Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

Д. Л. Федоров, Т. С. Тинюкова, Л.П.Сметанина

Криволинейные интегралы второго рода

Учебно-методическое пособие

Ижевск
2021

УДК 517.2/.3(075.8)
ББК 22.161.12я73
Ф333

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: д. ф.-м. н., проф., ведущий научный сотрудник отдела теор. физики УдмФИЦ УрО РАН Ю. П. Чубурин

Федоров Д.Л., Тинюкова Т.С., Сметанина Л.П.

Ф333 Криволинейные интегралы второго рода: учеб.-метод. пособие/ — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. – 80 с.

ISBN 978-5-4312-0953-6

Предлагаемое учебно-методическое пособие посвящено изучению криволинейных интегралов второго рода, которое входит в раздел математического анализа «Интегральное исчисление функций нескольких переменных». Приведены краткие теоретические сведения и индивидуальные задания для самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов всех направлений Института математики, информационных технологий и физики. Может быть использовано также в работе со студентами нематематического профиля.

УДК 517.2/.3(075.8)
ББК 22.161.12я73

ISBN 978-5-4312-0953-6

9 785431 209536

Содержание

Предисловие

Данное учебно-методическое пособие подготовлено преподавателями кафедры математического анализа и отражает многолетний опыт работы со студентами Института математики, информационных технологий и физики. Оно является частью ряда пособий авторского коллектива кафедры, посвящённого различным разделам дисциплины «Математический анализ». Включенный в пособие материал, относится к разделу «Криволинейные интегралы» этой дисциплины, который обычно изучается на втором курсе обучения. Материал данного пособия следует изучать после темы «Криволинейные интегралы первого рода». Для успешного усвоения материала студент должен изучить раздел «Интегралы», знать методы интегрирования. Кроме того, решение индивидуальных заданий требует знания уравнений плоскости и прямой в пространстве и поверхностей второго порядка. Эти темы изучаются в курсе аналитической геометрии.

В результате освоения раздела формируются следующие компетенции:

> УК-1 — способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;
>
> ОПК-1 — способность применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

Учебно-методическое пособие содержит два раздела. Первый включает теоретические сведения и примеры решения задач. Во втором разделе приведены разбитые на варианты задания лабораторных работ, которые также можно использовать на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов. В каждом варианте предложено несколько заданий на вычисление криволинейного интеграла. Решение большинства из них предполагает аналитическое вычисление определённого интеграла, основанное на применении формулы Ньютона–Лейбница. Одно задание приводит к вычислению «неберущегося» интеграла, поэтому его решение требует применения численных методов интегрирования. С этой целью авторы пособия рекомендуют использовать компьютерные технологии. В качестве примера в пособии приведено вычисление определённого интеграла в среде SageMath. Допустимо использовать и другие компьютерные пакеты или языки программирования. Решение задания в этом случае следует принимать в виде кода программы.

1. Теоретические сведения

1.1. Определение криволинейного интеграла второго рода

Пусть AB — кривая на плоскости или в пространстве. Точка A — начало кривой, точка B — конец кривой. На множестве $\{P\}$ точек кривой AB зададим функцию $X(P)$, зависящую от двух или трёх переменных (в зависимости от размерности кривой). Построим разбиение кривой AB точками $\{P_i\}$, где $i = 0, 1, \ldots, n$ так, чтобы $A = P_0$ и $B = P_n$. Множество таких точек обозначим буквой T. Пусть $P_{i-1}P_i$ — частичная дуга кривой AB, соединяющая точки P_{i-1} и P_i. Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через $\ell(P_{i-1}P_i)$ длину этой дуги. Тогда диаметром разбиения T будем называть величину $\Delta T = \max\limits_i \ell(P_{i-1}P_i)$. На каждой дуге $P_{i-1}P_i$ выберем произвольным образом точку Q_i. Пусть точка P_i имеет координаты x_i, y_i, z_i. Будем традиционно обозначать $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Составим сумму

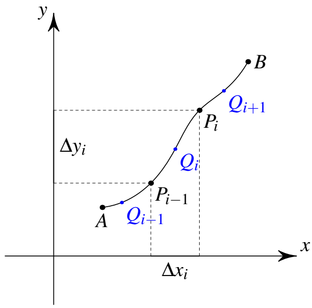

Рис. 1. Разбиение кривой AB

$$\sigma = \sigma(T, \{Q_i\}) = \sum_{i=1}^{n} X(Q_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

которую будем называть интегральной суммой, соответствующей заданному разбиению.

Определение 1. Криволинейным интегралом второго рода функции $X(P)$ по кривой AB по координате x называется предел $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \sigma$ при условии, что этот предел не зависит от разбиений T и от выбора точек Q_i. Обозначение: $\int\limits_{AB} X(P)\,dx$.

Аналогично определяются криволинейные интегралы второго рода $\int\limits_{AB} Y(P)\,dy$ и $\int\limits_{AB} Z(P)\,dz$ по координатам y и z для функций

Y, Z, определённых на множестве точек кривой AB. Полное выражение для криволинейного интеграла второго рода определяется как сумма криволинейных интегралов по каждой координате:

$$\int\limits_{AB} X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{AB} X(x,y,z)\,dx + \int\limits_{AB} Y(x,y,z)\,dy + \int\limits_{AB} Z(x,y,z)\,dz. \quad (2)$$

Рассмотрим свойства криволинейного интеграла второго рода.

1°. Если $X(P) \equiv 1$ на AB, то $\int\limits_{AB} 1\,dx = x_B - x_A$, где x_A, x_B — абсциссы точек A и B.

2°. Если начало и конец кривой поменять местами, то значение криволинейного интеграла второго рода поменяет знак, то есть $\int\limits_{AB} X\,dx = -\int\limits_{BA} X\,dx$.

3°. Если точка C лежит на кривой AB, то $\int\limits_{AB} X\,dx = \int\limits_{AC} X\,dx + \int\limits_{CB} X\,dx$.

4°. $\int\limits_{AB} (X_1 \pm X_2)\,dx = \int\limits_{AB} X_1\,dx \pm \int\limits_{AB} X_2\,dx$.

5°. $\int\limits_{AB} \lambda X\,dx = \lambda \int\limits_{AB} X\,dx$, где $\lambda = \text{const}$.

6°. Пусть $\tau(P)$ — касательный вектор к кривой в точке P, причём его направление соответствует ориентации кривой, то есть указывает направление движения от начала к концу кривой. При этом длина вектора $\tau(P)$ равна единице. Тогда, если вектор $\tau(P)$ образует с осями координат углы α, β и γ, то координаты этого вектора будут равны $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (направляющие косинусы вектора). В этих обозначениях криволинейный интеграл второго рода можно выразить через криволинейный интеграл первого рода по формуле

$$\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{AB} (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma)\,ds. \quad (3)$$

7°. Пусть функции X, Y, Z служат координатами вектора F. В этом случае говорят, что на кривой AB задано векторное поле $F(x, y, z)$. Тогда равенство (3) можно записать в виде

$$\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{AB} (F \cdot \tau)\,ds. \tag{4}$$

Здесь точкой обозначено скалярное произведение векторов.

8°. Из равенства (4) следует формула для оценки криволинейного интеграла второго рода

$$\left|\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right| \leqslant \int\limits_{AB} |F|\;ds \leqslant M\ell(AB),$$

если $|F| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \leqslant M$ на AB.

9°. *Физическая интерпретация.* Пусть F — силовое поле, действующее на материальную точку, которая движется по траектории, совпадающей с кривой AB. Тогда величина криволинейного интеграла $\int\limits_{AB} (F \cdot \tau)\,ds$ равна работе силового поля F по перемещению точки.

Если кривая AB в пространстве задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \qquad t \in [a, b],$$

то формула для вычисления полного криволинейного интеграла (2) имеет вид

$$\int\limits_{AB} X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$

$$= \int\limits_a^b \Big(X\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Y\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) +$$

$$+ Z\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big)dt. \tag{5}$$

Если кривая плоская, то формула (5) примет вид

$$\int\limits_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy =$$
$$= \int\limits_a^b \Big(X\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Y\big(x(t),y(t)\big)y'(t) \Big) dt. \quad (6)$$

Если кривая задана графиком функции $y = \varphi(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то в качестве параметра можно принять переменную x и тогда формула (6) примет вид

$$\int\limits_{AB} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int\limits_a^b \Big(X\big(x,\varphi(x)\big) + Y\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) \Big)\,dx. \quad (7)$$

Аналогично, если кривая AB является графиком функции $x = \psi(y)$ при $c \leqslant y \leqslant d$, то параметром будет служить переменная y и тогда формула (6) примет вид

$$\int\limits_{AB} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int\limits_c^d \Big(X\big(\psi(y),y\big)\psi'(y) + Y\big(\psi(y),y\big) \Big)\,dy. \quad (8)$$

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{ABC} (x+2y)dx + (x - y)dy$, где ABC — ломаная, соединяющая точки $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ 1)$, $C(3,\ 3)$. Для этого разобьём интеграл на два: $\int\limits_{ABC} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC}$. Отрезок AB является частью прямой заданной уравнением $y = 1$, причём $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Поэтому по формуле (7)

$$\int\limits_{AB} (x+2y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{-1}^{2} \big(x + 2 + (x-1)(1)'\big)dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \big(\tfrac{1}{2} - 2\big) = 7{,}5.$$

Отрезок BC является частью прямой заданной уравнением $y = 2x - 3$, причём $1 \leqslant x \leqslant 3$. Поэтому по формуле (7)

$$\int\limits_{BC} (x+2y)dx + (x-y)dy =$$
$$= \int\limits_1^3 \big(x + 2(2x-3) + \big(x - (2x-3)\big)(2x-3)'\big)dx =$$
$$= \int\limits_1^3 3x\,dx = \tfrac{3}{2}x^2\Big|_1^3 = \tfrac{27}{2} - \tfrac{3}{2} = 12.$$

В итоге значение всего криволинейного интеграла по ломаной ABC равно $7{,}5 + 12 = 19{,}5$.

Если кривая задана уравнением в полярных координатах, то формула (6) также может быть применена, при этом параметром будет служить полярный угол φ или полярный радиус r.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma e^{2y}dx$, где Γ задана уравнением $r = \cos 3\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$. Переходя от полярных координат к декартовым, получаем равенства

$$x(\varphi) = r\cos\varphi = \cos 3\varphi \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi\right),$$
$$y(\varphi) = r\sin\varphi = \cos 3\varphi \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\sin 4\varphi - \sin 2\varphi\right).$$

Тогда по формуле (6) криволинейный интеграл сводится к определённому интегралу

$$\int\limits_\Gamma e^{2y}dx = -\int\limits_0^{\pi/3} e^{\sin 4\varphi - \sin 2\varphi}\left(\sin 2\varphi + 2\sin 4\varphi\right)d\varphi.$$

Вычислим этот интеграл приближённо при помощи методов численного интегрирования. Для этого используем компьютерный пакет SageMath, в котором предусмотрена процедура численного интегрирования, реализованная в виде функции `numerical_integral`. Документ, составленный на языке SageMath обычно называется блокнотом (по-английски SageMath Notebook). Содержимое такого блокнота для решения нашей задачи может иметь следующий вид, в котором значение искомого интеграла обозначено буквой I и выведено с точностью 0,001:

In [1]:

```
r(t) = exp(sin(4*t)-sin(2*t))*(sin(2*t)+2*sin(4*t))
I = -numerical_integral(r(t), 0, π/3)[0]
print("I=%.3f" % I)
```

```
I=-1.660
```

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} x^2\,dy$, если кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \pi r \log_2 r$ для $0 < r \leqslant 2$. Значение угла φ при $r = 0$ естественно определить по непрерывности:

$$\varphi(0) = \lim_{r\to+0} \varphi(r) = \pi \lim_{r\to+0} r\log_2 r = 0.$$

Кривую Γ можно тогда задать параметрически равенствами

$$x(r) = r\cos\varphi = r\cos(\pi r\log_2 r),$$
$$y(r) = r\sin\varphi = r\sin(\pi r\log_2 r).$$

Поэтому по формуле (6) получаем выражение для криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} x^2\,dy = \int\limits_0^2 r^2\cos^2(\pi r\log_2 r)\big(r\sin(\pi r\log_2 r)\big)'dr =$$
$$= \int\limits_0^2 r^2\cos^2(\pi r\log_2 r)\bigg(\sin(\pi r\log_2 r) +$$
$$+ \pi r\cos(\pi r\log_2 r)\Big(\log_2 r + \frac{1}{\ln 2}\Big)\bigg)dr.$$

Вычислим определённый интеграл приближённо с точностью до 0,001 в среде SageMath. Для упрощения записи не будем записывать выражение для производной функции $y(r)$, а воспользуемся встроенной функцией `diff`, которая строит выражение для производной функции:

In [1]:

```
φ(r) = π * r * log(r, 2)
x(r) = r * cos(φ(r))
y(r) = r * sin(φ(r))
I = numerical_integral(x(r)^2 * diff(y(r), r), 0, 2)[0]
print("I = %.3f" % I)
```

```
I = 1.036
```

1.2. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. Формула Стокса

Определение 2. Если начало и конец кривой совпадают, то кривая называется *замкнутым контуром* (часто просто контуром).

Для определения криволинейного интеграла по замкнутому контуру в качестве точки, определяющей начало и конец кривой, можно выбрать любую лежащую на ней точку. При этом требуется задать направление её обхода, которое называется *ориентацией* контура.

Определение 3. Пусть L — замкнутый контур, лежащий на координатной плоскости xOy. Замкнутый контур L называется *положительно ориентированным*, если на нём определён обход в направлении, при котором ограниченная контуром область остаётся слева. Иначе говоря, обход контура L производится против часовой стрелки. В противном случае контур называется *отрицательно ориентированным*. На рис. 2 ориентация контура показана стрелками.

Для замкнутого контура как и для обычной кривой может быть определён криволинейный интеграл, который в этом случае часто обозначается $\oint\limits_L X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$. Если обозначать через L^+ и L^- один и тот же контур, ориентированный положительно и отрицательно, то из свойств криволинейного интеграла можно вывести равенство

$$\oint\limits_{L^+} X\,dx + Y\,dy = -\oint\limits_{L^-} X\,dx + Y\,dy,$$

то есть при смене ориентации контура величина криволинейного интеграла меняет знак.

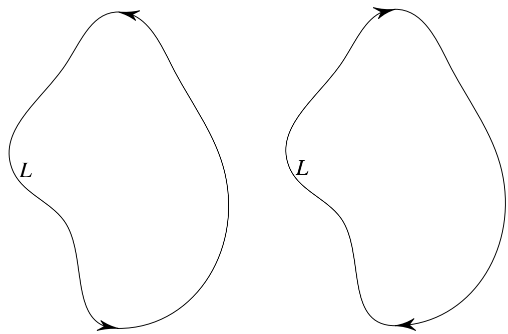

Рис. 2. Положительно и отрицательно ориентированные контуры

Теорема 1 (формула Грина). *Пусть замкнутый контур L ориентирован положительно и ограничивает область $\mathscr{D}$ на плоскости xOy. Пусть, кроме того, на множестве $\mathscr{D}$ вместе с его границей L определены функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$, которые непрерывны в замыкании $\mathscr{D}$ вместе с их частными производными $\frac{\partial Y}{\partial x}$ и $\frac{\partial X}{\partial y}$. Тогда справедливо равенство*

$$\oint\limits_L X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \iint\limits_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\,dx\,dy. \qquad (9)$$

Следствие 1. *Если в равенстве* (9) *взять $X \equiv 0$ и $Y = x$, то получим*

$$\oint\limits_L x\,dy = \iint\limits_{\mathscr{D}} dx\,dy = S(\mathscr{D}).$$

Аналогично, если в равенстве (9) *взять* $X = y$ *и* $Y \equiv 0$, *то*

$$\oint\limits_L y\,dx = -\iint\limits_{\mathscr{D}} dx\,dy = -S(\mathscr{D}).$$

Пример 4. Пусть требуется вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x-y)dx+(x+y)dy$, где L — граница треугольника $\mathscr{D}$ с вершинами в точках $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 0)$, $B(2,\ 1)$, ориентированная положительно. По формуле (9) можно свести криволинейный интеграл к двойному и выразить его через площадь треугольника:

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} (1+1)\,dx\,dy = 2S(\mathscr{D}) = 2.$$

Формула Грина допускает обобщение на случай замкнутой кривой в пространстве. Формулировка соответствующей теоремы основывается на понятии поверхностного интеграла второго рода, которое в настоящем пособии не рассматривается. Однако, для формулировки основных утверждений и решения примеров дадим в упрощённом[1)] виде некоторые определения.

Определение 4. Поверхностью, заданной в *явном* виде, называется множество точек с координатами (x, y, z), удовлетворяющими условиям

$$(x, y) \in \mathscr{D}, \quad z = f(x, y), \tag{10}$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области $\mathscr{D}$ на координатной плоскости xOy. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в $\mathscr{D}$, то поверхность называется *гладкой.*

Определение 5. Выбор одной из двух сторон (верхней или нижней) поверхности, заданной условием (10), называется *ориентацией* поверхности. Если на поверхности выбрана верхняя (нижняя) сторона, то будем эту поверхность называть положительно (отрицательно) ориентированной относительно оси Oz.

[1)]Полное определение поверхности можно найти, например, в книге [6].

Для гладкой поверхности в каждой её точке можно построить нормальный вектор, который перпендикулярен касательной плоскости, проведённой к поверхности через эту точку. Тогда ориентацию поверхности удобно задавать указанием направления нормального вектора: верхней стороне соответствует нормальный вектор, который образует острый угол с координатной осью Oz, соответственно для нижней стороны поверхности нормальный вектор образует тупой угол с осью Oz. В тех точках поверхности, в которых нормальный вектор перпендикулярен оси Oz, ориентацию относительно оси Oz будем считать неопределённой. Если γ — угол между нормальным вектором и осью Oz, то ориентацию поверхности относительно оси Oz обозначим так:

$$\sigma_z = \begin{cases} +1, & \gamma < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \gamma = \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \gamma > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определение 6. Образ границы множества $\mathscr{D}$ при отображении функцией f называется *границей* или *краем* поверхности, заданной условиями (10). Граница поверхности S обозначается ∂S.

Аналогичные определения формулируются для случая, когда поверхность задаётся при помощи функции $y = g(x, z)$ или функции $x = h(y, z)$, определённой и непрерывной в некоторой области $\mathscr{D}$ соответствующей координатной плоскости. В этих случаях следует говорить о положительной или отрицательной ориентации поверхности относительно оси Oy или оси Ox соответственно, которые будем обозначать σ_y и σ_x.

В данном пособии будем все поверхности считать явно заданными и гладкими. Будем предполагать также, что для любой поверхности её ориентация относительно каждой оси от точки к точке не меняется[2)], возможно исключая точки, лежащие на границе поверхности:

$$\sigma_x(M) = \text{const}, \quad \sigma_y(M) = \text{const}, \quad \sigma_z(M) = \text{const}, \qquad M \in S \setminus \partial S. \tag{11}$$

[2)] На практике если это условие нарушается, то поверхность разрезается на части с тем расчётом, чтобы для каждой части условия (11) выполнялись.

Определение поверхностного интеграла второго рода и его свойства рассмотрены подробно в учебных пособиях [6, 10]. Для целей настоящего пособия будет достаточно следующего правила вычисления поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint\limits_S dy\,dz = \hat{S}_{yz}, \quad \iint\limits_S dz\,dx = \hat{S}_{zx}, \quad \iint\limits_S dx\,dy = \hat{S}_{xy}, \qquad (12)$$

где $\hat{S}_{yz} = \sigma_x S_{yz}$, $\hat{S}_{zx} = \sigma_y S_{zx}$, $\hat{S}_{xy} = \sigma_z S_{xy}$, а S_{yz}, S_{zx}, S_{xy} — площади проекций ориентированной поверхности S на координатные плоскости yOz, zOx, xOy соответственно.

Пусть S — ограниченная ориентированная поверхность в пространстве, причём границей этой поверхности является замкнутый контур L.

Определение 7. Будем говорить, что ориентация поверхности S является *согласованной* с ориентацией контура L, если при наблюдении с конца нормального вектора n к поверхности обход контура L производится против часовой стрелки (см. рис. 3).

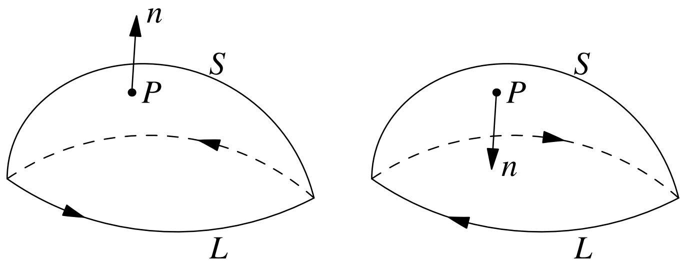

Рис. 3. Ориентация поверхности согласована с ориентацией контура

Замечание. Правило, по которому согласуются ориентации поверхности и её границы, называется также «правилом штопора»: если вращать ручку штопора по направлению, задаваемому ориентацией контура L, то штопор будет двигаться поступательно в направлении нормального вектора n.

Теорема 2. *Пусть ориентация поверхности S согласована с ориентацией контура L, функции $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными на S. Тогда выполняется равенство*

$$\oint\limits_L X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dy\,dz + \\ + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{13}$$

Формула (13) называется *формулой Стокса.* В некоторых случаях эта формула существенно упрощает вычисление криволинейного интеграла.

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (4y-7z)dx + (2z - x)dy + (3x+5y)dz$, если L — треугольник с вершинами в точках $A(-2;3;1)$, $B(5;-3;4)$, $C(1;0;1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Используем для вычисления формулу Стокса. Пусть S — часть плоскости, расположенной внутри треугольника ABC. Тогда по формуле (13) криволинейный интеграл сводится к поверхностному

$$\iint\limits_S (5-2)\,dy\,dz + (-7-3)\,dz\,dx + (-1-4)\,dx\,dy = \\ = 3\iint\limits_S dy\,dz - 10\iint\limits_S dz\,dx - 5\iint\limits_S dx\,dy. \tag{14}$$

Из аналитической геометрии известно, что векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{BC}$ имеет координаты численно равные площадям проекций параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. При этом вектор $\overline{AB} \times \overline{BC}$ является нормальным для плоскости, а его направление соответствует ориентации поверхности, согласованной с ориентацией треугольника ABC. Используя обозначения формул (12), этот факт можно записать в виде равенства

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 2\{\hat{S}_{yz}, \hat{S}_{zx}, \hat{S}_{xy}\}. \tag{15}$$

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также их векторное произведение:

$$\overline{AB} = \{5+2, -3-3, 4-1\} = \{7, -6, 3\},$$
$$\overline{BC} = \{1-5, 0+3, 1-4\} = \{-4, 3, -3\},$$
$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 7 & -6 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} = \{9, 9, -3\}.$$

Тогда из формул (15) находим $\hat{S}_{yz} = \hat{S}_{zx} = \frac{9}{2}$, $\hat{S}_{xy} = -\frac{3}{2}$.

Используя равенства (14) и (12), определяем значение поверхностного интеграла

$$3 \cdot \frac{9}{2} - 10 \cdot \frac{9}{2} + 5 \cdot \frac{3}{2} = -24.$$

1.3. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Интегрирование полного дифференциала

Определение 8. Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy$ называется *независящим от пути интегрирования* в области $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$, если для любых двух кривых, соединяющих точки A и B, лежащих целиком в $\mathscr{D}$, значения криволинейных интегралов по этим кривым равны.

Теорема 3. *Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy$ *не зависел от пути интегрирования в* $\mathscr{D}$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого замкнутого контура* L*, лежащего в* $\mathscr{D}$*, выполнялось равенство* $\oint\limits_{L} X\,dx + Y\,dy = 0$.

Теорема 4. *Пусть функции* $X(x,y)$ *и* $Y(x,y)$ *непрерывны в* $\mathscr{D}$*. Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy$ *не зависел от пути интегрирования в* $\mathscr{D}$ *необходимо и достаточно, чтобы в* $\mathscr{D}$ *была определена функция* $u(x,y)$*, для которой выполняются равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = X(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Y(x,y), \quad (x,y) \in \mathscr{D}. \qquad (16)$$

Замечание. Дифференциальное выражение вида $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ называется *полным дифференциалом.* Из теоремы 4 может быть выведено правило интегрирования полного дифференциала

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = u(B) - u(A). \qquad (17)$$

Функция $u(x, y)$ может быть восстановлена из равенств (16) с точностью до постоянного слагаемого.

Пример 6. Вычислим пользуясь формулой (17) криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy, \quad \text{где } A(0,\ 0),\ B(1,\ \pi).$$

Нетрудно заметить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = y\cos(xy)$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos(xy)$, если взять $u = \sin(xy) + C$, $C = \text{const}$. Тогда значение криволинейного интеграла равно $u(1, \pi) - u(0, 0) = \sin\pi - \sin 0 = 0$.

Определение 9. Множество $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ называется *односвязным*, если для любого замкнутого контура целиком лежащего в $\mathscr{D}$ все точки, окружённые этим контуром, также принадлежат $\mathscr{D}$. В противном случае множество $\mathscr{D}$ называется *многосвязным.* Примеры односвязного и многосвязного множества приведены на рис. 4.

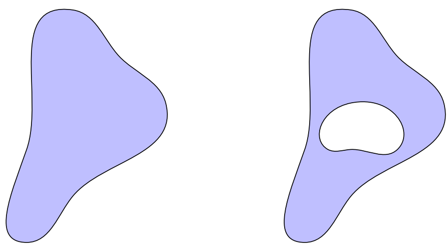

Рис. 4. Примеры односвязного и многосвязного множества

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{D}$ — односвязное множество, функции $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в $\mathscr{D}$. Тогда для того, чтобы дифференциальное выражение $X\,dx+Y\,dy$ было полным дифференциалом в $\mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$ в $\mathscr{D}$.*

Следствие 2. *Если в односвязном множестве $\mathscr{D}$ выполняется равенство $\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x}$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} X\,dx+Y\,dy$ не зависит от пути интегрирования. В этом случае для вычисления криволинейного интеграла можно применить правило дифференцирования полного дифференциала (17).*

Пример 7. Рассмотрим криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}(2xy-3y-2)dx+$ $+(x^2-3x+1)dy$. Докажем, что этот интеграл не зависит от пути интегрирования и вычислим его значение, если $A(-1,\ 1)$ и $B(2,\ 3)$. Проверим условия теоремы 5:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=2x-3, \quad \frac{\partial Y}{\partial x}=2x-3.$$

Как видно, условия выполняются, значит подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Для восстановления функции u используем равенство $\frac{\partial u}{\partial x}=X$, из которого следует

$$u=\int(2xy-3y-2)dx=x^2y-3xy-2x+\varphi(y),$$

где φ — неизвестная пока функция, зависящая только от y. Для её нахождения применяем равенство $\frac{\partial u}{\partial y}=Y$, откуда следует

$$x^2-3x+\varphi'(y)=x^2-3x+1 \quad \Longleftrightarrow \ \varphi'(y)=1.$$

Отсюда находим $\varphi(y)=y+C$ и тогда $u=x^2y-3xy-2x+y+C$, где $C=\mathrm{const}$. Наконец, значение криволинейного интеграла равно $u(B)-u(A)=u(2,3)-u(-1,1)=-7-7=-14$.

Аналогично определению 8 можно ввести понятие независимости криволинейного интеграла по пространственной кривой от пути интегрирования.

Определение 10. Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ называется *независящим от пути интегрирования* в области $G \subset \subset \mathbb{R}^3$, если для любых двух кривых, соединяющих точки A и B, лежащих целиком в G, значения криволинейных интегралов по этим кривым равны.

Для того, чтобы сформулировать необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования для случая, когда кривая расположена в пространстве, понадобится ввести несколько новых понятий.

Определение 11. Векторная величина, каждая координата которой представляет собой функцию от пространственных переменных x, y, z, называется *векторным полем.* Координаты векторного поля будем обозначать через X, Y, Z.

Определение 12. Векторное поле F называется *потенциальным* на множестве $G \subset \mathbb{R}^3$, если в G существует функция $u(x, y, z)$ такая, что $F = \operatorname{grad} u$ в G.

В координатном виде свойство потенциальности векторного поля $F = (X, Y, Z)$ означает выполнение равенств

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (x, y, z) \in G. \tag{18}$$

Физическими примерами потенциальных полей являются гравитационное и электрическое поле.

Теорема 6. *Для того, чтобы криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} X\,dx + + Y\,dy + Z\,dz$ *не зависел от пути интегрирования в* G *необходимо и достаточно, чтобы векторное поле* $F = (X, Y, Z)$ *было потенциальным в* G.

Замечание. Если векторное поле (X, Y, Z) потенциальное, то выражение $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ называется полным дифференциалом и тогда вычисление криволинейного интеграла удобно производить по формуле интегрирования полного дифференциала

$$\int\limits_{AB} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = u(B) - u(A). \tag{19}$$

Для этого следует восстановить функцию $u(x, y, z)$ из формул (18).

Пример 8. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, если $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$. Для начала надо убедиться, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования, то есть подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Легко заметить, что $yz = \frac{\partial u}{\partial x}$, $xz = \frac{\partial u}{\partial y}$, $xy = \frac{\partial u}{\partial z}$, если взять $u = xyz$. Поэтому по формуле (19) значение криволинейного интеграла равно $u(2,2,2) - u(1,1,1) = 8 - 1 = 7$.

В рассмотренном примере функция u определяется простым подбором. Однако, в сложных примерах найти эту функцию не так легко. Определим условия, при которых векторное поле является потенциальным. С этой целью дадим определения.

Определение 13. Множество $G \subset \mathbb{R}^3$ называется *поверхностно-односвязным*, если для любого замкнутого контура $L \subset G$ можно подобрать поверхность S, лежащую целиком в G, таким образом, чтобы контур L служил границей S. В противном случае множество G называется *поверхностно-многосвязным.*

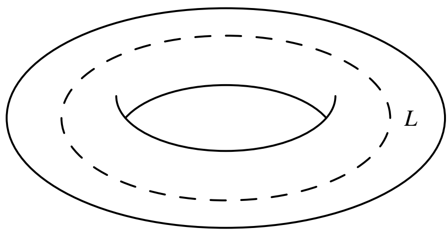

Рис. 5. Пример поверхностно-многосвязного множества

Примером поверхностно-многосвязного множества служит тор (см. рис. 5).

Определение 14. *Ротором* векторного поля $F = (X, Y, Z)$ называется векторное поле с координатами $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$. Обозначение $\operatorname{rot} F$.

Теорема 7. *Пусть G — поверхностно-односвязное множество, координаты векторного поля F имеют непрерывные частные производные первого порядка в G. Для того, чтобы векторное поле F было потенциальным в G необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rot} F = 0$ *всюду в G.*

Следствие 3. *Пусть G — поверхностно-односвязное множество, координаты векторного поля $F = \{X, Y, Z\}$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в G. Тогда для того, чтобы выражение $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ являлось полным дифференциалом необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rot} F = 0$ *всюду в G.*

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (y + 3z)dx + (x + 2z)dy + (3x + 2y)dz$, где $A(1; 1; 1)$ и $B(2; 2; 2)$, предварительно убедившись в его независимости от пути интегрирования. Рассмотрим векторное поле $F = (y+3z, x+2z, 3x+2y)$. Найдём координаты $\operatorname{rot} F$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}_x F &= (3x + 2y)'_y - (x + 2z)'_z = 2 - 2 = 0,\\
\operatorname{rot}_y F &= (y + 3z)'_z - (3x + 2y)'_x = 3 - 3 = 0,\\
\operatorname{rot}_z F &= (x + 2z)'_x - (y + 3z)'_y = 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

По теореме 7 векторное поле F потенциальное. Восстановим функцию $u(x, y, z)$ из условий

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 3z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3x + 2y. \tag{20}$$

Из первого равенства находим $u = \int (y + 3z)dx = xy + 3xz + \varphi(y, z)$, где $\varphi(y, z)$ — константа интегрирования. Функцию $\varphi(y, z)$ можно восстановить из двух последних равенств (20). Сначала из второго получаем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'_y = x + 2z \;\Rightarrow\; \varphi'_y = 2z \;\Rightarrow\; \varphi = \int 2z\,dy = 2yz + \psi(z),$$

где $\psi(z)$ — тоже константа интегрирования. Получаем пока $u = xy + 3xz + 2yz + \psi(z)$. Подставляя эту функцию в третье равенство (20), находим

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3x + 2y + \psi'(z) = 3x + 2y \;\Rightarrow\; \psi'(z) = 0 \;\Rightarrow\; \psi(z) = C = \text{const}.$$

Окончательно $u = xy+3xz+2yz+C$. Тогда значение криволинейного интеграла равно

$$u(B) - u(A) = u(2,2,2) - u(1,1,1) = 4 + 12 + 8 - 1 - 3 - 2 = 18.$$

2. Задания для индивидуальной работы

Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx + x\,dy,$$

если Γ — дуга кривой, удовлетворяющей уравнению $y = \sin x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-\pi \leqslant x \leqslant 0$.

2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dy + y^2\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(2;2)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = x^2/2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;2)$.

3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (xy+2)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dy + y\,dx.$$

Точка $A(1;2)$ — начало Γ, точка $B(2;3)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 1$, $y = 4x - 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x+y+3z)dx$, где Γ — отрезок прямой $-x+8y-4z+55=0$, $-6x-3y-7z-27=0$, заключённый между плоскостями $x=-5$, $x=-9$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x-2y-1)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\arcsin\frac{4-r}{\sqrt{5r^2+20}}$, $0\leqslant r\leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(-3x-2y)\,dz+(4x-4z)\,dy+(2y-3z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-7;0;-7)$, $B(-1;-4;7)$, $C(5;-5;-7)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(-19x-6y)\,dz+(-5x+6z)\,dy+(5y+19z)\,dx}{(-3x-2y-4z)^2},$$

если $A\left(0;1;-\frac{1}{5}\right)$, $B(-3;-2;-4)$.

10. Найти работу силы $F=(-4x+y)\,(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=16$, $z=4y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}xy\,dx+(y+1)^2\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = 3x - 2$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x - y)\, dy + x^2\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(1; 6)$ к точке $B(-1; 6)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 2x^2 + 4$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2; 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x + 4)\, dx + (x - y^2)\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 4xy\, dx + 2x^2\, dy.$$

Точка $A(-1; -1)$ — начало Γ, точка $B(2; 0)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 2$, $y = x - 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (-4x + y) dy$, где Γ — отрезок прямой $2x + 8y - 4z + 20 = 0$, $-7z - 42 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -4$, $y = -3$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (x + 3y) dy$, приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-5x + 2y)\,dz + (-2x - 4z)\,dy + (-7y - 3z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC с вершинами $A(-2; 7; -3)$, $B(4; -1; -3)$, $C(7; 1; -1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-15x - 20y + 20z - 4)\,dz + (-15x - 20y + 20z + 3)\,dx + \\ + (3x + 4y - 4z + 4)\,dy\big)e^{-5x+y-5z},$$

если $A\,(0; 1; 1)$, $B(-5; 1; -5)$.

10. Найти работу силы $F = (-5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k})\,(2x - 2y - 4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 16$, $z = -3x - 5y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \sin y\,dx + \cos x\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = -4x$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y)\,dy + x^2\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(1; -2)$ к точке $B(2; 4)$ и а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = 2x^2 - 4$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(0;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x - 2y)\,dx + (x+1)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — окружность $x^2 + y^2 = 4x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (4y + 2x)\,dx + 4x\,dy.$$

Точка $A(0;1)$ — начало Г, точка $B(2;3)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = 2(x-1)^2$, $y = 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x + 2y - z)dz$, где Г — отрезок прямой $5x + 8y - 4z + 45 = 0$, $2x + y - 6z + 7 = 0$, заключённый между плоскостями $z = 0$, $z = -1$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x - 2y + 3)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Г задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2r-2}{13}$, $0 \leqslant r \leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-2x + 4z)\,dy + (7x + y)\,dz + (5y + 5z)\,dx,$$

если Г — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-6;4;4)$, $B(-3;2;-4)$, $C(-4;3;1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-21x+12y)\,dz+(-9x-12z)\,dy+(9y+21z)\,dx}{(3x+4z)^2},$$

если $A\,(0;1;-1)$, $B(3;0;4)$.

10. Найти работу силы $F=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\,(-2x+4y+3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=9$, $z=-5x+3y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 4

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}(x-y^2)\,dx+y\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y=4x-1$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-1\leqslant x\leqslant 2$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}x^2\,dy+(x-2y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;-3)$ к точке $B(1;0)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y=x^2+2x-3$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(y^2-1)\,dx+2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(4x-y)\,dx-x\,dy.$$

Точка $A(-2;-1)$ — начало Γ, точка $B(2;1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x=y^2+1$, $x=5$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(2x-4y+z)dx$, где Γ — отрезок прямой $-9x-4y+2z+3=0$, $-2x-y+1=0$, заключённый между плоскостями $x=1$, $x=3$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(4x-3y-2)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\operatorname{arcctg}\frac{4r-2}{13}$, $0\leqslant r\leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(-2x+3z)\,dy+(3x-5y)\,dz+(6y+4z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-4;-4;2)$, $B(-1;2;6)$, $C(-2;5;-1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\big((-x-y-2z+2)\,dz+(3x+3y+6z+1)\,dy+dx\big)e^{3y-z},$$

если $A\left(0;1;-\frac{1}{2}\right)$, $B(0;3;-1)$.

10. Найти работу силы $F = (\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})\,(x - 2y - 4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 25$, $z = -x-3y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 5

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x - xy)\,dx + dy,$$

если Г — отрезок прямой $y = -\sqrt{x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 36$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y)\,dy + 2x\,dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(0;1)$ к точке $B(1;5)$ и

а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = 4x^2 + 1$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(2;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} xy\,dx + x^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — эллипс $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2x\,dx + dy.$$

Точка $A(1;1)$ — начало Г, точка $B(-2;0)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $y = 0,5x - 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x - 3y - 2z)dy$, где Γ — отрезок прямой $-4x + 8y - 4z + 52 = 0$, $4x + 2y - 11z + 3 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -4$, $y = -7$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(4x+4y+4)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arcsin \frac{r+4}{\sqrt{2r^2+32}}$, $-4 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-8x + 6y)\, dz + (x - 5z)\, dy + (3y + 2z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(5; 3; -6)$, $B(-5; -1; 0)$, $C(2; 2; 1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-4x - 11y)\, dz + (13x + 11z)\, dy + (-13y + 4z)\, dx}{(-3x - 5y - z)^2},$$

если $A\left(0; 1; -\frac{4}{3}\right)$, $B(-3; -5; -1)$.

10. Найти работу силы $F = (-5\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,(-4x + y - 3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 16$, $z = 2x$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 6

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x-y)\,dx + x\,dy,$$

если Γ — дуга кривой, удовлетворяющей уравнению $y = \cos x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2+y)\,dy + 2x\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;1)$ к точке $B(1;4)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 3x^2 + 1$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y^2)\,dx + xy\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — эллипс $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (y^2+5)\,dx + 2xy\,dy.$$

Точка $A(0;-1)$ — начало Γ, точка $B(2;2)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x+1)^2$, $y = x^2 + 2x - 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-x-2y-2z)dz$, где Γ — отрезок прямой $-2x+2y-z-10=0$, $4x+2y-4z+38=0$, заключённый между плоскостями $z=4$, $z=2$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x+4y-5)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\arccos\frac{4-5r}{\sqrt{41}\sqrt{r^2+1}}$, $0\leqslant r\leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(-5x+3y)\,dz+(7x-7z)\,dy+(2y-8z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(1;-5;-6)$, $B(-1;5;7)$, $C(0;7;-8)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\big((-8x-2y-10z+4)\,dx+(16x+4y+20z+1)\,dy+ \\ +5\,dz\big)e^{-2x+4y},$$

если $A\left(0;1;-\frac{1}{5}\right)$, $B(-2;4;0)$.

10. Найти работу силы $F=(-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\,(4x-5y-3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=-5x+2y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 7

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y)\,dx - dy,$$

если Г — отрезок прямой $y = x + 3$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 - y)\,dy + xy\,dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(0;2)$ к точке $B(1;3)$ и

а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = 2 + x^2$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(2;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x - y)\,dx + x\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — окружность $x^2 + y^2 = -4x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy.$$

Точка $A(1;2)$ — начало Г, точка $B(2;1)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 2$, $y = 4x - 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x+y)dx$, где Γ — отрезок прямой $2x-2y+z-1=0$, $3z-3=0$, заключённый между плоскостями $x=-5$, $x=-4$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(2x+3y+2)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2r+3}{13}$, $0\leqslant r\leqslant 3$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(2x-5y)\,dz+(6x+3z)\,dy+(-7y-3z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(6;-2;-8)$, $B(3;-1;-5)$, $C(-4;2;2)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(20x+31z)\,dy+(25x-31y)\,dz+(-20y-25z)\,dx}{(-4y-5z)^2},$$

если $A\left(0;1;\frac{3}{4}\right)$, $B(0;-4;-5)$.

10. Найти работу силы $F=(3x-4y)\left(-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}\right)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=25$, $z=x-2y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 8

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}(2x+1)\,dx+x\,dy,$$

если Γ — дуга параболы $y = x^2 - 4$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{\Gamma} (x - 3y)\, dy - xy\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;3)$ к точке $B(1;5)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 2x^2 + 3$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} (x + 3y)\, dx + x^2\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 16$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{\Gamma} (4x - y)\, dx - x\, dy.$$

Точка $A(-2;0)$ — начало Γ, точка $B(1;1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = 2(x-1)^2$, $y = 2x - 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (-2x - z) dz$, где Γ — отрезок прямой $x + 4y - 2z + 6 = 0$, $2x + y - 4z + 12 = 0$, заключённый между плоскостями $z = 0$, $z = -1$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (z - 2) dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg} \frac{r-2}{4}$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -4z\,dx + (-5x + 6z)\,dy + (4x - 5y)\,dz,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(3;4;7)$, $B(3;-7;3)$, $C(3;7;4)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-25x + 5y + 5z + 1)\,dz + (-20x + 4y + 4z + 1)\,dy +$$
$$+ (-5x + y + z - 5)\,dx\big)e^{x+4y+5z},$$

если $A\,(0;1;-1)$, $B(1;4;5)$.

10. Найти работу силы $F = (-4x - 4z)\,(-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3x - y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 9

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx + 4x\,dy,$$

если Γ — кривая $y = \ln x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $e^2 \leqslant x \leqslant e^5$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y^2)\,dy + (x + y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(1;4)$ к точке $B(0;1)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = (x + 1)^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2; 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma (x - y)^2\,dx + y^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — окружность $x^2 + y^2 = 6x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma 2y\,dx + 2(x + y)\,dy.$$

Точка $A(2; -1)$ — начало Γ, точка $B(3; 1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = y^2 + 1$, $y = x - 3$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma (2x + 2y + z)dy$, где Γ — отрезок прямой $3x - 4y + 2z - 35 = 0$, $-2x - y + 6z - 28 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -4$, $y = -2$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma (-4x + 3y + 4)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arcsin \frac{4r-12}{5\sqrt{r^2+16}}$, $0 \leqslant r \leqslant 3$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma -8z\,dx + (-2x - 8z)\,dy + (x + 5y)\,dz,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-8; 4; 3)$, $B(-8; 4; 5)$, $C(7; 4; -4)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-18x-12z)\,dy+(-12x+12y)\,dz+(18y+12z)\,dx}{(4x+2y+4z)^2},$$

если $A\,(1;1;0)$, $B(4;2;4)$.

10. Найти работу силы $F=(-4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\,(-3x-y-5z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=4x-2y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 10

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \cos y\,dx-\sin x\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y=-3x$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0\leqslant x\leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\,dy+(x+y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(2;6)$ к точке $B(0;0)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y=x^2+2x$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(-1;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y^2)\,dx+(x-1)^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(-1;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x+5)\,dx + 2y\,dy.$$

Точка $A(1;4)$ — начало Γ, точка $B(2;-1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $x = 6$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-x+3y-z)dz$, где Γ — отрезок прямой $7x+2y-z+26=0$, $2x+y+z+13=0$, заключённый между плоскостями $z=-4$, $z=-5$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x+3y+3)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos\frac{r-4}{\sqrt{2r^2+32}}$, $4 \leqslant r \leqslant 8$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-2x+z)\,dy + (6x-4y)\,dz + (-5y-z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(2;1;-3)$, $B(4;0;2)$, $C(-5;-2;-1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-20x + 20y + 8z + 2)\,dz + (-15x + 15y + 6z - 5)\,dx +$$
$$+ (-15x + 15y + 6z + 5)\,dy\big)e^{3x+3y+4z},$$

если $A\left(0; 1; -\frac{5}{2}\right)$, $B(3; 3; 4)$.

10. Найти работу силы $F = (3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})\,(-2x + z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 9$, $z = 4x - 4y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 11

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx - 2x\,dy,$$

если Г — кривая $y = \ln x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $t \leqslant x \leqslant e^3$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 - y)\,dy - (x - y)\,dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(-1; 4)$ к точке $B(-2; 1)$ и

а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = (x + 3)^2$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(0; 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} x^2\,dx + (x + 2y)^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — окружность $x^2 + y^2 = -6x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (y + 4x)\, dx + x\, dy.$$

Точка $A(-2; -1)$ — начало Γ, точка $B(1; 1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x + 1)^2$, $y = -x - 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-x - z)dx$, где Γ — отрезок прямой $x + 2y - z - 11 = 0$, $2x + y - 2z - 13 = 0$, заключённый между плоскостями $x = 1$, $x = 0$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x + y - 3)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1-2r}{10}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -z\, dy + (-8x - 3y)\, dz + (4y - 7z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(3; -8; 0)$, $B(-7; 5; -7)$, $C(2; 2; 6)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-10x - 28y)\, dz + (-8x + 28z)\, dy + (8y + 10z)\, dx}{(2x + 4y - 2z)^2},$$

если $A\left(0; 1; -\frac{4}{5}\right)$, $B(2; 4; -2)$.

10. Найти работу силы $F = (-5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k})\,(y - z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 25$, $z = -x + 2y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 12

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \sin y\,dx - \cos x\,dy,$$

если Г — отрезок прямой $y = -2x$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y)\,dy + (x^2 - y)\,dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(-2; 4)$ к точке $B(-1; 9)$ и

а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = (x + 4)^2$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(0; 2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 1)\,dx + x^2 y\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — эллипс $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (1 + y)\,dx + (x + 2y)\,dy.$$

Точка $A(0; -1)$ — начало Г, точка $B(2; 1)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 2$, $y = 4x - 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(3x - 4y + 3z)dy$, где Γ — отрезок прямой $-11x - 6y + 3z - 2 = 0$, $-6x - 3y + 2z + 1 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -1$, $y = -5$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(2x+2y)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{2r+5}{4}$, $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-4x - 6y)\, dz + (5x - 8z)\, dy + (y - 7z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-1;-2;3)$, $B(-6;-5;2)$, $C(-2;-6;4)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами: двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-16x + 16y - 8z + 4)\, dy + (20x - 20y + 10z - 2)\, dz - 4\, dx\big)e^{4y-5z},$$

если $A\,(0;1;2)$, $B(0;4;-5)$.

10. Найти работу силы $F = (-2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,(-2x - 3y + 3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 1$, $z = -2x$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 13

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + xy^2\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y=\sqrt{2x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2-y^2)\,dy + (x+2y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(2;0)$ к точке $B(0;0)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y=x^2-2x$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x+y)^2\,dx + (y-1)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — окружность $x^2+y^2=8x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-2x)\,dx + (1-2y)\,dy.$$

Точка $A(-1;1)$ — начало Γ, точка $B(4;0)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y=2(x-1)^2$, $y=-2x+2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x-2y-4z)dz$, где Γ — отрезок прямой $4y-2z+2=0$, $8x+4y-6z-26=0$, заключённый между плоскостями $z=3$, $z=-1$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(3x-4y)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{r^2+9}}$, $0\leqslant r\leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -3x\,dy+2z\,dx+(-2x+y)\,dz,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-6;-5;-6)$, $B(5;-7;6)$, $C(2;-8;-4)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(10x-8y)\,dz+(22x+8z)\,dy+(-22y-10z)\,dx}{(4x-y+z)^2},$$

если $A\left(0;1;-\frac{5}{3}\right)$, $B(4;-1;1)$.

10. Найти работу силы $F=(-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\,(4x+3y+3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=4x-3y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 14

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}(x-2y)\,dx+5y^2\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = -\sqrt{x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 16$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y^2)\, dy + (x^2 + y)\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(-1;4)$ к точке $B(0;9)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = (x + 3)^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\, dx + x^2\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;2)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (y + 10x)\, dx + x\, dy.$$

Точка $A(0;0)$ — начало Γ, точка $B(2;6)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = y^2 + 1$, $y = 3 - x$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x + 2y - 3z)dz$, где Γ — отрезок прямой $7x + 8y - 4z + 80 = 0$, $6x + 3y - 6z + 48 = 0$, заключённый между плоскостями $z = 1$, $z = -2$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-5x + 3y + 1)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos \frac{r-15}{\sqrt{10}\sqrt{r^2+25}}$, $5 \leqslant r \leqslant 15$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-7x + 2z)\, dy + (x - 3y)\, dz + (-2y + 6z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(2; 3; -7)$, $B(5; 5; -5)$, $C(-6; 6; 5)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((5x - 2y)\, dz + (-10x + 4y - 5)\, dx + (25x - 10y + 2)\, dy\big) e^{2x-5y-z},$$

если $A\left(1; \frac{5}{2}; 0\right)$, $B(2; -5; -1)$.

10. Найти работу силы $F = (-2x - 4z)\,(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 25$, $z = -2x$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 15

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (xy)\, dx + y^2\, dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = \sqrt{2x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, dy + (x^2 + 2y)\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(-2; 2)$ к точке $B(-1; 7)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = (x+4)^2 - 2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\,dx - 2x^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — окружность $x^2 + y^2 = -8x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x+y)\,dx + (x-2)\,dy.$$

Точка $A(1;-1)$ — начало Γ, точка $B(1;0)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $x = -y^2 + 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-3x+3y+2z)dy$, где Γ — отрезок прямой $4x + 6y - 3z + 29 = 0$, $-4x - 2y - 3z - 35 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -6$, $y = -3$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x-4y-2)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{r-4}{20}$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+6y)\,dz + (3x+3z)\,dy + (-6y-z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(2;7;7)$, $B(-1;-1;-3)$, $C(-4;0;-5)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(4x-20y)\,dz+(19x+20z)\,dy+(-19y-4z)\,dx}{(x-5y)^2},$$

если $A\left(0;1;\frac{1}{4}\right)$, $B(1;-5;0)$.

10. Найти работу силы $F=(-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\,(-3x+3z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=2x-3y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 16

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx+y^2\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y=x+3$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-1\leqslant x\leqslant 0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x-y)\,dy-(x^2-y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(3;0)$ к точке $B(1;4)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y=(x-3)^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;-2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x-2y)\,dx+(x+1)^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(-1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-2)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2(x+y)\,dx + 2(x-y)\,dy.$$

Точка $A(-1;1)$ — начало Γ, точка $B(2;2)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x+1)^2$, $y = x+1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x+3y+z)dz$, где Γ — отрезок прямой $5x+4y-2z+54=0$, $-2x-y-z-9=0$, заключённый между плоскостями $z=5$, $z=6$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-5x+2y+2)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{2-5r}{8}$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-8x+3y)\,dz + (-8x-4z)\,dy + (3y+7z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(4;5;-1)$, $B(-7;-8;-6)$, $C(-5;-3;5)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-5x-4y+3z-3)\,dz + (-5x-4y+3z+4)\,dy + {}$$
$$+ (10x+8y-6z+5)\,dx\big)e^{2x-y-z},$$

если $A\left(0;1;\frac{4}{3}\right)$, $B(2;-1;-1)$.

10. Найти работу силы $F = (-5x-2z)\,(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 25$, $z = 3x-3y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 17

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\,dx - \,dy,$$

если Γ — кривая $y = \ln x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $1 \leqslant x \leqslant e^3$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2-y)\,dy - xy\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(1;2)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 2x^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;-2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+2)^2\,dx + (2x+y)^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(0;2)$, $(1;0)$, $(0;-1)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2(x-y)\,dx + 2(y-x)\,dy.$$

Точка $A(0;-1)$ — начало Г, точка $B(0;0)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 2$, $y = 9x - 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x+3y-z)dx$, где Г — отрезок прямой $7x-2y+z-31=0$, $2x+y+5z-23=0$, заключённый между плоскостями $x=5$, $x=6$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x-3y+3)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Г задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arcsin\frac{r-1}{\sqrt{2r^2+2}}$, $0 \leqslant r \leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-6x-4y)\,dz + (-x+4z)\,dy + (4y-z)\,dx,$$

если Г — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-2;-6;0)$, $B(-4;1;-4)$, $C(3;6;-6)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-x-y)\,dz + (x+z)\,dy + (-y+z)\,dx}{(3x-y+4z)^2},$$

если $A\left(0;1;-\frac{3}{2}\right)$, $B(3;-1;4)$.

10. Найти работу силы $F = (-\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})\,(-4x + 4y - 4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 25$, $z = 2x-5y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 18

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y^2)\,dx + (x-1)\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = 2x - 1$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y)\,dy + (x - 2y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(1;3)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = x^2 + 2x$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x-y)^2\,dx + x^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(0;-1)$, $(0;2)$, $(1;0)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 4(x-y)\,dx - 4x\,dy.$$

Точка $A(1;4)$ — начало Γ, точка $B(2;1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = 2(x-1)^2$, $y = 8x - 8$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (-4x - y + z)dy$, где Γ — отрезок прямой $-3x + 8y - 4z - 24 = 0$, $-2x - y - 9z + 41 = 0$, заключённый между плоскостями $y = 5$, $y = 4$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (2x+4y-4)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos \frac{2-r}{\sqrt{2r^2+8}}$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-2x + 2y)\, dz + (-x + z)\, dy + (-4y + 4z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-2; 7; 0)$, $B(-2; 0; 4)$, $C(7; 4; -3)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((6x + 4y - 2z - 3)\, dx + (9x + 6y - 3z - 2)\, dy + \\ + (9x + 6y - 3z + 1)\, dz\big) e^{-2x-3y-3z},$$

если $A\,(0; 1; 2)$, $B(-2; -3; -3)$.

10. Найти работу силы $F = (-4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,(3x + 2y - 2z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 1$, $z = -3x-3y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 19

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+2y)\,dx + y^2\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = \sqrt{x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (2x+y)\,dy + (x+y^2)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;-1)$ к точке $B(-2;1)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2} - 1$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(1;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + y^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница кругового сектора $0 < r < 2$, $0 < \varphi < \pi/4$, где $(r;\varphi)$ — полярные координаты. Γ пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2(x+2y)\,dx + 4x\,dy.$$

Точка $A(-1;2)$ — начало Γ, точка $B(2;4)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = y^2 + 1$, $x = 2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-3x+3z)dz$, где Γ — отрезок прямой $-3x+6y-3z-6=0$, $-6x-3y-6z-42=0$, заключённый между плоскостями $z=-4$, $z=-1$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-x+y-1)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1-r}{2}$, $0\leqslant r\leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} x\,dy+(-5x-y)\,dz+(7y+2z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(2;1;7)$, $B(-5;-2;-7)$, $C(0;-3;-2)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(-4x+3y)\,dz+(15x-3z)\,dy+(-15y+4z)\,dx}{(4x-3y)^2},$$

если $A\,(0;1;3)$, $B(4;-3;0)$.

10. Найти работу силы $F=(4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})\,(4x-2y-5z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=2x-y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 20

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma}(x+y)\,dx+xy\,dy,$$

если Γ — дуга параболы $y = (x-4)^2$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+2y)\,dy + xy\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;2)$ к точке $B(1;1)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 2 - x^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(-1;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + x\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — окружность $x^2 + y^2 = -2x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-2x)\,dx + (1-2y)\,dy.$$

Точка $A(-2;-2)$ — начало Γ, точка $B(1;0)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $y = 1 - 0,5x$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(3x + y - 4z)dx$, где Γ — отрезок прямой $6x - 6y + 3z - 12 = 0$, $8x + 4y + 7z - 22 = 0$, заключённый между плоскостями $x = 1$, $x = 4$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x+y-4)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg} \frac{2r-4}{17}$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 6z\,dx + (-6x + y)\,dz + (-4x - 3z)\,dy,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-3;3;-4)$, $B(3;-3;-7)$, $C(3;-1;6)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((4x - 4z)\,dy + (-16x + 16z - 4)\,dx + \\ + (16x - 16z + 4)\,dz\big)e^{4x-y-4z},$$

если $A\,(0;1;0)$, $B(4;-1;-4)$.

10. Найти работу силы $F = (-3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\,(-2x + y - 4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 4$, $z = -3x + y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 21

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \cos y\,dx + \sin x\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = -x$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x - 3y)\,dy + x^2\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;-3)$ к точке $B(1;-1)$ и а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 2x^2 - 3$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(-2; 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma (x+2y)^2\,dx + (x-3y)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница кругового сектора $0 < r < 3$, $0 < \varphi < \pi/6$, где $(r; \varphi)$ — полярные координаты. Γ пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma (2x+y)\,dx + (x-2)\,dy.$$

Точка $A(1; -1)$ — начало Γ, точка $B(2; 4)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x+1)^2$, $y = -1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma (-x-2y+2z)dy$, где Γ — отрезок прямой $-6x+2y-z+23=0$, $-4x-2y-4z+12=0$, заключённый между плоскостями $y=0$, $y=-2$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\Gamma (4x-3y+1)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arcsin \frac{r-12}{\sqrt{10}\sqrt{r^2+16}}$, $6 \leqslant r \leqslant 12$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_\Gamma y\,dz + (-3x+z)\,dy + (3y+3z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(5; 1; 5)$, $B(-2; -4; 4)$, $C(-5; -7; -7)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(3x+18y)\,dz+(4x-18z)\,dy+(-4y-3z)\,dx}{(-4y-3z)^2},$$

если $A\left(0;1;\frac{2}{3}\right)$, $B(0;-4;-3)$.

10. Найти работу силы $F=(3x+2y)\,(-5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=4$, $z=x+3y$. Здесь $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 22

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+2y)\,dx+(x^2-2)\,dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y=x+1$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0\leqslant x\leqslant 2$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y^2)\,dy+(x+y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(1;9)$ к точке $B(0;4)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y=(x+2)^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx+(x-1)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — окружность $x^2 + y^2 = 2x$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 3dx + 2y\,dy.$$

Точка $A(1;2)$ — начало Γ, точка $B(2;4)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = x^2 - 2$, $y = 3x - 4$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(x-y-3z)dz$, где Γ — отрезок прямой $x - 2y + z - 3 = 0$, $6x + 3y + z + 2 = 0$, заключённый между плоскостями $z = -2$, $z = -5$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-5x + 2y + 2)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos \frac{r-5}{\sqrt{2r^2+50}}$, $0 \leqslant r \leqslant 5$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-7x + 2y)\,dz + (-7x - 2z)\,dy + (y + 2z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-8;-8;-7)$, $B(4;5;-3)$, $C(2;2;-8)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((3x - 12y - 9z - 3)\,dz + (4x - 16y - 12z - 4)\,dy +$$

$$+ (5x - 20y - 15z + 1)\, dx\big) e^{5x+4y+3z},$$

если $A\left(0; 1; -\frac{4}{3}\right)$, $B(5; 4; 3)$.

10. Найти работу силы $F = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})(-x + 3y - 2z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 9$, $z = -5y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 23

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (xy)\, dx - 3y^2\, dy,$$

если Γ — отрезок прямой $y = \sqrt{x}$, пробегаемый в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 16$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y)\, dy + (x - y)\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(1; 0)$ к точке $B(2; 1)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = (x - 1)^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0; 2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x - y)^2\, dx + (x + y)\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница кругового сектора $0 < r < 4$, $0 < \varphi < \pi/3$, где $(r; \varphi)$ — полярные координаты. Γ пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2(x+y)\,dx + 2x\,dy.$$

Точка $A(2;-1)$ — начало Γ, точка $B(2;3)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = 2(x-1)^2$, $y = 8$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x-2z)dx$, где Γ — отрезок прямой $2x+8y-4z-26=0$, $4x+2y-8z-10=0$, заключённый между плоскостями $x=-1$, $x=-5$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(2x-3y-5)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2r-3}{34}$, $0 \leqslant r \leqslant 3$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-5x-4y)\,dz + (-3x+5z)\,dy + (-8y+z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC с вершинами в точках $A(-1;4;-8)$, $B(7;0;-1)$, $C(-7;4;-6)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(-10x-11z)\,dy + (6x+11y)\,dz + (10y-6z)\,dx}{(-2x+3y-4z)^2},$$

если $A\left(0;1;\frac{5}{3}\right)$, $B(-2;3;-4)$.

10. Найти работу силы $F = (2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\,(-2x + 4y - 4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 16$, $z = x + y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 24

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{3y}{x}\,dx + 2\,dy,$$

если Γ — кривая $y = \ln x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $e \leqslant x \leqslant e^3$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 - y)\,dy + y\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(1;1)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = x^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;-2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x-y)^2\,dx + y^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(-1;1)$, $(1;0)$, $(0;-1)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (1 - x - y)\,dx + (1 - x - y)\,dy.$$

Точка $A(1;1)$ — начало Γ, точка $B(2;-1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = y^2 + 1$, $x = -y^2 + 3$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-3x - y - 4z)dy$, где Γ — отрезок прямой $2x + 6y - 3z + 7 = 0$, $8x + 4y - 7z - 7 = 0$, заключённый между плоскостями $y = -2$, $y = -3$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-2x + 3y)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{5-2r}{9}$, $0 \leqslant r \leqslant 3$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (-4x + 5y)\, dz + (x - 4z)\, dy + (7y - 6z)\, dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(0; -1; 7)$, $B(-2; -7; -8)$, $C(6; 5; 2)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-6x + 9y - 12z - 3)\, dy + (4x - 6y + 8z + 2)\, dx + \\ + (10x - 15y + 20z + 4)\, dz\big) e^{2x-3y+5z},$$

если $A\left(0; 1; \frac{3}{4}\right)$, $B(2; -3; 5)$.

10. Найти работу силы $F = (-4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k})(3x - 2y + 2z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2x + 3y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 25

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (2x + y)\, dx + y\, dy,$$

если Г — дуга параболы $y = x^2 - 4$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x - 2y)\, dy + (x^2 - y)\, dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(4; 0)$ к точке $B(2; 4)$ и

а) Г — отрезок AB;

б) Г — дуга параболы $y = (x - 4)^2$;

в) Г — ломаная ACB, где $C(0; 2)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} x^2\, dx + (x + 2y)^2\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Г — граница треугольника с вершинами $(-1; 1)$, $(0; 0)$, $(1; 2)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (1 + 2y^2)\, dx + 4y^2\, dy.$$

Точка $A(1; -1)$ — начало Г, точка $B(2; 1)$ — конец Г.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $x = 0$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x+3y-4z)dz$, где Γ — отрезок прямой $10x+8y-4z-68=0$, $8x+4y-5z-58=0$, заключённый между плоскостями $z=-6$, $z=-10$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x+3y-5)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\arcsin\frac{-5r-12}{\sqrt{34}\sqrt{r^2+16}}$, $-2\leqslant r\leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -7z\,dy+(3x+y)\,dz+(-7y+5z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(5;-4;6)$, $B(-8;7;7)$, $C(-8;-3;-3)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(-9x-4z)\,dy+(-2x+4y)\,dz+(9y+2z)\,dx}{(-x+2y)^2},$$

если $A\left(0;1;-\frac{3}{2}\right)$, $B(-1;2;0)$.

10. Найти работу силы $F=(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\,(3x-4y+2z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=1$, $z=x+y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 26

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx+(x-y)\,dy,$$

если Γ — дуга кривой, удовлетворяющей уравнению $y = \cos x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\, dy + (x - y)\, dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(2; 2)$ к точке $B(0; -2)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = x^2 - 2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(0; 0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x + 2y)^2\, dx + (x - 3y)\, dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(2; 0)$, $(-1; 1)$, $(0; 2)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{2dx}{2x + y} + \frac{dy}{2x + y}.$$

Точка $A(0; 2)$ — начало Γ, точка $B(1; 9)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x + 1)^2$, $y = -4$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (2x - 2y - 2z) dx$, где Γ — отрезок прямой $-2x - 4y + 2z + 4 = 0$, $4x + 2y + 2z - 20 = 0$, заключённый между плоскостями $x = 2$, $x = 4$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} (x + 2) dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arccos \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$, $0 \leqslant r \leqslant 4$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -3x\,dz + (3x+4z)\,dy + (7y-2z)\,dx,$$

если Г — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(4;5;-4)$, $B(-5;-3;5)$, $C(7;3;6)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-4x+10y+2z-2)\,dx + (2x-5y-z+1)\,dz + 5\,dy\big)e^{2x-z},$$

если $A\,(0;1;-5)$, $B(2;0;-1)$.

10. Найти работу силы $F = (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\,(-5x+y+z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2 = 25$, $z = 4x$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 27

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (xy)\,dx + (x+2y)\,dy,$$

если Г — дуга параболы $y = (x+1)^2$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2+2y)\,dy + 2x^2\,dx,$$

если кривая Г пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(1;4)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 4x^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(-1; -1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + y^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(2;2)$, $(2;1)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{x-y} + \frac{dy}{y-x}.$$

Точка $A(2;4)$ — начало Γ, точка $B(-1;1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = y^2 + 1$, $x = -y^2 + 9$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x - 3y - 3z)dy$, где Γ — отрезок прямой $-3x + 8y - 4z - 13 = 0$, $6x + 3y - 11z - 12 = 0$, заключённый между плоскостями $y = 2$, $y = -1$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(3x-2y-3)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3r-2}{13}$, $1 \leqslant r \leqslant 2$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} -7z\,dx + (x-6z)\,dy + (4x-2y)\,dz,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(2;5;-8)$, $B(2;-4;-3)$, $C(2;-2;1)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \frac{(10x - 16y)\,dz + (18x + 16z)\,dy + (-18y - 10z)\,dx}{(5x + y + 5z)^2},$$

если $A\,(0;1;3)$, $B(5;1;5)$.

10. Найти работу силы $F = (2y + 4z)\,(-3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 25$, $z = x - 2y$. Здесь $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 28

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + x\,dy,$$

если Γ — дуга кривой, удовлетворяющей уравнению $y = \sin x$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x - 2y)\,dy + y^2\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;0)$ к точке $B(1;3)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 3x^2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;-1)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x + 2)^2\,dx + (2x + y)^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(0;2)$, $(1;0)$, $(0;-1)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2^{x-2y}\ln 2\,dx - 2^{1+x-2y}\ln 2\,dy.$$

Точка $A(0;0)$ — начало Γ, точка $B(2;1)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $x = 2y^2 - 2$, $y = 0,5x + 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(2x - 2y - z)dz$, где Γ — отрезок прямой $-3x - 4y + 2z - 2 = 0$, $2x + y + 2z + 13 = 0$, заключённый между плоскостями $z = -2$, $z = -3$, ориентированный в направлении возрастания переменной z.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-3x + 4y - 5)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{-3r-5}{41}$, $-2 \leqslant r \leqslant 0$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 5y\,dz + (7x + 3z)\,dy + (-6y + 7z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(7;2;3)$, $B(0;-6;2)$, $C(-5;5;2)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB} \big((-15y + 15z)\,dx + (-3y + 3z - 3)\,dy + (9y - 9z + 3)\,dz\big)e^{5x+y-3z},$$

если $A\,(0;1;1)$, $B(5;1;-3)$.

10. Найти работу силы $F = (4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\,(-x + 3y - 2z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2 + y^2 = 25$, $z = -5x + y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 29

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (2x - y)\,dx + x\,dy,$$

если Γ — дуга параболы $y = -(x+5)^2$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x^2 + 3y)\,dy + (2x - y)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;1)$ к точке $B(1;5)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = 4x^2 + 1$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(2;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\,dx - 2x^2\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(1;0)$, $(-1;2)$, $(1;3)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} 2\ln 33^{2x+y}\,dx + \ln 33^{2x+y}\,dy.$$

Точка $A(-1;-1)$ — начало Γ, точка $B(2;0)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x+1)^2$, $y = x - 1$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4x-4y+3z)dx$, где Γ — отрезок прямой $-11x+8y-4z-31=0$, $-6x-3y-12z+15=0$, заключённый между плоскостями $x=-5$, $x=-9$, ориентированный в направлении возрастания переменной x.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(3x+3y-5)dx$ приближённо с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi = \arcsin\frac{9-5r}{\sqrt{34}\sqrt{r^2+9}}$, $1 \leqslant r \leqslant 3$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(-7x+y)\,dz + (-x+3z)\,dy + (2y-3z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-5;-1;6)$, $B(-7;-5;1)$, $C(7;2;-3)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\frac{(-17x+7z)\,dy + (26x-7y)\,dz + (17y-26z)\,dx}{(x+3y-5z)^2},$$

если $A\,(0;1;2)$, $B(1;3;-5)$.

10. Найти работу силы $F = (4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})\,(-x+2y-z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=9$, $z=4x-y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Вариант 30

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

если Γ — дуга параболы $y = (x-3)^2$, пробегаемая в направлении возрастания параметра x, $-1 \leqslant x \leqslant 0$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dy - (x-y^2)\,dx,$$

если кривая Γ пробегается от точки $A(0;2)$ к точке $B(-2;4)$ и

а) Γ — отрезок AB;

б) Γ — дуга параболы $y = \dfrac{x^2}{2} + 2$;

в) Γ — ломаная ACB, где $C(1;0)$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} (2x+y)^2\,dx + (y-1)\,dy,$$

применяя формулу Грина. Кривая Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(2;1)$, $(0;2)$, пробегается так, что внутренность остается слева.

4. Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dx}{2\sqrt{x+2y}} + \frac{dy}{\sqrt{x+2y}}.$$

Точка $A(0;2)$ — начало Γ, точка $B(1;4)$ — конец Γ.

5. Используя криволинейные интегралы второго рода, найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми $y = -(x+1)^2$, $y = 4x + 4$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-4y-z)dy$, где Γ — отрезок прямой $14-7x=0$, $2x+y-4z+18=0$, заключённый между плоскостями $y=-2$, $y=-6$, ориентированный в направлении возрастания переменной y.

7. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma}(-5x-y+2)dy$ приближённо с точностью $\varepsilon=10^{-3}$, если Γ задана в полярных координатах уравнением $\varphi=\arccos\frac{2r+5}{\sqrt{5}\sqrt{r^2+25}}$, $-3\leqslant r\leqslant 0$.

8. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}(-2x+4z)\,dy+(5x-8y)\,dz+(2y-2z)\,dx,$$

если Γ — замкнутый контур, образованный треугольником ABC, где $A(-8;7;-1)$, $B(-2;5;-3)$, $C(4;-8;-8)$. Ориентация контура соответствует порядку перечисления вершин треугольника. Выполнить задание двумя способами:

а) не применяя формулу Стокса;

б) с помощью формулы Стокса.

9. Проверить, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и найти

$$\int\limits_{AB}\big((-4x+16y+8z-2)\,dz+(-2x+8y+4z+1)\,dx+ \\ +(-x+4y+2z-4)\,dy\big)e^{-2x-y-4z},$$

если $A\,(0;1;-2)$, $B(-2;-1;-4)$.

10. Найти работу силы $F=(-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})\,(-5x+y+4z)$ по перемещению материальной точки вдоль кривой L, заданной уравнениями $x^2+y^2=9$, $z=2x-2y$. Здесь $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты координатных осей, а обход кривой L производится против часовой стрелки при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{k}$.

Список литературы

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н.Берман. — Москва, Лань 2016.
2. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: в 2 кн. Кн.1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: Учеб. пособие для вузов, рек. МО РФ / И.А.Виноградова, С.Н.Олехник, В.А.Садовничий. — 2-е изд., перераб. — М.: Высш. шк., 2002. — 724 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов/ Б.П.Демидович. — М.: АСТ, 2009. — 558 с.
4. Зорич В. А. Математический анализ. Часть 2 (6-е изд.) / В.А.Зорич. — М.: МЦНМО, 2012. — 818 с.
5. Ильин В. А. Математический анализ. Ч. 2. 4-е изд., пер. и доп. учебник для бакалавров / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов. — Люберцы: Юрайт, 2016. — 660 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 2 / Л.Д.Кудрявцев. — М.: Издательство Юрайт, 2017.
7. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / Под ред. Л.Д.Кудрявцева. — 2-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 472 с.
8. Сборник задач по высшей математике (с контрольными работами). 2 курс / К.Н.Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин [и др.]. — Москва: Айрис Пресс, 2013. — 592 с.
9. Федоров Д.Л., Тинюкова Т.С., Максимова О.В. Криволинейные интегралы второго рода: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Издательский центр «Удмуртский университет», 2021. — 58 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учеб. для вузов рек. МО РФ: в 3-х т. Т 3./ Г.М.Фихтенгольц. — 8-е изд. — М.: Физматлит, 2006. — 656 с.
11. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2 / В.С.Шипачев, А.Н.Тихонов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 305 с.

Учебное издание

Федоров Дмитрий Леонидович
Тинюкова Татьяна Сергеевна
Сметанина Людмила Петровна

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 30.12.2021. Формат $60x84^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 4,7. Уч.-изд. л. 4,3.
Тираж 300 экз. Заказ № 2473.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4, каб. 207.
Тел./факс: (3412) 500-295 E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18, 91-73-05