

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Многопрофильный колледж профессионального образования

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
БАЗОВЫЙ КУРС
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие



Ижевск
2021

УДК 620.10(075.8)
ББК 30.121я72
Т382

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ

Рецензент:

д.т.н., проф. кафедры «Теоретическая механика и сопротивление материалов» ИжГСХА

П. В. Дородов

Составитель: А. В. Кулагин

Т382 Техническая механика. Базовый курс сопротивления материалов: Учебно-методическое пособие. – Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. – 52 с.

ISBN 978-5-4312-0946-8

В учебно-методическом пособии представлен учебный материал по дисциплине «Техническая механика» базовой части раздела «Сопротивление материалов» 8 темами, каждая из которых содержит конспект лекции с графическим материалом и примерами решения типовых задач. Материал лекций базируется на соответствующих классических трудах по технической механике.

Издание предназначено студентам СПО изучающих дисциплину «Техническая механика» специальностей «Пожарная безопасность», «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» и осваивающих дисциплины «Эксплуатация нефтепромышленного оборудования» и «Противопожарная защита». Пособие направлено на формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС СПО.

УДК 620.10(075.8)
ББК 30.121я72

ISBN 978-5-4312-0946-8

© А.В. Кулагин, сост., 2021
© ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», 2021

Содержание

Предисловие.....	4
Введение.....	5
ТЕМА 1. Основные понятия сопротивления материалов. Метод сечений.....	6
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 1.....	13
ТЕМА 2. Параметры напряженно-деформированного состояния и принципы их оценки.....	14
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 2.....	16
ТЕМА 3. Растяжение-сжатие стержней. Гипотезы и принципы, положенные в основу расчета внутренних усилий нагруженных стержней. Закон Гука.....	17
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 3.....	22
ТЕМА 4. Пластичные и хрупкие материалы и их свойства и характеристики.....	23
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 4.....	25
ТЕМА 5. Независимость действия сил. Напряженное состояние при растяжении – сжатии. Запас прочности.....	26
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 5.....	29
ТЕМА 6. Кручение валов. Расчет прочности и жесткости.....	30
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 6.....	35
ТЕМА 7. Теории прочности и предельное (опасное состояние).....	36
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 7.....	41
ТЕМА 8. Геометрические характеристики стержней.....	42
Вопросы для самостоятельного изучения по теме 8.....	48
Заключение.....	49
Библиографический список.....	50

Предисловие

В учебно-методическом пособии изложены основные принципы сопротивления материалов.

Проанализированы и представлены к изучению лекционные и практические материалы, связанные с расчетами на прочность, жесткость и устойчивость несущих элементов конструкций и деталей машин на базовом уровне.

Пособие рекомендовано студентам направления подготовки 20.02.04 Пожарная безопасность, 21.02.01. Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений.

Пособие направлено на формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС СПО.

На данный момент в нашей стране остается высоким спрос на инженерные кадры среднего звена. Не достаточно высокий уровень технических знаний и исполнительской дисциплины на промышленных предприятиях не дает возможности производства высококачественной продукции. Это пособие поможет улучшить уровень подготовки в данном разделе дисциплины на начальном этапе.

На первом этапе обучения студентам указанных специальностей по технической механике предлагается изучить начальную часть раздела сопротивления материалов для повышения уровня подготовки при решении простейших инженерных задач и специальных дисциплин.

Лекционный материал дополнен практическими задачами с подробным объяснением их решения.

Введение

Сопротивление материалов - инженерная дисциплина о методах расчета на прочность, жесткость, устойчивость и надежность машин и конструкций [1-10].

Конструкция состоит из несущих элементов, а машина из деталей. Их необходимо проектировать и производить так, чтобы они удовлетворяли требованиям надежности.

Надежностью называется способность конструкции или машины выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени или наработки.

Прочность - способность конструкции или машины выдерживать определенную нагрузку, не разрушаясь. Прочностная надежность определяется отказами, связанными с разрушением или недопустимыми деформациями несущих элементов и деталей машин.

Пример 1. Несущая конструкция - пролет моста прочная, но не жесткая. Могут возникнуть колебания, делающие невозможной дальнейшую эксплуатацию.

Пример 2. Сильно сжатая, но недостаточно жесткая колонна может выпучиваться, что связано с потерей устойчивости.

Из этих примеров очевидно, что следует выполнить еще определенные требования жесткости.

Жесткость-способность конструкции и ее элементов, машин и их деталей противостоять внешним нагрузкам по отношению к деформации и перемещениям. При заданных нагрузках изменение формы, объема и размеров не должно превышать величины, устанавливаемых техническими требованиями на конструкцию или машину.

Устойчивость - способность конструкции и ее элементов, машин и их деталей сохранять определенную начальную форму упругого равновесия.

Сопротивление материалов решает поставленные задачи, базируясь в технической части - на теоретической механике и математике, в экспериментальной части - на физике и материаловедении.

Все вышесказанное имеет смысл только в том случае, когда рассматривается реальный объект.

ТЕМА 1. Основные понятия сопротивления материалов. Метод сечений

Классификация объектов

В сопротивлении материалов исследуются реальные объекты, которые можно представить расчетными схемами или расчетными моделями.

Расчетная схема - реальный объект, освобожденный от некоторых несущественных особенностей функционирования этого объекта. Для одного объекта можно представить множество расчетных схем. Количество расчетных схем зависит от точности решения задачи и той стороны явления, которая изучается исследователями.

Для одной расчетной схемы также можно представить множество реальных объектов.

Построение расчетной схемы начинается со схематизации (упрощения) элементов конструкций и деталей машин, а также со схематизации структуры свойств материалов [1].

Схематизации элементов конструкций и деталей машин

Для того, чтобы выбрать расчетную схему вводятся упрощения в геометрическую форму расчетного объекта (Рис.1).

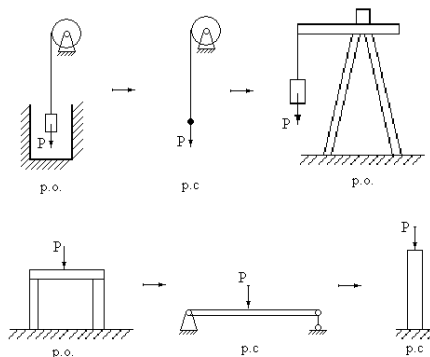


Рис. 1. Расчетные схемы объектов.

Все реальные объекты состоят из четырех элементов.

1. Стержень или брус - тело, у которого один размер(длина) l , значительно превышает два других поперечных размера (ширина и высота) b, h (Рис. 2).

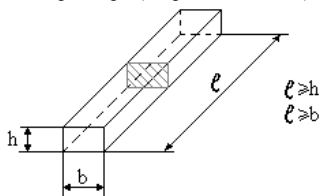


Рис.2. Стержень.

Указательный стержень – прямоугольный.

По форме оси стержни бывают: прямые (балка, колонна, вал), криволинейные (крюк строительного крана), призматические(железобетонные призматические стержни), переменного сечения (карданный вал транспортного средства).

В авиационной и строительной технике применяют стержни тонкостенные (Рис3).

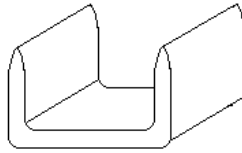


Рис. 3. Стержень тонкостенный.

Стержень, работающий на изгиб, называют балкой, работающий на кручение – валом, на продольный - изгиб стойкой или колонной.

2. Пластина- это тело, у которого его толщина h существенно меньше других размеров, b или d, D (Рис.4).

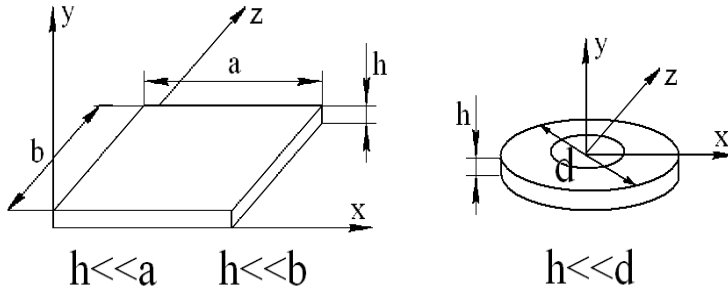


Рис. 4. Пластина.

Пластины бывают прямоугольными (тетрадь), круглыми (плоское днище резервуара, диски компрессоров и турбин).

3. Оболочка - сильно искривленная пластина. Оболочки бывают цилиндрическими (цистерна), коническими (сосуд высокого давления, пуля, снаряд), сферическими (корпус подводной лодки, дирижабль) (Рис.5).

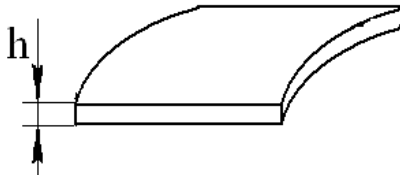


Рисунок 5. Пластина.

4. Массивное (пространственное) тело - тело, у которого все размеры соизмеримы (дамба гидроэлектростанции, фундаментный строительный блок) Л- В Н. Массивное тело применяется для учета концентраций напряжений в объекте на концах и в местах изменения связей [10] (Рис.6).

Модель - совокупность зависимостей, условий, ограничений, описывающих процесс или явление.

Рассмотрим твердое тело заданной формы, материал которого имеет известные механические свойства (кристаллическую решетку), то есть аморфен. На тело действуют заданные нагрузки и наложены некоторые связи. Требуется определить напряжения, деформации и перемещения в теле.

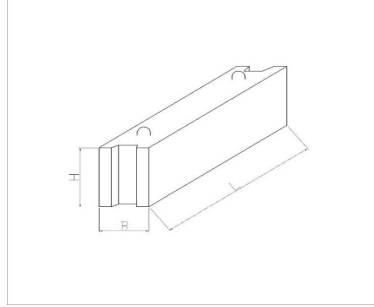


Рис. 6. Массивное тело.

Модель материала и свойства модели

При решении подобных задач удобнее пользоваться материалом, наделенным идеализированными свойствами.

Для этой модели материала будем считать следующие свойства и допущения:

1. Материал тела представляет сплошную среду. Допущение о сплошности позволяет отвлечься от реальной структуры данного материала (кристаллическая, зернистая) и рассматривать его как аморфный, непрерывно заполняющий любой элемент объема тела.

2. Материал тела считается однородным. Это допущение означает, что механические свойства в любой точке тела одинаковы.

Допущения о сплошности и однородности приводят к тому, что внутренние силы представляются непрерывно распределенными по объему тела. Для их определения можно использовать аппарат математического анализа.

3. Материал тела считается изотропным, то есть его механические свойства в каждой точке одинаковы во всех направлениях. В противном случае материал называется анизотропным.

4. Деформации в точках (относительные удлинения ε и углы сдвига γ) считаются малыми. Это допущения о том, что под действием нагрузок размеры тела существенно не меняются. Так, например, относительное удлинение малого отрезка стержня длиной S ΔS , будет (Рис. 7).

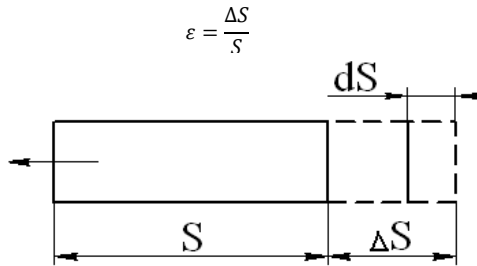


Рис. 7. Относительное удлинение отрезка стержня.

Это удлинение надо считать условным, так как приращение ΔS отнесено к первоначальному размеру S . Вычисляем дифференциал "истинной" относительной деформации, относя приращения dS к фактической длине отрезка $S + \Delta S$:

$$d\varepsilon_n = \frac{dS}{S + \Delta S} = \frac{dS}{S} \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

Разложив правую часть в степенной ряд, можно записать $d\varepsilon_n = dS(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots)$

Отсюда видно, что при $\varepsilon \ll 1$ имеем приближенное равенство $d\varepsilon \approx d\varepsilon_0$, и изменением абсолютных размеров тела, вызванных деформацией, пренебрегаем [1,2].

Внешние силы, их классификация

Внешними силами называется результат взаимодействия этого объекта с окружающей средой.

В зависимости от характера взаимодействия со средой внешние силы классифицируют на поверхностные и объемные.

Поверхностные силы- результат контактного взаимодействия тел.

Поверхностные силы могут распределяться по всей поверхности и сосредотачиваться на ее части.

Система распределенных поверхностных сил характеризуется интенсивностью, то есть величиной приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка $q[\text{Н/м}]$ - погонной нагрузки, которая делится на:

1. Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой, возникающие при растяжении-сжатии и изгибе (Рис. 8).

Для таких сил $q = \text{const}$. При статических расчетах эти силы заменяются равнодействующей Q следующим образом:

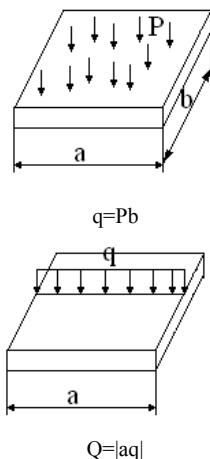


Рис. 8. Силы, равномерно распределенные вдоль отрезка прямой.

Сила Q приложена в центре тяжести нагрузки q . Погонный момент, действующий при кручении и изгибе (Рис. 9).

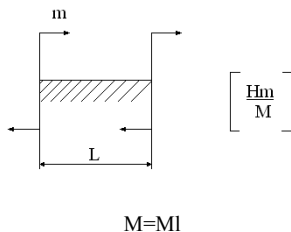
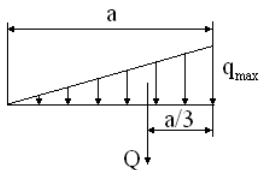


Рис. 9. Погонный момент.

Нагрузки q , m могут быть переменными.

2. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по линейному закону (Рис. 10).

Пример: силы давления воды на плотину, имеющую наибольшую величину и падающие до нуля у поверхности воды.



$$Q = qa/2$$

Рис. 10. Сила, распределенная вдоль прямой по линейному закону.

3. Силы, равномерно распределенные по дуге окружности (Рис. 11).

Пример: силы гидростатического давления на боковые стенки цилиндрического сосуда (в котле, газ в цилиндре, бочка, сжатая обручем).

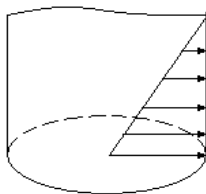


Рис. 11. Сила, распределенная по дуге окружности.

4. Силы, распределенные вдоль отрезка прямой по произвольному закону. Все, что не входит в первые пункты классификации (Рис. 12).

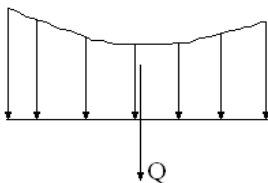


Рис. 12. Сила, распределенная по произвольному закону.

Сосредоточенные поверхностные силы-силы, действующие в точке нагруженного объекта, которые плавно возрастают в начале приложения нагрузки, а затем остаются постоянными (Рис. 13).

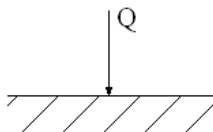


Рис. 13. Сосредоточенная поверхностная сила.

Пример: действие колеса на поверхность рельса, давление шарика шарикоподшипника на вал.

Объемные силы - силы, пропорциональные массе тела (массовые).

Пример: силы инерции, силы притяжения (гравитации), например, вес тела. Обычно они не важны и их не учитывают (статическая нагрузка), если нет особой оговорки (динамическое и ударное нагружение).

P

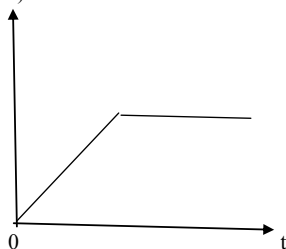


Рис. 14. Статическая сила.

Внешние силы: постоянные (сила веса) и временные (поезд на мосту). В зависимости от длительности действия на конструкцию разделяют внешние силы на статические и динамические.

Внешняя сила называется статической, если она сравнительно медленно и плавно возрастает от нуля до своего конечного значения, а затем остается const, при этом силы инерции не учитываются (вес здания, корпус пули во время вылета из канала ствола) (Рис. 14).

Внешняя сила называется динамическими, если ее сопровождают динамические ускорения взаимодействия тел и силы инерции. Динамические силы: мгновенная (состав, трогаящийся с места), ударная (взаимодействие тележки с упругой преградой при движении с ускорением), повторно - переменная (работа копра при забивании свай).

Внутренние силы

Взаимодействие между частями рассматриваемого объекта внутри условно очерченной области характеризуется внутренними силами.

Внутренние силы возникают не только между взаимодействующими узлами конструкции, но и между отдельными частями объекта при его нагружении.

В дальнейшем изучается только нагруженное состояние объекта и связанное с ним действие внутренних сил.

Метод сечений

Пусть к стержню приложена какая-либо нагрузка в виде системы внешних сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, удовлетворяющая условию равновесия. Внутренние силы появляются в том случае, если стержень рассечь мысленно на две части, например, сечением А. Этот метод исследования внутренних сил называется методом сечений [1-10] (Рис. 15).

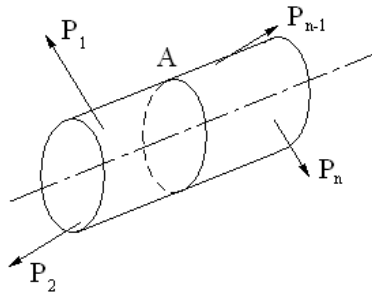


Рис. 15. Схема нагруженного стержня.

Теперь необходимо ввести систему внутренних сил P_A , которая заменяет действие левой части на правую, а правой на левую.

Внутренние силы по принципу действия и противодействия всегда взаимны, то есть система сил, возникающая в плоскости A' действует на правую так же, как и система сил в плоскости на левую, но с обратным знаком A'' (Рис. 16).

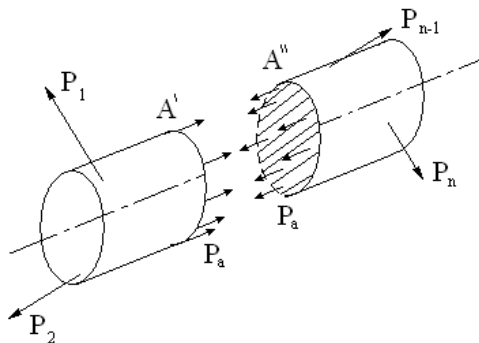


Рис. 16. Принцип действия и противодействия.

Условия равновесия правой и левой частей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n^{\text{лев}} + P_A &= 0; \\ -P_A + P_n^{\text{пр}} &= 0, \end{aligned}$$

где под $P_n^{\text{лев}}$ и $P_n^{\text{пр}}$ понимается сумма внешних сил или моментов для части стержня, расположенной слева или справа от сечения.

Первое уравнение дает шесть условия равновесия левой части, а второе - для правой.

На основании последних двух тождественно написанных уравнений следует, что $P_n^{\text{лев}} + P_n^{\text{пр}} = 0$, из этого следует, что равнодействующая внутренних сил P_A определится из условий равновесия либо левой, либо правой отсеченных частей.

В соответствии с правилами статики приведем систему внутренних сил к центру тяжести сечения. Получаем главный вектор R и главный момент M . Выбираем систему координат и спроецируем главный вектор R и главный момент M на оси.

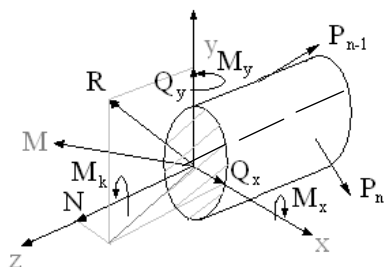


Рис. 17. ВСФ в стержне в общем случае нагружения.

Получаем шесть составляющих: три силы и три момента. Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами (ВСФ) в сечении стержня (Рис. 17).

Проведем классификацию основных видов нагружения.

1. Если в сечении возникает только нормальная сила N , а все остальные ВСФ равны 0, то на этом участке будет простое растяжение или сжатие.

2. Если в поперечном сечении возникает только крутящий момент M_k , то стержень испытывает кручение или чистый сдвиг.

3. Если в поперечных сечениях возникают только изгибающий момент M_x (или M_y), то имеет место чистый изгиб в плоскости YZ (или XZ).

4. В случае, когда наряду, например, с моментом M_x возникает поперечная сила Q_y , то этот случай называется поперечным изгибом в плоскости YZ .

Возможны и более сложные случаи нагружения.

Вопросы для самостоятельного изучения по теме 1.

1. Какие основные задачи решает сопротивление материалов.
2. Представьте классификацию объектов и их схематизацию.
3. Что представляет из себя модель материала и ее свойства.
4. Проведите исследование действия внешних сил в нагруженных объектах.
5. Опишите действие внутренних сил и суть метода сечений.
6. Как определить относительное удлинение отрезка стержня.

ТЕМА 2. Параметры напряженно-деформированного состояния и принципы их оценки

Напряжение в точке поперечного сечения стержня

Напряжение - численная величина характеризующая закон распределения внутренних сил по сечению стержня (Рис. 18).

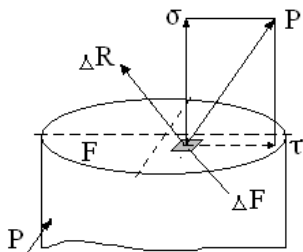


Рис. 18. Напряжения в точке стержня.

Рассмотрим сечение стержня и выделим в нем малую площадку ΔF и введем количественную меру интенсивности потока внутренних сил в деформируемом теле (вектор внутренних сил R).

Определяем среднюю интенсивность ΔR на площадке $P_{cp} = \frac{\Delta R}{\Delta F}$

Стянем площадку в точку, тогда $\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = \Delta P$

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2},$$

где P представлена суммой нормальных и касательных напряжений.

Интенсивность внутренних сил, передающихся в точку через выделенную площадку, называемая напряжением на данной площадке.

Совокупность всех напряжений, возникающих на всех сечениях, проходящих через точку стержня во всевозможных направлениях, называется напряженным состоянием в точке стержня.

В качестве примера действия напряжений рассмотрим полоску бумаги, нагруженную продольными силами (Рис. 19).

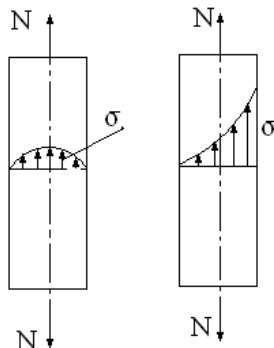


Рис. 19. Пример простого напряженного состояния.

Перемещения и деформации в точке стержня

От приложения нагрузки тело деформируется. Рассмотрим сечение стержня и выделив в нем отрезок АВ. К сечению приложим силу Р (Рис. 20).

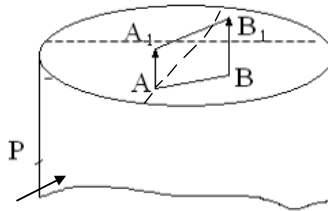


Рис. 20. Линейное перемещение в точке стержня.

АВ - длина отрезка до нагружения; А₁В₁-длина отрезка после нагружения; АА₁и ВВ₁ - векторы перемещения точек А и В; ΔАВ=А₁В₁-АВ - абсолютное изменение отрезка АВ в результате действия внешних нагрузок.

$\varepsilon = \frac{A_1B_1 - AB}{AB}$ -деформация отрезка АВ (относительное изменение отрезка АВ).

$\varepsilon_{AB} = \lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\Delta AB}{AB}$ -деформация в точке в направлении АВ(любой точки отрезка АВ).

Совокупностью всех деформаций будет деформированное состояние в точке стержня.

Представим основные случаи деформированного состояния:

$\varepsilon > 0$ - растяжение; $\varepsilon < 0$ - сжатие; $\varepsilon = 0$ - равновесное состояние, но изменяется форма стержня.

Выделим два отрезка, составляющие угол в сечении стержня

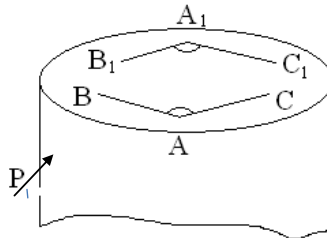


Рис. 21. Угловое перемещение в точке стержня.

$\angle C_1A_1B_1$ - деформация сдвига или угол деформации $\angle CAB$ в точке А плоскости сечения (Рис. 21).

Тогда угол сдвига в точке $\gamma = \lim_{CA \rightarrow 0} \frac{\angle C_1A_1B_1 - \angle CAB}{CA}$

Деформированное состояние точки -это совокупность всех линейных деформаций в различных сечениях и всех угловых деформаций в различных направлениях плоскостей, проходящих через точку называется деформированным состоянием в точке стержня.

Общие принципы обеспечения прочности и надежности элементов конструкции

1. Принцип по допускаемым напряжениям.

Конструкция не разрушится, если при нагрузке в ее элементах возникает максимальное рабочее напряжение не превращающее предельное напряжение:

$$\sigma_{\max}^{\text{раб}} \leq \sigma_{\text{пред}};$$

$$\sigma_{\max}^{\text{раб}} \leq [\sigma];$$

$$[\sigma] \leq \sigma_{\text{пред}}$$

2. Принцип по допускаемым напряжениям и деформациям.

Конструкция будет работать надежно, если перемещение от нагрузки в ее элементах не превышает некоторого допускаемого значения:

$$U_{max}^{раб} \leq [U];$$

$$\varepsilon_{max}^{раб} \leq [\varepsilon]$$

3. Принцип по допускаемым нагрузкам.

Все элементы конструкции будут работать надежно, если максимальная рабочая нагрузка не превышает некоторого допускаемого значения

$$P_{max}^{раб} \leq [P]$$

Вопросы для самостоятельного изучения темы 2

1. Как определяются напряжения, в точке нагруженного стержня.
2. Как определяются перемещения и деформации в точке нагруженного стержня.
3. Сформулируйте основные принципы обеспечения прочности и надежности элементов конструкции.

ТЕМА 3.Растяжение-сжатие стержней. Гипотезы и принципы, положенные в основу расчета внутренних усилий нагруженных стержней. Закон Гука

Растяжение-сжатие стержней

Дифференциальная зависимость между ВСФ и внешними силами.

Растяжение - сжатие - это такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечном сечении возникает только один ВСФ - нормальная сила [1,3-9].

Нормальная сила определяется методом сечений равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на определенную часть бруса (стержня)

$$\sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n \int_0^z q_{zi} dz,$$

где P_i - сосредоточенная сила;

q_{zi} - погонная нагрузка.

В этой формуле интегрирование ведется по длине каждого участка, где есть погонная нагрузка q , а суммирование по всем участкам, расположенным на определенной части бруса. Растягивающая сила считается положительной, а сжимающая – отрицательной. Условимся вектор, изображающий нормальную силу N в поперечном сечении стержня, всегда направлять от сечения, при этом нормальное напряжение в сечении определяют по формуле $\sigma = \frac{N}{F}$. Ни q связаны некоторой дифференциальной зависимостью.

Рассмотрим стержень, нагруженный продольной распределенной нагрузкой q (Рис. 22).

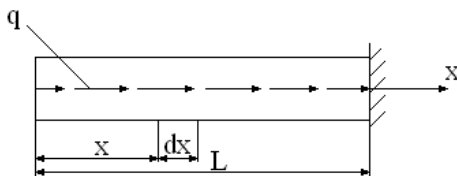


Рис. 22. Стержень, нагруженный продольной распределенной нагрузкой.

Выделим из стержня элемент dx , на который действует малая часть нагрузки q_x , которая считается распределенной в виде малости элемента dx и уравнивается продольными силами на отсеченных частях N и $N+dN$, где dN приращение на участке длиной dx . Составим уравнение равновесия (Рис. 23).

$$\sum P_x = -N + q_x dx + (N + dN) = 0$$

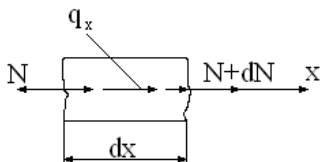


Рис. 23. Участок нагруженного стержня.

Откуда $\frac{dN}{dx} = -q_x$. Эта зависимость, в частности используются при проверке правильности построения эпюры нормальных сил ΣN .

Пример: определить ВСФ при растяжении - сжатии стержня (Рис. 24). $P = qL$

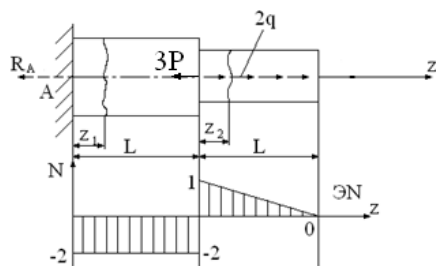


Рис. 24. Расчетная схема и эпюры нормальных сил при растяжении-сжатии.

- 1) Составим уравнение статистического равновесия для стержня и определим из него опорную реакцию $R_A = -2qL$
- 2) Разбиваем стержень на расчетные участки z_1 и z_2 и определим на них продольные силы для построения эпюр (Рис. 25, 26).

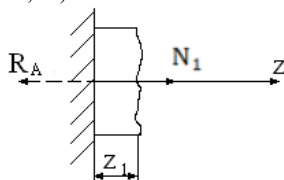


Рис.25. Расчетная схема 1-го участка.

$$N_1 = -2qL$$

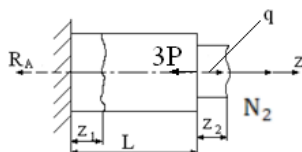


Рис.26. Расчетная схема 2-го участка.

$$N_2 - R_A - 3P + \int_0^L q dz_2 = 0; N_2 = R_A + 3P - qz_2|_0^L;$$

$$z_2 = 0 \quad N_2 = qL, \quad z_2 = L \quad N_2 = 0$$

Напряжение при простом растяжении - сжатии стержня

Как уже говорилось ранее, в сечениях нагруженного стержня действуют непрерывно распределенные по сечению внутренние усилия (ВСФ). Приводя их к центру тяжести, получаем главный вектор сил R и главный момент M и, рассматривая действие вектора R на малой площадке dF , получили выражение для нормального напряжения в точке

$$\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}$$

При простом растяжении-сжатии $N \neq 0$, $Q_x = Q_y = 0$, тогда напряжения в точке и на площадке сечения можно найти по формулам $\sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F}$ и $\sigma = \frac{\Delta N}{\Delta F}$, а для всего сечения

$$\sigma = \frac{N}{F} [\text{Па}] \quad (1)$$

Принцип Сен-Венана

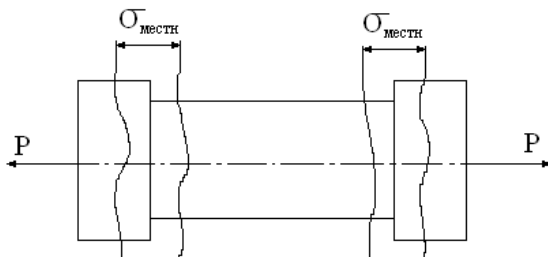


Рис. 27. Принцип Сен-Венана.

В зонах приложения сосредоточенной нагрузки P и в сечениях стержня, где происходит резкое изменение поперечного сечения возникают местные напряжения, величина которых быстро уменьшается при удалении от этих зон. Для описания поведения материала в этих зонах применяют теории упругости и пластичности (Рис. 27).

Гипотеза Бернулли

При нагружении стержня его поперечные сечения будут такими же плоскими, как и до нагружения (гипотеза плоских поперечных сечений).

При действии продольных сил стержень деформируется (простое деформированное состояние) [1,2] (Рис. 28).

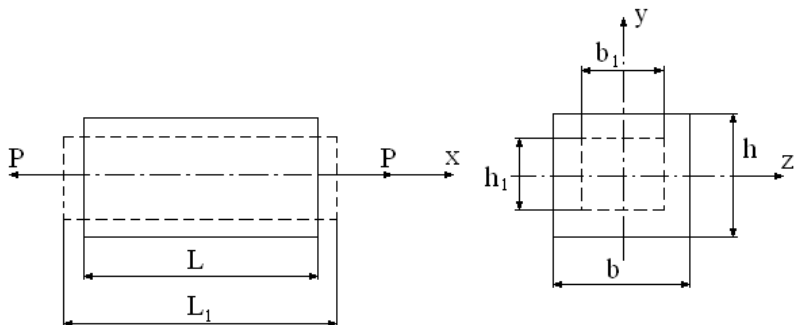


Рис. 28. Простое деформированное состояние при растяжении стержня.

Длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются. $\Delta L = L_1 - L$ - абсолютная продольная деформация (удлинение), $\Delta h = h_1 - h$ - абсолютная поперечная деформация стержня (укорочение), $\Delta b = b_1 - b$ - абсолютная поперечная деформация (укорочение).

Тогда $\epsilon_x = \Delta L / L > 0$ - относительная продольная деформация; $\epsilon_y = \Delta h / h < 0$ - относительная поперечная деформация; $\epsilon_z = \Delta b / b < 0$ - относительная поперечная деформация.

Для изотропных материалов поперечная и продольная деформации связаны соотношением в упругой зоне деформирования

$$\left| \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \right| = \left| \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \right| = \mu, \quad (2)$$

где μ - коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации), который характеризует свойства материала и определяется экспериментально. Пуассон считал, что при деформации растяжение - сжатие объем элемента не изменяется. А меняется лишь форма. При этом подходе не учитывалось влияние материала и $\mu = 0,25$. В дальнейшем он

теоретически обосновал, что μ не является const. После этого эксперименты показали, что объем деформируемого тела может изменяться за счет перераспределения атомных связей, и, следовательно, $\mu = \text{const}$ только в пределах упругих деформаций.

$0 < \mu < 0,5$ для металлов, $0,25 < \mu < 0,35$ для сталей.

Из формулы(2) следует, что $\epsilon_y = \mu \epsilon_x$.

Рассмотрим элемент стержня, растянутый вдоль оси x (Рис. 29). Этот элемент деформируется в продольном и поперечном направлениях. Найдем продольную деформацию

$$\epsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} \quad (3)$$

$$\epsilon_x = \frac{A_1 B_1 - dx}{dx}$$

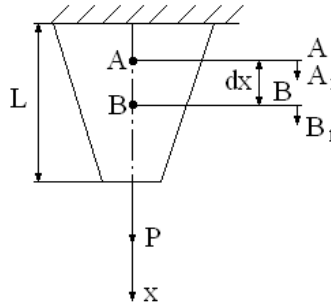


Рис. 29. Элемент стержня, растянутый вдоль оси x .

Пусть перемещения точек A и B обозначены $AA_1 = U$, $BB_1 = U + dU$, тогда $AB_1 = AB + BB_1 = dx + (U + dU)$, $A_1 B_1 = AB_1 - AA_1 = dx + U + dU - U = dx + dU$. Подставим $A_1 B_1$ в формулу (3) и получим следующее преобразование (4)

$$\epsilon_x = \frac{dx + dU - dx}{dx} = \frac{dU}{dx},$$

$$\int_0^L dU = \int_0^L \epsilon_x dx; \quad (4)$$

$$U|_0^L = \epsilon_x x|_0^L,$$

где $U(L) - U(0) = \epsilon_x(L - 0)$ может быть принято для простого напряженного состояния. Отсюда можно найти искомую деформацию ϵ_x

$$\Delta L = \epsilon_x L; \quad \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L}$$

Найдем относительное изменение объема θ элемента (Рис. 30).

Положим, что первоначальные размеры элемента равны 1. После приложения силы P продольный размер элемента равен $1 + \epsilon$, а поперечный размер равен $1 - \epsilon = 1 - \mu \epsilon$. Объем после деформации $V_1 = (1 + \epsilon)(1 - \mu \epsilon)^2$. Изменение объема вследствие деформации

$$\Delta V = V_1 - V = (1 + \epsilon)[(1 - \mu \epsilon)^2 - 1]$$

Пренебрегаем квадратом и кубом ϵ в виду малости деформации, получим выражение относительного изменения объема θ при осевом растяжении

$$\theta = \Delta V / V = \epsilon(1 - 2\mu)$$

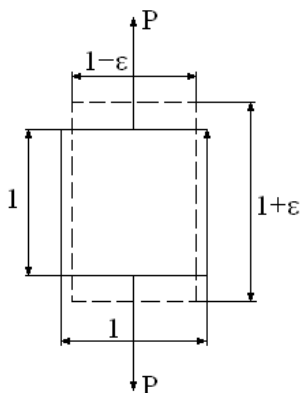


Рис. 30. Относительное изменение объема θ элемента.

В пластической области обнаруживаем неизменяемость объема, поэтому $\theta = \varepsilon(1 - 2\mu)/1 = 0$, $\mu = 0,5$. Если $\mu < 0,5$, то при растяжении объем возрастает, а при сжатии уменьшается.

Закон Гука при растяжении

Гук открыл фундаментальную закономерность между силами и вызываемыми ими перемещениями. Он испытывал стальную проволоку винтовой и спиральной часовой пружин, нагруженной грузами. В 1676 году он опубликовал результаты своих исследований, однако, убедившись, что он открыл закон, он закрепил его за собой тремя годами позже в трактате об упругости.

Работая над проблемой жесткости Юнг в начале XIX столетия ввел понятие постоянной величины, характеризующей способность материала сопротивляться внешней нагрузке и в 1807 году было введено понятие величины, которая характеризует жесткость и используется в инженерных расчетах. Юнг определил, что эта величина справедлива в упругой области, после этого был выведен закон Гука-Коши и введены понятия деформации и напряжения, E - модуль упругости Юнга (модуль Юнга) $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (Рис. 31).

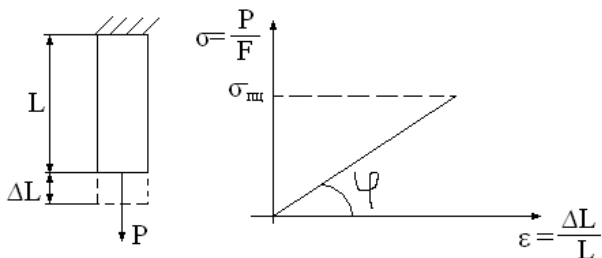


Рис. 31. Схема нагружения и упругая зона диаграммы растяжения.

$$\sigma = P/F; E = \tan \varphi = \sigma/\varepsilon; \varepsilon = \Delta L/L; \sigma_x = E \varepsilon_x$$

Эпюра продольных перемещений в стержне при растяжении-сжатии

Воспользуемся ранее выведенными формулами (1), (4), (5). Распишем эти формулы относительно напряжения $N/F = E(dU/dx)U(L) - U(0) = \Delta L$, если $Ei/F = \text{const}$, то закон Гука для стержня, нагруженного равномерной продольной нагрузкой можно представить так $\Delta L = NL/EF$.

Вопросы для самостоятельного изучения темы 3

1. Как определить напряжение при простом растяжении - сжатии стержня.
2. Сформулируйте принцип Сен-Венана и гипотезу Бернулли.
3. В каком диапазоне нагружения действует закон Гука и какие зависимости используют для построения эпюр продольных перемещений в стержне.
4. Как определить относительное изменение объема θ элемента в упругой и пластической области нагружения.

ТЕМА 4. Пластичные и хрупкие материалы и их свойства и характеристики

Механические характеристики материалов

При проектировании строительных конструкций, машин и механизмов необходимо знать значения величин, характеризующих прочностные и деформационные свойства материалов [1,2].

Эти характеристики определяются в лабораториях при испытаниях на твердость по Бринеллю НВ, сопротивляемость ударным и переменным нагрузкам, высоким температурам. Ниже рассмотрим механические характеристики при испытаниях металлов на растяжение-сжатие. Для получения диаграмм испытываются 5 и 10-кратные образцы на специальных разрывных машинах [1].

Рассмотрим механические характеристики прочности на примере малоуглеродистой стали ст.3 для диаграммы растяжения (Рис. 32).

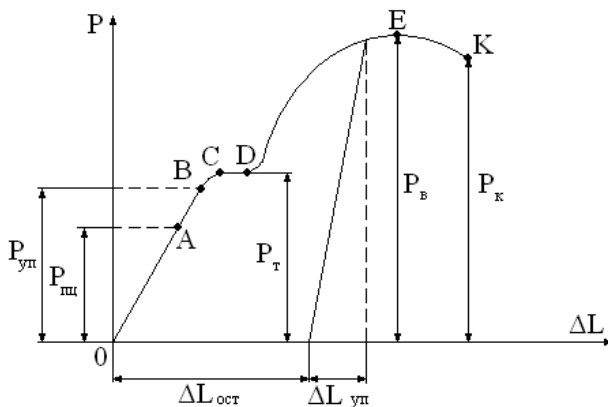


Рис. 32. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали ст.3.

До точки А диаграмма - прямая наклонная, то есть справедлив закон Гука до силы, соответствующей пределу пропорциональности $P_{пл}$, тогда

$$\sigma_{пл} = P_{пл} / F$$

Пределом пропорциональности называется наибольшее напряжение, до которого существует прямопропорциональная зависимость между P и Δl (195-200 МПа). ОА- зона упругости, небольшие упругие деформации и здесь определяется Е.

Далее нагрузка почти не растет, зато увеличивается деформация до точки В. Точка В-предел упругости материала. $\sigma_{уп}$ - максимальное напряжение, при котором в материале нет остаточной(пластической) деформации $\sigma_{уп} = P_{уп} / F$.

Он характеризует переход от упругой деформации к остаточной у большинства металлов $\sigma_{уп}$ и $\sigma_{пл}$ мало отличаются друг от друга $\sigma_{уп} = 205-210$ МПа(ст.3).

В дальнейшем деформации растут без увеличения нагрузки и криволинейная часть переходит в площадку текучести CD. Физический предел текучести в точке D $\sigma_{т} = P_{т} / F$.

Физический предел текучести - наименьшее напряжение, при котором образец деформируется без заметного возрастания нагрузки $\sigma_{т} = 220-250$ МПа(ст.3).

Зона BD-зона общей текучести. Здесь увеличивается область давления и у образца возрастает температура, изменяется электропроводность и магнитные свойства. Распространение области давления из микрзон в макрозоны очагов. Такие изменения легко видеть при нанесении осевых полос на образцы, после приложения внешней нагрузки их

наклон изменяется на 45° в результате действия касательных напряжений. Это явление, связанное с упрочнением микроструктуры, называется упрочнением.

Диаграмма после зоны текучести становится вновь криволинейной до точки Е.

$\sigma_B = P_B / F$ - напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется временным сопротивлением $\sigma_B = 370-470 \text{ МПа}$.

Зона DE- зона упрочнения. Удлинение образца происходит равномерно по всей длине. При $P_B = P_{\max}$ в ослабленном неоднородностями материале сечения образуется шейка. Напряжение возрастает в утончающейся шейке, а в остальных равномерно деформируемых сечениях нет. В точке К образец разрушается. Истинное сопротивление разрыву или истинный предел прочности $S = P_K / A_K$, ЕК- предел текучести (900-1000 МПа). Разрыв происходит в результате наступления предельного неоднородного состояния.

Определяют и характеристики пластичности.

Относительное удлинение образца после разрыва $\delta = (l_k - l_0) / l_0 \cdot 100\% = 25-27\%$, относительное сужение образца после разрыва $\psi = (F_0 - F_k) / F_0 \cdot 100\% = 60-70\%$

За пределом упругости абсолютное полное удлинение образца состоит из удлинения упругости и пластичности $\Delta L = \Delta L_{\text{упр}} + \Delta L_{\text{ост}}$.

Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительного пластического деформирования называется наклепом.

Пример 1. Цепи и канаты предварительно нагружают, чтобы устранить остаточное удлинение (искусственный наклеп).

Пример 2. Цилиндрическое гидропрессование.

Пример 3. Турбинные диски и лопатки.

Механические свойства при наклепе изменяются в направлении растяжения, в направлении сжатия не меняются.

Вредное влияние наклепа сказывается при прокатке стержней, штамповке тонкостенных деталей, резании листового металла (можно удалить наклепанную часть).

Диаграмма высокопрочных сплавов и сталей отличается тем, что отсутствует площадка текучести и вместо σ_T определяют условный предел текучести $\sigma_{0,2} = P_{0,2} / F$.

Диаграмма растяжения чугуна (хрупкого материала) практически не имеет криволинейных участков и разрушение происходит при достижении предела прочности $\sigma_B = P_B / F_{\max} = 120 \text{ МПа}$. Вместо модуля упругости находят секущий модуль $\tan \alpha = E_S = \sigma_A / \epsilon_A$ (Рис. 33).

Р
Р_В-----

E_S

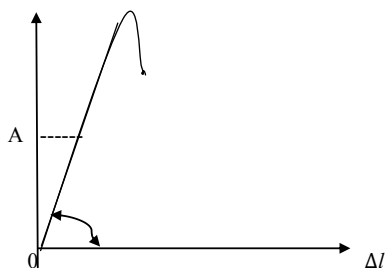


Рис. 33. Диаграмма растяжения чугуна

Влияние различных факторов на механические характеристики материалов

При повышении температуры у большинства материалов механические характеристики прочности понижаются, а при понижении температуры увеличиваются. По-прежнему речь идет о стали ст.3.

Пример: при нагревании до $t^0=500\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\sigma_T=140\text{ МПа}$, $\sigma_B=250\text{ МПа}$, при нагревании до $t^0=600\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\sigma_T=40\text{ МПа}$, $\sigma_B=150\text{ МПа}$, при охлаждении до $t^0=-45\text{ }^{\circ}\text{C}$ материал становится хрупким (хладноломким)

Механические характеристики пластичности с повышением температуры увеличиваются, а с понижением температуры понижаются.

Если температура повышается, то физические характеристики значительно возрастают, например, μ - с 0,28 до 0,33.

Если в качестве термообработки стали использовать ее закалку, то σ_T и σ_B намного увеличиваются, но пластические свойства падают.

Пример: для придания свойств сталь 3 проводят цементацию (насыщенность углерода) поверхностного слоя. Применяют так же и нормализацию (для улучшения структуры и механических свойств).

С увеличением скорости нагружения (деформации) повышаются и механические характеристики прочности материала (Рис. 34).

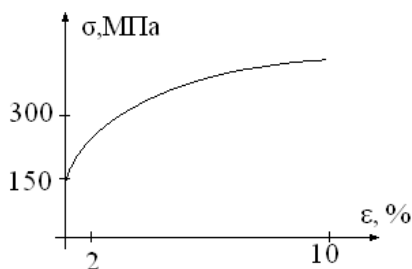


Рис. 34. Повышение механических характеристик прочности с увеличением скорости деформации.

Механические характеристики стали влияют на технологические условия способа ее получения и обработки.

При литье механические характеристики прочности уменьшаются, за счет образования раковин, пустот и неметаллических включений.

Прокатка приводит к анизотропии стали. Сталь в направлении прокатки становится более прочной.

Волочение - вытяжка с обжиганием (стальная проволока, листы) приводит к увеличению прочности.

Радиоактивное облучение увеличивает механические характеристики прочности и уменьшает механические свойства пластичности.

Вопросы для самостоятельного изучения темы 4

1. Как определить механические характеристики материалов в зоне упругости.
2. Как определить механические характеристики материалов в зоне пластичности.
3. Как влияют изменение температуры и технологических условий на прочность и пластичность элементов конструкций.

ТЕМА 5. Независимость действия сил. Напряженное состояние при растяжении – сжатии. Запас прочности

Закон Гука и принцип независимости действия сил.

В 17 веке английский ученый Гук, исследуя поведение твердых тел установил, что в большинстве случаев перемещения в определенных пределах пропорциональны действующим силам.

Рассмотрим перемещение произвольной точки A по направлению оси X, тогда

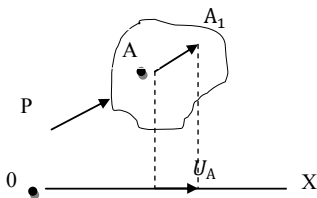


Рис. 35. Линейное перемещение произвольной точки.

$$U_A = k_x P, (1)$$

где P- сила, вызывающая перемещение U_A ;

k_x – коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.

Коэффициент пропорциональности зависит от взаимного расположения точки A и точки приложения силы P и от физических свойств материала ().

Зависимость (1) представляет собой закон Гука при нагружении.

В настоящее время зависимость перемещения от силы принято заменять зависимостью напряжения от деформации. В этом случае коэффициент пропорциональности не зависит от геометрии системы в целом и от физических свойств материала.

Для того чтобы найти внутренние силы и перемещения в системе от действия внешних сил используют принцип суперпозиции или принцип независимости действия внутренних сил.

Если к выбранной системе прикладывается несколько нагрузок то, перемещения, деформации, напряжения и внутренние силы определяют в отдельности, а затем суммируют все эти параметры как действующие друг с другом.

Приложим к некоторой системе силу P_1 . Перемещение от этой силы в точке A по направлению оси X согласно формуле (1)

$$U_{A1} = k_{x1} P_1 (2)$$

Пусть сила P_1 сняли и в другой точке упругого тела приложена сила P_2 . Перемещение от этой силы в точке A определится как по формуле (2)

$$U_{A2} = k_{x2} P_2 (3)$$

Суммарное их действие (2)+(3) определяют так

$$U_{A1} + U_{A2} = U_A (4)$$

Так как силы P_1 и P_2 приложены в разных точках, то коэффициенты k_{x1} и k_{x2} не равны между собой.

Рассмотрим совместное действие сил P_1 и P_2 . Приложим сначала силу P_1 , а затем, не снимая ее силу P_2 . Тогда перемещение точки A будет записано аналогично формуле (4)

$$U_A = k_{x1} P_1 + k'_{x2} P_2, (5)$$

где k'_{x2} - коэффициент пропорциональности между силой P_2 , приложенной к системе предварительно нагруженной силой P_1 и перемещением (k_{x2} не равен k'_{x2}).

Нарушается принцип независимости. При $P_1=0$ формула (5) примет вид

$$U_A = k'_{x2} P_2 (6)$$

Тогда коэффициенты пропорциональности k_{x2} и k'_{x2} равны между собой.

Окончательно перемещение точки А определяется как сумма результатов независимых действий сил P_1 и P_2

$$U_A = k_{x1}P_1 + k_{x2}P_2$$

Напряженное состояние при простом растяжении – сжатии

Рассмотрим однородный растянутый стержень. Определяем напряжение на наклонной площадке под углом α (Рис. 36).

Полное напряжение p на площадке, согласно условию однородности для всех точек площадки, будет одинаковым. А равнодействующая внутренних сил в сечении должна направляться по оси стержня $U = \sigma F$, то есть $pF_a = \sigma F$, где F_a – площадь наклонного сечения. $F_a = F / \cos \alpha$.

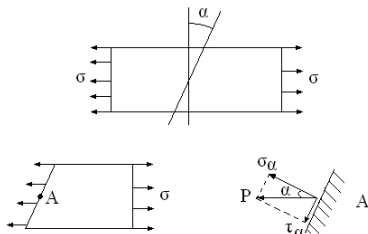


Рис. 36. Определение напряжений на наклонной площадке при растяжении.

Таким образом, полное напряжение на площадке: $p = \sigma \cos \alpha$. Проекция напряжения p на нормаль и на касательную: $\sigma_a = p \cos \alpha$; $\tau_a = p \sin \alpha$. Получим

$$\sigma_a = \sigma \cos^2 \alpha;$$

$$\tau_a = 0,5 \sigma \sin 2\alpha$$

Из этих двух формул видно, что для одной точки растянутого стержня напряжения, возникающие в сечении, отличаются в зависимости от ориентации наклонной площадки.

Если положить $\alpha = 0$, то из формул следует, что $\sigma_a = \sigma$ и $\tau_a = 0$.

При $\alpha = 90^\circ$, то есть в продольных сечениях, $\sigma_a = \tau_a = 0$. Это значит, что продольные слои растянутого стержня не имеют друг с другом силового взаимодействия по боковым поверхностям.

Когда $\sigma_a = 0$, то в продольных и поперечных сечениях возникают $\tau_{\max}$ на площадках, угол наклона которых к оси растянутого стержня составляет 45° . И максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = \sigma / 2$.

Выделим из растянутой полосы прямоугольный элемент (Рис. 37).

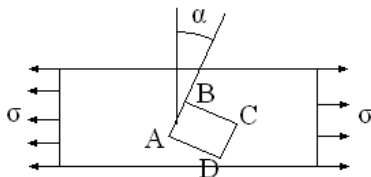


Рис. 37. Прямоугольный элемент растянутой полосы.

На его гранях АВ и CD следует приложить напряжения σ_a и τ_a , определяемые в начале раздела.

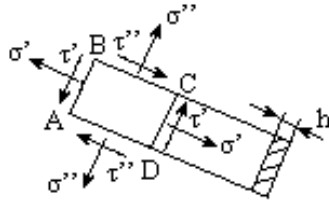


Рис. 38. Напряженное состояние элемента при простом растяжении.

На гранях BC и CD напряжения тоже определяются по формулам начала раздела, в которых $\alpha = \alpha + \pi/2$. Таким образом, то напряженное состояние, которое показано на рисунке, представляет собой обыкновенное растяжение (Рис. 38).

Следует отметить, что переход от площадки (α) к площадке ($\alpha + 90^\circ$) не сказывается на абсолютной величин_а

$$\left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha \right| = \left| \frac{1}{2} \sigma \sin 2(\alpha + 90^\circ) \right|$$

Следовательно, на двух взаимно перпендикулярных площадках (пока без учета знаков) τ должны быть равны. Это условие - закон парности касательных напряжений. Разъясним последнее условие. Вернемся к элементу ABCD. Легко заметить, что независимо от величин σ' и σ'' , τ' и τ'' должны быть такой величины и иметь такое направление, чтобы их моменты попарно уравнивались. Для произвольно взятого элемента толщиной h очевидно, что

$$\tau' \cdot AB \cdot h \cdot AD = \tau'' \cdot AD \cdot h \cdot AB$$

И таким образом $\tau' = \tau''$. При этом векторы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях направлены либо оба к общему ребру (A и C), либо от общего ребра (B и D).

Коэффициент запаса прочности

Данные о технических свойствах материала получают из испытаний на простое растяжение-сжатие и кручение. Результаты испытаний используются в расчетах на прочность. Основной метод расчета на прочность - метод расчета по напряжениям. В некоторой нагруженной точке конструкции или машины находят $\sigma_{\max}^{\text{раб}}$ - рабочее максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max}^{\text{раб}} = \sigma_{\text{пред}} / n;$$

$$\sigma_{\max}^{\text{раб}} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{\text{пред}}$ - предельное напряжение для материала, $n > 1$ - коэффициент запаса прочности, $[\sigma]$ - допускаемое напряжение.

Часто расчет на прочность является проверочным, то есть когда размеры конструкции или машины уже известны и назначены, например, из эксплуатационных или технологических требований. В этом случае находится фактический коэффициент запаса

$$n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\max}^{\text{раб}} \geq 1$$

Когда конструкция или машина находится в стадии проектирования и размеры необходимо назначить из требований прочности, то коэффициентом запаса прочности задаются заранее:

$$\sigma_{\max}^{\text{раб}} \leq [\sigma];$$

$$[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / n$$

Для пластичных сталей и сплавов $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_T$, а для хрупких материалов $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_B$ (Рис. 39).

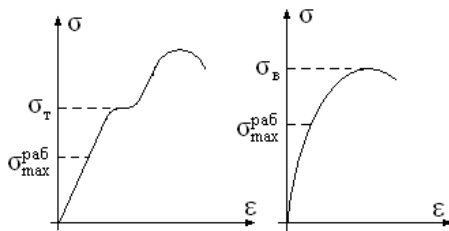


Рис. 39. Предельные характеристики прочности при растяжении пластичного и хрупкого материалов.

Тогда соответствующие коэффициенты запасов:

$$n_T = \sigma_T / \sigma_{\max}^{\text{раб}},$$

$$n_B = \sigma_B / \sigma_{\max}^{\text{раб}},$$

Если расчет ведется по предельной нагрузке, то запас прочности определится так $n = P_{\text{пред}} / P^{\text{раб}}$. В случае расчета на жесткость - $n = U_{\text{пред}} / U^{\text{раб}}$. В строительной технике $n_B = 2-5$, в авиационной $n_T = 1,5-2$, в стрелковом оружии и артиллерии $n_T = 0,7-1$.

Выбор коэффициента запаса зависит от методов расчета напряжений, от точности этих методов, от последствий, которые повлечет за собой разрушение детали, от свойств материала, напряженно-деформированного состояния и ряда других факторов [1,2].

Вопросы для самостоятельного изучения темы 5

1. В чем заключается принцип независимости действия сил.
2. Как определить напряжения при простом растяжении - сжатии.
3. Суть введения коэффициента запаса прочности.
4. Проверочный расчет конструкции на прочность.
5. Проектировочный расчет конструкции на прочность.

ТЕМА 6. Кручение валов. Расчет прочности и жесткости

Кручение стержней с круглым поперечным сечением

Кручением называется такой случай нагружения стержня, при котором в его поперечном сечении возникает крутящий момент $M_{кр}$, а остальные ВСФ равны нулю[1,3-9].

Стержни, работающие в условиях кручения называются валами.

Примеры: валы редукторов станков; валы, приводящие в движение воздушные винты или лопасти вертолета, карданные валы машин.

По характеру сечения все стержни делятся на два класса

1. С круговым (круглым) поперечным сечением и кольцевым (трубчатым, цилиндрическим) (Рис. 40).

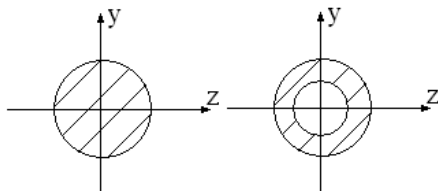


Рис. 40. Круговое и трубчатое сечения вала.

2. С произвольным поперечным сечением (Рис. 41).

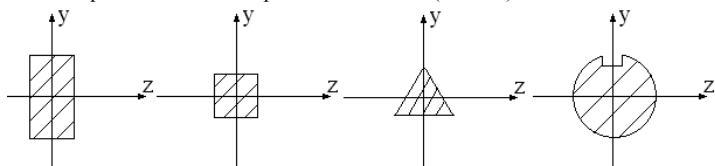


Рис. 41. Произвольные поперечные сечения брусьев.

Допущения при расчете деформаций, перемещений и напряжений стержня круглого поперечного сечения

Рассмотрим поперечное сечение вала длиной L (Рис. 42).

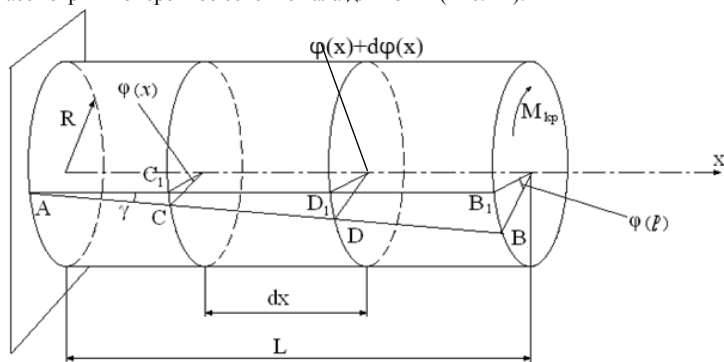


Рис. 42. Вал, нагруженный крутящим моментом.

1. Экспериментально установлено, что при кручении вала приложенным на его торце $M_{кр}$ поперечные сечения остаются плоскими и после нагружения (гипотеза Бернулли).

2. Можно считать, что поперечные сечения как жесткие круглые диски поворачиваются относительно оси X на один угол $\varphi(x)$.

Деформации и перемещения при кручении вала

Образующие, расположенные на цилиндрической поверхности радиуса R , поворачиваются на угол сдвига (деформацию сдвига) $\gamma = \text{const}$ по длине вала.

При кручении определяют только угловые перемещения, то есть угол γ -угловую деформацию или деформацию сдвига.

Рассмотрим элемент стержня dx (Рис. 43). Если закручивать стержень в пределах закона Гука, то $AC_1D_1B_1$ -прямая. Определим положение дуги D_1D_2 .

Для этого рассмотрим сначала $\triangle C_1D_1D_2$. Дугу D_1D_2 можно принять за катет треугольника вследствие малости приращения углового перемещения $d\varphi$. Тогда $D_1D_2 = C_1D_1 \tan \gamma = dx \tan \gamma$.

Теперь положение этой же дуги найдем из $\triangle OD_1D_2$, учитывая, что $\angle D_2OD = \angle \varphi$ и $D_1OD_2 = d\varphi$. Дуга $D_1D_2 = R d\varphi$.

Составим тождество для дуги $D_1D_2 R d\varphi = dx \tan \gamma$, так как $\angle \gamma$ малы $= 7^\circ - 10^\circ$, то значение аргумента нечетной функции равно самой функции $\gamma = \tan \gamma$ и

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dx} \quad (1),$$

где $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$ - относительный угол закручивания;

φ - абсолютный угол закручивания.

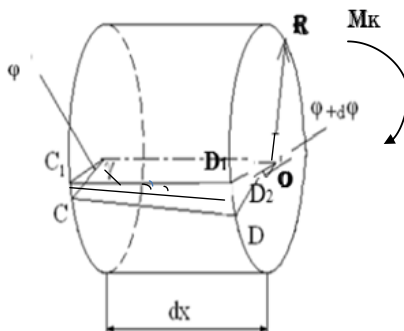


Рис. 43. Элемент вала, нагруженный крутящим моментом.

Таким образом с учетом формулы (1) на внешней поверхности вала получаем наибольшее значение $\gamma = R\theta$.

Для внутренних точек вала

$$\gamma = r\theta; 0 \leq r \leq R(2)$$

Закон Гука при кручении

Формулы для γ и θ возьмем из предыдущего параграфа.

$$\gamma = \theta r \quad \theta = \frac{d\varphi}{dx}$$

По аналогии с законом Гука при растяжении можно указать линейную зависимость на диаграмме кручения пластичного материала (Рис. 44).

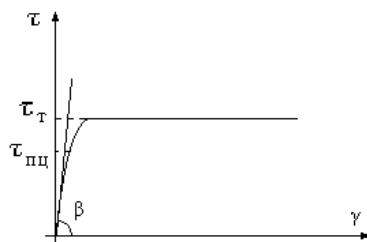


Рис. 44. Диаграмма напряжений кручения пластичного материала.

Из диаграммы нагружения следует, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{\gamma} = G, \quad (3)$$

где G -модуль упругого сдвига II-го рода.

Для изотропного материала (без доказательства) получается экспериментально

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (4)$$

Экспериментальное изучение чистого сдвига проводят путем кручения трубчатых образцов.

Формулу (2) подставим в формулу (3) и распишем относительно касательных напряжений чистого сдвига

$$\tau = G\gamma = G\theta r \quad (5),$$

где по-прежнему $0 \leq r \leq R$.

Наибольшие касательные напряжения возникают на внешней поверхности вала (Рис. 45).

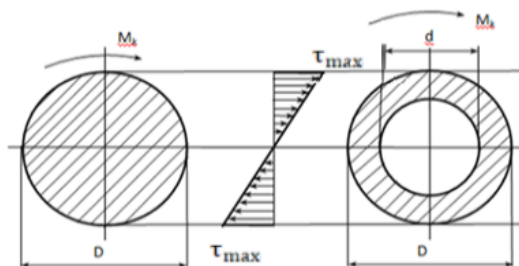


Рис. 45. Эпюра распределения касательных напряжений.

Уравнение равновесия элемента вала

Из эпюр τM_k определяется в каждом сечении стержня внутренний крутящий момент $M_{кр}$. Рассмотрим элементарное сечение dR из рисунка 42 и перемещение точки A , для этого выделим элементарную площадку dF . Касательное усилие τdF создает крутящий момент. Составим уравнение статического равновесия (Рис. 46).

$$\int_F (\tau dF) r = M_{кр} \quad (6)$$

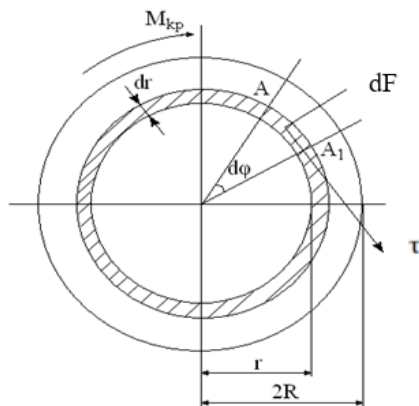


Рис. 46. Элементарное уравновешенное сечение вала.
Подставим формулу (5) в уравнение (6)

$$\int_F Gr\theta dF = M_k$$

$$G\theta \int_F r^2 dF = M_k$$

В последней формуле $\int_F r^2 dF = J_p$ (7) - полярный момент инерции сечения стержня [м⁴].

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}, \quad (8)$$

где GJ_p - жесткость сечения бруса на кручение.

Подставим зависимость (8) в формулу (5) $\tau = Gr \frac{M_k}{GJ_p} = r \frac{M_k}{J_p}$ (9)

Для $r=R$

$$\tau = R \frac{M_k}{J_p} \quad (10),$$

тогда наибольшее касательное напряжение на внешнем радиусе

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p/R} = \frac{M_k}{W_p}, \quad (11)$$

где W_p - полярный момент сопротивления кручению [м³]

$$W_p = \frac{J_p}{R} \quad (12)$$

Определение перемещений при кручении вала

Напишем формулу (8) и выражение угла закручивания $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$.

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{GJ_p}$$

$$\int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_k dx}{GJ_p}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{GJ_p} \int_0^l M_k(x) dx \quad (13)$$

Окончательно при $d=\text{const}$ и $M_k=\text{const}$ формулу для абсолютного угла закручивания применяют в следующем виде

$$\varphi_l = \frac{M_k l}{G J_p} \quad (14) \quad [\text{рад}]$$

Расчет бруса кругового сечения на прочность и жесткость

Опасное сечение определяется по наибольшей абсолютной величине M_k из эпюр касательных напряжений.

$$\max \tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \Big|_{\max} \quad (1)$$

$$\max \tau_{\max} \leq [\tau] \quad (2)$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

При расчете на прочность приходится решать три типовые задачи.

1. Проверка на прочность стержня из формулы (2).
2. Определение допускаемых внешних нагрузок из формулы (2) $[M] \leq W_p [\tau]$
3. Проектировочное определение размеров поперечного сечения стержня.

Из формулы (2) следует, что

$$W_p \geq \frac{M_k}{[\tau]},$$

$$J_p \text{ для круглого сплошного бруса } J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_p = \frac{J_p}{R} = \frac{\pi D^4}{16} \approx 0,2 D^3 \quad (3)$$

Ранее выяснено из формулы (7) предыдущего параграфа, что $J_p = \int_F r^2 dF = \int_0^R r^2 (2\pi r dr) = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^4 \approx 0,1 D^4$

$$\text{Из (3) } 0,2 D^3 \geq \frac{M_k}{[\tau]} D \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau]}}$$

Длинные валы рассчитывают не только на прочность, но и на жесткость (гребной винт парохода).

Возьмем ранее выведенную формулу

$$\varphi_l = \int_0^l \frac{M_k(x) dx}{G J_p} \quad (1) \quad [\text{рад}]$$

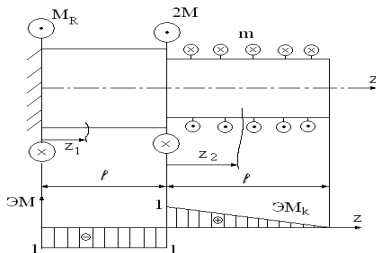
$$\theta = \frac{M_k}{G J_p} (2) \quad [1/m]$$

Условие жесткости

$$\theta_{\max} = \left(\frac{M_k}{G J_p} \right)_{\max} \leq [\theta] \quad (3) \text{— задается в начальном условии из него находим диаметр вала.}$$

$$J_p \geq \frac{M_k \max}{G [\theta]}; J_p = 0,1 d^4; D = \sqrt[4]{\frac{M_k \max}{0,1 G [\theta]}}$$

Из двух диаметров бруса, полученных из условия прочности и из условия жесткости, выбирается наибольший. Пример определения ВСФ при кручении вала (Рис. 47)



$$\sum M_z = -M_R - 2M + ml = 0$$

$$M_R = -2M + ml = -M$$

$$M_{k1} = M_k = -M$$

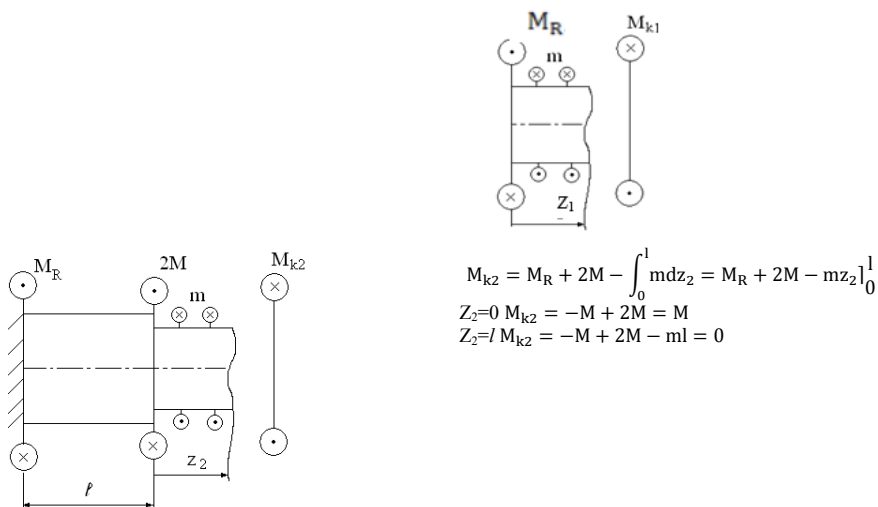


Рис. 47. Определения ВСФ при кручении вала.

Вопросы для самостоятельного изучения темы 6

1. Сформулируйте допущения при расчете деформаций, перемещений и напряжений стержня и их определение для круглого поперечного сечения вала.
2. Опишите закон Гука при кручении.
3. Составьте уравнение равновесия элемента вала для определения касательных напряжений.
4. Выведите основные зависимости для определения перемещений при кручении вала.
5. Представьте основные этапы расчет бруса кругового сечения на прочность и жесткость.

ТЕМА 7. Теории прочности и предельное (опасное состояние)

Гипотезы (теории прочности). Эквивалентное напряжение

Для того, чтобы в ходе работы выяснить насколько прочен материал необходимо установить критерий прочности. Для этого вводят гипотезу о преимущественном влиянии на прочность того или иного фактора, то есть при любом нагружении разрушение наступит тогда, когда этот фактор достигнет предельного значения.

Предельное значение находят из простых испытаний на растяжение-сжатие и кручение. Таким образом, введение критерия прочности позволяет сопоставить данные сложного напряженного состояния с простым и установить такое эквивалентное (опасное) расчетное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$, которое в обоих случаях дает одинаковое значение коэффициента запаса прочностип. Выбранная указанным способом гипотеза прочности называется механической теорией прочности [1,2,7].

Гипотеза наибольших нормальных напряжений (I теория прочности. Критерий Галилея)

Разрушение материалов конструкций происходит в тот момент, когда

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{раб}} = \sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_{\text{пред}}$$

Условие гарантированной прочности

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{раб}} = \sigma_{\text{экв}}^I \leq [\sigma]$$

$\sigma_{\text{max}}^{\text{раб}} = \sigma_{\text{экв}}^I$ (преимущественное влияние наибольшего σ и τ определяется графоаналитическим методом Мора и аналитическими методами).

Экспериментальное подтверждение гипотеза находит только при испытаниях на растяжение (Рис. 48).

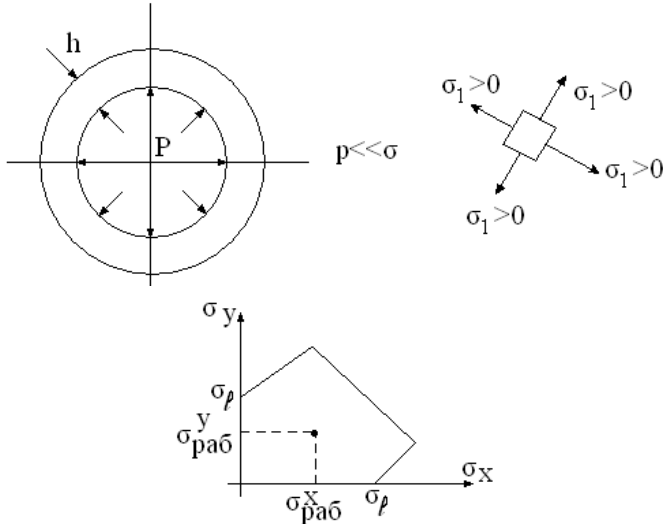


Рис. 48. Экспериментальное подтверждение I теории прочности.

Если точка P располагается внутри квадрата, то разрушения нет. Для конструкций и материалов, где не все касательные τ и нормальные σ напряжения являются растягивающими

I гипотезу не применяют. Она дает удовлетворительные результаты для хрупких материалов (камень, кирпич, керамика, инструментальная сталь, стекло).

Гипотеза наибольших линейных деформаций (II теория прочности, критерий Мариотта)

В качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию.

Разрушение или начала пластического деформирования наступит тогда, когда

$$\varepsilon_{\max}^{\text{раб}} = \varepsilon_{\text{пред}}$$

Последнее определяется при простом растяжении-сжатии образца. Такому разрушению способствуют, например, все тонкостенные трубы.

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3,$$

где индексы соответствуют главной растягивающей, средней и главной сжимающей деформациям (Рис. 49).

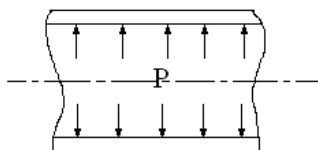


Рис. 49. Тонкостенная труба.

Используем формулу обобщенного закона Гука для изотропного материала (Рис. 50).

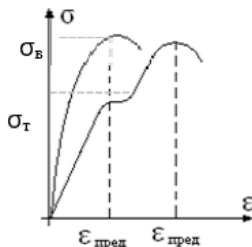


Рис. 50. Схематичные диаграммы нагружения пластичного и хрупкого материалов.

Если материал хрупкий, то вместо σ_T принимаем σ_B .

$$\varepsilon_{\max}^{\text{раб}} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \varepsilon_{\text{пред}},$$

где $\varepsilon_{\text{пред}} = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{E}$ и условие гарантированной прочности выглядит так

$$[\sigma] \geq [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \sigma_{\text{пред}}$$

В случае двухосной нагружающей системы $\sigma_3=0$ и предельной поверхностью текучести будет ромб. Это графическое представление условия текучести $\sigma_1 - \mu\sigma_2 = \sigma_T$ (Рис. 51).

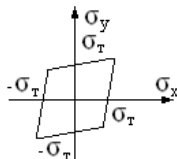


Рис. 51. Графическое представление условия текучести.

Хорошие результаты получаются для хрупкого состояния материалов и в некоторых случаях для легированного чугуна и высоколегированных сталей - после низкотемпературного отпуска. П теория не применима для материалов, не следующих закону Гука.

Гипотеза наибольших касательных напряжений (III теория прочности, критерий Треска)

Предельное состояние, то есть пластическое деформирование металлов и сплавов наступает тогда, когда $\tau_{max}^{раб} = \tau_{пред}$. Последнее определяется при достижении предельного состояния в результате простого растяжения образца:

$$\tau_{max}^{раб} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

$$\tau_{пред} = \frac{\sigma_{пред}}{2}$$

то есть пластическое деформирование наступит при условии $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$. Тогда условие гарантированной прочности $\tau_{max}^{пред} \leq [\tau]$ в нормальных напряжениях будет следующим

$$\sigma_{эkv}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

В случае двухосной нагружающей системы предельный контур текучести представляет собой шестиугольник Треска (Рис. 52).

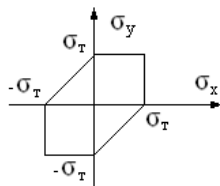


Рис. 52. Предельный контур текучести Треска.

В системе координат (σ_1, σ_3) предельное условие прочности $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ имеет вид прямой (I-I; II-II) и ограничивает область возможных нагружающих сил при $\sigma_1 \geq \sigma_3$. Заштрихованная полоса - область нагружающих сил при которых пластические деформации отсутствуют[2] (Рис. 53).

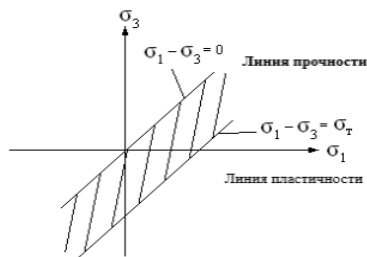


Рис. 53. Предельное условие прочности.

Ш-я теория хорошо подтверждается экспериментально для пластичных материалов. Ее недостаток заключается в том, что она не учитывает влияние среднего по величине главного среднего напряжения σ_2 , которое оказывает небольшое влияние на прочность.

Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения (IV теория, критерий Мизеса-Генки)

Критерий - количество удельной потенциальной энергии формоизменения U_ϕ [МПа], накопленной деформированным элементом. Не путать с внешней кинетической и потенциальной энергией [Дж].

Пластическое состояние (или разрушение) материалов конструкций наступает тогда, когда эта энергия достигает некоторого предельного значения, различного для различных металлов и сплавов (опасное состояние текучести). В общем случае удельная потенциальная энергия определится так

$$U = U_0 + U_\phi,$$

где U_0 удельная потенциальная энергия изменения объема, которая мало влияет на прочность и ее можно не учитывать. U_ϕ легко определяется при простом растяжении в момент текучести. Предельное состояние характеризуется

$$U_\phi^{\text{раб}} = U_\phi^{\text{пред}} \quad (1).$$

Полагая, что закон Гука справедлив вплоть до наступления предела текучести, тогда выражение для U_ϕ левой части тождества (1) в общем виде можно записать так

$$U_\phi^{\text{раб}} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (2)$$

По формуле (2) находим $U_\phi^{\text{пред}}$

$$U_\phi^{\text{пред}} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_b - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - \sigma_b)^2] = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_b^2 \quad (3)$$

Тогда условие гарантированной прочности из сравнения (2) и (3)

$$\frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_b^2$$

И окончательно

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$

Опыты хорошо подтверждают IV теорию для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение-сжатие.

Для двухосного нагружения системы график распределения напряжений следующий (эллипс) (Рис. 54).

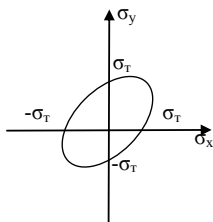


Рис. 54. Эллипс напряжений по IV теории прочности.

Появление в материале пластических деформаций точнее описывает IV теория прочности, чем III теория.

Гипотеза Мора (V теория прочности)

Прочность материала в общем случае нагруженной системы зависит от величины и знака наибольшего напряжения σ_1 и наименьшего σ_2 главных напряжений. σ_2 - среднее напряжение незначительно влияет на прочность (погрешность с не учетом его в опытах с медными и чугунными трубами $\leq 12\%$).

Предельное состояние ограничивается кругами Мора, которые получаются из простых испытаний и анализа рассмотренных выше теорий прочности (Рис. 55, 56):.

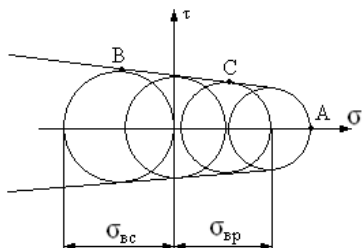
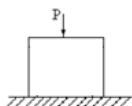


Рис. 55. Круги напряжений Мора.

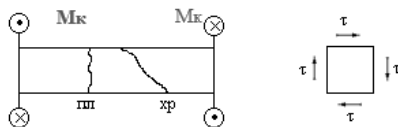
- 1) Из простого испытания на растяжение $\sigma_{вр} = \sigma_1$



- 2) Из простого сжатия $\sigma_{вс} = \sigma_3$, $\sigma_{вс} \geq \sigma_{вр}$



- 3) Кручение



- 4) Всестороннее растяжение

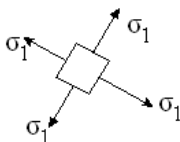


Рис. 56. Испытания для построения кругов Мора.

По мере перехода из области растяжения в область сжатия сопротивление разрушению возрастает, что соответствует увеличению диаметров предельных окружностей. Прочность определяется огибающей. Точка А соответствует всестороннему равномерному растяжению. Так как материал при равномерном всестороннем сжатии способен не разрушаясь выдерживать большие напряжения, то кривая слева не замкнута. Участок ВС Мор предложил заменить прямой. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\sigma_{вр}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma];$$

$$k = \frac{\sigma_{вр}}{\sigma_{вс}} < 1 \text{ по III гипотезе } k=1$$

Предельное состояние

Расчеты на прочность, рассматриваемые нами основываются на оценке прочности степеней в опасной точке сечения. При таком подходе определение σ , τ или $\sigma_{экв}$ сравнивалось с $[\tau]$, $[\sigma]$ и т.д. Если наибольшие расчетные напряжения $\leq$ допускаемых, то считаем, что необходимый запас прочности конструкции обеспечен, таким образом этот метод расчета на прочность - метод по допускаемым напряжениям. Однако здесь завышается запас прочности, например, при неравномерном распределении напряжений (кручение, изгиб) появление местных напряжений не влечет разрушения, для его достижения необходимо повышать нагрузку [1-10].

Под предельным состоянием конструкции понимают такое ее состояние, при котором она теряет способность сопротивляться внешнему воздействию или неудовлетворяющим техническим требованиям.

Существует 3 вида предельного состояния:

- 1) По потере несущей способности прочности, устойчивости и выносливости;
- 2) По возникновению недопустимых деформаций и прогибов;
- 3) По образованию и раскрытию трещин.

Для простых нагруженных систем применяют диаграмму Прандтля для обеспечения определенного предельного состояния. Суть диаграммы растяжения, сжатия и сдвига для пластичных сплавов схематизируют так, что прямая закона Гука непосредственно соприкасается с горизонтальной прямой без плавного перехода (Рис. 57).

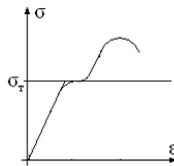


Рис. 57. Диаграмма Прандтля.

Для сложно нагруженной системы предложенная теория пластичности Сен-Венана: пластичное состояние стержня при этом состоянии наступит тогда, когда наибольшее τ допускаемое предельное значение достигнет предела текучести при сдвиге

$$\tau_{\max} = \tau_T.$$

Вопросы для самостоятельного изучения темы 7

1. В чем заключается выбор гипотезы (теории прочности) и эквивалентного напряжения.
2. Представьте основные положения и зависимости I-ой теории прочности.
3. Представьте основные положения и зависимости II-ой теории прочности.
4. Представьте основные положения и зависимости III-ей теории прочности.
5. Представьте основные положения и зависимости IV-ой теории прочности.
6. Представьте основные положения и зависимости V-ой теории прочности.
7. Опишите суть достижения конструкции предельного состояния. Три вида предельного состояния.

ТЕМА 8. Геометрические характеристики стержней

Геометрические характеристики поперечного сечения стержня

Ранее при изучении растяжения – сжатия мы получили геометрическую характеристику - площадь поперечного сечения стержня. Исследуя другие виды нагружения этой характеристики может быть недостаточно так, например, при изучении деформаций сдвига [3-9].

Рассмотрим определение статического момента площади сечения стержня $S[m^3]$ (Рис. 58).

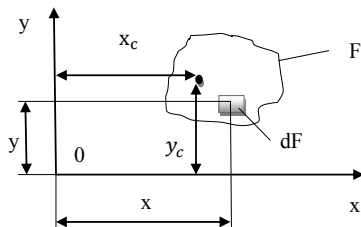


Рис. 58. Диаграмма определения статического момента.

$$S_x = \int_F y dF$$

$$S_y = \int_F x dF$$

Статическим моментом площади сечения стержня называется сумма произведений элементарных площадей на расстоянии до соответствующей оси, которая распространяется на всю площадь сечения.

Если $S=0$, то ось, для которой статический момент равен нулю называется центральной осью, если обе оси центральные, то точка их пересечения называется центром тяжести этого сечения.

Определение статических моментов площадей сечений при их параллельном переносе

При параллельном переносе координатных осей статические моменты изменяют свои значения. Рассмотрим две параллельные системы координат XOY и $X_1O_1Y_1$. Выделим на площади F элементарную площадку dF (Рис. 59).

Распишем проекции координатных осей $x_1 = x - b$ и $y_1 = y - a$.

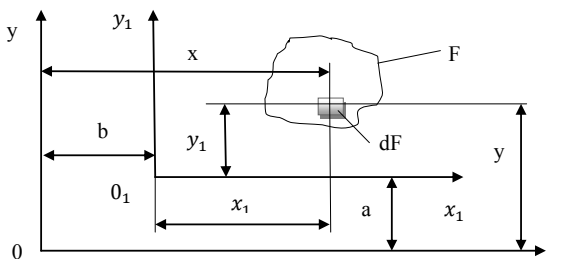


Рис. 59. Статические моменты площадей сечений при их параллельном переносе.

Для вывода параллельно перенесенных моментов воспользуемся выражением статических моментов из предыдущего параграфа:

$$S_{x1} = \int_F y_1 dF = \int_F (y - a) dF = \int_F y dF - aF;$$

$$S_{x1} = S_x - aF; \quad (1)$$

$$S_{y1} = \int_F x_1 dF = \int_F (x - b) dF = \int_F x dF - bF;$$

$$S_{y1} = S_y - bF \quad (2)$$

Потребуем, чтобы в формулах (1) и (2) статические моменты были равны нулю, тогда:

$$S_x - aF = 0;$$

$$S_y - bF = 0;$$

$$a = \frac{S_x}{F};$$

$$b = \frac{S_y}{F}$$

Если сечение сложное, то делим его на простые геометрические фигуры и соответствующие моменты суммируем алгебраически (Рис. 60):

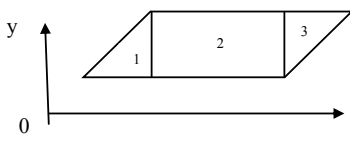
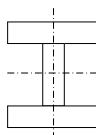
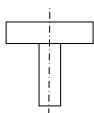


Рис. 60. Определение статических моментов сложных сечений.

$$S_x = \sum_{i=1}^3 S_{x1} = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3};$$

$$S_y = \sum_{i=1}^3 S_{y1} = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}$$

В некоторых случаях положение центра тяжести можно найти сразу, например, если сечение имеет центр симметрии или ось симметрии, то центр тяжести сечения находится соответственно в центре симметрии или на оси симметрии.



Моменты инерции сечений стержня

При изучении деформации кручения и изгиба приходится использовать понятие момента инерции (Рис. 61).

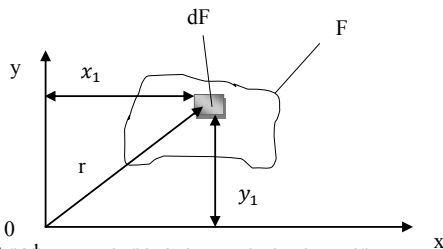


Рис. 61. 1 рафик для определения моментов инерции.

По-прежнему на площади Фрассматриваем элементарную площадку dF. Радиус-вектор до этой площадки

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции сечения относительно полюса О называется сумма произведений элементарных площадей на квадрат радиуса вектора до этих площадей, которая распространяется на всю площадь сечения F.

$$J_p = \int_F r^2 dF, \quad [M^4]$$

Осевые моменты инерции

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

$$J_y = \int_F x^2 dF$$

$$J_x + J_y = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F r^2 dF = J_p$$

$$J_p = J_x + J_y$$

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_F xy dF$$

$$J_p, J_x, J_y \geq 0$$

Если поворачивать координатную систему на какой-то угол меньше 90° , то можно добиться такого положения координатных осей, для которого центробежный момент инерции будет равен 0. В этом случае имеем напряженное состояние с главными растягивающими и сжимающими напряжениями.

В некоторых случаях, если есть хотя бы одна ось симметрии сечения, то центробежный момент сразу равен 0, что способствует более равномерному нагружению сечения (Рис. 62):

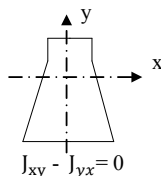


Рис. 62. Случай равенства центробежного момента нулю.

Изменение моментов инерции при параллельном переносе координатной системы

Все геометрические характеристики относительно координатных осей известны (Рис. 63).

$x_1 = x - b$, $y_1 = y - a$. И осевые моменты инерции определяются так:

$$J_{y1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x - b)^2 dF = \int_F (x^2 - 2xb + b^2) dF = \int_F x^2 dF - \int_F 2bx dF + \int_F b^2 dF = J_y - 2bS_x + b^2F$$

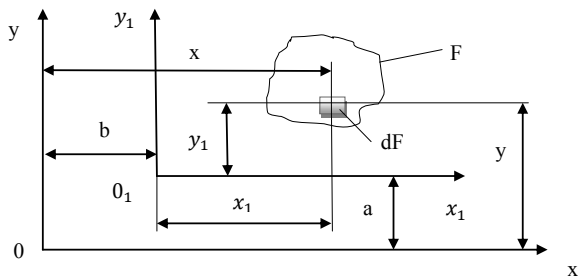


Рис. 63. Параллельный перенос моментов инерции.

$$J_{y1} = J_y - 2bS_y + b^2F \quad (1)$$

$$J_{x1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y - a)^2 dF = \int_F (y^2 - 2ya + a^2) dF = \int_F y^2 dF - \int_F 2ya dF + \int_F a^2 dF = J_x - 2aS_x + a^2F$$

$$J_{x1} = J_x - 2aS_x + a^2F(2)$$

Если оси координат y, x будут центральными, то тогда статические моменты относительно этих осей будут равны нулю, поэтому имеем право записать следующие выражения:

$$J_{x1} = J_x + a^2F;$$

$$J_{y1} = J_y + b^2F; (3)$$

$$J_{x1y1} = J_{xy} + abF$$

Если $a=b=0$, в этом случае все моменты инерции системы (3) принимает минимальное значение. Если ось симметрии, то центробежный момент инерции относительно осей x_1 и y_1

$$J_{x1y1} = abF$$

Пример. Дано прямоугольное сечение. Определить осевой момент инерции относительно оси X_1 IX. Воспользуемся первым уравнением системы уравнений (3) (Рис. 64).

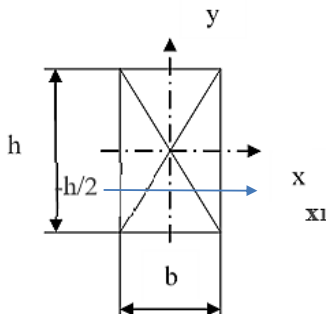


Рис. 64. Определение осевого момент инерции относительно оси.

$$J_{x1} = \frac{bh^3}{12} + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

Изменение моментов инерции при повороте координатных осей

Повернем систему координат YOX против часовой стрелки до системы координат VOU (Рис. 65). Ранее были получены уравнения для моментов инерции:

$$J_x = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_{xy} = \int_F xy dF, \quad J_p = \int_F r^2 dF = \text{const}$$

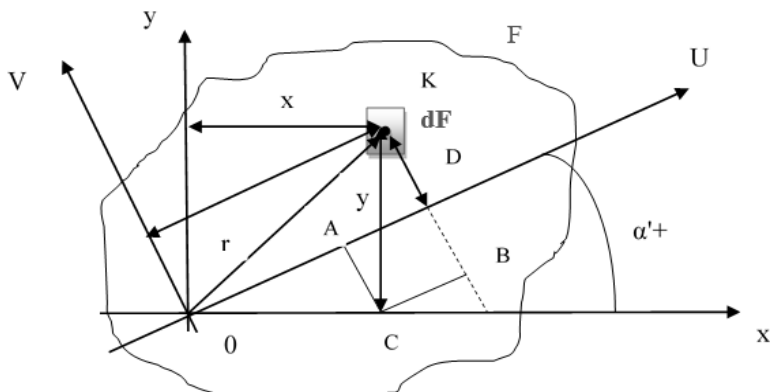


Рис. 65. Изменение моментов инерции при повороте системы координат.

Проекции в новой системе координат определяются так: $U = OA + AD = OD$, $V = BK - DB = DK$, $U = ODBK = KC \cos \alpha = y \cos \alpha$, $OA = OC \cos \alpha = x \cos \alpha$, $DB = AC = OC \sin \alpha = x \sin \alpha$, $AD = BC = KC \sin \alpha = y \sin \alpha$, $V = y \cos \alpha - x \sin \alpha$, $U = x \cos \alpha + y \sin \alpha$.

Определим один из осевых моментов инерции после поворота системы координат

$$\begin{aligned} J_U &= \int_F V^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \int_F y^2 \cos^2 \alpha dF - \\ &- 2 \int_F yx \cos \alpha \cdot \sin \alpha dF + \int_F x^2 \sin^2 \alpha dF = \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \int_F xy dF + \\ &+ \sin^2 \alpha \int_F x^2 dF = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Момент J_U приведен в формуле (2) без преобразований по аналогии с выполненными выше действиями

$$J_U = J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha \quad (1)$$

$$J_V = J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_x \sin^2 \alpha \quad (2)$$

Сложим формулы (1) и (2)

$$\begin{aligned} J_U + J_V &= J_x \cos^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha + J_y \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha + J_x \sin^2 \alpha = \\ &= J_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = J_x + J_y \\ J_U + J_V &= J_x + J_y \quad (3) \end{aligned}$$

При повороте координатной системы на любой угол меньше 90° сумма осевых моментов инерции остается постоянной и не зависит от угла поворота (3), на который мы поворачиваем координатную систему. Поворачивая оси можно добиться такого положения осей, когда осевые моменты инерции примут экстремальное значение $\max$ и $\min$.

Центробежные моменты инерции

Центробежный момент инерции определим, опираясь на положения предыдущего параграфа

$$\begin{aligned} J_{UV} &= \int_F UV dF = \int_F ((x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha)) dF = \\ &= \int_F x y \cos^2 \alpha + \int_F y^2 \sin \alpha \cos \alpha dF - \int_F x^2 \cos \alpha \sin \alpha dF - \int_F y x \sin^2 \alpha dF = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \alpha \int_F xy dF + \sin \alpha \cos \alpha \int_F y^2 dF - \cos \alpha \sin \alpha \int_F x^2 dF - \sin^2 \alpha \int_F xy dF = \\
&= J_{xy} \cos^2 \alpha + J_x \sin \alpha \cos \alpha - J_y \sin \alpha \cos \alpha - J_{xy} \sin^2 \alpha = J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \\
&\quad + J_x \frac{\sin 2\alpha}{2} - J_y \frac{\sin 2\alpha}{2} = J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha \\
J_{UV} &= J_{xy} \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha \quad (4)
\end{aligned}$$

Главные оси и главные моменты поперечных сечений стержней

Главные моменты - это моменты инерции, возникающие в сечении относительно главных осей. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен 0 называются главными или центральными осями сечения.

Рассмотрим не симметричное сечение. Известны все моменты инерции относительно осей X, Y .

Центробежный момент инерции, относительно новой системы координат при повороте должен быть равен 0, а это может случиться только при каком-то фиксированном значении угла α .

Подставим $J_{UV} = 0$, $\alpha = \alpha_0$ в формулу (4)

$$0 = J_{xy} \cos 2\alpha_0 + \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0, J_{xy} \cos 2\alpha_0 = -\frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha_0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5)$$

По формуле (5) находятся два значения углов поворота $\alpha'_0 = \alpha_0$ и $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$ по которым строятся главные оси, расположенные по отношению друг к другу под углом в 90° .

Рассмотрим частные случаи применения формулы (5)

1. Тавровое сечение. X, Y -главные центральные оси; X', Y' - главные оси (Рис. 66). $J_{xy} = 0$, $J_x - J_y = 0$, $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 0$, $\alpha'_0 = 0$, $\alpha''_0 = 90^\circ$.

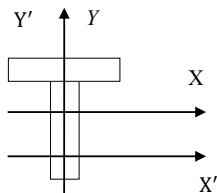


Рис. 66. Положение осей таврового сечения.

2. Равнобокий уголок. X, Y -центральные оси; X_0, Y_0 - главные центральные оси, $J_{xy} \neq 0$ (Рис. 67). $J_x - J_y = 0$, $J_x = J_y$, $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty$, $\alpha'_0 = 45^\circ$, $\alpha''_0 = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$

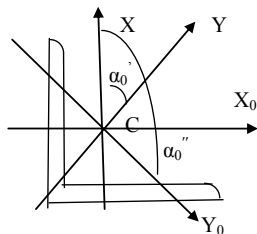


Рис. 67. Положение осей равнобокого уголка.

3. Сечение типа квадрат, круг и т.д. $J_{xy} = 0$, $J_x - J_y = 0$

$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \left(\frac{0}{0}\right)$ – неопределенность раскрывается подстановкой момента инерции в формулу

(4) при любом фиксированном угле α_0

Главные моменты инерции получаем подстановкой в формулу (5) выражений (1) и (2)

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} \quad (6)$$

В ходе расчета сечений на прочность и устойчивость приходится использовать дополнительные геометрические характеристики радиусы инерции [м]:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}},$$

$$i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}}$$

Зная радиусы инерции и используя графоаналитический метод можно найти осевые моменты инерции и центробежные моменты инерции (Рис. 68).

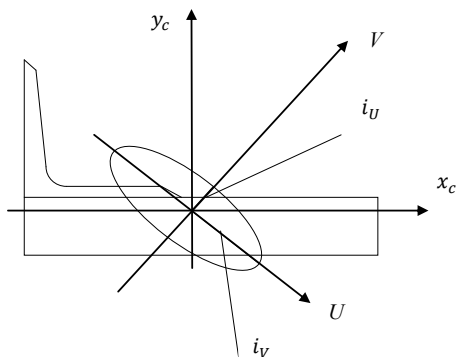


Рис. 68. Осевые моменты инерции и центробежные моменты инерции.

Вопросы для самостоятельного изучения темы 8

1. Перечислите основные геометрические характеристики поперечного сечения стержня.
2. Приведите основные уравнения статических моментов при их параллельном переносе для площадей сечений.
3. Как определить статические моменты сложных сечений.
4. Приведите основные уравнения моментов инерции поперечных сечений.
5. Как определить моменты инерции при повороте координатных осей.
6. Дайте понятие главных осей и главных моментов поперечных сечений стержней и представьте уравнения для их определения.

Заключение

Изучение тем дисциплин позволит получить: представления о принципах построения раздела сопротивления материалов технической механики, их роли в решении инженерных задач среднего звена; представления о структуре и подходах к решению задач прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций и деталей машина базовом уровне; знания в области обеспечения рабочего состояния и предупреждения предельного состояния конструкции или машины в общем случае нагружения на начальном этапе эксплуатации с использованием теорий прочности для пластичных и хрупких материалов; знания о простых типах нагружения и повышении надежности работы элементов конструкций и деталей машин на начальном этапе эксплуатации.

Автор рекомендуют также для более глубокого изучения дисциплины использовать литературные источники [1,2].

Библиографический список

1. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: Учебное пособие - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 560 с.
2. Селиванов В. В. Механика разрушения деформируемого тела : учебник для вузов / В. В. Селиванов. - 2-е изд., испр.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 424 с. - (Прикладная механика сплошных сред. В 3 т.; Т. 2). - ISBN 5-7038-2345-5.
3. Гребенкин В. З. Техническая механика: учебник и практикум для среднего образования / В. З. Гребенкин, Р. П. Заднепровский, В. А. Летягин; под редакцией В. З. Гребенкина, Р. П. Заднепровского. - Москва: Издательство Юрайт, 2019. - 390 с. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-10337-3. - Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. - URL: <https://urait.ru/bcode/442527>).
4. Асадулина Е. Ю. Техническая механика: сопротивление материалов: учебник и практикум для СПО / Е. Ю. Асадулина. - 2-е изд., испр. и доп. -М.: Издательство Юрайт, 2017. - 290 с. - (Серия: Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-02404-3.
5. Ахметзянов М. Х. Техническая механика (сопротивление материалов): учебник для СПО / М. Х. Ахметзянов, И. Б. Лазарев. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 300 с. - (Серия: Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-03430-1.
6. Атапин В. Г. Сопротивление материалов: учебник и практикум для вузов / В. Г. Атапин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва: Издательство Юрайт, 2020. - 342 с. - URL: <https://urait.ru/bcode/450626>..
7. Мовнин М.С. Основы технической механики [Электронный ресурс]: учебник / М.С. Мовнин, А.Б. Израелит, А.Г. Рубашкин. - Электрон. текстовые данные. - СПб.: Политехника, 2016. - 289 с. - ISBN 978-5-7325-1087-4. - Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58853.html>
8. Вереина Л. И. Техническая механика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Л. И. Вереина, М. М. Краснов. - 7-е изд., стер. -М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 352 с.
9. Эрдеди А. А. Техническая механика: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / А. А. Эрдеди, Н. А. Эрдеди. - М.: Издательский центр «Академия», 2014 - 528 с.
10. Сетков В. И. Техническая механика для строительных специальностей: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / В. И. Сетков. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Издательский центр «Академия», 2013 - 400 с.

Учебное издание

Составитель
Кулагин Андрей Владимирович

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
БАЗОВЫЙ КУРС
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 25.11.2021. Формат 60x84¹/₁₆.

Усл. печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,9.

Тираж 300 экз. Заказ № 2247.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, д. 1, корп. 4, каб. 207
тел./ факс: +7(3412) 50-02-95 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18