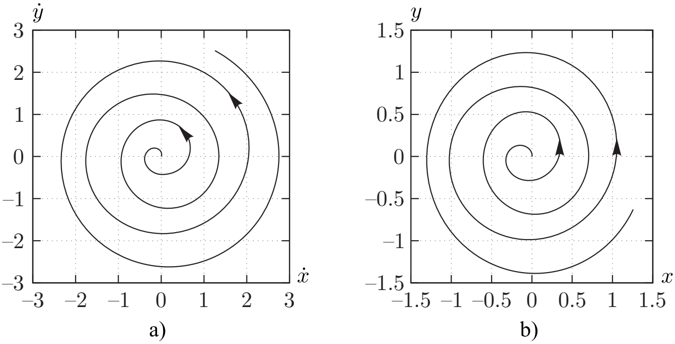


Рис. 7. Характерный вид эволюции скорости a) и траектории центра профиля b) при резонансе *типа A* ($\omega_0 - \Gamma = 0$). Значения параметров: $\Omega = 3$, $\Gamma = 2$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.2$, $\delta_2 = 0.1$, $g^{(0)} = \varepsilon = 0$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = 2$, $\varphi_0 = 0$

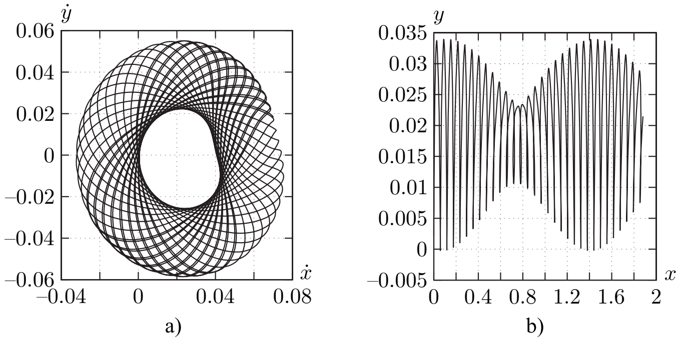


Рис. 8. Характерный вид эволюции скорости a) и траектории центра профиля b) при резонансе *типа B* ($\Omega + \omega_0 = 0$). Значения параметров: $\Omega = \pi$, $\Gamma = 3$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = -0.1$, $g^{(0)} = \varepsilon = 0$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -\pi$, $\varphi_0 = -\operatorname{arctg}(\delta_2/\delta_1)$

Разложение Фурье функции (33) может быть получено в явной форме

$$\big(f^{(0)} + \delta \sin \Omega t\big) \exp\left(-i\frac{\varepsilon}{\Omega^2}\sin \Omega t\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m \chi_m e^{im\Omega t}, \qquad (37)$$

$$\chi_m = f^{(0)} J_m(z) - \frac{i\delta}{2}\big(J_{m+1}(z) - J_{m-1}(z)\big), \quad z = \frac{\varepsilon}{\Omega^2}, \qquad (38)$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка m. Отметим, что $J_{m+1}(z) - J_{m-1}(z) = 2J'_m(z)$.

В этом случае получим счетные наборы резонансов:

тип A: $\overline{\omega} - \Gamma + m\Omega = 0$, $\chi_m \neq 0$;
тип B: $\overline{\omega} + m\Omega = 0$, $\chi_m \neq 0$.

На рис. 9, 10 для примера приведен характерный вид поведения скорости профиля и его траектории в случае, когда гармоника $m = 5$ является резонансной по *типу A*. Поскольку функция (37) бесконечно дифференцируема, то коэффициенты ее разложения Фурье χ_m убывают экспоненциально, начиная с некоторой гармоники (см. рис. 11). В связи с этим в рассмотренном случае функции $|\dot{Z}(t)|$ и $|Z(t) - Z(0)|$ растут достаточно медленно. На линейный рост $|\dot{Z}(t)|$ и $|Z(t) - Z(0)|$ накладываются связанные с низшими гармониками колебания, амплитуда которых на порядки больше коэффициента при t в секулярных членах соответствующих разложений (см. рис. 9, 10).

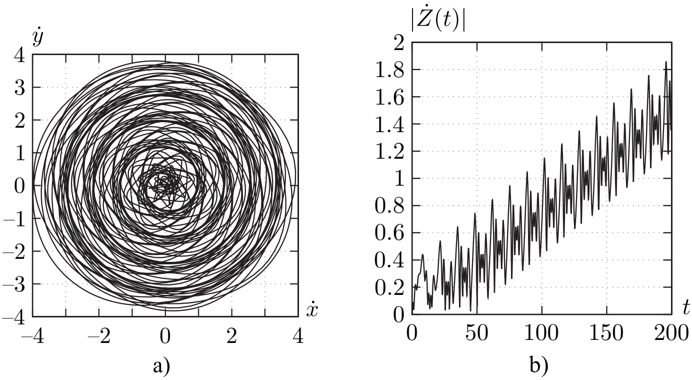


Рис. 9. Характерный вид эволюции скорости a) и зависимость $|\dot{Z}(t)|$ b) при резонансе *типа A* ($\overline{\omega} - \Gamma + m\Omega = 0$, $m = 5$). Значения параметров: $\Omega \approx 0.47$, $\Gamma = 1$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon = 0.4$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -2.2$, $\varphi_0 = 0$

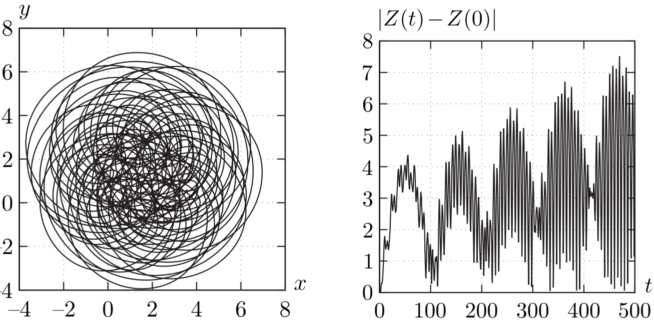


Рис. 10. Характерный вид траектории a) и зависимость $|Z(t) - Z(0)|$ b) при резонансе *muna A* ($\overline{\omega} - \Gamma + m\Omega = 0$, $m = 5$). Значения параметров: $\Omega \approx 0.47$, $\Gamma = 1$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon = 0.4$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -2.2$, $\varphi_0 = 0$

Характерный вид поведения скорости профиля и его траекторий при резонансе *muna B* на гармонике $m = -3$ приведен на рис. 12.

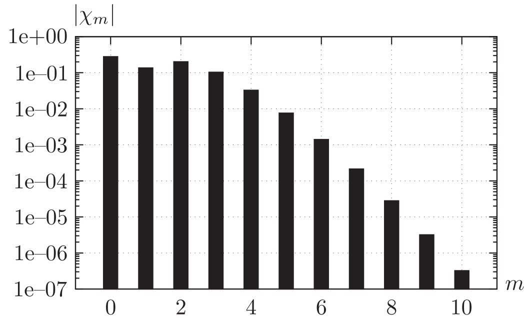


Рис. 11. Зависимость абсолютной величины коэффициентов разложения (37) от номера гармоники для $m = 0, \ldots, 10$. Значения параметров: $\Omega = 0.47$, $\Gamma = 1$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon = 0.4$

3. $g^{(0)} \neq 0$, $\varepsilon \neq 0$ — угловая скорость ω профиля растет линейно, а угол φ — квадратично. В этом случае в системе отсутствуют резонансы, а функции $|\dot{Z}(t)|$, $|Z(t) - Z(0)|$ являются ограниченными функциями времени (см.

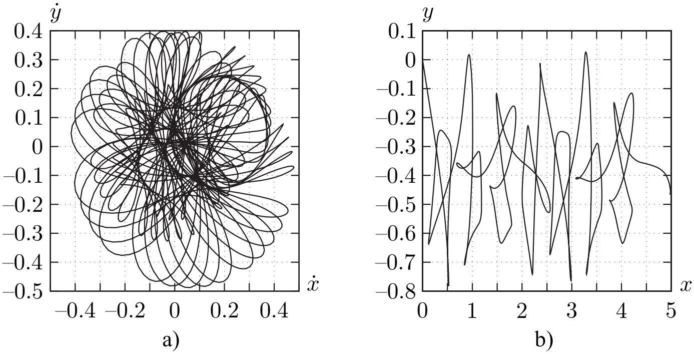


Рис. 12. Характерный вид эволюции скорости a) и траектории центра профиля b) при резонансе *muna B* ($\overline{\omega} + m\Omega = 0$, $m = -3$). Значения параметров $\Omega \approx -0.57$, $\Gamma = 1$, $f_1^{(0)} = 0.1$, $f_2^{(0)} = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0$, $\varepsilon = 0.4$. Начальные условия $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -1$, $\varphi_0 \approx 2.19$

рис. 13, 15a). Из рис. 13 видно, что с течением времени частота колебаний $|\dot{Z}|$ растет, а амплитуда колебаний уменьшается.

На рис. 14 представлено отображение за период. Соответствующая траектория профиля показана на рис. 15b.

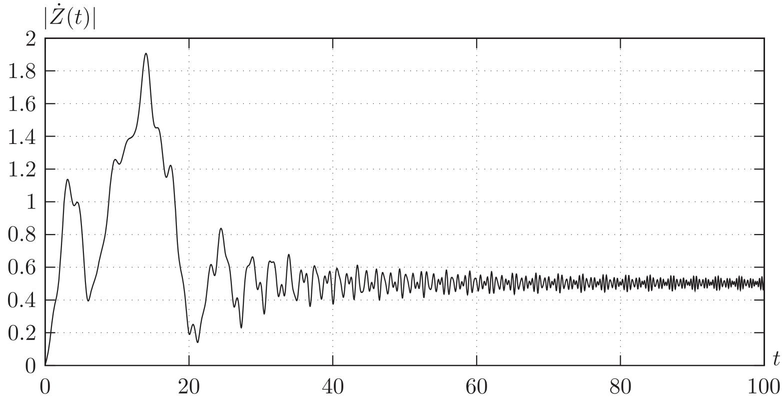


Рис. 13. Характерная зависимость модуля скорости $|\dot{Z}(t)|$ от времени. Значения параметров: $\Omega = 2$, $\Gamma = 1$, $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0.2$, $\varepsilon = 0.4$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -1$, $\varphi_0 = 0$

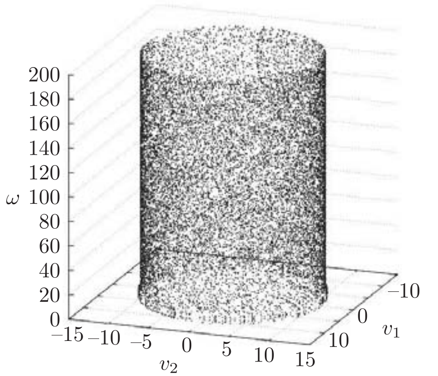


Рис. 14. Характерный вид отображения за период, на котором мы видим (линейный) рост угловой скорости ω. При этом последовательные итерации приближаются к некоторому цилиндру. Значения параметров: $\Omega = 2$, $\Gamma = 1$, $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0.2$, $\varepsilon = 0.4$

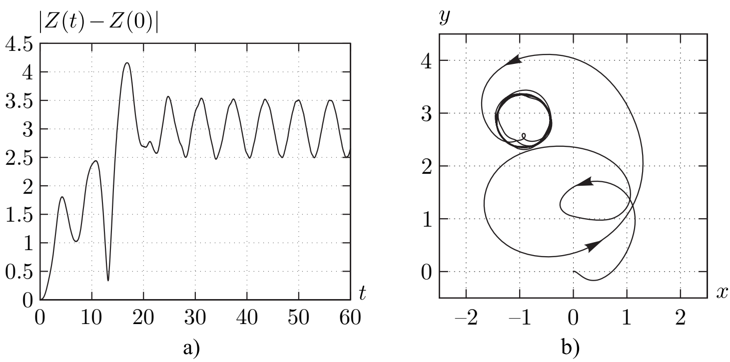


Рис. 15. a) Характерная зависимость модуля смещения $|Z(t) - Z(0)|$ центра профиля от времени. b) Характерная траектория центра профиля, притягивающаяся к некоторому (круговому) циклу. Значения параметров: $\Omega = 2$, $\Gamma = 1$, $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.2$, $\delta_1 = 0.3$, $\delta_2 = -0.5$, $g^{(0)} = 0.2$, $\varepsilon = 0.4$. Начальные условия: $Z(0) = 0$, $\dot{Z}(0) = 0$, $\omega_0 = -1$, $\varphi_0 = 0$

3. Динамика эллиптического профиля в среде с полной диссипацией

3.1. Трехмерное отображение

Рассмотрим движение уравновешенного тела эллиптической формы, в этом случае координаты центра масс тела равны нулю $d_1 = d_2 = 0$ и $\chi = \zeta = 0$. При указанных условиях функции, входящие в уравнения движения (12), примут вид

$$
\begin{gathered}
c_1(t) = a, \quad c_2(t) = b\cos\Omega t, \\
I(t) = \widetilde{I} + a^2 + b^2\cos^2\Omega t, \quad k(t) = -ab\Omega\sin\Omega t.
\end{gathered}
$$

Кроме того, в целях упрощения программной реализации выполним замену времени

$$
t = \frac{2\pi\tau}{\Omega}.
$$

Уравнения (12) примут вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{dp_1}{d\tau} = \frac{2\pi}{\Omega}\left(\omega p_2 - \Gamma v_2 - \mu_1 v_1\right), \quad \frac{dp_2}{d\tau} = \frac{2\pi}{\Omega}\left(-\omega p_1 + \Gamma v_1 - \mu_2 v_2\right), \\
\frac{dM}{d\tau} = \frac{2\pi}{\Omega}\left(v_2 p_1 - v_1 p_2 - \mu_3\omega\right),
\end{gathered} \tag{39}
$$

$$
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & -b\cos 2\pi\tau \\ 0 & B & a \\ -b\cos 2\pi\tau & a & \widetilde{I} + \left(a^2 + b^2\cos^2 2\pi\tau\right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 + b\Omega\sin 2\pi\tau \\ M + ab\Omega\sin 2\pi\tau \end{pmatrix}.
$$

В связи с периодической (с периодом 1) зависимостью коэффициентов системы от τ поток (39) задает естественное трехмерное отображение за период (отображение Пуанкаре):

$$
\Pi_3 : \mathcal{M}^3 \to \mathcal{M}^3, \quad \mathcal{M}^3 = \{z = (p_1, p_2, M) | p_1 \in \mathbb{R}, p_2 \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}^3. \tag{40}
$$

Примеры отображений Π_3 при различных значениях параметров приведены на рис. 16.

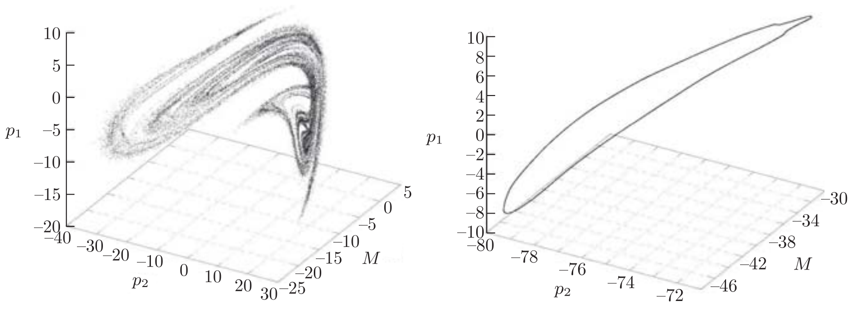


Рис. 16. Примеры притягивающих множеств отображения Пуанкаре (40): a) странный (хаотический) аттрактор при $A = 1.25$, $B = 5$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $\Omega = 20$, $\Gamma = 20$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 0.705$; b) инвариантная кривая при $A = 1.25$, $B = 5$, $\widetilde{I} = 0.705$, $a = 1$, $b = 1$, $\Omega = 20$, $\Gamma = 39.5$, $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.0945$, $\mu_3 = 0.705$

Как показывают проведенные компьютерные исследования данного отображения Пуанкаре, в рассматриваемой системе наблюдаются предельные циклы, притягивающие торы (квазипериодические режимы) и странные аттракторы.

3.2. Карты динамических режимов

Для обнаружения возможных режимов движения системы (12) построим карту динамических режимов на плоскости (μ_2, Γ). При построении карт динамических режимов мы используем методику, описанную в работе [30]. Пусть требуется исследовать бифуркации неподвижной точки (p_1^*, p_2^*, M^*) в зависимости от параметров $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$.

1) Плоскость $(P^{(1)}, P^{(2)})$ покрывается равномерной сеткой

$$\mathcal{M} = \left\{ P_i^{(1)}, P_j^{(2)} \mid i = -N_{left} \ldots N_{right},\, j = -M_{bott} \ldots M_{top} \right\},$$

а узел сетки $(P_0^{(1)}, P_0^{(2)})$ соответствует точке (p_1^*, p_2^*, M^*) и кодируется цветом, соответствующим ее периоду (цветовая гамма выбирает произвольно).

2) Рассчитываются периоды для узлов $(P_0^{(1)}, P_j^{(2)})$, при этом индекс j пробегает значения от 1 до M_{top} (движение по сетке вверх), а также от -1 до $-M_{bott}$ (движение по сетке вниз). В качестве стартовой точки при проходе вверх берется последняя точка, полученная при расчете узла $(P_0^{(1)}, P_{j-1}^{(2)})$, а при проходе вниз берется $(P_0^{(1)}, P_{j+1}^{(2)})$. На этом этапе изменяется значение параметра $P^{(2)}$.
3) Рассчитываются периоды для узлов $(P_i^{(1)}, P_j^{(2)})$, при этом индекс i пробегает значения от 1 до N_{right} (движение по сетке вправо), а также от -1 до $-N_{left}$ (движение по сетке влево). В качестве стартовой точки при проходе вправо берется последняя точка, полученная при расчете узла $(P_{i-1}^{(1)}, P_j^{(2)})$, а при проходе влево берется $(P_{i+1}^{(1)}, P_j^{(2)})$. На этом этапе изменяется значение параметра $P^{(1)}$.

В описанной схеме применяется наследование начальных условий из соседнего узла сетки, при этом сначала варьируется параметр $P^{(2)}$, затем $P^{(1)}$. Варьирование возможно и в другом порядке: сначала $P^{(1)}$, затем $P^{(2)}$.

При построении карты в области

$$\{(\mu_2, \Gamma) \,|\, \mu_2 \in [0.05, 0.35], \quad \Gamma \in [10, 50]\},$$

показанной на рис. 17a, были выбраны следующие значения параметров

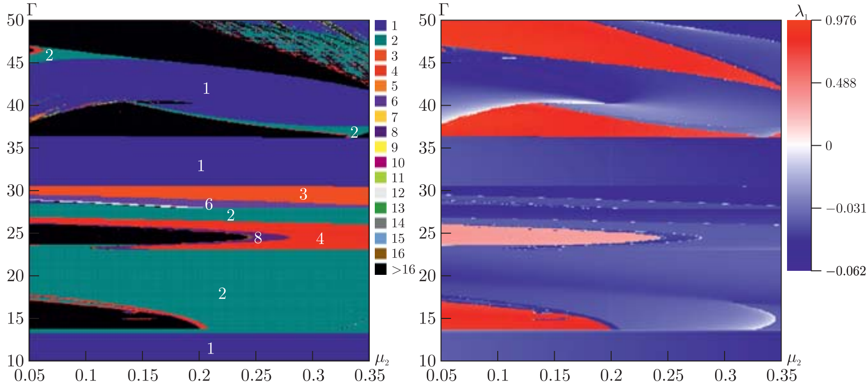
$$A = 1.25, \quad B = 5, \quad \widetilde{I} = 0.705, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad \Omega = 20,$$
$$\mu_1 = 0.1, \quad \mu_3 = 0.705,$$

а в качестве стартовой использовалась точка периода 3 с координатами

$$p_1 = -5.903, \quad p_2 = 1.792, \quad M = -0.888.$$

Дополнительно для каждой траектории, рассчитанной при построении карты динамических режимов, оценивались показатели Ляпунова. Распределение старшего показателя на плоскости (μ_2, Γ) показано на рис. 17b.

Из карты динамических режимов (рис. 17) видно, что в рассмотренной системе наблюдаются как хаотические режимы (черные области), так и предельные циклы различных периодов.



a) b)

Рис. 17. a) Карта динамических режимов на плоскости (μ_2, Γ). Черные области соответствуют хаотическим режимам, инвариантным кривым и режимам с периодом > 16. Области отличные от черного, соответствуют периодическим точкам отображения Пуанкаре. Значения периодов см. в легенде. b) Карта максимального показателя Ляпунова на плоскости (μ_2, Γ). Области, окрашенные оттенками красного соответствуют странным аттракторам. Интенсивность цвета пропорциональна величине старшего показателя. Области, окрашенные оттенками синего, соответствуют периодическим точкам отображения. Интенсивность цвета пропорциональна модулю величины старшего показателя Ляпунова

Сечению карты (рис. 17) при $\mu_2 = 0.15$ соответствует однопараметрическая бифуркационная диаграмма для динамической переменной p_2, показанная на рис. 18.

Далее изучим отдельные сечения карты динамических режимов (рис. 17) и фрагменты бифуркационной диаграммы (рис. 18).

3.3. Предельные циклы и мультистабильность

Из диаграммы на рис. 18 видно, что в системе реализуются предельные циклы различных периодов. Фрагмент диаграммы при $\Gamma \in [15.8, 20]$ приведен на рис. 19.

Из диаграммы на рис. 19 видно, что в системе при одних и тех же

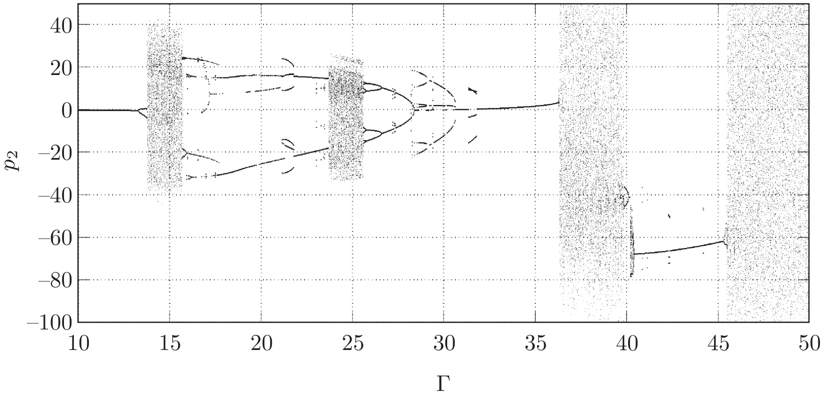


Рис. 18. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма (сечение карты динамических режимов) для переменной p_2 при $\mu_2 = 0.15$ и $\Gamma \in [10, 50]$

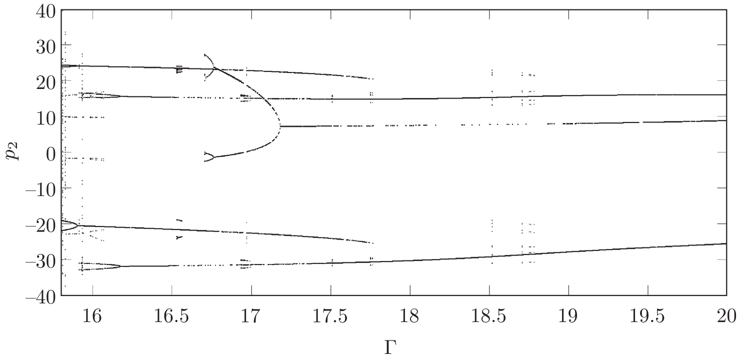


Рис. 19. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для переменной p_2 при $\mu_2 = 0.15$ и $\Gamma \in [15.8, 20]$

значениях параметров сосуществуют различные предельные циклы. Таким образом, система является мультистабильной. Кроме того, на диаграмме на рис. 19 видны удвоения периодов, но в большинстве случаев они обрываются.

При изменении параметра μ_2 (рис. 20) также наблюдаются бифуркации удвоения периода. Тем не менее в системе не удалось обнаружить возникновения хаоса по сценарию аттракторов Фейгенбаума, всюду при изме-

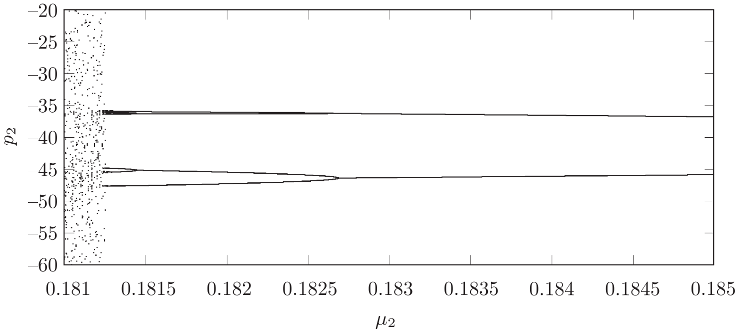


Рис. 20. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для переменной p_2 при $\mu_2 \in [0.181, 0.185]$ и $\Gamma \in 39$

нении параметров переход от предельных циклов к хаотическим режимам происходит скачкообразно, как показано на рис. 20.

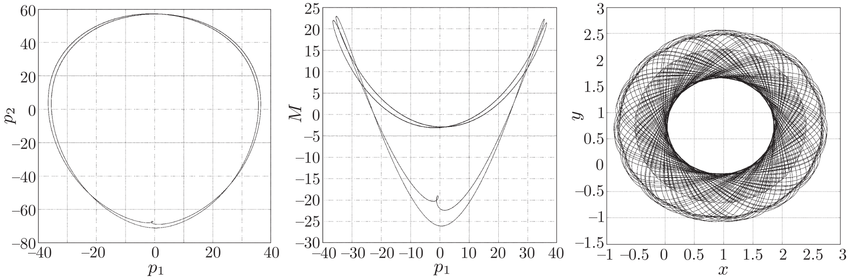
Далее рассмотрим изменение фазовой траектории в пространстве (p_1, p_2, M) и траектории движения центра эллиптического профиля на плоскости Oxy в зависимости от значения параметра μ_2. Значения остальных параметров примем следующими:

$$A = 1.25, \quad B = 5, \quad \widetilde{I} = 0.705, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad \Omega = 20,$$
$$\Gamma = 39, \quad \mu_1 = 0.1, \quad \mu_3 = 0.705.$$

На рис. 21 показаны проекции фазовой траектории на плоскости (p_1, p_2) и (p_1, M) и траектория движения эллиптического профиля при $\mu_2 = 0.185$. Данному режиму движения соответствует точка периода 2 (см. рис. 20) на отображении Пуанкаре.

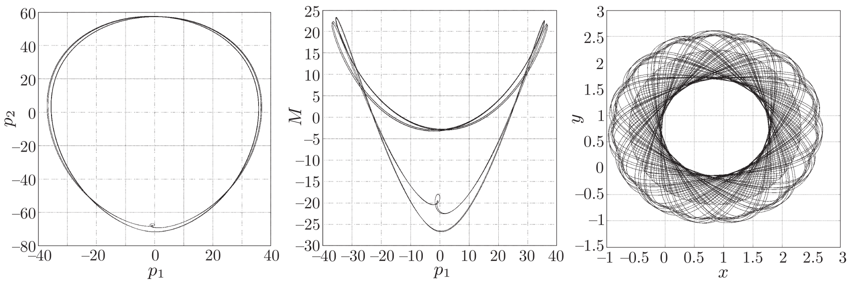
Согласно рис. 20 при уменьшении значения параметра μ_2 происходит удвоение периода. На рис. 22 показаны проекции фазовой траектории на плоскости (p_1, p_2) и (p_1, M) и траектория движения эллиптического профиля при $\mu_2 = 0.182$.

Из рис. 21, 22 мы видим, что при рассмотренных значениях параметров траектории эллиптического профиля на плоскости оказываются ограниченными, то есть заключены в компактную область.



a) b) c)

Рис. 21. a) проекция фазовой траектории на плоскость (p_1, p_2); b) проекция фазовой траектории на плоскость (p_1, M); c) траектория движения эллиптического профиля



a) b) c)

Рис. 22. a) проекция фазовой траектории на плоскость (p_1, p_2); б) проекция фазовой траектории на плоскость (p_1, M); в) траектория движения эллиптического профиля

Возникает естественный вопрос: можно ли добиться направленного передвижения за счет изменения значений параметров системы. Для исследования эффективности передвижения построим в области $\{(\Omega, \xi_0)\,|\,\Omega \in [0.1\pi, 2\pi], \quad \xi_0 \in [0.01,\ 1]\}$ карты величины перемещения за 500 циклов колебаний при следующих значениях параметров:

$$A = 1.0, \quad B = 2.0, \quad \widetilde{I} = 0.5, \quad \alpha = 0.1,$$
$$\mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.5, \quad \mu_3 = 0.1$$

и различных значениях циркуляции Γ.

Карта величины перемещения при $\Gamma = 0$ показана на рис. 23.

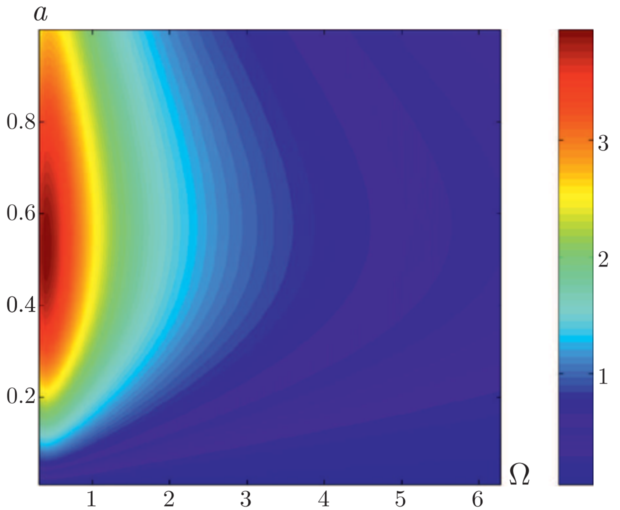


Рис. 23. Карта величины перемещения за 500 циклов колебаний при $\Gamma = 0$

При $\Omega = 0.40369$, $a = 0.52480$ (темно-красная область на рис. 23) реализуется наибольшее (за 500 циклов колебаний) перемещение. Траектория эллиптического профиля показана на рис. 24.

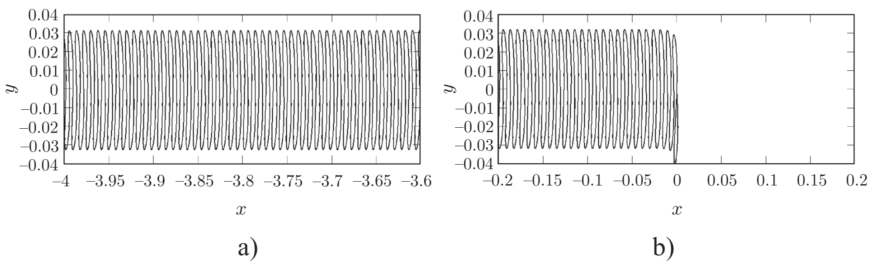


Рис. 24. Траектория тела при $\Omega = 0.40369$, $a = 0.52480$: a) установившийся режим, b) начальный участок траектории

Таким образом, *при нулевом значении циркуляции возможно добиться направленного передвижения за счет подходящего выбора частоты колебаний внутренней массы и ее положения в теле.*

При возникновении ненулевой циркуляции $\Gamma = 0.5$ карта величины перемещения изменяется существенно (см. рис. 25).

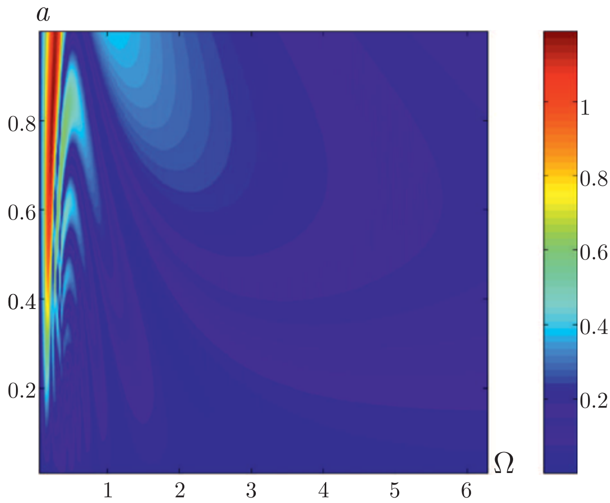


Рис. 25. Карта величины перемещения за 500 циклов колебаний при $\Gamma = 0.5$

При $\Omega = 0.24944$, $a = 0.84655$ (темно-красная область на рис. 25) реализуется наибольшее (за 500 циклов колебаний) перемещение, однако траектория движения эллиптического профиля в этом случае оказывается компактной (см. рис. 26).

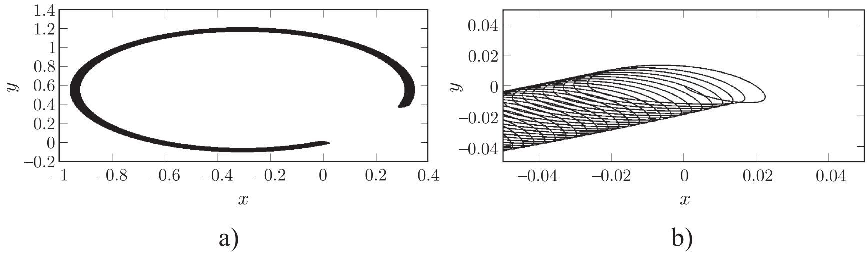


Рис. 26. Траектория тела при $\Omega = 0.24944$, $a = 0.84655$: a) общий вид траектории, b) начальный участок траектории

Можно выдвинуть следующую гипотезу: *при ненулевом постоянном* *значении циркуляции траектория движения эллиптического профиля компактна.*

3.4. Притягивающие торы, бифуркация Неймарка–Сакера

Как было сказано выше, в рассматриваемой системе помимо притягивающих циклов могут также возникать притягивающие торы. В этом случае наблюдается суперкритическая бифуркация Неймарка–Сакера, приводящая к рождению на отображении Пуанкаре (40) инвариантной кривой из неподвижной точки. На карте динамических режимов (рис. 17a) инвариантным кривым соответствуют также области черного цвета (т. е. области без притягивающих точек), которые на карте показателей Ляпунова (см. рис. 17b) задаются белым цветом (т. е. старший показатель Ляпунова равен нулю). Так на рис. 17 это — область на уровне $\Gamma \approx 40$, соответствующая инвариантная кривая приведена на рис. 16b. Для более наглядной демонстрации возникновения инвариантной кривой построим бифуркационную диаграмму на плоскости (p_2, Γ) (см. рис. 27) при следующих значениях параметров системы:

$$A = 1.25, \quad B = 5, \quad \widetilde{I} = 0.705, \quad a = 0.334, \quad b = 1, \quad \Omega = 20,$$
$$\Gamma \in [14.8, 15.5], \quad \mu_1 = 0.1, \quad \mu_2 = 0.18, \quad \mu_3 = 0.705.$$

Как видно из рис. 27, при увеличении циркуляции выше некоторого предельного значения $\Gamma_* \approx 15.0316$ на отображении Пуанкаре исчезает неподвижная точка периода 2. При этом на сечении возникает притягивающее множество, состоящее из пары замкнутых кривых (см. рис. 28), которому в фазовом пространстве соответствует инвариантный тор, то есть происходит бифуркация Неймарка–Сакера. При дальнейшем увеличении параметра Γ эти кривые сливаются, образуя одну замкнутую кривую (см. рис. 28). Это означает, что происходит бифуркация обратная бифуркации удвоения тора.

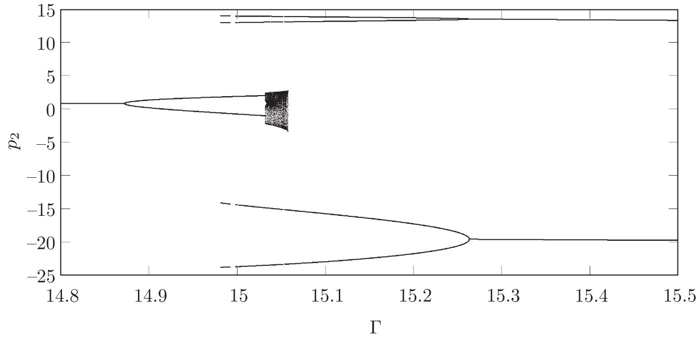


Рис. 27. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма для переменной p_2 при $\Gamma \in [14.8, 15.5]$

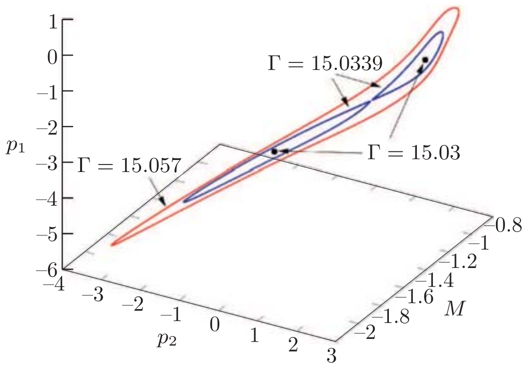
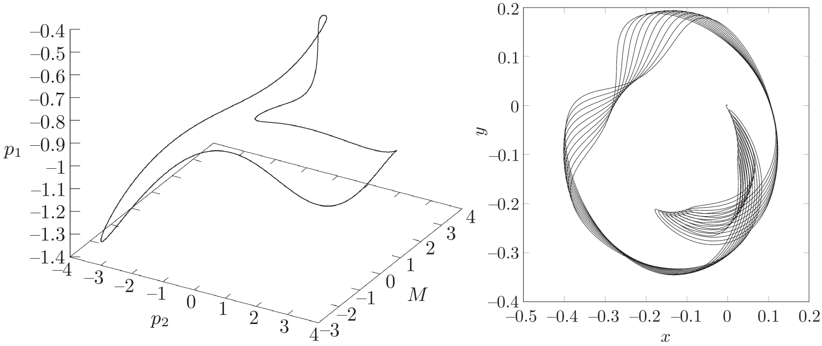


Рис. 28. Периодические точки ($\Gamma = 15.03$) и инвариантые кривые ($\Gamma = 15.0339$, $\Gamma = 15.057$), рождающиеся при увеличении параметра Γ

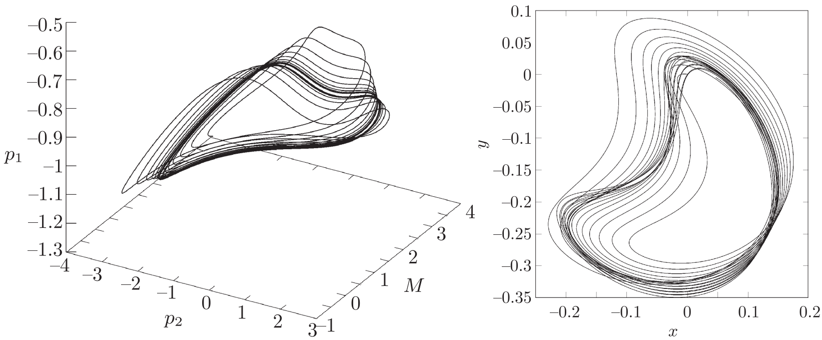
Фазовые траектории и траектории профиля, соответствующие различным притягивающим множествам на рис. 28, приведены на рис. 29—31.

Для полноты картины приведем также спектр показателей Ляпунова для траекторий на отображении Пуанкаре в окрестности упомянутых предельных множеств.



a) b)

Рис. 29. Соответствующие $\Gamma = 15.03$: a) фазовая траектория в пространстве (p_1, p_2, M); b) траектория движения эллиптического профиля

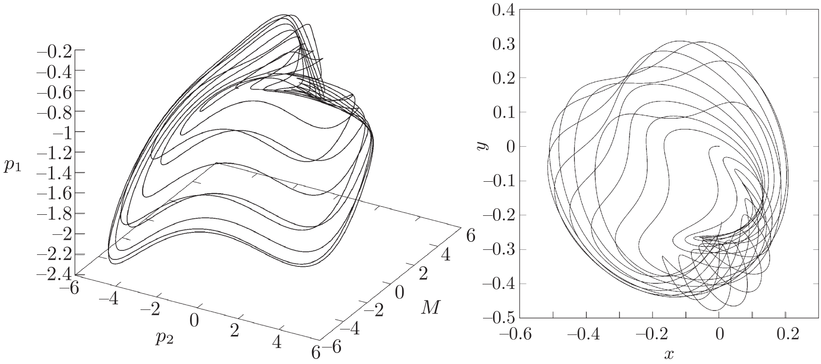


a) b)

Рис. 30. Соответствующие $\Gamma = 15.0339$: a) фазовая траектория в пространстве (p_1, p_2, M); b) траектория движения эллиптического профиля

Периодической точке при $\Gamma = 15.03$ соответствует:

$$\lambda_1 = (-1.27 \pm 0.59) \cdot 10^{-3},$$
$$\lambda_2 = (-1.39 \pm 0.66) \cdot 10^{-3},$$
$$\lambda_3 = (-2.9401 \pm 0.0025) \cdot 10^{-1}.$$



a) b)

Рис. 31. Соответствующие $\Gamma = 15.057$: a) фазовая траектория в пространстве (p_1, p_2, M); b) траектория движения эллиптического профиля

Инвариантной кривой при $\Gamma = 15.0339$ соответствует:

$$\lambda_1 = 0 \pm 0.23 \cdot 10^{-2},$$
$$\lambda_2 = (-2.09 \pm 0.21) \cdot 10^{-2},$$
$$\lambda_3 = (-2.761 \pm 0.014) \cdot 10^{-1}.$$

Инвариантной кривой при $\Gamma = 15.057$ соответствует:

$$\lambda_1 = 0 \pm 0.15 \cdot 10^{-3},$$
$$\lambda_2 = (-2.940 \pm 0.089) \cdot 10^{-2},$$
$$\lambda_3 = (-2.676 \pm 0.014) \cdot 10^{-1}.$$

3.5. Странные аттракторы

На карте динамических режимов на рис. 17a выделяются (stand out) четыре обширных области, в которых отсутствуют предельные циклы (изображены черным цветом), причем согласно рис. 17b максимальный показатель Ляпунова в этих областях оказывается положительным. Это свидетельствует о хаотическом поведении системы при данных значениях параметров.

Зафиксируем некоторые значения параметров в одной из рассматриваемых областей:

$$A = 1.25, \quad B = 5, \quad \widetilde{I} = 0.705, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad \Omega = 20,$$
$$\Gamma = 15, \quad \mu_1 = \mu_2 = 0.1, \quad \mu_3 = 0.705.$$

На рис. 32 мы видим, что в сечении Пуанкаре (40) в данном случае возникают сложные притягивающие множества, отличные от периодической орбиты или тора. Показатели Ляпунова аттрактора (рис. 32), рассчитанные

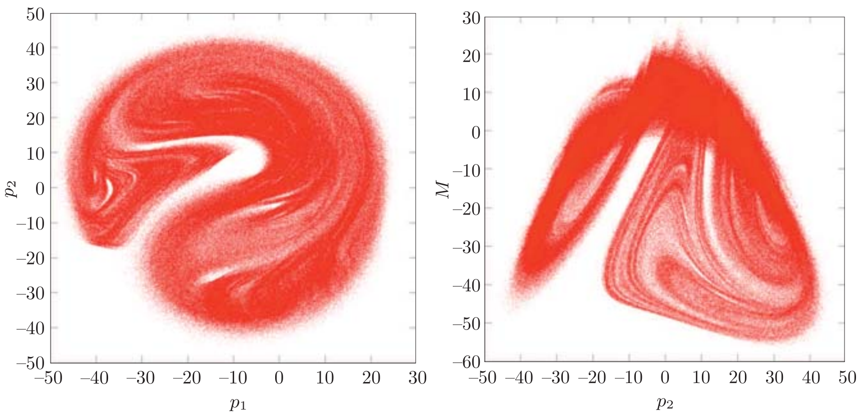


Рис. 32. Проекции странного (хаотического) аттрактора на координатные плоскости (p_1, p_2), (p_2, M)

для отображения, имеют следующие значения.

$$\lambda_1 = (8.42 \pm 0.17) \cdot 10^{-1}, \quad \lambda_2 = (-5.80 \pm 0.79) \cdot 10^{-2},$$
$$\lambda_3 = (-9.60 \pm 0.13) \cdot 10^{-1}.$$

Старший показатель существенно положительный, а сумма показателей отрицательная, что *свидетельствует о том, что в рассмотренном случае реализуется хаотический (странный) аттрактор*.

Данному аттрактору в фазовом и абсолютном пространстве соответствуют кривые, показанные на рис. 33. С точки зрения теории управления следует избегать режимов движения, подобных изображенному на рис. 33.

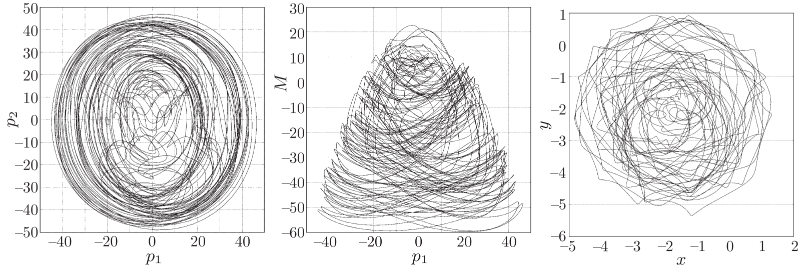


Рис. 33. a) Проекция странного (хаотического) аттрактора на плоскость (p_1, p_2); b) проекция странного (хаотического) аттрактора на плоскость (p_1, M); c) траектория центра профиля в абсолютном пространстве

3.6. Анизотропное трение, проблема неограниченного ускорения

Выше было показано, что как в отсутствие диссипации, так и в случае полной диссипации в системе не наблюдается неограниченного ускорения при ограниченных параметрических возбуждениях. С другой стороны, в схожей системе, описывающей движение саней Чаплыгина с параметрическим возбуждением, неограниченное ускорение было обнаружено в работах [22, 23].

В то же время известно, что траектории неголономных систем оказываются близки к траекториям их голономных аналогов с анизотропным трением [27–29]. Воспользуемся аналогичным подходом для системы (12). Так, рассмотрим вырожденную функцию Рэлея вида

$$R = \frac{1}{2}\mu_2 v_2^2,$$

то есть $\mu_1 = 0$, $\mu_3 = 0$.

Для данной системы в предельном случае $\mu_2 \to \infty$ уравнения (12) совпадают с уравнениями саней Чаплыгина. Действительно, второе уравнение системы (12)

$$\dot{p}_2 = -p_1\omega + \Gamma v_1 - \mu_2 v_2$$

дает неголономную связь $v_2 = 0$, а первое и третье уравнения (12) принимают вид

$$\dot{p}_1 = \omega(c_1(t)\omega + \dot{c}_2(t)), \quad \dot{M} = -v_1(c_1(t)\omega + \dot{c}_2(t)), \tag{41}$$

где

$$p_1 = Av_1 - c_2(t)\omega + \dot{c}_1(t), \quad M = -c_2(t)v_1 + I(t)\omega + k(t).$$

В работе [23] для системы (41) были обнаружены два случая ускоренного движения:

1) Рост поступательной скорости пропорционально времени t при

$$a \neq 0 \quad \text{и} \quad c_1(t) \equiv 0. \tag{42}$$

2) Рост поступательной скорости пропорционально $t^{1/3}$ при

$$\frac{a}{b} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{A(\widetilde{I} + m_p a^2) + m_p(A - m_p)b^2}{A^2 ab} < \frac{a}{b}. \tag{43}$$

Выбирая значения параметров системы (12), исходя из условий (42) или (43), можно ожидать, что при достаточно больших μ_2 в системе (12) будет наблюдаться ускоренное движение, аналогичное найденному в работе [23].

Для проведения соответствующих численных экспериментов зафиксируем значения параметров системы (12) следующим образом:

$$\begin{gathered} \mu_3 = 0, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad d_2 = 0, \quad \Omega = \pi, \\ m_p = 1, \quad m = 1, \quad A = 4, \quad B = 10, \quad \widetilde{I} = 3 \end{gathered} \tag{44}$$

и рассмотрим изменение ее кинетической энергии при различных значениях d_1, μ_1, μ_2.

Случай 1. Рассмотрим движение системы (12) при $d_1 = -2$, $\mu_1 = 0$ и различных значениях μ_2. Напомним, что в данном случае функция $c_1(t) \neq 0$, а при $\mu_2 \to \infty$ поступательная скорость центра профиля будет расти пропорционально $t^{1/3}$.

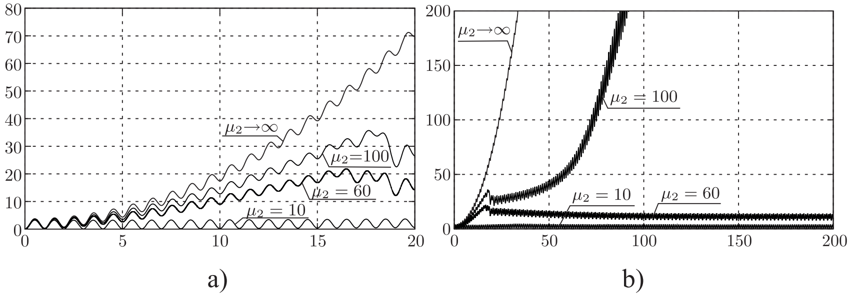


Рис. 34. Изменение кинетической энергии при $d_1 = -2$, $\mu_1 = 0$: a) начальный участок; b) полная картина

На рис. 34a показано изменение кинетической энергии системы (41) и системы (12) для различных μ_2 на начальном промежутке времени. Мы видим, что при возрастании μ_2 динамика системы (12) приближается к динамике системы (41).

Из рис. 34b видно, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия системы (12) растет быстрее, чем кинетическая энергия саней Чаплыгина (41). При достижении некоторого критического значения начинается переходный процесс, после завершения которого кинетическая энергия колеблется около некоторого значения.

Отметим, что при других значениях $\mu_2 < 10000$ поведение системы качественно совпадает с показанным на рис. 34b. Таким образом, можно сделать предположение, что *при значениях параметров* (44), $c_1(t) \neq 0$, $\mu_1 = 0$ *и конечных значениях* μ_2 *в системе* (12) *наблюдается только ограниченный рост кинетической энергии*. Более строгое обоснование отсутствия ускорения требует дополнительных исследований.

Случай 2. Рассмотрим движение системы (12) в случае, когда функция Рэлея имеет вид

$$R = \frac{1}{2}\left(\mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2\right) \tag{45}$$

при $d_1 = -2$, $\mu_1 = 0.001$ и различных значениях μ_2. При указанном значении d_1 и значениях параметров (44) функция $c_1(t) \neq 0$. Кроме того, в предельном случае $\mu_2 \to \infty$ первое и третье уравнения движения (12) запишутся следующим образом:

$$\dot{p}_1 = \omega(c_1(t)\omega + \dot{c}_2(t)) - \mu_1 v_1, \quad \dot{M} = -v_1(c_1(t)\omega + \dot{c}_2(t)). \qquad (46)$$

На рис. 35 показано изменение кинетической энергии систем (46) и (12) при различных значениях μ_2. Из рис. 35a видно, что на начальном промежутке времени динамика системы (12) близка к динамике саней (46). Причем при возрастании значения μ_2 зависимость кинетической энергии системы (12) от времени приближается к соответствующей зависимости для системы (46). Из рис. 35b видно, что в рассматриваемом случае кинетическая энергия системы (12) ограничена.

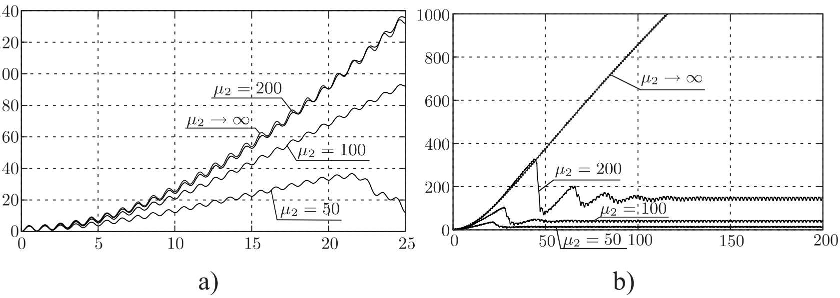
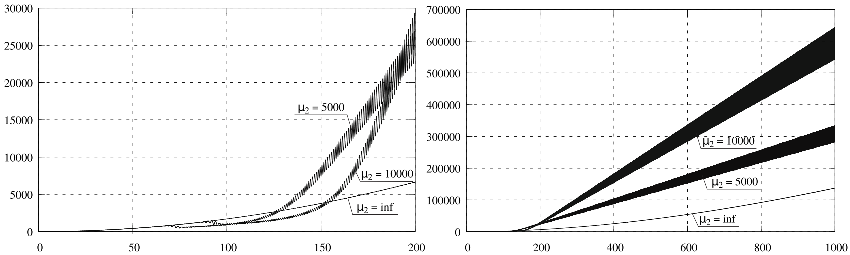


Рис. 35. Изменение кинетической энергии при $d_1 = -2$, $\mu_1 = 0.001$: a) начальный участок; b) полная картина

Таким образом, можно сделать предположение, что *при значениях параметров* (44), $c_1(t) \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$ *и конечных значениях* μ_2 *в системе* (12) *наблюдается только ограниченный рост кинетической энергии, как и в предыдущем случае*.

Случай 3. Рассмотрим движение системы (12) с функцией Рэлея (45) при $d_1 = -1$, $\mu_1 = 0.001$ и различных значениях μ_2. В этом случае $c_1 = 0$, то есть линия движения внутренней массы лежит на оси Cx_2.

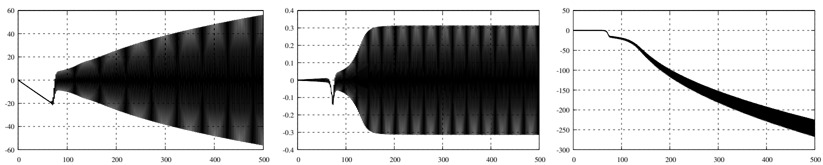
На рис. 36 показано изменение кинетической энергии систем (46) и (12) при различных значениях μ_2. Из рис. 36a видно, что на начальном промежутке времени динамика системы (12) близка к динамике системы (46), причем длина данного промежутка возрастает с увеличением значения параметра μ_2. Далее происходит качественное изменение динамики системы, и, как видно из рис. 36b, рост кинетической энергии системы (12) продолжается в среднем линейно по времени с увеличивающейся амплитудой колебаний.



a) b)

Рис. 36. Изменение кинетической энергии при $d_1 = -1$, $\mu_1 = 0.001$: a) начальный участок; b) полная картина

Для полноты картины приведем также графики (см. рис. 37) изменения проекций v_1, v_2 поступательной скорости центра профиля на оси подвижной системы координат Cx_1x_2 и угловой скорости ω при $\mu_2 = 5000$.



a) b) c)

Рис. 37. Изменение поступательной и угловой скорости профиля при $\mu_2 = 5000$: a) компонента v_1 вектора поступательной скорости; b) компонента v_2 вектора поступательной скорости; c) угловая скорость ω

Из рис. 37, а видно, что компонента v_1 после завершения переходного процесса совершает колебания с возрастающей амплитудой около нулевого значения, в то время как компонента v_2 остается ограниченной (см. рис. 37, b). Угловая скорость ω в среднем возрастает по абсолютной величине. Амплитуда изменения угловой скорости также растет (см. рис. 37c). Картина, аналогичная приведенной на рис. 37, наблюдается и для $\mu_2 = 10000$.

Таким образом, можно предположить, что при значениях параметров (44), $c_1 = 0$, $\mu_1 \neq 0$ и достаточно больших значениях μ_2 в системе (12) возникает резонанс, приводящий к линейному по времени росту кинетической энергии. При этом возрастает амплитуда изменения продольной компоненты скорости v_1 при нулевом среднем значении, а угловая скорость ω растет в среднем по абсолютной величине.

Список рекомендуемой литературы

[1] Килин А. А., Казаков А. О., Чигарев В. Г. Исследование систем вихревой гидродинамики с использованием программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос»: Учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. 66 с.

[2] Килин А. А., Мамаев И. С., Казаков А. О. Исследование неголономных систем с использованием программного комплекса «Компьютерная динамика: хаос»: Учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. 70 с.

[3] Килин А. А., Мамаев И. С., Иванова Т. Б. Механика систем со связями: Учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2020. 94 с.

[4] Килин А. А. Введение в теорию точечных отображений. Динамический хаос: Учеб. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2021. 100 с.

[5] Ветчанин Е. В., Артемова Е. М. Процедурное программирование на языках C/C++: Учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2020. 122 с.

[6] Ветчанин Е. В., Артемова Е. М. Программирование в системах GNU Octave и MATLAB: Учеб.-метод. пособие. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2019. 100 с.

[7] Kirchhoff G. Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Mechanik.

[8] Чаплыгин С. А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. М., 1926. (Тр. ЦАГИ; Вып. 19); Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 2. С. 300–382.

[9] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos, 2006, vol. 16, no. 1, 013118, 7 p.

[10] Vetchanin E. V., Kilin A. A. Control of Body Motion in an Ideal Fluid Using the Internal Mass and the Rotor in the Presence of Circulation Around the Body // Journal of Dynamical and Control Systems, 2017, vol. 23, p. 435–458.

[11] Ramodanov S. M., Tenenev V. A., Treschev D. V. Self-propulsion of a Body with Rigid Surface and Variable Coefficient of Lift in a Perfect Fluid // Regular and Chaotic Dynamics, 2012, vol. 17, no. 6, p. 547–558.

[12] Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body // Regular and Chaotic Dynamics, 2007, vol. 12, no. 5, p. 531–565.

[13] Козлов В. В. О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // МТТ, 1989, № 5, с. 10–17.

[14] Kuznetsov S. P. Plate Falling in a Fluid: Regular and Chaotic Dynamics of Finite-dimensional Models // Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 3, p. 345–382.

[15] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, № 4, с. 592–601.

[16] Ветчанин Е. В., Килин А. А. Управляемое движение твердого тела с внутренними механизмами в идеальной несжимаемой жидкости // Труды Математического института имени В. А. Стеклова, 2016, т. 295, с. 321–351.

[17] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

[18] Онищенко Д. А., Козлов В. В. О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // ПММ, 2003, т. 67, вып. 4, с. 620–633.

[19] Klenov A. I., Kilin A. A. Influence of Vortex Structures on the Controlled Motion of an Above-water Screwless Robot // Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 7–8, p. 927–938.

[20] Черноусько Ф. Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ, 2008, т. 72, № 2, с. 202–215.

[21] Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A. The Self-propulsion of a Body with Moving Internal Masses in a Viscous Fluid // Regular and Chaotic Dynamics, 2013, vol. 18, no. 1–2, p. 100–117.

[22] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kuznetsov S. P. Chaplygin sleigh with periodically oscillating internal mass // EPL (Europhysics Letters) 119.6 (2017): 60008.

[23] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. The Chaplygin Sleigh with Parametric Excitation: Chaotic Dynamics and Nonholonomic Acceleration // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 8, p. 955-–975.

[24] Borisov A. V., Mamaev I. S., Vetchanin E. V. Dynamics of a Smooth Profile in a Medium with Friction in the Presence of Parametric Excitation // Regular and Chaotic Dynamics, 2018, vol. 23, no. 4, p. 480–502.

[25] Козлов В. В. К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде // Вестник Моск. унив. Сер. Математика. Механика, 1990, № 1, с. 79–86.

[26] Treschev D., Zubelevich O. Introduction to the perturbation theory of Hamiltonian systems. Springer, 2008.

[27] Eldering J. Realizing Nonholonomic Dynamics as Limit of Friction Forces // Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 4, p. 390–409.

[28] Бренделев В. Н. О реализации связей в неголономной механике // Прикл. мат. и мех., 1981, т. 45, вып. 3, с. 481–487.

[29] Козлов В. В. Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // ДАН СССР, 1983, т. 272, № 3, с. 550–554.

[30] Vetchanin E. V., Mamaev I. S. Dynamics of Two Point Vortices in an External Compressible Shear Flow // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 8, p. 893–908.

[31] Bohl P., Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem // J. Reine Angew. Math., 1909, vol. 135, p. 189–203.

[32] Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics (Vol. 3), Springer Science & Business Media, 2007.

[33] Hairer E., Norsett S., Wanner G. (2000). Solving Ordinary, Differential Equations I, Nonstiff problems / E. Hairer, SP Norsett, G. Wanner, with 135 Figures, vol. 1.

Учебное издание

Мамаев Иван Сергеевич

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ В ЖИДКОСТИ

Учебное пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 16.11.21. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$.
Усл. печ. л. 3.72. Уч.-изд. л. 3.0.
Тираж 300 экз. Заказ № 2085

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: + 7 (3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. + 7 (3412) 68-57-18