

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра теоретической физики

**В. Г. Лебедев, Т. Б. Иванова, В. В. Васькин,
Е. Н. Пивоварова**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
Параболические уравнения**

Учебное-методическое пособие
2-е издание, переработанное и дополненное



Ижевск
2022

УДК 517.956(075.8)

ББК 22.161.626я73

М 545

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом УдГУ

Рецензент: д-р ф.-м. наук А. А. Килин

Пособие подготовлено в Уральском математическом центре (соглашение № 075-02-2022-889).

Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В., Пивоварова Е. Н.

М 545 Методы математической физики. Параболические уравнения: учеб.-метод. пособие — 2-е изд., перераб. и дополн. — Ижевск: Удмуртский университет, 2022. — 124 с.

ISBN 978-5-4312-0981-9

Пособие предназначено для изучения параболических уравнений в частных производных на основе уравнения теплопроводности. В пособии рассмотрены примеры решения типичных краевых задач методом разделения переменных, в том числе с использованием программы для аналитических вычислений Maple, приведены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей физико-математических направлений подготовки, а также для неспециалистов в областях уравнений в частных производных и математической физики для первоначального ознакомления с предметом.

УДК 517.956(075.8)

ББК 22.161.626я73

ISBN 978-5-4312-0981-9 © В. Г. Лебедев, 2022

© Т. Б. Иванова, 2022

© В. В. Васькин, 2022

© Е. Н. Пивоварова, 2022

© ФГБОУ ВО «Удмуртский

государственный университет», 2022

Содержание

Предисловие	4
Введение	7
1. Локальное равновесие	10
2. Однородные среды	14
3. Безразмерные переменные	15
4. Постановка задачи	19
5. Теорема единственности	20
6. Построение решения	24
6.1. Неоднородные граничные условия	25
6.2. Однородные граничные условия	26
7. Функция Грина уравнения теплопроводности	32
8. Решение уравнения теплопроводности	35
8.1. Бесконечный интервал	35
8.2. Полуограниченный интервал	50
8.3. Конечный интервал	71
8.4. Разделение переменных	87
9. Установившееся решение	96
Приложение	106
П.1. Специальные функции	106
П.1.1. Интеграл ошибок	106
П.1.2. Функции Лежандра	110
П.1.3. Функции Бесселя	115
П.2. Функция Грина G_h на полуограниченном интервале с условиями третьего рода	118
П.3. Операторы в криволинейных координатах	120
Список литературы	122

Предисловие

Дифференциальные уравнения в частных производных и методы их решения являются основой описания многих физических процессов и их компьютерного моделирования. В данном пособии будут рассмотрены только линейные параболические уравнения. Тем не менее, качественное понимание природы параболических уравнений может быть перенесено и на более сложные случаи. Хотя в пособии рассмотрен сравнительно узкий круг задач, допускающих решение методом разделения переменных, их изучение является необходимым методологическим элементом изучения математической физики, поскольку позволяет на сравнительно простых задачах понять правильную постановку краевых задач математической физики, которая впоследствии напрямую переносится на более сложные задачи, в том числе и на численные методы исследования краевых задач. Кроме метода разделения переменных в пособии рассмотрены только задачи на установление, постановка задачи для которых принципиально отлична от постановки задачи Коши. В целом, изучение линейных параболических уравнений является важным образовательным шагом при подготовке студентов физико-математических специальностей методам математической физики.

Кроме краткого изложения теоретического материала в данном пособии представлены примеры решения типовых задач по каждому разделу, а также набор задач для самостоятельного решения. Пособие предназначено для студентов-бакалавров, аспирантов, преподавателей физико-математических специальностей университетов, а также для неспециалистов по дифференциальным уравнениям в частных производных и математической физике для первоначального ознакомления с предметом. Отдельные главы пособия могут быть полезны научным сотрудникам в области математики, биологии, биохимии и других естественно-научных специальностей.

Необходимость издания данного пособия обусловлена отсут-

ствием современных задачников по данной тематике. Предыдущие сборники и пособия, изданные более 10 лет назад, не отвечают современным условиям. В основу пособия положены лекции, читаемые в Институте математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета для студентов направлений подготовки «Физика» и «Прикладные математика и физика» (в рамках дисциплины «Методы математической физики»). Кроме того, в пособие включены вопросы для дополнительного изучения, не рассматриваемые непосредственно при изучении дисциплины.

Особенностью данного издания является большое количество примеров решения задач из каждого раздела, в том числе с использованием программы для аналитических вычислений Maple, что, безусловно, способствует лучшему пониманию предмета (особенно при необходимости суммирования бесконечных рядов, для демонстрации графических иллюстраций зависимости решения от координат и времени).

Предлагаемое пособие является доработанной версией ранее изданного пособия [1], является логическим продолжением учебно-методического пособия [2] и является второй частью цикла изданий по решению уравнений в частных производных, в который также входят пособия [3, 4].

Целью дисциплины «Методы математической физики», как и издания данного учебного пособия, является формирование знаний и навыков, достаточных для квалифицированного решения задач с использованием основных математических методов решения физических задач, формирование у студентов базовых знаний по математическим курсам, изучение которых наиболее полно может быть увязано с прикладными задачами. При этом значительное место уделено не только самим уравнениям в частных производных, но и физическому смыслу краевых и начальных условий для различных физических задач. Для успешного освоения курса с использованием данного пособия студенту необходимо владеть знаниями курса общей физики, физики твердого

тела, курсов теоретической физики, дисциплин математического и естественно-научного циклов ООП бакалавриата по указанным направлениям подготовки. Также курс предполагает наличие знаний по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, курсов математического анализа.

Методическое пособие рассчитано на средний уровень физико-математической подготовки студентов и необходимо для освоения следующих компетенций:

- способность использовать базовые теоретические знания фундаментальных разделов общей и теоретической физики для решения профессиональных задач;
- способность использовать специализированные знания в области физики для освоения профильных физических дисциплин;
- способность применять на практике базовые общепрофессиональные знания теории и методов физических исследований (в соответствии с профилем подготовки).

Введение

Уравнение теплопроводности является одним из наиболее простых и важных для различных приложений уравнений *параболического* типа. В общем виде уравнение теплопроводности может быть записано в виде

$$C(\vec{r}, T) \rho(\vec{r}, T) \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla}(\lambda(\vec{r}, T) \vec{\nabla} T) + Q(\vec{r}, t), \quad (1)$$

где $\rho(\vec{r}, T)$, $C(\vec{r}, T)$, $\lambda(\vec{r}, T)$ — соответственно коэффициенты удельных величин плотности, теплоёмкости, теплопроводности для данной среды, в общем случае являющиеся функциями температуры T и координат, определяемыми радиус-вектором $\vec{r}$; $Q(\vec{r}, t)$ — источник (сток) тепла за счёт взаимодействия с окружающей средой.

Исторически, уравнение (1) появилось как закон сохранения тепла (гипотеза теплорода в XVIII веке)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{J}) = 0,$$

где $h(\vec{r}, t)$ — теплота единицы объема, $\vec{J}$ — вектор теплового потока, который в соответствии с экспериментально открытым законом Фурье может быть записан в виде

$$\vec{J} = -\lambda \vec{\nabla} T. \quad (2)$$

Хотя использованные при этом представления о количестве тепла, как о некоторой сохраняющейся материальной субстанции, и оказались в конечном счете неверными, тем не менее, уравнение теплопроводности является основой для описания процесса распространения тепла в сплошной среде, поскольку содержит в себе фундаментальный закон природы — закон сохранения (тепловой) энергии.

Оно не содержит в себе, естественно, объяснения тепловых явлений с точки зрения внутреннего движения молекул,

но на макроскопическом уровне (когда мы пренебрегаем внутренним устройством вещества) находится в хорошем согласии с экспериментальными данными.

В общем случае, уравнение (1) является нелинейным и поддается только численному решению. Поэтому кажется, что возможность построения аналитических решений, играющих очень важную роль в научных исследованиях в последние 100 лет, в настоящее время отошла на второй план. Более того, появилось множество компьютерных пакетов, позволяющих с минимальными усилиями получать это численное решение (FreeFEM [5], COMSOL [6]), а в некоторых случаях — и аналитическое (Maple [7], Mathematica [8]). Появление таких пакетов, позволяющих моделировать решения нелинейных уравнений в частных производных, заданных в произвольной области, с произвольными источниками и краевыми условиями, ознаменовало появление новой эпохи в математической физике. Но как ни странно, чем более мощным является компьютерный пакет, тем выше должна быть квалификация его пользователя. Другими словами, задача должна быть квалифицировано поставлена, а результаты решения — квалифицировано проанализированы на предмет правильности. Как бы ни была «умна» программа, «думать» за пользователя она не будет. В ситуации, когда нет возможности детально проанализировать ход вычислений, единственный выход — использовать для сравнения достаточно простые аналитические решения и опираться на собственную интуицию. Последнее есть не что иное, как опыт решения достаточно большого числа «простых» аналитических задач, в конечном счёте приводящий к «качественному» пониманию решений уравнений в частных производных.

Среди методов, позволяющих построить аналитическое решение уравнений в частных производных, стоит отметить два достаточно общих подхода: метод разделения переменных и метод преобразования Лапласа. Метод разделения переменных или, другими словами, «метод решения с помощью разложения по базису», ведет своё начало от известной работы Фурье XVIII ве-

ка, посвящённой анализу решений уравнения теплопроводности на конечном интервале, и использует спектральные свойства линейных дифференциальных операторов. Именно с использования этого метода мы и начнём изучение уравнений параболического типа на примере уравнения теплопроводности.

Кроме метода разделения переменных в курсе уравнений математической физики рассматриваются также задачи на установление. Получаемое в этом случае решение является следствием некоторого постоянно действующего источника (либо в уравнении, либо в граничных условиях). Если речь идет об установившихся решениях, то для такого решения не нужны начальные условия, поскольку связанная с ними часть решения по истечении большого промежутка времени обращается в нуль. Таким образом, важным отличием постановки задач такого типа от постановки задачи Коши является отсутствие начальных условий.

1. Локальное равновесие

...математическая формулировка полученных физиком зачастую не слишком точных экспериментальных данных приводит в огромном числе случаев к удивительно точному описанию широкого класса явлений.

Э. Вигнер
“Этюды о симметрии”

Процессы, происходящие в сплошной среде, на макроуровне могут быть описаны с помощью термодинамических степеней свободы типа давления, температуры, объема и плотности. При этом состояние самой среды характеризуется термодинамическими потенциалами [9]. Строго говоря, термодинамические степени свободы и термодинамические потенциалы описывают лишь равновесные состояния сплошной среды и подчиняются равновесным термодинамическим принципам. При слабом отклонении от равновесия термодинамические степени свободы становятся равновесными лишь локально и начинают зависеть от координат и времени таким образом, чтобы локально выполнялись основные законы сохранения (вещества, энергии, импульса, момента импульса и т.п.). Обычно предполагается, что термодинамические потенциалы, поскольку они характеризуют конкретное вещество, являются аддитивными величинами, так что при отклонении от равновесия полный потенциал является суммой равновесного и неравновесного вкладов. Также предполагается, что основные термодинамические соотношения, являющееся обобщением равновесной ситуации на случай неравновесной термодинамики, остаются неизменными. Более конкретно, в предположении, что отклонение от равновесия достаточно мало, любая макроскопическая система может рассматриваться как набор малых (макроскопически) подсистем, каждая из которых находится в локальном равновесии. Для таких подсистем можно ввести набор

плотностей термодинамических функций (под которыми будем понимать плотность энтропии s , плотность внутренней энергии u , плотность энергии Гиббса g и т.д.) и термодинамических параметров (локальной температуры T , давления p , ...), локально подчиняющихся II-му началу термодинамики, которое в стандартном виде для плотностей величин может быть записано как:

$$Tds = du + pdv. \quad (3)$$

По неизвестным никому причинам физические системы достигают максимума энтропии в положении равновесия. Соответственно, при стремлении к равновесию, в случае малых отклонений, энтропия должна монотонно возрастать, а термодинамические параметры должны меняться таким образом, что обеспечить наблюдаемое монотонное возрастание энтропии при релаксации системы к положению равновесия.

Из соотношения (3) следует, что независимыми аргументами плотности энтропии являются плотность внутренней энергии u и локальный объем v : $s \equiv (u, v)$. Однако такой выбор нельзя признать удачным с точки зрения эксперимента, поскольку зафиксировать объем системы достаточно сложно, а измерить явно внутреннюю энергию просто невозможно. В этом случае более удобным оказывается оперировать с переменными давления и теплоты (тепловой энергии). Используя преобразование Лежандра, находим:

$$dh = d(u + pv) = Tds - pdv + d(pv) = Tds + vdp, \quad (4)$$

где h – плотность термодинамического потенциала, называемого энтальпией — плотность теплоты (теплосодержание). Соотношение (4) позволяет рассматривать плотность энтропии уже как функцию энтальпии и давления $s \equiv s(h, p)$. Полная энтропия системы может быть записана как сумма локальных вкладов подсистем, каждая из которых находится в локальном термодинами-

ческом равновесии

$$S = \int_{\Omega} s(h, p) d\Omega,$$

где интеграл берется по полному объему системы Ω .

Дифференцирование полной энтропии по времени приводит к выражению вида:

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial s}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) d\Omega.$$

Будем полагать для простоты, что давление в системе фиксировано и не меняется со временем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Кроме того, будем полагать, что система изолирована, так, что на границе отсутствуют потоки тепла. Последнее означает, что полная теплота в системе не меняется, так, что локально должен выполняться закон сохранения тепла:

$$\dot{h} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (5)$$

где $\vec{J}$ — поток тепла, который пока не предполагается равным потоку в законе Фурье (2).

Используя закон сохранения (5) и вычисляя $(\partial s / \partial h)$ из соотношения (4), получаем

$$\frac{dS}{dt} = \int_{\Omega} \frac{\partial s}{\partial h} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{J}) d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} \frac{1}{T} \vec{J} d\vec{\Sigma} + \int_{\Omega} \vec{J} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{T} \right) d\Omega.$$

Отсутствие нормальной компоненты потока на границе области $\partial\Omega$ вследствие изолированности системы

$$J_n \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

приводит к тому, что монотонное неубывание энтропии в системе может быть гарантировано выбором

$$\vec{J} = M\vec{\nabla} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{M}{T^2} \vec{\nabla} T, \quad (6)$$

где кинетический коэффициент M называется мобильностью и должен быть положителен в силу неубывания энтропии ($M \geq 0$). Соотношение (6), как нетрудно видеть, даёт теоретическое обоснование экспериментально установленного закона Фурье для теплопроводности, а заодно определяет связь между коэффициентами мобильности и теплопроводности

$$\lambda = \frac{M}{T^2}.$$

В свою очередь, локальную энтальпию удобно рассматривать как функцию температуры, записывая

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = C\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

где $C \equiv C(\vec{r}, t)$ —удельная локальная теплоёмкость, $\rho \equiv \rho(\vec{r}, t)$ —локальная плотность в точке $\vec{r}$, в момент времени t .

Подстановка выражений (6) и (7) в закон сохранения (5) приводит к уравнению теплопроводности, описывающему процессы перераспределения тепла в неоднородной среде за счет внутреннего хаотического движения молекул

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla} T).$$

В случае, если в рассматриваемой области присутствуют источники (стоки) тепла, закон сохранения (5) должен быть модифицирован с учётом имеющихся источников. Соответственно уравнение теплопроводности будет иметь вид

$$\rho(\vec{r}, t) C(\vec{r}, t) \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda(\vec{r}, t) \vec{\nabla} T) + Q(\vec{r}, t), \quad (8)$$

где $Q(\vec{r}, t)$ — распределённый по пространству источник (сток) тепла.

2. Однородные среды

В уравнении (8) в качестве динамической переменной при описании тепловых явлений выбрано поле температур $T(\vec{r}, t)$, а в качестве макроскопических характеристик среды фигурируют коэффициенты ρ , C , λ , входящие в уравнение теплопроводности. Зачастую, на данном интервале температур, или просто для упрощения рассматриваемой задачи, можно считать, что рассматриваемая физическая среда состоит из однородных по своим тепловым свойствам областей, что позволяет пренебречь зависимостью коэффициентов уравнения от температуры и координат и считать их константами, или кусочно-постоянными функциями. В этом случае уравнение теплопроводности может быть записано в более простом виде, если ввести коэффициент температуропроводности $a = \lambda/C\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \left(a \vec{\nabla} T \right) + q(\vec{r}, t),$$

где $\tilde{q}(\vec{r}, t) = Q(\vec{r}, t)/C\rho$, а величина a являются константой внутри каждой их областей. В частном случае, когда среда полностью однородна (коэффициенты C , λ , ρ постоянны во всем пространстве), можно записать уравнение теплопроводности в виде

$$\dot{T} = a\Delta T + \tilde{q}(\vec{r}, t), \quad (9)$$

где Δ — оператор Лапласа, а $\dot{T} \equiv \partial T/\partial t$ — частная производная температуры по времени. Даже если такая замена не вполне оправдана с точки зрения физики явления, она часто окупается возможностью получить аналитическое решение и проанализировать его. Решение уравнения для неоднородной среды может быть получено в результате численного моделирования задачи на компьютере.

3. Безразмерные переменные

Даже в том случае, когда все характеристики среды постоянны и уравнение теплопроводности упрощается до вида (9), при котором остается всего лишь один коэффициент температуропроводности, этот коэффициент будет входить в качестве параметра в решение задачи и влиять на вид решения. В таблице 1 приведены значения характерных расстояний L , на которые распространится тепло (пройдет тепловая волна) в различных материалах за одно и то же время, равное одной секунде. Таблица показывает, что это характерное расстояние будет существенно зависеть от выбранной среды. Это не всегда удобно с точки зрения анализа самого теплового процесса, поэтому в таких случаях принято переходить к естественному масштабу, описывающему данный процесс, или иначе говоря, к безразмерным переменным.

Таблица 1. Значения констант и характерные расстояния, соответствующие прохождению тепловой волны за одну секунду в различных материалах

Вид материала	Плотность, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	Теплоемкость, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$	Теплопроводность, $\frac{\text{Вт}}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}$	Температуропроводность, $\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$	Характерная длина (за 1 сек), м
медь	8800	440	320	$8.264 \cdot 10^{-5}$	0.0091
асбест	1080	2000	0.5	$2.3 \cdot 10^{-7}$	0.0005
песок	1700	920	0.6	$3.8 \cdot 10^{-7}$	0.0006
сталь	7200	540	37	$9.52 \cdot 10^{-6}$	0.0031
воздух	1.3	1000	0.02	$1.538 \cdot 10^{-5}$	0.0039

Конечно, все физические величины и характеристики, которыми мы оперируем, являются размерными, и их размерности могут быть выражены через семь основных единиц измерения. *Безразмерных величин в физике не бывает!* Открытие законов природы, по сути дела, сводится к установлению функциональной зависимости между различными размерными величинами.

Но наличие различных размерностей в одном функциональном соотношении означает, что физика явления должна определяться лишь некоторыми безразмерными комбинациями величин, входящими в данное соотношение. Действительно, в противном случае конкретное содержание физического закона будет зависеть от того, в какой системе координат мы находимся и какую систему единиц мы используем. Кроме того, представляя функциональную зависимость в виде разложения в ряд, мы приходим к тому, что будут складываться величины разных размерностей, например: $M + M^2 + \dots$, что противоречит самому понятию “размерности”. Таким образом, во все физические соотношения должны входить лишь безразмерные комбинации физических величин.

Более того, сама возможность построения решения с помощью разложения в ряды связана с тем, что степенные функции составляют исключение среди остальных функций, поскольку они не обладают внутренним масштабом. То есть, если большинство функций имеют внутренний масштаб ~ 1 , на котором они существенно меняются, то у степенных функций такого масштаба нет. Поэтому решение уравнения в частных производных (в данном случае уравнения теплопроводности) может зависеть лишь от размерной величины (некоторой константы, определяющей размерность решения), умноженной на функцию, зависящую от безразмерных переменных в виде разложения в ряд.

Понятно, что однородное уравнение само по себе не может содержать в себе никакого масштаба, поскольку при замене переменных всегда будут появляться только степенные функции. Но уравнение позволяет определить связь между различными масштабами, а их конкретное значение может задаваться либо краевыми условиями, либо источником. Это может быть либо характерный масштаб распространения тепловой волны, либо масштаб изменения граничных условия, либо характерный масштаб изменения источника.

Например, чтобы перейти к безразмерным переменным, поступим следующим образом: будем считать, что за единицу дли-

ны L_0 выбран некоторый характерный размер области, в которой ищется решение. Тогда все расстояния мы будем измерять, сравнивая их с L_0 . В качестве единицы времени выберем интервал времени τ , необходимый для того, чтобы тепловая волна прошла данное характерное расстояние L_0 . Для этого в уравнении (9) сделаем замену координат и времени

$$x \mapsto xL_0, \quad t \mapsto t\tau,$$

после которой уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a\tau}{L_0^2} \Delta T + \tilde{q}(\vec{r}, t)\tau. \quad (10)$$

Чтобы получить условие, определяющее связь масштабов по координате L_0 и времени τ , потребуем, чтобы

$$a\tau/L_0^2 = 1.$$

В результате такого выбора масштаба времени, уравнение (10) примет вид

$$\dot{T} = \Delta T + q(\vec{r}, t),$$

где $q(\vec{r}, t) = \tilde{q}(\vec{r}, t)\tau$ — выражение для источника в безразмерных переменных. И если L_0 соответствует масштабу начального распределения температуры по координате, то время $\tau = L_0^2/a$ будет соответствовать времени “расплывания” неоднородного распределения температуры, то есть установлению равномерного распределения.

Важный случай, который будет в дальнейшем обсуждаться отдельно, это случай, когда масштаб отсутствует как в источнике, так и в краевых условиях. Это означает, что решение должно зависеть только от безразмерной комбинации вида $x/2\sqrt{at}$. Например, для случая полуограниченной области $x \geq 0$ и краевых условиях вида $T(x, 0) = 0$ и $T(0, t) = 1$ решение можно искать в виде $T(x, t) = f(x/2\sqrt{at})$.

Если же масштаб в краевых условиях или источнике присутствует, то в этом случае переход к безразмерным переменным позволяет установить свойства подобия. Решения для различных объектов (подобных друг другу) тоже должны быть подобны (отличаясь лишь масштабом). Это позволяет существенно упростить анализ решения, поскольку приходится принимать во внимание лишь безразмерные переменные.

4. Постановка задачи

Использование уравнений в частных производных для описания реальных (или упрощенных) физических явлений предполагает наличие этапа формализации задачи, при которой от описания физики явления с помощью «слов и жестов» переходят к описанию с помощью математических формул. Более кратко этот процесс называется этапом математической постановки физической задачи, или еще более кратко — постановкой задачи. Дифференциальное уравнение теплопроводности является математической моделью целого класса явлений теплопроводности и само по себе ничего не говорит о развитии процесса теплопереноса в рассматриваемом теле, так как при интегрировании дифференциального уравнения в частных производных получаем бесчисленное множество различных решений.

Чтобы получить из этого множества одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном дифференциальном уравнении. Для уравнения теплопроводности эти дополнительные условия определяются теоремой единственности. В совокупности с дифференциальным уравнением (или его решением) для однозначного определения конкретной задачи необходимо задать распределение температуры внутри тела (начальные и временные условия), геометрическую форму тела и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия).

В целом для уравнений параболического типа это означает, что

- должна быть задана область, в которой ищется решение;
- на границе области должны быть определены граничные условия, то есть задано поведение решения вблизи границы области;
- должно быть задано начальное условие в некоторый момент времени, определяющее начальное состояние системы.

5. Теорема единственности

При поиске решений дифференциальных уравнений физики, как правило, не очень задумываются над доказательством существования решения. Практически этот вопрос решается непосредственно построением решения, удовлетворяющего поставленным условиям. Более важен вопрос о единственности найденного решения, поскольку с одной стороны он определяет те условия, при которых решение может быть найдено, а с другой стороны, если построена некоторая функция, удовлетворяющая уравнению и краевым условиям, то именно она и является решением.

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) является единственным при некоторых предположениях, в то время как решение краевой задачи такой единственностью не обладает. Для уравнений в частных производных вопрос о единственности приобретает еще более важное значение, поскольку общие свойства их решений определяются не только видом уравнения, но и характером краевых (то есть начальных и граничных) условий (см. [2, 10]).

Существует довольно стандартная процедура доказательства таких теорем. Доказательство проводится от противного. Предположим, что в области Ω с границей γ существует два различных решения $T_1(\vec{r}, t)$ и $T_2(\vec{r}, t)$ одного и того же уравнения, удовлетворяющих одинаковым краевым условиям

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_1 = \Delta T_1 + q(\vec{r}, t), \\ T_1(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}), \\ \hat{L}(T_1)|_\gamma = \phi(\vec{r}), \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_2 = \Delta T_2 + q(\vec{r}, t), \\ T_2(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}), \\ \hat{L}(T_2)|_\gamma = \phi(\vec{r}), \end{array} \right.$$

где $\hat{L}$ — линейный оператор, задающий граничные условия. Тогда разность решений $T = T_1 - T_2$ в области Ω будет удовлетворять однородным уравнению и краевым условиям:

$$\dot{T} = \Delta T, \quad T(\vec{r}, 0) = 0, \quad \hat{L}(T)|_\gamma = 0. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что в любой момент времени такая задача имеет единственное решение $T \equiv 0$. Для этого рассмотрим положительно определенный в области Ω функционал

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T^2 d\Omega \geq 0.$$

Дифференцируя его по времени, а затем последовательно используя уравнение (11) и выделяя оператор дивергенции, придем к выражению:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{\Omega} T \dot{T} d\Omega = \int_{\Omega} T \Delta T d\Omega = \int_{\Omega} \{ \vec{\nabla} (T \vec{\nabla} T) - (\vec{\nabla} T)^2 \} d\Omega,$$

которое после использования теоремы Гаусса

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} (T \vec{\nabla} T) d\Omega = \oint_{\gamma} T \vec{\nabla} T d\vec{S},$$

сведется к виду

$$\frac{dI(t)}{dt} = \oint_{\gamma} T \vec{\nabla} T d\vec{S} - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} T)^2 d\Omega = \oint_{\gamma} T \frac{\partial T}{\partial n} dS - \int_{\Omega} (\vec{\nabla} T)^2 d\Omega.$$

Из начальных условий (11) следует, что $I(0) = 0$. Если производная $\dot{I}(t) \leq 0$, то в любой момент времени $I(t)$ не будет увеличиваться, но в силу своей положительной определенности не может стать и меньше нуля. Таким образом, из условия $\dot{I}(t) \leq 0$ и начального условия $I(0) = 0$ следует, что $I(t) \equiv 0$ в любой момент времени. Но выполнение условия $\dot{I}(t) \leq 0$ может быть гарантировано лишь в том случае, если интеграл по границе меньше либо равен нулю:

$$\oint_{\gamma} T \vec{\nabla} T d\vec{S} = \oint_{\gamma} T \frac{\partial T}{\partial n} dS \leq 0.$$

Это возможно в следующих случаях:

- 1) $T|_{\gamma} = 0$ — случай граничных условий *I* рода, функция обращается в ноль на границе;
- 2) $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0$ — случай граничных условий *II* рода, нормальная производная функции обращается в ноль на границе;
- 3) $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma} + \alpha T|_{\gamma} = 0$ — случай граничных условий *III* рода, в ноль обращается линейная комбинация функции и ее нормальной производной. Поскольку в этом случае

$$\oint_{\gamma} T \frac{\partial T}{\partial n} dS = -\alpha \oint_{\gamma} T^2 dS \leq 0,$$

то α — некоторая положительная константа.

В результате мы можем сформулировать

теорему единственности:

*Решение уравнения теплопроводности в области Ω будет единственно, если на границе области заданы граничные условия *I*, *II* или *III* рода.*

Задачи

5.1. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня $0 \leq x \leq L$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура является произвольной функцией x . Рассмотреть случаи, когда

— концы стержня поддерживаются при заданной постоянной температуре;

— на концы стержня подается заданный тепловой поток;

— на концах стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой задана. (По закону Ньютона поток тепла пропорционален разности температур между телом и окружающей средой.)

5.2. На боковой поверхности тонкого стержня происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой является заданной функцией времени. Поставить краевую задачу об определении температуры в стержне при начальных и граничных условиях предыдущей задачи.

5.3. Поставить краевую задачу о нагревании тонкого, теплоизолированного с боков, полуограниченного стержня, если конец стержня горит, причем фронт горения распространяется с постоянной скоростью v_0 и имеет известную температуру $\varphi(t)$.

5.4. Поставить краевую задачу об остывании тонкого кольца, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине стержня пренебречь.

5.5. Неограниченный тонкий стержень получен соединением двух полуограниченных однородных стержней с различными коэффициентами теплопроводности и температуропроводности. Поставить краевую задачу об определении температуры в этом стержне, рассмотрев случаи, когда

- концы составляющих стержней соединены непосредственно;

- концы стержней соединены массивной муфтой с теплоемкостью C_0 , причем материал муфты обладает очень большой теплопроводностью.

Поверхность стержня и внешнюю поверхность муфты считать теплоизолированными.

5.6. Расплавленный металл заполняет вертикальный цилиндрический сосуд, стенки и дно которого теплонепроницаемы. С момента $t = 0$ свободная поверхность металла поддерживается при температуре $u_1 = \text{const}$, которая ниже температуры плавления. Поставить краевую задачу об остывании и затвердевании металла, если его начальная температура равна u_0 .

6. Построение решения

Перейдем к вопросу о существовании решения уравнения теплопроводности в некоторой области Ω , с границей γ . Поскольку в случае условий *I*, *II* или *III* рода решение уравнения теплопроводности единственно, то его существование можно доказать, явно предъявив конструкцию решения. Однако прежде остановимся на одном простом утверждении, которое носит название *принципа суперпозиции*.

Принцип суперпозиции

В силу линейности уравнения теплопроводности решение неоднородного уравнения с неоднородными граничными и начальными условиями является суммой решений подзадач, соответствующих каждой из неоднородностей.

Действительно, пусть T_1, T_2 и T_3 являются решениями следующих задач:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_1 = \Delta T_1 + q(\vec{r}, t), \\ T_1(\vec{r}, 0) = 0, \\ \hat{L}(T_1)|_\gamma = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_2 = \Delta T_2, \\ T_2(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}), \\ \hat{L}(T_2)|_\gamma = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{T}_3 = \Delta T_3, \\ T_3(\vec{r}, 0) = 0, \\ \hat{L}(T_3)|_\gamma = \varphi(\vec{r}, t), \end{array} \right.$$

где $\hat{L}(T)$ — линейный оператор, соответствующий граничным условиям *I*, *II* или *III* рода, $q(\vec{r}, t)$, $T_0(\vec{r})$, $\varphi(\vec{r}, t)$ — соответственно неоднородности в уравнении, начальных и граничных условиях. Прямой подстановкой нетрудно проверить, что сумма функций

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

является решением задачи:

$$\dot{T} = \Delta T + q(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}), \quad \hat{L}(T)|_\gamma = \varphi(\vec{r}, t).$$

Из этого утверждения следует, что достаточно найти решения каждой такой подзадачи и сложить их вместе. Поэтому рассмотрим построение каждого из частных решений T_1, T_2, T_3 . Заметим,

что возможность расщепления исходной задачи на ряд подзадач совсем не означает, что это обязательно надо делать. Как правило, оказывается удобно сначала разобраться с неоднородными граничными условиями, а затем решать совместную задачу для неоднородного уравнения с неоднородными начальными условиями при однородных граничных условиях.

6.1. Неоднородные граничные условия

Начнем с задачи, включающей в себя неоднородные граничные условия:

$$\dot{T} = \Delta T, \quad T(\vec{r}, 0) = 0, \quad \hat{L}(T)|_{\gamma} = \varphi(\vec{r}, t). \quad (12)$$

С помощью подстановки

$$T(\vec{r}, t) = T^*(\vec{r}) + v_9 \vec{r}, t), \quad (13)$$

где $u(\vec{r}, t)$ — новая искомая функция, от задачи (12) можно легко перейти к задаче с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Для этого достаточно найти функцию $T^*(\vec{r})$, которая удовлетворяет заданным граничным неоднородным условиям. В принципе, это может быть любая произвольная функция. Хотя зачастую такая функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям, может быть найдена простым подбором, гораздо удобнее выбрать ее так, чтобы она приводила к наиболее простой задаче, например, удовлетворяла однородному уравнению и неоднородным граничным условиям.

В тех простых случаях, когда граничное условие $\varphi(\vec{r}, t) \mapsto \varphi(\vec{r})$ не зависит от времени, такую функцию можно получить как предел решения при $t \mapsto \infty$. В этом случае решение уравнения теплопроводности стремиться к некоторому стационарному решению $T(\vec{r}, t) \mapsto T^*(\vec{r})$, удовлетворяющему следующей задаче:

$$\Delta T^*(\vec{r}) = 0, \quad \hat{L}(T^*)|_{\gamma} = \varphi(\vec{r}).$$

Если решение такой задачи найдено, то после замены (13) вместо задачи (12) получим новую задачу для функции $u(\vec{r}, t)$:

$$\dot{u} = \Delta u, \quad u(\vec{r}, 0) = -T^*(\vec{r}), \quad \hat{L}(u)|_\gamma = 0.$$

В результате задача с неоднородными граничными условиями сводится к задаче с неоднородными начальными, но однородными граничными условиями для функции, описывающей отклонение от стационарного решения.

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1] \\ T(x, 0) = \sin x, & T(0, t) = T_0, \quad T'(1, t) = 1. \end{cases}$$

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = 0$$

имеет вид $T^*(x) = \alpha x + \beta$. Подставляя в граничные условия, находим $\beta = T_0$ и $\alpha = 1$. Поэтому после замены $T(x, t) = T_0 + x + u(x, t)$ получаем краевую задачу в виде

$$\begin{cases} \dot{u} = u'', & x \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin x - x - T_0, \\ u(0, t) = 0, & u'(1, t) = 0. \end{cases}$$

6.2. Однородные граничные условия

Решение задачи с однородными граничными условиями может быть построено с помощью разложения решения по базису нормального оператора (другими словами — с помощью Фурье-преобразования). Напомним, что оператор $\hat{L}$, действующий в гильбертовом пространстве функций $|\varphi\rangle$, является *нормальным*, если коммутатор $[\hat{L}, \hat{L}^\dagger] = 0$, где $\hat{L}^\dagger$ — сопряженный оператор к оператору $\hat{L}$, определяемый соотношением

$$\langle \hat{L}^\dagger \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{L} \psi \rangle,$$

а скалярное произведение

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi^* \psi d\Omega.$$

В качестве такого нормального оператора можно взять оператор Лапласа Δ . Чтобы проверить его нормальность, найдем $\hat{L}^\dagger$. Интегрируя дважды по частям, получим

$$\langle \varphi | \Delta \psi \rangle = \int_{\Omega} \varphi^* \Delta \psi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \varphi^* \psi d\Omega + \oint_{\gamma} \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \psi - \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS.$$

Из последнего соотношения видно, что оператор Лапласа будет не просто нормальным, а даже *самосопряжённым* оператором ($\Delta = \Delta^\dagger$), если

$$\oint_{\gamma} \left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \psi - \varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS = 0.$$

В этом случае опять возникают три возможности, при которых интеграл по границе обращается в ноль. Эти три возможности точно соответствуют трем возможным типам граничных условий, при которых решение уравнения теплопроводности единственно.

- 1) $\varphi|_{\gamma} = 0, \quad \psi|_{\gamma} = 0$, — однородные граничные условия *I* рода;
- 2) $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0$, — однородные граничные условия *II* рода;
- 3) $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha \varphi \right]_{\gamma} = 0, \quad \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha \psi \right]_{\gamma} = 0$, — однородные граничных условия *III* рода (α — некоторая положительная константа).

Разница состоит в том, что единственность решения уравнения теплопроводности будет выполняться как для однородных, так и для неоднородных граничных условий, в то время как *оператор*

Лапласа будет нормальным только в случае однородных граничных условий.

Итак, если граничные условия однородны, то оператор Лапласа в области Ω нормален, и, следовательно, обладает в этой области полным набором собственных векторов, являющихся решением уравнения на собственные значения

$$\Delta \psi_n(\vec{r}) = -\lambda_n^2 \psi_n(\vec{r}), \quad (14)$$

с однородными граничными условиями *I*, *II*, *III* рода:

$$\hat{L}(\psi_n)|_\gamma = 0. \quad (15)$$

Эти собственные вектора удовлетворяют условиям ортонормированности и соотношению полноты

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \sum_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \hat{E},$$

где $\hat{E}$ — тождественный оператор. В этих соотношениях подразумевается, что индекс n , нумерующий собственные функции, является дискретной величиной в случае дискретного спектра (то есть для ограниченной области) и непрерывной — в случае непрерывного спектра (для ограниченной или полуограниченной области). Поэтому все суммы по этому индексу, здесь и далее, в случае непрерывного спектра должны быть заменены на соответствующее интегрирование по непрерывной переменной, а под символом δ_{nm} нужно понимать символ Кронекера для дискретного спектра и δ -функцию Дирака для непрерывного.

Полнота системы собственных векторов эрмитового оператора позволяет разложить по ней решение уравнения теплопроводности

$$T(\vec{r}, t) = \sum_n T_n(t) \psi_n(\vec{r}), \quad (16)$$

где $T_n(t)$ — коэффициенты разложения, зависящие от времени.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с начальными и однородными граничными условиями I , II , или III рода

$$\dot{T} = \Delta T + q(\vec{r}, t), \quad T(\vec{r}, 0) = T_0(\vec{r}), \quad \hat{L}(T)|_\gamma = 0. \quad (17)$$

Поскольку собственные функции удовлетворяют однородным условиям (15), то и решение в виде (16) тоже будет удовлетворять этим условиям. Подставляя (16) в (17), получим

$$\sum_n \dot{T}_n(t) \psi_n(\vec{r}) = \sum_n \Delta [T_n(t) \psi_n(\vec{r})] + \sum_n q_n(t) \psi_n(\vec{r}), \quad (18)$$

где $q_n(t)$ — коэффициенты разложения источника $q(\vec{r}, t)$ по базисным векторам:

$$q_n(t) = \langle \psi_n | q(t) \rangle = \int \psi_n^*(\vec{x}) q(\vec{x}, t) d\Omega. \quad (19)$$

Используя уравнение (14), запишем (18) в виде

$$\sum_n \left[\dot{T}_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - q_n(t) \right] \psi_n(\vec{r}) = 0.$$

В силу линейной независимости векторов базиса, данное соотношение будет выполняться лишь в том случае, когда коэффициент перед каждым вектором $\psi_n(\vec{r})$ будет тождественно обращаться в ноль

$$\dot{T}_n(t) + \lambda_n^2 T_n(t) - q_n(t) = 0. \quad (20)$$

Таким образом, решение задачи (17) свелось к решению бесконечного числа независимых ОДУ для коэффициентов разложения $T_n(t)$ решения уравнения теплопроводности по базису собственных функций оператора Лапласа (16).

Общее решение (20) может быть записано в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, которое легко получается методом вариации постоянной:

$$T_n(t) = T_n^0 \exp(-\lambda_n^2 t) + \int_0^t q_n(\tau) \exp(-\lambda_n^2(t - \tau)) d\tau,$$

где $q_n(t)$ определяется из соотношения (19), а коэффициенты

$$T_n^0 = \langle \psi_n | T(0) \rangle = \int \psi_n^*(\vec{x}) T(\vec{x}, 0) d\Omega \quad (21)$$

являются Фурье-компонентами разложения начальных условий (17) по собственным функциям оператора Лапласа.

Возвращаясь к разложению (16), получаем, что решение уравнения теплопроводности может быть записано в общем виде как

$$\begin{aligned} T(\vec{r}, t) = & \sum_n T_n^0 \exp(-\lambda_n^2 t) \psi_n(\vec{r}) + \\ & + \sum_n \int_0^t q_n(\tau) \psi_n(\vec{r}) \exp(-\lambda_n^2(t - \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (22)$$

представленного в виде суммы двух слагаемых, первое из которых определяет вклад в решение от неоднородности в начальных условиях, а второе — от неоднородности в уравнении. При этом видно, что вклад в решение от неоднородности в начальных условиях очень быстро стремится к нулю, причем вклад отдельной n -ой Фурье-моды затухает за время порядка $1/\lambda_n^2$, и на временах $t \approx 1/\lambda_0^2$ остается лишь наинизшая Фурье-мода, которая и определяет зависимость распределение температуры внутри тела в последующие моменты времени. Второе слагаемое в (22) определяет вклад в решение от источника, и его можно проанализировать лишь после того, как взят интеграл в (22). Однако, благодаря затухающей со временем экспоненте, любое локализованное во времени возмущение, возникшее в какой-то точке, будет с течением времени «размазываться» по окрестности данной точки. Следовательно, и в этом случае поведение решения на больших временах ($t \sim 1$ в безразмерных переменных) будет определяться наинизшей Фурье-модой разложения источника. Случай источников, неограниченно действующих во времени, требует изменения постановки задачи и будет в дальнейшем рассмотрен отдельно.

Такое «диссипативное» поведение решений уравнения теплопроводности может быть качественно проиллюстрировано на следующем простом примере. Выберем в качестве начального условия для одномерного уравнения теплопроводности некоторую функцию $\varphi(x)$, см., например, рис. 1. Вычисляя вторую производную по координате, получим, что в точках, где функция выпукла вниз ($\varphi''(x) \geq 0$), ее производная по времени будет положительна ($\dot{\varphi} = \varphi''(x) \geq 0$) и, следовательно, значение функции в этой точке в следующий момент времени должно увеличиться. Наоборот, там, где функция выпукла вверх ($\varphi''(x) \leq 0$), ее производная по времени отрицательна ($\dot{\varphi} = \varphi''(x) \leq 0$) и значение функции с течением времени будет уменьшаться. В целом это приведет к выравниванию функции на всем интервале и сглаживанию любого начального возмущения. Заметим, что если записать уравнение теплопроводности с противоположным знаком перед оператором Лапласа, то такое уравнение будет описывать процесс развития неустойчивости, при котором любое начальное возмущение будет неограниченно расти с течением времени.

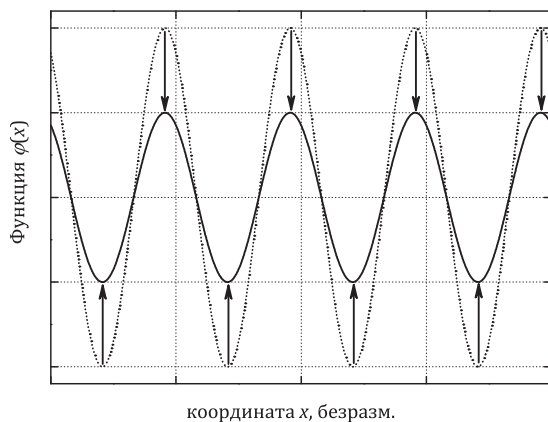


Рис. 1. Эволюция периодической функции φ под действием уравнения теплопроводности сводится к ее выравниванию на всем интервале. Чем больше кривизна функции, тем быстрее она меняется

7. Функция Грина уравнения теплопроводности

Выражение (22) дает общее решение уравнения теплопроводности в случае однородных граничных условий, при котором оно определяется через коэффициенты Фурье–разложения начальных условий и функции источника. Тем не менее, иногда бывает удобнее пользоваться другой формой записи этого же решения, представленного непосредственно через начальные условия и функцию источника с помощью так называемой *функции Грина*.

Подставляя коэффициенты разложения (19) и (21) в (22), получим выражение вида

$$T(\vec{x}, t) = \sum_n \left\{ \int \psi_n^*(\vec{y}) T(\vec{y}, 0) d\Omega \right\} \exp(-\lambda_n^2 t) \psi_n(\vec{x}) + \\ + \sum_n \int_0^t \left\{ \int \psi_n^*(\vec{y}) q(\vec{y}, \tau) d\Omega \right\} \psi_n(\vec{x}) \exp(-\lambda_n^2(t - \tau)) d\tau.$$

Предполагая сходимость ряда, можно поменять местами порядок интегрирования и суммирования и записать последнее выражение как

$$T(\vec{x}, t) = \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}, t) T(\vec{y}, 0) d\Omega + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{y}, t - \tau) q(\vec{y}, \tau) d\Omega d\tau, \quad (23)$$

где введено обозначение

$$G(\vec{x}, \vec{y}, t) = \sum_n \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y}) \exp(-\lambda_n^2 t). \quad (24)$$

Выражение (24) является во многих случаях просто формальной суммой по всем собственным функциям и вычисляется практиче-

ски лишь в отдельных случаях. Однако, определяя *функцию Грина* с помощью соотношения (24), можно получить удобное средство при доказательстве различных теоретических утверждений, поскольку она является ядром интегрального оператора, обратного к дифференциальному оператору, определяющего уравнение теплопроводности. Кроме того, если для функции Грина получено конечное выражение, то выражение (24) сводит решение уравнения к простому интегрированию.

Физический смысл функции Грина нетрудно понять, подставляя (24) в уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \dot{G}(\vec{x}, \vec{y}, t) &= \sum_n (-\lambda_n^2) \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y}) \exp(-\lambda_n^2 t) = \\ &= \sum_n \Delta(\psi_n(\vec{x})) \psi_n^*(\vec{y}) \exp(-\lambda_n^2 t) = \Delta G(\vec{x}, \vec{y}, t). \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда видно, что сама функция Грина является решением уравнения теплопроводности. При $t = 0$ из условий полноты для базисных функций следует, что функция Грина представляет собой решение с начальными условиями в виде δ -функции:

$$G(\vec{x}, \vec{y}, 0) = \sum_n \psi_n(\vec{x}) \psi_n^*(\vec{y}) = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (26)$$

Таким образом, можно считать, что функция Грина, по сути, есть некоторое специальное решение уравнения (25), соответствующее точечному, мгновенному источнику единичной мощности. Оно показывает, как распределяется тепло в каждый момент времени t , если в момент времени $t = 0$ в точке y произошел выброс одной единицы тепла. Поэтому, в силу принципа суперпозиции, любое решение уравнения теплопроводности в момент времени t может быть получено, как вклад от бесконечного числа мгновенных источников, действующих либо в начальный момент времени (если речь идет о начальных условиях), либо в течение интервала времени $[0, t]$ (если говорить о внешних источниках).

С более формальной, математической точки зрения, можно считать что $G(\vec{x}, \vec{y}, t)$ является ядром некоторого интегрального

оператора эволюции (который при $t = 0$ совпадает с тождественным оператором)

$$\hat{G}|T(0)\rangle \mapsto |T(t)\rangle, \quad \text{где} \quad \hat{G} = \sum_n |\psi_n\rangle \exp(-\lambda_n^2 t) \langle \psi_n|,$$

$$|T(t)\rangle = \hat{G}|T(0)\rangle + \int_0^t \hat{G}(t - \tau) |q(\tau)\rangle d\tau,$$

и задает некоторое отображение решения в начальный момент времени на решение в произвольный момент t .

8. Решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности для случая различных интервалов и различных типов граничных условий.

8.1. Бесконечный интервал

Особенностью задачи на бесконечном интервале является отсутствие явных граничных условий. Другими словами, математическая постановка задачи сводится к выбору уравнения и начальных условий, скажем

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q(x, t), & x \in (-\infty, \infty) \\ T(x, 0) = T_0(x). \end{cases} \quad (27)$$

Однако граничные условия, хотя и неявно, присутствуют в естественном физическом требовании, чтобы найденные нами решения на бесконечности стремились к нулю. Это требование является следствием того, что характерный размер распространения тепловой волны $L \rightarrow \infty$, поэтому для распространения тепловой волны на бесконечное расстояние нужно соответственно и бесконечное время. Поэтому, если на бесконечности отсутствуют источники тепла, то решение в любой момент времени будет стремиться к нулю. При таком условии оператор Лапласа будет по-прежнему самосопряжен, следовательно, решение задачи (24) можно искать в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа:

$$\psi''(x) = -\lambda^2 \psi(x).$$

Его общее решение на интервале $x \in (-\infty, \infty)$ имеет вид:

$$\psi(x) = C_1 \exp(i\lambda x) + C_2 \exp(-i\lambda x).$$

Обычно вид собственных функций определяется из граничных условий. Но в данном случае оба независимых решения являются ограниченными, поэтому никаких условий на возможные

значения λ не появляется. Поскольку собственное значение оператора Лапласа λ^2 дважды вырождено, удобно считать, что эти два независимых решения суть одна и та же функция:

$$\psi_\lambda(x) = C \exp(i\lambda x),$$

а λ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Нормируя $\psi_\lambda(x)$ на δ -функцию, получим:

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \langle \psi_\lambda | \psi_{\lambda'} \rangle &= \delta(\lambda - \lambda'). \end{aligned}$$

Вычислим функцию Грина уравнения теплопроводности (24). Поскольку для бесконечного интервала вместо дискретного набора λ_n мы получаем непрерывную переменную λ , то соответственно и сумма в (24) должна замениться на интеграл:

$$\begin{aligned} G(x, y, t) &= \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) \exp(-\lambda_n^2 t) \mapsto \\ &\mapsto \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \psi_\lambda(x) \psi_\lambda^*(y) \exp(-\lambda^2 t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp(-\lambda^2 t + i\lambda(x - y)) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} \exp \left\{ - \left[\lambda \sqrt{t} - \frac{i}{2\sqrt{t}}(x - y) \right]^2 - \frac{(x - y)^2}{4t} \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Для вычисления интеграла сделаем аналитическое продолжение по λ , то есть будем рассматривать его как интеграл по вещественной оси в комплексной плоскости λ . Поскольку под интегралом стоит аналитическая функция от λ , то интеграл не изменится, если мы деформируем контур, как показано на рис. 2. В результате интеграл по λ сводится к интегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \tag{29}$$

и функция Грина будет равна

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{4t} \right\}. \quad (30)$$



Рис. 2. Деформирование контура интегрирования в комплексной плоскости переменной λ

Следовательно, любое решение одномерной задачи теплопроводности на бесконечном интервале может быть записано в следующем виде:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{4t} \right\} T_0(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} q(y, \tau) \exp \left\{ -\frac{(x - y)^2}{4(t - \tau)} \right\}. \quad (31)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Вспомним о том, что сама функция Грина является решением уравнения теплопроводности с начальными условиями в виде δ -функции, см. (25)–(26). В силу того, что решение

зависит только от разности координат $(x - y)$, то сдвигом начала отсчета координат всегда можно сделать $y = 0$. Решение при $t > 0$ определяется соотношением

$$G(x, 0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4t} \right\}. \quad (32)$$

Соответствующая зависимость от времени представлена на рис. 3.

Отметим, что в любой момент времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, 0, t) dx = 1,$$

то есть общее количество тепла остается неизменным. При этом начальное распределение тепла «размывается» по все увеличивающейся области. Такое распределение, определяемое функцией (28), в теории вероятностей принято называть *нормальным распределением*. В общем случае нормальное распределение характеризуется всего двумя *неприводимыми моментами*, соответствующими *среднему значению* случайной величины $\bar{x}$ и ее *дисперсии* σ (определяющей полуширину распределения) и имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \bar{x})^2}{4\sigma^2} \right\}.$$

Сравнивая с (32), находим, что $\bar{x} = 0$, $\sigma = \sqrt{t}$. Таким образом, в точке, координата которой в данный момент времени равна $x = \sqrt{t}$, температура спадает в e раз, поэтому эту точку можно считать границей фронта распространения тепла. Эта точка движется со скоростью $v = 1/2\sqrt{t}$, определяя таким образом скорость движения теплового фронта.

Чтобы выразить результат для какой-то конкретной среды, перейдем к размерным переменным. Тогда граница теплового фронта будет определяться точкой $x(t) = \sqrt{at}$, а ее скорость движения $v = a/2\sqrt{at}$.

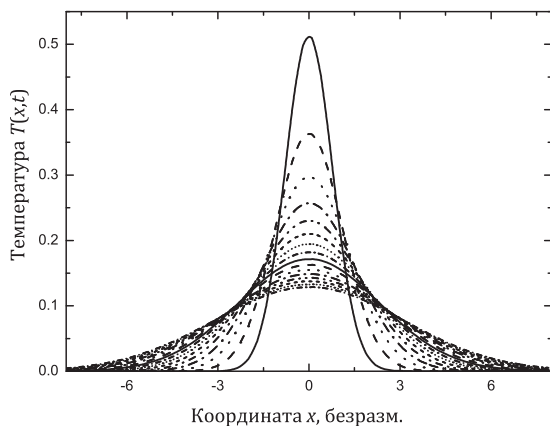


Рис. 3. Решение однородного уравнения теплопроводности на бесконечном интервале с начальными условиями $T(x, 0) = \delta(x)$ в различные моменты времени. С течением времени начальное распределение всё больше расплывается в пространстве

Пример 2. Для уравнения на бесконечном интервале выберем начальные условия в виде $T(x, 0) = T_0 \delta(x)$, $T_0 = \text{const}$. Исходя из общего решения (29), находим

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} T_0 \delta(y) dy = \frac{T_0}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4t} \right\}.$$

Вид решения аналогичен изображенному на рис. 3, но в T_0 раз больше.

Пример 3. Найдём решение уравнения (27) с $q \equiv 0$ для случая начальных условий вида:

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ T_0, & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \quad (33)$$

где $T_0 = \text{const}$.

Воспользуемся общим решением (31):

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} T(y, 0) dy = \\ &= \frac{T_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} dy. \end{aligned}$$

Сделаем замену $z = \frac{(y-x)}{2\sqrt{t}}$, получим

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-z^2\} dz = \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} \exp \{-z^2\} dz + \int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp \{-z^2\} dz \right]. \end{aligned}$$

Первый интеграл сводится к интегралу Пуассона и равен $\sqrt{\pi}/2$. Второй интеграл выражается через *интеграл ошибок* (см. приложение П.1)

$$\int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp \{-z^2\} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

Таким образом, решение может быть представлено в виде:

$$T(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad (34)$$

Пользуясь графиком функции $\operatorname{erf}(x)$, нетрудно построить вид решения и проанализировать изменение распределения температуры со временем, поскольку зависимость от времени будет определяться лишь изменением масштаба вдоль оси x (см. рис. 4). При увеличении t будет происходить растяжение графика функции $\operatorname{erf}(x)$ вдоль оси x .

Далее продемонстрируем решение задачи (33) с помощью компьютерной программы Maple¹. Для начала нового вычисления без выхода из системы начинаем с команды

```
> restart;
```

Подключаем библиотеки.

```
> with(plots):
```

Задаем функцию Грина (30).

```
> G:=(x,y,t)->1/2/sqrt(Pi*t)*exp(-(x-y)^2/4/t);
```

$$G := (x, y, t) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-y)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

Задаем функцию, определяющую начальные условия (33).

```
> T_0 := x -> piecewise(x>=0,T0,0);
```

$$T_0 := x \rightarrow \text{piecewise}(x \geq 0, T_0, 0);$$

Находим решение задачи как интеграл от функции Грина.

```
> T := (x, t) ->
```

```
int(T_0(y) * G(x, y, t), y=-infinity..infinity);
```

$$T := (x, t) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T_0(y) G(x, y, t) dy$$

В явном виде решение (34) можно получить с помощью следующей команды²

```
> factor(T(x, t) assuming t>0);
```

$$\frac{1}{2} T_0 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{t}} \right) + 1 \right)$$

¹Здесь и далее команды Maple, вводимые пользователем, начинаются знаком > и набраны шрифтом, имитирующим печатную машинку. Формула, следующая непосредственно за командой и набранная курсивом, является результатом выполнения команды. Весь остальной текст и формулы являются комментариями.

²Без использования команды **assuming** конечное выражение получается в виде предела.

Для построения графиков зависимости от координаты в различные моменты времени или для получения анимации, демонстрирующей изменение температуры со временем, необходимо определить константы, входящие в конечное выражение.

```
> T0 := 1:
```

Далее зададим команду для построения анимации изменения температуры со временем. Для удобства наблюдения и анализа отобразим на одном графике решение задачи $T(x, t)$ и начальное распределение температуры $T(x, 0)$ (см. рис. 4).

```
> display(animate(plot, [T(x,t), x=-10..10], t=0..30),  
plot(T_0(x), x=-10..10, color=blue), view=-0.1..1.1);
```

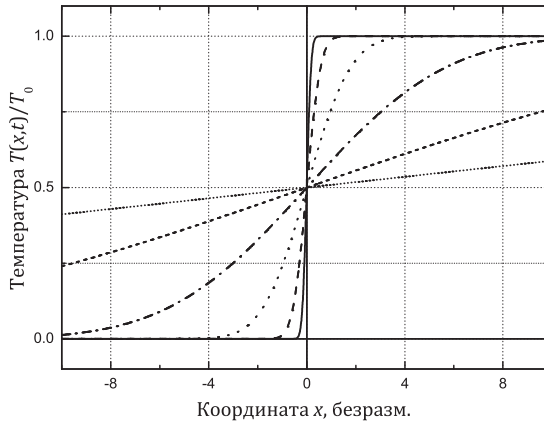


Рис. 4. Решение однородного уравнения теплопроводности на бесконечном интервале, определяемое зависимостью $T(x, t) = \frac{1}{2}T_0(1 + \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t}))$ в различные моменты времени. С течением времени резкая граница сглаживается на всё больших расстояниях

Пример 4. Рассмотрим решение неоднородного уравнения

$$\dot{T} = T'' + q\delta(x) - HT, \quad (35)$$

с однородными начальными условиями на бесконечном интервале. Физически уравнение (35) описывает распределение темпера-

туры вдоль металлического стержня с боковым теплоотводом от поверхности (с коэффициентом теплоотвода H) и с точечным источником тепла в начале координат (q — мощность источника). Поскольку при $x \neq 0$ и однородном распределении температуры

$$\dot{T} = -HT,$$

находим, что замена $T = u \exp(-Ht)$ приводит к уравнению

$$\dot{u} = u'' + qe^{Ht}\delta(x).$$

Используя функцию Грина, для последнего уравнения получаем

$$u(x, t) = q \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(y)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{H\tau - \frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}} dy.$$

С учётом δ -функции последний интеграл перепишется в виде

$$u(x, t) = q \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{H\tau - \frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau,$$

или

$$\begin{aligned} T(x, t) &= q \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-H(t-\tau) - \frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau = \\ &= q \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi p}} e^{-Hp - \frac{x^2}{4p}} dp, \end{aligned} \tag{36}$$

где $p = t - \tau$. Чтобы свести интеграл (36) к более известному выражению, сделаем замену $p = s^2$. Подставляя $dp = 2sds$, находим

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-Hs^2 - \frac{x^2}{4s^2}} ds = \\ &= \frac{q}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\left(\sqrt{H}s + \frac{|x|}{2s}\right)^2 + \sqrt{H}|x|} ds. \end{aligned} \tag{37}$$

Функция $z(s) = \sqrt{H}s + |x|/2s$, стоящая в показателе экспоненты, не монотонна по s , см. рис. 5. Минимум функции $z(s)$, определяемый условием

$$z' = \sqrt{H} - |x|/2s_0^2 = 0,$$

равен $z_0 = \sqrt{2|x|\sqrt{H}}$ в точке $s_0^2 = |x|/2\sqrt{H}$. Поэтому результат интегрирования в решении (37) зависит от того, больше или меньше значение t величины $|x|/2\sqrt{H}$.

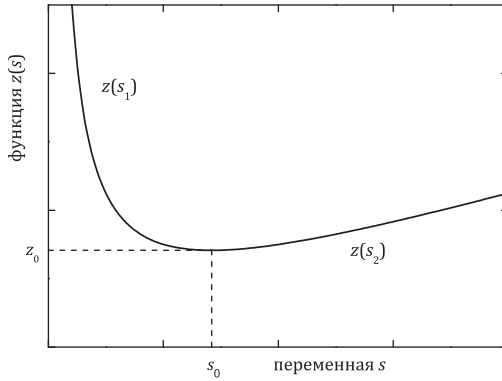


Рис. 5. Поведение функции $z(s)$

Используя функцию Хэвисайда $\theta(x)$, где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x = 0, \\ 0, & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

запишем

$$T(x, t) = \frac{q}{\sqrt{\pi}} e^{\sqrt{H}|x|} \left[\theta(|x|/2\sqrt{H} - t) \int_0^{\sqrt{t}} e^{-z^2(s_1)} ds_1 + \right. \\ \left. + \theta(t - |x|/2\sqrt{H}) \left(\int_0^{s_0} e^{-z^2(s_1)} ds_1 + \int_{s_0}^{\sqrt{t}} e^{-z^2(s_2)} ds_2 \right) \right], \quad (38)$$

где переменные s_1 и s_2 соответствуют интегрированию по ветвям графика $z(s)$ при $s < s_0$ и $s > s_0$.

Обращая функцию $z(s)$, из выражения

$$s\sqrt{H} + |x|/2s = z$$

находим

$$s_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left(z \pm \sqrt{z^2 - 2|x|\sqrt{H}} \right).$$

Соответственно, дифференциалы ds и dz связаны друг с другом как

$$ds_{1,2} = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left(dz \pm \frac{dz^2}{2\sqrt{z^2 - 2|x|\sqrt{H}}} \right).$$

Подставляя корни в (38), находим значение интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{t}} e^{-z^2(s_1)} ds_1 = \\ & = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left(I_1 \left(\infty, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) - I_2 \left(\infty, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) \right), \end{aligned}$$

где по определению

$$\begin{aligned} I_1 \left(\infty, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) &= \int_{\infty}^{\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 \left(\infty, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) &= \int_{\infty}^{\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} \frac{dz^2}{2\sqrt{z^2 - 2|x|\sqrt{H}}} = \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|\sqrt{H}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}} - \sqrt{Ht} \right), \end{aligned}$$

где интеграл сводится к erfc заменой $q^2 = z^2 - 2|x|\sqrt{H}$. Аналогично, интеграл

$$\int_{s_0}^{\sqrt{t}} e^{-z^2(s_2)} ds_2 = \frac{1}{2\sqrt{H}} \left(\hat{I}_1 \left(\sqrt{2|x|\sqrt{H}}, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \hat{I}_2 \left(\sqrt{2|x|\sqrt{H}}, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) \right),$$

где, соответственно, интегралы равны

$$\hat{I}_1 \left(\sqrt{2|x|\sqrt{H}}, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) = \int_{\sqrt{2|x|\sqrt{H}}}^{\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\sqrt{2|x|\sqrt{H}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) \right], \\ \hat{I}_2 \left(\sqrt{2|x|\sqrt{H}}, \sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) = \int_{\sqrt{2|x|\sqrt{H}}}^{\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}}} \frac{e^{-z^2} dz^2}{2\sqrt{z^2 - 2|x|\sqrt{H}}} = \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|\sqrt{H}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{Ht} - \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right).$$

В итоге находим, что распределение температуры по стержню будет определяться соотношением вида

$$T(x, t) = \frac{q}{4\sqrt{H}} \left[\theta \left(\frac{|x|}{2\sqrt{H}} - t \right) \left(e^{-|x|\sqrt{H}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}} - \sqrt{Ht} \right) - \right. \right. \\ \left. - e^{|x|\sqrt{H}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}} + \sqrt{Ht} \right) \right) + \\ + \theta \left(t - \frac{|x|}{2\sqrt{H}} \right) \left(e^{-|x|\sqrt{H}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{Ht} - \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) \right] + \right. \\ \left. - e^{|x|\sqrt{H}} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{Ht} + \frac{|x|}{2\sqrt{t}} \right) \right) \right].$$

Полученное решение при $q = 1$ и $H = 0.1$ представлено на рис. 6. Действие источника приводит к росту температуры с течением времени в окрестности точки $x = 0$. При удалении от $x = 0$ температура быстро падает за счет теплоотвода с боковой поверхности. В точке $x = 0$ виден характерный излом графика, связанный с наличием δ -функции в источнике.

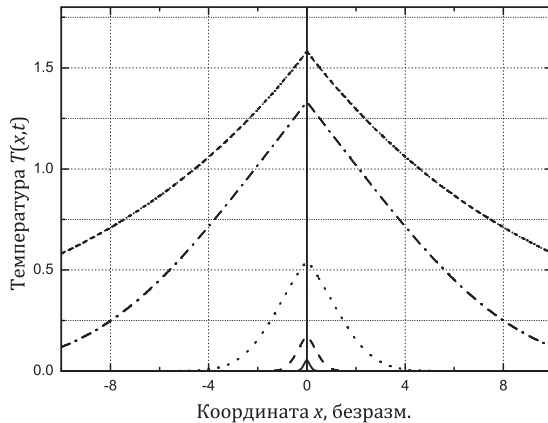


Рис. 6. Распределение температуры по пространству в различные моменты времени при $q = 1$ и $H = 0.1$

Примечание. Рассмотренную выше задачу можно свести к однородной по источнику с неоднородными начальными условиями, сделав подстановку

$$T(x, t) = T^*(x) + u(x, t),$$

где $u(x, t)$ — новая неизвестная функция, T^* — установившееся решение, удовлетворяющее стационарному уравнению:

$$(T^*)'' - HT^* = -q\delta(x) \Rightarrow T(x) = \frac{q}{2\sqrt{H}}e^{-\sqrt{H}|x|}.$$

Для функции $u(x, t)$ уравнение будет однородным, а началь-

ные условия неоднородными

$$\begin{cases} \dot{u} = u'' - Hu, & x \in (-\infty, \infty), \\ u(x, 0) = -T^*. \end{cases}$$

Решение определяется соотношением (23) с функцией Грина

$$G(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} - Ht \right\}.$$

Задачи

8.1. Построить функцию Грина на бесконечном интервале для следующего уравнения (H — некоторая положительная константа)

$$\dot{T} = T'' - HT(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

8.2. Построить функцию Грина на бесконечном интервале для следующего уравнения (V — некоторая положительная константа)

$$\dot{T} + VT' = T'', \quad x \in (-\infty, \infty).$$

8.3. Построить функцию Грина на бесконечном интервале для следующего уравнения

$$\dot{T} + VT' = T'' - H(T(x, t) - T_0), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

где V, H, T_0 — некоторые константы.

8.4. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{T} + VT' = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x). \end{cases}$$

8.5. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' - H(T - T_0), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x). \end{cases}$$

8.6. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dot{T} + VT' = T'' - H(T(x, t) - T_0), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0\delta(x). \end{cases}$$

Для полученного решения найти $\bar{x}(t)$ и $\sigma(t)$, считая, что в каждый момент времени решение представляет из себя нормальное распределение. Построить графики решения в различные моменты времени.

В последующих краевых задачах найти решение и построить графики решения в различные моменты времени.

$$8.7. \begin{cases} \dot{T} + VT' = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } |x| < L, \\ 0 & \text{при } |x| \geq L. \end{cases} \end{cases}$$

$$8.8. \begin{cases} \dot{T} = T'' - H(T - T_s), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } |x| < L, \\ 0 & \text{при } |x| \geq L. \end{cases} \end{cases}$$

$$8.9. \begin{cases} \dot{T} + VT' = T'' - H(T - T_s), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } |x| < L, \\ 0 & \text{при } |x| \geq L. \end{cases} \end{cases}$$

$$8.10. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \exp(-x^2/4\sigma^2). \end{cases}$$

$$8.11. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \exp(-\alpha|x|). \end{cases}$$

$$8.12. \begin{cases} \dot{T} = T'' - hT + q_0\delta(x), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$8.13. \begin{cases} \dot{T} = T'' + q_0\delta(x - vt), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = 0. \end{cases}$$

8.2. Полуограниченный интервал

Будем считать, что одна из границ интервала находится в точке $x = 0$, а другая при $x \rightarrow \infty$. На бесконечной границе, как и прежде, должно выполняться условие ограниченности, а в точке $x = 0$ решение должно подчиняться некоторому граничному условию *I*, *II* или *III* рода. Поскольку задача с неоднородностью на границе, в принципе, всегда может быть сведена к задаче с однородными граничными условиями, будем сразу считать, что эти граничные условия однородны.

В этом случае общее решение задачи можно получить с помощью разложения по базису. Выбор базиса определяется, в частности, условиями ограниченности на бесконечности и $\hat{L}\psi_n(x) = 0$ в точке $x = 0$ ($\hat{L}$ — линейный дифференциальный оператор, соответствующий граничным условиям *I*, *II* или *III* рода). Такие базисные функции могут быть в принципе построены из базисных функций

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\lambda x), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

соответствующих задаче на бесконечном интервале. Поскольку линейная комбинация этих функций тоже является собственной функцией с тем же самым собственным значением, то подбирая эту комбинацию таким образом, чтобы она удовлетворяла требуемому граничному условию (например, обращение функции в ноль на границе приводит к базисным функциям $\psi_\lambda(x) = C \sin \lambda x$ в случае условия первого рода), можно получить выражение для базисных функций в случае полуограниченного интервала. В результате, для случая граничных условий *II* рода получится:

$$\psi_\lambda(x) = C \cos \lambda x,$$

а для условий *III* рода

$$\psi_\lambda(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Если базисные функции известны, то решение формально может быть получено из соотношения (22). Но тот же самый результат может быть получен и другим путем, с помощью использования свойств симметрии, присущих уравнению теплопроводности на бесконечном интервале. Используя свойства симметрии уравнения, можно построить такие решения, которые тоже обладают определенной симметрией, что позволяет использовать их при решении уравнения теплопроводности уже на полуограниченном интервале и, тем самым, избежать промежуточных интегрирований, неизбежных при непосредственном разложении решения по базису.

Поэтому вернемся на время к решению уравнения теплопроводности на бесконечном интервале:

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q(x, t), & x \in (-\infty, \infty), \\ T(x, 0) = T_0(x). \end{cases} \quad (39)$$

Сформулируем следующее **утверждение**:

Если функции $T_0(x)$ и $q(x, t)$ являются *симметричными* (*антисимметричными*), то и решение уравнения (39) тоже будет *симметричным* (*антисимметричным*).

Доказательство этого утверждения следует из инвариантности однородного уравнения теплопроводности на бесконечном интервале (39) относительно преобразования координат вида $x \rightarrow -x$. Рассмотрим сначала случай антисимметричных (нечетных) функций:

$$q(x, t) = -q(-x, t), \quad T_0(x) = -T_0(-x).$$

Тогда в любой момент времени t

$$T(-x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(-x, y, t) T_0(y) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(-x, y, t - \tau) q(y, \tau) dy d\tau = \\
& = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4t} \right\} T_0(y) dy + \\
& + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4(t-\tau)} \right\} q(y, \tau) dy d\tau.
\end{aligned}$$

Заменяя в последнем выражении переменную интегрирования по координате $y \mapsto -y$, получим решение в виде

$$\begin{aligned}
T(-x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{-\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} T_0(-y) d(-y) + \\
&+ \int_0^t \int_{\infty}^{-\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)} \right\} q(-y, \tau) d(-y) d\tau,
\end{aligned}$$

которое с учетом нечетности функций q и T_0 сводится к выражению

$$\begin{aligned}
T(-x, t) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} T_0(y) dy - \\
&- \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)} \right\} q(y, \tau) dy d\tau = -T(x, t).
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать, что если функции q и T_0 — четные:

$$q(x, t) = q(-x, t), \quad T_0(x) = T_0(-x),$$

то соответствующее решение в любой момент времени будет являться четной функцией $T(x, t) = T(-x, t)$.

Используя эти свойства решений для бесконечного интервала, и выбирая начальные условия с нужной симметрией, нетрудно

построить решения для полуограниченной области, удовлетворяющее заданным граничным условиям. В силу теоремы единственности это решение и будет искомым решением.

Поскольку задача с неоднородными граничными условиями может быть сведена к задаче с однородными граничными условиями, как и раньше сразу будем полагать, что граничные условия являются однородными.

1. Условия I рода: $T(0, t) = 0$. Выполнения условия равенства нулю функции $T(x, t)$ в точке $x = 0$ для любого момента времени легко можно добиться, выбрав ее антисимметричной, поскольку из условия

$$T(x, t) = -T(-x, t)$$

следует, что

$$T(0, t) = -T(0, t) \implies T(0, t) = 0.$$

Таким образом, если мы продолжим $T_0(x)$ и $q(x, t)$ антисимметричным образом на отрицательную часть оси x , а затем найдем $T(x, t)$, то часть этого решения при $x \geq 0$ и будет являться решением задачи на полубесконечном интервале с однородными граничными условиями I рода.

Поэтому, вместо задачи на полубесконечном интервале

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + q(x, t), & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0(x), & T(0, t) = 0, \end{cases}$$

рассмотрим задачу для бесконечного интервала

$$\begin{cases} \dot{\bar{T}} = \bar{T}'' + \bar{q}(x, t), & x \in (-\infty, \infty), \\ \bar{T}(x, 0) = \bar{T}_0(x), \end{cases}$$

где

$$\bar{T}_0(x) = \begin{cases} T_0(x), & \text{при } x > 0, \\ -T_0(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$\bar{q}(x, t) = \begin{cases} q(x, t), & \text{при } x > 0, \\ -q(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда решение исходной задачи можно получить как

$$T(x, t) = \bar{T}(x, t) \quad \text{при } x > 0.$$

2. Условия II рода: $T'(0, t) = 0$. Этот случай будет отличаться от только что рассмотренного тем, что вместо антисимметричного продолжения начальных условий и функции источника надо сделать симметричное:

$$\bar{T}_0(x) = \begin{cases} T_0(x), & \text{при } x > 0, \\ T_0(-x), & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \bar{q}(x, t) = \begin{cases} q(x, t), & \text{при } x > 0, \\ q(-x, t), & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда решение $\bar{T}(x, t)$ будет симметричным в любой момент времени при $t \geq 0$

$$\bar{T}(x, t) = \bar{T}(-x, t),$$

а производная $\bar{T}(x, t)$ будет антисимметричной функцией

$$\bar{T}'(x, t) = -\bar{T}'(-x, t).$$

Поэтому на границе области должно выполняться условие

$$T'(0, t) = -T'(0, t) \implies T'(0, t) = 0.$$

Решение для полубесконечного интервала в случае однородных граничных условий II рода можно получить, взяв часть решения $\bar{T}(x, t)$ при $x > 0$.

3. Функции Грина на полуограниченном интервале.

Исходя из этих соображений, нетрудно получить общее решение в случае граничных условий I и II рода с помощью функции Грина. Действительно, поскольку общее решение вспомогательной задачи на бесконечном интервале может быть представлено с помощью формулы:

$$\bar{T}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t) \bar{T}_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - y, t - \tau) \bar{q}(y, \tau) dy d\tau,$$

разобьем интеграл по y на два интервала: $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{T}(x, t) = & \int_0^{\infty} G(x - y, t) \bar{T}_0(y) dy + \int_{-\infty}^0 G(x - y, t) \bar{T}_0(y) dy + \\ & + \int_0^t \left\{ \int_0^{\infty} G(x - y, t - \tau) \bar{q}(y, \tau) dy + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^0 G(x - y, t - \tau) \bar{q}(y, \tau) dy \right\} d\tau, \end{aligned}$$

С учетом антисимметричности q и T_0 для граничных условий I рода после замены $y \mapsto -y$ во втором и четвертом интегралах и выделения области $x > 0$ получим решение в полуограниченной области в виде

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} G_-(x, y, t) \bar{T}_0(y) dy + \int_0^t \int_0^{\infty} G_-(x, y, t - \tau) \bar{q}(y, \tau) dy d\tau, \quad (40)$$

где через

$$G_-(x, y, t) = G(x - y, t) - G(x + y, t)$$

обозначена так называемая антисимметризованная функция Грина.

В любой момент времени в точке $x = 0$ значение функции Грина G_-

$$G_-(0, y, t) = G(-y, t) - G(+y, t) = 0,$$

и, следовательно, $T(0, t) = 0$ в соответствии с граничными условиями I рода.

Аналогичным образом можно построить решение и в случае граничных условий II рода. Вводя симметризованную функцию Грина в виде

$$G_+(x, y, t) = G(x - y, t) + G(x + y, t), \quad (41)$$

можно записать решение в виде:

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} G_+(x, y, t) \bar{T}_0(y) dy + \int_0^t \int_0^{\infty} G_+(x, y, t - \tau) \bar{q}(y, \tau) dy d\tau. \quad (42)$$

Дифференцируя $G_+(x, y, t)$ по x в точке $x = 0$, получим

$$\left. \frac{\partial G_+(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Поэтому в любой момент времени для решения (42) будет выполнено условие

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0.$$

Пример 1: Рассмотрим решение задачи об остывании полуграниченного стержня с однородным начальным распределением температуры:

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0, & T(0, t) = 0. \end{cases}$$

Решение: Поскольку на границе заданы условия I рода, решение задачи при $x > 0$ представляется как

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} G_-(x, y, t) T_0 dy.$$

Подставляя выражения для функции Грина $G_-(x, y, t)$, получаем

$$T(x, t) = -\frac{T_0}{2\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} dy - \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4t} \right\} dy \right]. \quad (43)$$

После замены переменных интегрирования $s = (y - x)/2\sqrt{t}$ в первом интеграле, и $s = (x + y)/2\sqrt{t}$ — во втором, пользуясь четностью получившегося интеграла, запишем результат в виде:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= -\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} ds - \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} ds \right] = \\ &= \frac{T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{x/2\sqrt{t}} \exp \{-s^2\} ds = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} \exp \{-s^2\} ds = \\ &= T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right). \end{aligned}$$

Зная асимптотики функции $\operatorname{erf}(x)$, нетрудно графически изобразить решение в произвольный момент времени (см. рис. 7). Из графика видно, что на границе $T = 0$ в любой момент времени в соответствии с граничными условиями I рода, а тепловой фронт, обусловленный уходом «тепла» через границу, с течением времени продвигается все дальше от границы.

Пример 2. Рассмотрим обратную задачу — задачу о нагревании полуограниченного стержня. Будем считать, что начальная температура стержня $T(x) = 0$, а на границе поставлено нагревательное устройство с заданной температурой T_0 . Тогда задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = 0, & T(0, t) = T_0. \end{cases}$$

Решение: Приведем граничные условия к однородному виду с помощью замены $T(x, t) = T_0 + u(x, t)$. Тогда математическая постановка задачи для новой функции $u(x, t)$ сведется к уравнению с краевыми условиями вида:

$$\begin{cases} \dot{u} = u'', & x \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = -T_0, & u(0, t) = 0. \end{cases}$$

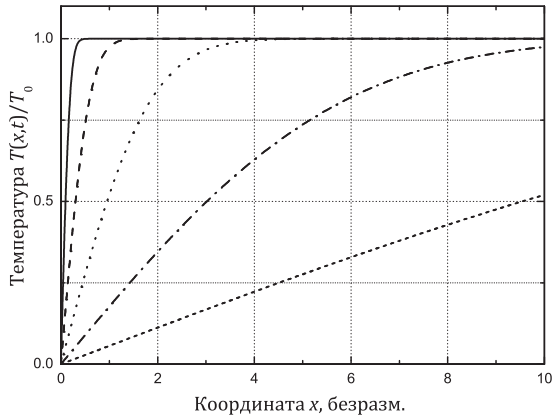


Рис. 7. Распределение температуры в полуограниченном стержне при однородных граничных условиях I рода. На границе поддерживается нулевая температура, а наклон графика в точке $x = 0$ с течением времени уменьшается

Эта задача изоморфна задаче о нагревании полуограниченного стержня, и поэтому ее решение дается выражением $u(x, t) = -T_0 \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t})$ или

$$T(x, t) = T_0 \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right) = T_0 \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

Графики полученного решения в различные моменты времени представлены на рис. 8.

Пример 3. Рассмотрим задачу об остывании однородно нагретого до температуры $T(x) = T_0$ одномерного полуограниченного стержня, на границе которого задан постоянный тепловой поток. Математическая постановка такой задачи может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0, & T'(0, t) = q. \end{cases} \quad (44)$$

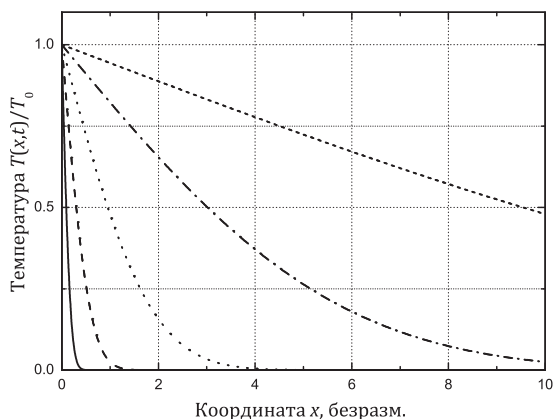


Рис. 8. Распределение температуры в полуограниченном стержне в задаче о нагревании. На границе поддерживается температура T_0 , а наклон в точке $x = 0$ с течением времени увеличивается

Решение: Приведем граничные условия к однородному виду с помощью замены

$$T(x, t) = qx + u(x, t). \quad (45)$$

Формально, qx получается как решение стационарного уравнения теплопроводности, хотя и не удовлетворяет физическому условию ограниченности решения на бесконечности. Поэтому будем понимать qx как некоторую вспомогательную функцию, позволяющую избавиться от неоднородности в граничных условиях и не будем интерпретировать ее как некоторое стационарное решение. Математическая постановка задачи для функции $u(x, t)$ сведется к следующему:

$$\begin{cases} \dot{u} = u'', & x \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = T_0 - qx, & u'(0, t) = 0, \end{cases}$$

Поскольку на границе заданы условия II рода, решение задачи

при $x > 0$ представляется как

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} G_+(x, y, t)(T_0 - qy) dy = u_1(x, t) + u_2(x, t).$$

Первая часть решения

$$u_1(x, t) = T_0 \int_0^{\infty} G_+(x, y, t) dy,$$

есть не что иное как решение для полуограниченного стержня с начальной температурой T_0 и граничным условием теплоизоляции $u'(0, t) = 0$. Совершенно очевидно, что распределение температуры в таком стержне не будет меняться с течением времени: $u_1(x, t) \equiv T_0$.

Подставляя выражения для функции Грина $G_+(x, y, t)$ во вторую часть, получаем

$$u_2(x, t) = -\frac{q}{2\sqrt{\pi t}} \left[\int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4t} \right\} y dy + \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4t} \right\} y dy \right].$$

После замены переменных интегрирования $s = (y-x)/2\sqrt{t}$ в первом интеграле, и $s = (x+y)/2\sqrt{t}$ — во втором, запишем результат в виде:

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -\frac{q}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} (2s\sqrt{t} + x) ds + \right. \\ &+ \left. \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} (2s\sqrt{t} - x) ds \right] = -\frac{qx}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{t}}^{x/2\sqrt{t}} \exp \{-s^2\} ds - \\ &- \frac{q\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} 2s ds + \int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} \exp \{-s^2\} 2s ds \right] = \\ &= -qx \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - \frac{q\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4t} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда после обратной замены

$$T(x, t) = qx + u(x, t) = qx + u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

находим

$$T(x, t) = T_0 + qx \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - 2q\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}.$$

Графики этого решения в различные моменты времени представлены на рис. 9. Из них видно, что наклон кривых на границе постоянен (производная на границе $T' = q$) в любой момент времени, в соответствии с заданными граничными условиями II рода.

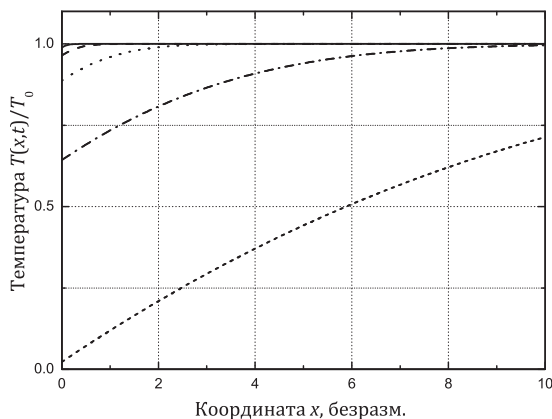


Рис. 9. Распределение температуры в полуграниченном стержне в задаче с постоянным потоком на границе. С течением времени температура на границе понижается, так что температурный фронт отодвигается внутрь области

Продemonстрируем решение задачи (44) с использованием программы Maple. Для начала нового вычисления без выхода из системы начинаем с команды

```
> restart;
```

и подключаем библиотеки.

```
> with(plots):
Задаем функцию Грина3.
> G:=(x,y,t)->1/2/sqrt(Pi*t)*exp(-(x-y)^2/4/t);
```

$$G := (x, y, t) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-y)^2}{t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

Задаем начальное распределение температуры и сводим граничные условия к однородным с помощью подстановки (45):

```
> T_0 := x -> T0:
> uz := x -> q*x:
Пересчитываем начальные условия
> U_0 := x -> T_0(x) - uz(x);
U_0(x);
```

$$U_0 := x \rightarrow T_0(x) - uz(x) \\ T0 - qx$$

Так как граничные условия II рода, решение $u(x, t)$ находим как интеграл с симметризованной функции Грина $G_+(x, y, t)$ (41).

```
> u := (x, t) -> int(U_0(y) * (G(x, y, t)
+ G(x, -y, t)), y=0..infinity);
```

$$u := (x, t) \rightarrow \int_0^{\infty} U_0(y)(G(x, y, t) + G(x, -y, t))dy$$

Согласно (45), решение исходной задачи $T(x, t)$ является суммой двух функций $u(x, t)$ и $uz(x)$

```
> T := (x, t) -> expand(u(x, t) assuming t>0)+uz(x):
T(x, t);
```

³Данная функция Грина определяет решение уравнения теплопроводности на бесконечном интервале. Далее будет показано, каким образом данная функция преобразуется к симметризованной функции Грина.

$$- \operatorname{erf} \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{t}} \right) qx + T0 - \frac{2\sqrt{t}e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{t}}q}{\sqrt{\pi}} + qx$$

Для построения графиков зависимости температуры от координаты и времени задаем константы. Для удобства анализа и наблюдения при построении анимации отображаем на одном графике решение задачи $T(x, t)$ и начальное распределение температуры $T(x, 0)$, см. рис. 9.

```
> T0 := 1: q := 0.1:
> display(
  animate(plot, [T(x,t), x=0..10], t=0..30),
  plot(T_0(x), x=0..10, color=blue), view=0..1.1);
```

4. Условия III рода: $T'(0, t) - hT(0, t) = 0$ (будем считать, что константа $h > 0$, то есть тепло отдается из стержня). В этом случае получить конечное выражение для $T(x, t)$ несколько труднее, но тоже возможно. Для этого введем новую неизвестную функцию

$$u(x, t) = T'(x, t) - hT(x, t). \quad (46)$$

Тогда, если $T(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\dot{T} = T'' + q(x, t), \quad (47)$$

то, действуя оператором $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на $u(x, t)$ и меняя местами порядок производных, получим

$$\begin{aligned} \hat{L}u(x, t) &= \hat{L} \left(\frac{\partial}{\partial x} - h \right) T(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - h \right) \hat{L}T(x, t) = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - h \right) q(x, t) \equiv \tilde{q}(x, t). \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, в силу линейности уравнения теплопроводности, функция $u(x, t)$ будет удовлетворять уравнению, аналогичному (47)

$$\dot{u} = u'' + \tilde{q}(x, t),$$

где $\tilde{q}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - h \right) q(x, t)$. В результате граничные условия *III* рода для функции $T(x, t)$ перейдут в граничные условия *I* рода для новой функции $u(x, t)$: $u(0, t) = 0$. Начальные условия для функции $u(x, t)$ будут определяться соотношением

$$u(x, 0) = T'(x, 0) - hT(x, 0).$$

Используя общее решение на полуограниченном интервале в случае условий первого рода (40), получаем

$$u(x, t) = \int_0^\infty G_-(x, y, t) u(y, 0) dy + \int_0^t \int_0^\infty G_-(x, y, t - \tau) \tilde{q}(y, \tau) dy d\tau,$$

Из выражений (46) и (48), проинтегрировав по частям производные от $u(x, t)$ и $q(x, t)$ с учетом того, что

$$G_-(x, 0, t) = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} G_-(x, y, t) = 0,$$

для $u(x, t)$ получим

$$\begin{aligned} u(x, t) = & - \int_0^\infty \left[\frac{\partial G_-}{\partial y} + hG_- \right] T(y, 0) dy - \\ & - \int_0^t \int_0^\infty \left[\frac{\partial G_-}{\partial y} + hG_- \right] q(y, \tau) dy d\tau \equiv F(x, t). \end{aligned} \quad (49)$$

Следовательно, для $T(x, t)$ можно записать теперь уже обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial T}{\partial x} - hT = F,$$

общее решение которого находится методом вариации постоянной:

$$T(x, t) = Ce^{hx} - \int_x^\infty e^{h(x-y)} F(y, t) dy. \quad (50)$$

Поскольку кроме граничных условий при $x = 0$ должно быть выполнено условие ограниченности решения на бесконечности, в (50) следует положить $C = 0$. Подстановка $F(x, t)$ из (49) в (50) приводит к следующему выражению для функции $T(x, t)$:

$$T(x, t) = \int_0^\infty G_h(x, y, t) T(y, 0) dy + \int_0^t \int_0^\infty G_h(x, y, t - \tau) q(y, \tau) dy d\tau, \quad (51)$$

где введено обозначение:

$$G_h(x, y, t) = \int_x^\infty e^{h(x-z)} \left[\frac{\partial}{\partial y} G_-(z, y, t) + h G_-(z, y, t) \right] dz. \quad (52)$$

Это же выражение, после подстановки G_- , может быть записано в двух различных формах (см. приложение П.2)

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x+y+\eta)^2}{4t} \right\} d\eta$$

или

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - h e^{h^2 t + h(x+y)} \operatorname{erf} \left(h\sqrt{t} + \frac{(x+y)}{2\sqrt{t}} \right). \quad (53)$$

Из выражения (53) непосредственно видно, что при $h = 0$ граничные условия становятся условиями *II* рода, поскольку

$$\lim_{h \rightarrow 0} G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t).$$

Другой предельный случай возникает при $h \rightarrow \infty$. Действительно, тогда граничные условия *III* рода сводятся к условиям *I* рода, поскольку

$$T'(0, t) - hT(0, t) = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{1}{h} T'(0, t) - T(0, t) = 0 \right\}_{h \rightarrow \infty} \Rightarrow T(0, t) = 0.$$

Соответственно и функция $G_h(x, y, t)$ должна сводиться к функции $G_-(x, y, t)$. Рассмотрим предельный переход при $h \rightarrow \infty$

функции $G_h(x, y, t)$, используя (52). Раскрывая квадрат в показателе экспоненты, получим

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4t} \right\} \int_0^\infty \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x+y)}{2t}\eta - \frac{\eta^2}{4t} \right\} d\eta.$$

Делая замену переменной интегрирования $s = h\eta$, получим, что интеграл сводится к выражению

$$\frac{1}{h} \int_0^\infty \exp \left\{ -s - \frac{(x+y)}{2ht}s - \frac{s^2}{4th^2} \right\} ds.$$

При $h \rightarrow \infty$ коэффициенты перед вторым и третьим слагаемыми в показателе экспоненты малы по сравнению с первым, поэтому ими можно пренебречь. Оставшийся интеграл по порядку величины равен единице, и для функции Грина G_h получаем:

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x+y)^2}{4t} \right\} \left\{ \frac{1}{h} + O \left(\frac{1}{h^2} \right) \right\} = G_-(x, y, t) + O \left(\frac{1}{h} \right).$$

Таким образом,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} G_h(x, y, t) = G_-(x, y, t).$$

Пример 4. Рассмотрим задачу об остывании полуограниченного одномерного стержня с граничными условиями *III* рода

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) - hT(0, t) = 0, & T(x, 0) = T_0, \end{cases}$$

Решение: При $t > 0$ из (51) и (52) имеем

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &= \int_0^{\infty} G_h(x, y, t) T(y, 0) dy = T_0 \int_0^{\infty} G_h(x, y, t) dy = \\
 &= T_0 \int_0^{\infty} G_+(x, y, t) dy - \\
 &\quad - \frac{hT_0}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x+y+\eta)^2}{4t} \right\} d\eta dy.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Первый интеграл в этом выражении представляет собой решение о полуограниченном стержне, первоначально нагретом до температуры T_0 , на границе которого заданы условия теплоизоляции (поток тепла равен нулю, поэтому $T'(0, t) = 0$, которому удовлетворяет функция G_+). При таком условии распределение температуры в стержне должно оставаться постоянным в силу $T(x, 0) = \text{const}$, и, следовательно, первый интеграл должен равняться единице. Поэтому получаем

$$T(x, t) = T_0 - \frac{hT_0}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x+y+\eta)^2}{4t} \right\} d\eta dy.$$

после замены переменных $z = (x + y + \eta)/2\sqrt{t}$, интеграл по y вычисляется и дает $\text{erfc}((x + \eta)/2\sqrt{t})$, так что выражение (54) сводится к виду:

$$T(x, t) = T_0 \left(1 - h \int_0^{\infty} e^{-h\eta} \text{erfc} \left(\frac{x+\eta}{2\sqrt{t}} \right) d\eta \right).$$

Чтобы вычислить оставшийся интеграл, воспользуемся интегрированием по частям, внося $e^{-h\eta}$ под знак дифференциала. Поскольку производная от интеграла с переменными пределами равна

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(z) dz = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x),$$

то производная функции $\operatorname{erfc}((x + \eta)/2\sqrt{t})$ сведется к выражению

$$\frac{d}{d\eta} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \eta}{2\sqrt{t}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(x + \eta)^2}{4t} \right\}.$$

После интегрирования, если учесть, что подстановка на бесконечности обращается в ноль, приходим к выражению:

$$T(x, t) = T_0 \left(1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x + \eta)^2}{4t} \right\} d\eta \right). \quad (55)$$

Оставшийся интеграл нетрудно вычислить, выделяя в показателе экспоненты полный квадрат. Результат имеет вид:

$$T(x, t) = T_0 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{x + 2ht}{2\sqrt{t}} \right) e^{hx + h^2 t} \right).$$

Проанализируем полученное решение с точки зрения его соответствия двум предельным случаям $h \rightarrow 0$ (условиям II рода) и $h \rightarrow \infty$ (условиям I рода).

При $h \rightarrow 0$ решение (55) переходит в выражение:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= T_0 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{x + 2ht}{2\sqrt{t}} \right) e^{hx + h^2 t} \right) \Big|_{h \rightarrow 0} = \\ &= T_0 \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right) = T_0. \end{aligned}$$

Для второго предельного случая, когда $h \rightarrow \infty$, решение должно совпадать с решением задачи об остывании полубесконечного стержня, которое дается выражением $T_0 \operatorname{erf}(x/2\sqrt{t})$. Чтобы это показать, воспользуемся видом асимптотики функции $\operatorname{erfc}(x)$ (см. приложение П.1). При $h \rightarrow \infty$ аргумент $\operatorname{erfc}(x)$ становится большим, и из формулы (П.2) приложения П.1 получаем

$$\begin{aligned} &\operatorname{erfc} \left(\frac{x + 2ht}{2\sqrt{t}} \right) e^{hx + h^2 t} = \\ &= \frac{2\sqrt{t}}{(x + 2ht)\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4t} \left(1 - \frac{2t}{(x + 2ht)^2} + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда видно, что при $h \rightarrow \infty$ все выражение обращается в ноль. Таким образом, в решении (55) остается только первое слагаемое, которое и дает необходимую зависимость вида $T(x, t) = T_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{t})$.

Чтобы графически построить полученное решение, проанализируем его асимптотическое поведение в начале координат и при $x \rightarrow \infty$.

- 1) При $x \rightarrow \infty$ асимптотика решения опять находится из разложения (П.2) приложения П.1 для функции $\operatorname{erfc}(x)$

$$T(x, t) = T_0 \left(1 - \frac{4ht^{3/2}}{x^2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4t} + \dots \right),$$

что дает кривую, монотонно приближающуюся к T_0 .

- 2) При $x = 0$, считая, что $t \gg 1$, из соотношения (П.2) приложения П.1 находим

$$T(x, t) = T_0 \operatorname{erfc}(h\sqrt{t}) e^{h^2 t} \Big|_{t \gg 1} = \frac{T_0}{h\sqrt{\pi t}} \left(1 - \frac{1}{2h^2 t} + \dots \right).$$

Из последнего видно, что значение температуры на границе (при больших значениях t) всегда остается конечной величиной, стремясь к нулю лишь при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 10), в отличие от условий *I* рода. От случая условий *II* рода данное решение отличается тем, что меняется наклон кривых при $x = 0$ в разные моменты времени (наклон пропорционален значению температуры на границе).

Поскольку характерный размер области, по которой прошла тепловая волна, $\bar{x} \sim \sqrt{t}$, то на больших расстояниях ($L \gg \bar{x}$) система еще не чувствует существование границы. Поэтому полученное решение может быть в принципе использовано для оценки решения в любой (в том числе и конечной) области с граничными условиями третьего рода (разумеется до того момента времени t , пока размер области $L \ll a\sqrt{t}$).

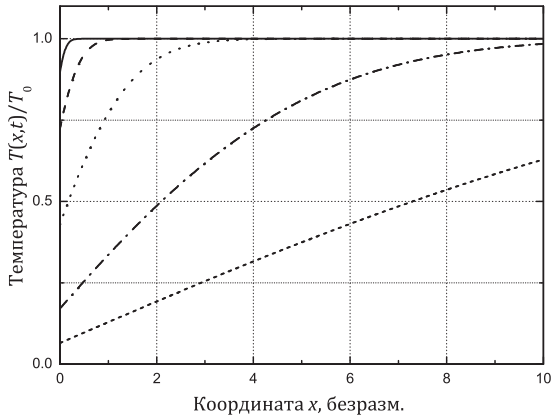


Рис. 10. Распределение температуры в полугограниченном стержне в случае граничных условий третьего рода. По мере уменьшения температуры на границе, наклон графика на границе тоже уменьшается

Задачи

Найти решения следующих краевых задач и построить графики решений в различные моменты времени, считая все коэффициенты постоянными.

$$8.14. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x - L), & T(0, t) = 0, \end{cases}$$

$$8.15. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x - L), & T(0, t) = T_1, \end{cases}$$

$$8.16. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x - L), & T'(0, t) = 0, \end{cases}$$

$$8.17. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x - L), & T'(0, t) = -Q, \end{cases}$$

$$8.18. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(0, t) = 0, & T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x < L, \\ 0 & \text{при } x \geq L. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
8.19. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(0, t) = T_0, & T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x < L, \\ 0 & \text{при } x \geq L. \end{cases} \end{cases} \\
8.20. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = 0, & T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x < L, \\ 0 & \text{при } x \geq L. \end{cases} \end{cases} \\
8.21. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = -Q_0, & T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x < L, \\ 0 & \text{при } x \geq L. \end{cases} \end{cases} \\
8.22. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = hT(0, t), & T(x, 0) = \begin{cases} T_0 & \text{при } x < L, \\ 0 & \text{при } x \geq L. \end{cases} \end{cases} \\
8.23. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T(0, t) = 0, & T(x, 0) = T_0 \exp(-\alpha x). \end{cases} \\
8.24. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = Q_0, & T(x, 0) = T_0 \exp(-\alpha x). \end{cases} \\
8.25. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' - hT + q_0\delta(x - L), & x \in [0, \infty), \\ T(0, t) = 0, & T(x, 0) = 0. \end{cases} \\
8.26. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' - hT + q_0\delta(x - L), & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = 0, & T(x, 0) = 0. \end{cases} \\
8.27. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, \infty), \\ T'(0, t) = -q, & T(x, 0) = T_0 e^{-\alpha x}. \end{cases}
\end{aligned}$$

8.3. Конечный интервал

Все окружающие нас тела имеют вполне определенные, конечные размеры. Поэтому умение решать задачи на бесконечных и полуограниченных интервалах на первый взгляд кажется

достаточно малоприспособленным в большинстве реальных ситуаций. Однако это не совсем справедливо по следующим причинам. Во-первых, из решения задач на полуограниченных интервалах видно, что характерное расстояние $\langle x \rangle$, на котором успевает измениться температура к моменту времени t , по порядку величины равно $\langle x \rangle \sim \sqrt{t}$. Это означает, что при малых временах изменение температуры за счет границы проявляется только в непосредственной близости от нее. Поэтому, чем меньше рассматриваемый момент времени, тем ближе решение задачи на конечном интервале к решению на полуограниченном интервале. Поскольку последнее часто выражается с помощью конечных выражений, то анализировать их, разумеется, проще. Во-вторых, даже если интервал времени не очень мал, но фронт распространения тепла от других границ еще не дошел до исследуемой области, то в ней с хорошей точностью опять же можно считать, что решается задача с полуограниченной областью. В-третьих, на полуограниченном интервале проще разобраться с влиянием различных типов граничных условий, поскольку очень часто все вычисления удается довести до аналитических формул. Три эти причины приводят к тому, что знание решений на полуограниченных интервалах является очень важным для понимания процессов, происходящих в реальных конечных областях.

Рассмотрим, в чем проявится отличие конечной области от уже рассмотренных случаев. В качестве примера разберем решение задачи об остывании одномерного стержня длины L , расположенного вдоль оси x . Выбирая в качестве характерного размера длину стержня L и вводя безразмерные переменные

$$x \mapsto xL \quad \text{и} \quad t \mapsto tL/a,$$

где a — коэффициент температуропроводности, получим уравнение

$$\dot{T} = (a(x)T')' + Q(x, t)$$

для случая кусочно-постоянных характеристик среды, и уравне-

ние вида

$$\dot{T} = T'' + q(x, t)$$

в случае постоянных характеристик. Из-за того, что длина области выбрана за единицу, оба уравнения определены на интервале $x \in [0, 1]$. Из-за наличия границ уравнение должно быть дополнено двумя граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = 1$. Чтобы выполнялась теорема единственности, эти условия должны являться условиями *I*, *II* или *III* рода. Тогда, если найдено решение, удовлетворяющее заданным начальным и граничным условиям, независимо от способа решения, оно будет единственным.

В силу линейности уравнения и граничных условий опять можно воспользоваться принципом суперпозиции, представив задачу в виде суммы подзадач

$$T(x, t) = T_1(x, t) + T_2(x, t) + T_3(x, t) + T_4(x, t),$$

каждая из которых соответствует некоторой неоднородности в уравнении и краевых условиях

1) Неоднородное уравнение

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T'' + q(x, t), & T(x, 0) &= 0, \\ \hat{L}_1(T) \Big|_{x=0} &= 0, & \hat{L}_2(T) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

2) Неоднородное начальное условие

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T'', & T(x, 0) &= T_0(x), \\ \hat{L}_1(T) \Big|_{x=0} &= 0, & \hat{L}_2(T) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

3) Неоднородное граничное условие на левой границе

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T'', & T(x, 0) &= 0, \\ \hat{L}_1(T) \Big|_{x=0} &= \psi_1(t), & \hat{L}_2(T) \Big|_{x=1} &= 0. \end{aligned}$$

4) Неоднородное граничное условие на правой границе

$$\begin{aligned} \dot{T} &= T'', & T(x, 0) &= 0, \\ \hat{L}_1(T)\Big|_{x=0} &= 0, & \hat{L}_2(T)\Big|_{x=0} &= \psi_2(t). \end{aligned}$$

Как и в случае неограниченного интервала, каждая из подзадач может быть решена последовательно. Находя частные решения для подзадач № 3–4 и выполнив замену, чтобы избавиться от неоднородности в граничных условиях, придем к решению объединенной задачи № 1–2, которая решается разложением по базису нормального оператора, и ответ выражается общим соотношением (22).

К сожалению, в случае конечной области сумма для функции Грина не вычисляется (то есть не представляется в виде некоторой функции), поэтому введение функции Грина в данном случае является формальным и не позволяет записать ответ в виде какого-то конкретного выражения.

Пример 1. Найти решение задачи об остывании конечного, однородно нагретого стержня, на левом конце которого поддерживается температура T_1 , а на правом — T_2 . Формализованная постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, & T(0, t) = T_1, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases} \quad (56)$$

Выбором стационарного решения $T^*(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x$ и последующей заменой

$$T(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1)x + u(x, t) \quad (57)$$

сводим задачу (56) к задаче с однородными условиями

$$\begin{cases} \dot{u} = u'', & x \in [0, 1], \\ u(x, 0) = T_0 - T_1 - x(T_2 - T_1), \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Решение задачи на собственные значения

$$\begin{aligned}\psi_n''(x) &= -\lambda_n^2 \psi_n(x), & x \in [0, 1], \\ \psi_n(0) &= 0, & \psi_n(1) = 0,\end{aligned}$$

дает нормированные на интервале $x \in [0, 1]$ собственные функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin(\pi n x), \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Поскольку уравнение (56) является однородным, то в решение войдет только первая часть соотношения (22), которая определяется разложением по базису начальных условий

$$T_n^0 = \langle \psi_n | u(x, 0) \rangle = \int_0^1 \psi_n^*(y) u(y, 0) dy.$$

Вычисляя интегралы

$$\int_0^1 \sin(\pi n y) dy = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n}, \quad \int_0^1 y \sin(\pi n y) dy = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

находим

$$T_n^0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} ((T_0 - T_1)(1 - (-1)^n) + (T_2 - T_1)(-1)^n) \quad (58)$$

или

$$T_n^0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} ((T_0 - T_1) + (T_2 - T_0)(-1)^n).$$

Следовательно, решение будет иметь вид

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((T_0 - T_1) + (T_2 - T_0)(-1)^n)}{\pi n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x. \quad (59)$$

Выписывая отдельно коэффициенты для четных и нечетных гармоник, выражение (59) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2 - T_1)}{\pi k} e^{-4\pi^2 k^2 t} \sin 2\pi k x + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2T_0 - T_1 - T_2)}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)\pi x.\end{aligned} \quad (60)$$

Наконец, подставляя (60) в (57), находим распределение температуры в стержне

$$T(x, t) = T_1 + (T_2 - T_1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T_2 - T_1)}{\pi k} e^{-4\pi^2 k^2 t} \sin 2\pi k x + \\ + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2T_0 - T_1 - T_2)}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)\pi x. \quad (61)$$

Проанализировать поведение решения, в которое входят бесконечные суммы, в общем случае не представляется возможным. Тем не менее, рассмотреть различные предельные случаи сравнительно просто. Рассмотрим поведение температурного фронта вблизи левой границы стержня при $x \ll 1$. Очевидно, что фронт будет там находится только при достаточно малых интервалах времени $t \ll 1$. Поэтому найдем аналитическое выражение, соответствующее изменению распределения температуры вблизи левой границы. Для этого, в силу $x \ll 1$, в решении (60) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными x , и их Фурье-разложением. Из (58) видно, что такие слагаемые содержат $(T_2 - T_1)$, которое следует положить нулю, то есть считать $T_2 = T_1$. Пренебрегая ими, находим

$$T(x, t) \approx T_1 + 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_0 - T_1)}{\pi(2k+1)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin(2k+1)\pi x. \quad (62)$$

Представляя $\sin(2k+1)\pi x$ в виде интеграла

$$\frac{\sin(2k+1)\pi x}{\pi(2k+1)} = \int_0^x \cos(2k+1)\pi x \, dx,$$

перепишем (62) как

$$T(x, t) \approx T_1 + 4(T_0 - T_1) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \int_0^x \cos(2k+1)\pi x \, dx. \quad (63)$$

Поскольку при малых значениях t основной вклад в затухание будут давать экспоненты с большими k ($k \rightarrow \infty$), для них изменение k на единицу будет являться малой величиной. Поэтому вместо дискретной величины $k = 0, 1, \dots$ можно рассмотреть непрерывную переменную $\lambda = \pi(2k + 1)$. Разность значений этой переменной определяется изменением переменной k

$$\Delta\lambda = \lambda(k + 1) - \lambda(k) = 2\pi,$$

следовательно, суммирование по k в (63) можно заменить интегрированием по $d\lambda/2\pi$

$$T(x, t) \approx T_1 + 4(T_0 - T_1) \int_0^x dx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2 t} \cos(\lambda x).$$

Используя четность $\cos \lambda x$, последнее выражение можно записать в виде

$$T(x, t) \approx T_1 + 2(T_0 - T_1) \int_0^x dx \int_{-\infty}^\infty \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda^2 t + i\lambda x},$$

которое после интегрирования по λ дает

$$T(x, t) \approx T_1 + \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^x e^{-x^2/4t} dx = T_1 + (T_0 - T_1) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

что в точности совпадает с решением на полуограниченном интервале при наличии условий I рода.

Нетрудно получить асимптотику решения и на больших временах. Действительно, решение (60) представляет собой суперпозицию бесконечного числа Фурье-гармоник, и из него видно, что амплитуда Фурье-компонент стремится к нулю как $\exp(-\lambda_n^2 t)$, так что при $t > 1/\pi^2$ останется только низшая Фурье-мода

$$\psi_0(x) = \sqrt{2} \sin \pi x,$$

которая и определит вид отклонения от стационарного решения на больших временах

$$T(x, t) \approx T^*(x) + \frac{2}{\pi}(2T_0 - T_1 - T_2)e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

И наконец, если не удастся отсуммировать такое выражение аналитически, то можно сделать это численно с помощью компьютера, либо написав для этого программу на одном из языков программирования, либо используя те возможности, которые предоставляют языки аналитических вычислений типа «Maple» или «Mathematica». Поскольку ряд (60) является знакпеременным, причем $|\sin(2k + 1)\pi x| \leq 1$, то погрешность вычисления суммы ряда будет определяться величиной последнего отброшенного слагаемого, который имеет порядок $\sim 1/\pi k$. Таким образом, для того, чтобы получить оценку суммы ряда с точностью ε , достаточно учесть n слагаемых, таких, что $n \sim 1/\pi\varepsilon$. Отсуммированные таким образом решения (61) для различных моментов времени представлены на рис. 11. Поведение решения в различные моменты времени действительно показывает, что при малых временах решения на каждом из концов близки к решениям на полуограниченном интервале, в то время как при больших временах остается лишь первая Фурье-мода.

Пример 2. Найти решение задачи об остывании конечного однородно нагретого стержня, на левом конце которого задан постоянный тепловой поток q , а на правом поддерживается постоянная температура T_2 . В центре стержня стоит точечный нагреватель с постоянной интенсивностью Q .

Решение. Формализованная постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{T} = T'' + Q\delta(x - 1/2), & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \quad T'(0, t) = q, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases} \quad (64)$$

Выбором стационарного решения $T^*(x) = qx + T_2 - q$ и последующей заменой $T(x, t) = T^*(x) + u(x, t)$ сводим задачу (64)

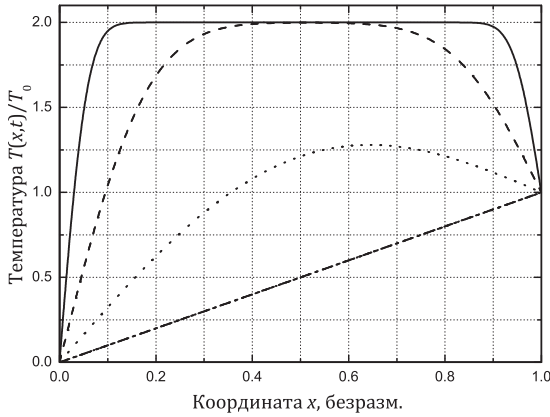


Рис. 11. Распределение температуры в ограниченном стержне в случае граничных условий I рода

к неоднородной задаче с однородными граничными условиями

$$\begin{cases} \dot{u} = u'' + Q\delta(x - 1/2), & x \in [0, 1], \\ u(x, 0) = T_0 - qx - T_2 + q, \\ u'(0, t) = 0, & u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (65)$$

Решение задачи на собственные значения и собственные функции

$$\begin{aligned} \psi_n''(x) &= -\lambda_n^2 \psi_n(x), & x \in [0, 1], \\ \psi_n'(0) &= 0, & \psi_n(1) = 0, \end{aligned}$$

дает нормированные на интервале $x \in [0, 1]$ собственные функции

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \cos(\lambda_n x), \quad \text{где } \lambda_n = \pi/2 + \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Уравнение (65) является неоднородным, следовательно, в решение войдут оба слагаемых соотношения (22):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n U_n^0 \exp(-\lambda_n^2 t) \psi_n(x) + \\ &+ \sum_n \int_0^t Q_n(\tau) \exp(-\lambda_n^2(t - \tau)) d\tau \psi_n(x), \end{aligned} \quad (66)$$

Множитель U_n^0 в первом слагаемом (66) определяется разложением по базису начальных условий $u(x, 0)$:

$$\begin{aligned} U_n^0 &= \langle \psi_n | u(x, 0) \rangle = \int_0^1 \psi^*(y) u(y, 0) dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} ((T_0 - T_2) \lambda_n \sin \lambda_n + q(1 - \cos \lambda_n)). \end{aligned}$$

Во второе слагаемое в (66) входят коэффициенты разложения источника $Q\delta(x - 1/2)$ по базисным функциям:

$$Q_n(\tau) = \langle \psi_n | Q(x, \tau) \rangle = \int_0^1 \psi^*(y) Q(y, \tau) dy = Q\sqrt{2} \cos \frac{\lambda_n}{2}.$$

В данном случае источник и, соответственно, коэффициенты Q_n не зависят от времени, что существенно упрощает задачу интегрирования по времени во втором слагаемом (66):

$$\int_0^t Q_n \exp(-\lambda_n^2(t - \tau)) d\tau = Q\sqrt{2} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2} \cos \frac{\lambda_n}{2}.$$

Таким образом, с учетом всех полученных коэффициентов разложения и после обратной замены к функции $T(x, t)$ решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} ((T_0 - T_2) \lambda_n \sin \lambda_n + q(1 - \cos \lambda_n)) e^{-\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} Q\sqrt{2} \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2} \cos \frac{\lambda_n}{2} \cos(\lambda_n x) + qx + T_2 - q. \end{aligned} \tag{67}$$

Для построения графиков решения в различные моменты времени воспользуемся программой для аналитических вычислений Maple. Приведем пример программы, реализующей решение задачи (64).

```
> restart;
> with(plots):
```

Задаем базисные функции, начальное распределение и источник.

```
> lm := n -> Pi/2+Pi*n;
   en := (x, n) -> sqrt(2)*cos(lm(n)*x);
```

$$lm := n \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$en := (x, n) \rightarrow \sqrt{2} \cos(lm(n)x)$$

```
> T_0 := x -> T0;
```

$$T_0 := x \rightarrow T0$$

```
> Qx := x -> Q*Dirac(x-0.5);
```

$$Qx := x \rightarrow Q \text{Dirac}(x - 0.5)$$

Приводим граничные условия к однородным, стационарное решение ищем в виде линейной функции.

```
> u_z := x -> A*x+B:
   sl := solve({subs(x = 0, diff(u_z(x), x)) = q,
   u_z(1) = T2}, {A, B}):
   _A:= eval(A, sl); _B := eval(B, sl);
   uz:= x -> subs(A=_A, B=_B, u_z(x)):
```

$$_A := q$$

$$_B := -q + T2$$

Пересчитываем начальные условия для новой искомой функции.

```
> U_0 := x -> T_0(x) - uz(x): U_0(x);
```

$$-qx + T0 - T2 + q$$

Раскладываем начальные условия и выражение для источника по базисным функциям.

```
> u0 := n -> int(en(x, n)*U_0(x), x=0..1):
   Qn := n -> int(en(x, n)*Qx(x), x=0..1):
```

Запишем входящие в каждое слагаемое коэффициенты, зависящие от времени, и конечное выражение для температуры (явный вид решения ввиду его громоздкости мы здесь приводить не будем).

```
> un1 := (t, n) -> u0(n)*exp(-lm(n)^2*t);
```

$$un1(t, n) = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_n^2} ((T0 - T2)\lambda_n \sin \lambda_n + q(1 - \cos \lambda_n)) e^{-\lambda_n^2 t}$$

```
> Tn1:=(t, n)->int(Qn(n)*exp(-lm(n)^2*(t-tau)),
tau=0..t);
```

$$Tn1(t, n) = Q\sqrt{2}\frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2} \cos \frac{\lambda_n}{2}$$

```
> T := (x, t) -> uz(x) + sum(un1(t, n)*en(x, n)
+ Tn1(t, n)*en(x, n), n=0..50):
```

Для визуализации решения зададим значения констант и запишем команду для построения графиков температуры в разные моменты времени (см. рис. 12) и анимации.

```
> q := 1: Q:=1: T0 := 1: T2 := 1:
> plot([T(x,0),T(x,0.01),T(x,0.1),T(x,50)], x=0..1);
> animate(plot, [T(x,t),x=0..1], t=0..0.1);
```

Из рис. 12 видно, что в результате суммирования $N = 50$ слагаемых ряда (67) на левом конце начальное распределение температуры не является прямой $T(x, 0) = T_0$, имеются незначительные осцилляции функции. Это связано, в первую очередь, с тем, что заданное начальное распределение не соответствует граничным условиям II рода на левом конце стержня. Во вторых, мы строим графики температуры, определяя сумму 50 слагаемых. В данном случае, чем больше слагаемых будет учтено, тем меньше будет отклонение полученного графика от прямой. Но данное замечание касается только начального момента времени. Все графики при $t > 0$ соответствуют заданным граничным условиям и могут быть получены в том же виде при суммировании меньшего количества слагаемых.

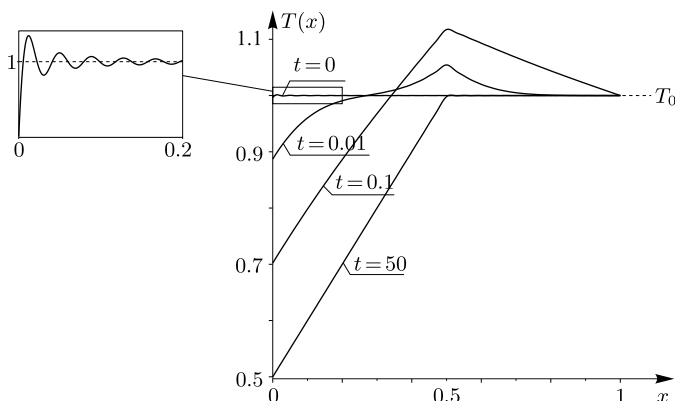


Рис. 12. Распределение температуры в ограниченном стержне с источником в виде δ -функции и неоднородными граничными условиями II рода слева и I рода справа

Из рис. 12 видно, что передаваемое источником тепло в центре стержня компенсируется оттоком тепла на левой границе. И при больших значениях времени решение выходит на стационарное. Это стационарное решение представляет собой две линейные функции, каждая из которых удовлетворяет граничным условиям (на соответствующем конце стержня), но при этом они «сшиты» в точке положения источника, образуя непрерывную функцию с изломом при $x = 1/2$.

Построим данное стационарное решение $T_s(x)$ аналитически. Для этого рассмотрим задачу (64) с источником без начальных условий при $\dot{T} = 0$.

$$\begin{cases} T_s'' = -Q\delta(x - 1/2), & x \in [0, 1], \\ T_s'(0) = q, & T_s(1) = T_2. \end{cases} \quad (68)$$

Дифференциальное уравнение (68) представляет собой ОДУ второго порядка с δ -образной правой частью. Для построения решения разделим всю область на две точкой $x_0 = 1/2$. Слева и справа от этой точки δ -функция равна нулю, то есть исходное

ОДУ становится однородным. Соответствующие решения представляют собой линейные функции:

$$\begin{aligned} T_{s1}(x) &= Ax + B, \quad x \in [0, 1/2), \\ T_{s2}(x) &= Cx + D, \quad x \in (1/2, 1], \end{aligned} \quad (69)$$

где A, B, C, D — пока неизвестные константы, которые можно определить из условий «сшивания»: интегрируя уравнение (68) в малой окрестности точки x_0 получим конечный скачок производной, при этом сама функция T_s при $x = x_0$ является непрерывной:

$$T'_{s2}(x_0) - T'_{s1}(x_0) = -Q, \quad T_{s1}(x_0) = T_{s2}(x_0). \quad (70)$$

Подставляя (69) в (70) с учетом граничных условий

$$T'_{s1}(0) = q, \quad T_{s2}(1) = T_2,$$

получим

$$T_s(x) = \begin{cases} qx + T_2 + \frac{Q}{2} - q, & x \in [0, 1/2), \\ (q - Q)x + T_2 + Q - q, & x \in (1/2, 1]. \end{cases} \quad (71)$$

На рисунке 13 представлены графики стационарного решения (71) при разных значениях параметров, которые влияют на углы наклона прямых T_{s1}, T_{s2} .

Подстановка $T(x, t) = v(x, t) + T_s(x)$ в исходное уравнение (30) с учетом (68) приводит к задаче для неизвестной функции $v(x, t)$:

$$\begin{cases} \dot{v} = v'', & x \in [0, 1], \\ v(x, 0) = T_0 - T_s(x), \\ v'(0, t) = 0, & v(1, t) = 0. \end{cases} \quad (72)$$

Это однородная задача с однородными граничными условиями и неоднородными начальными условиями, решение которой представляет собой первое слагаемое (22).

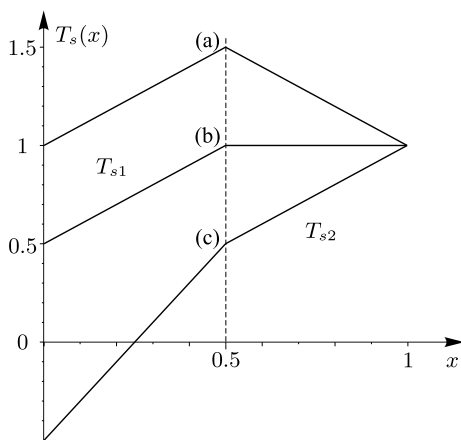


Рис. 13. График стационарного решения (71) при $T_2 = 1$ и (a) $Q = 2, q = 1$, (b) $Q = 1, q = 1$, см. рис. 12, (c) $Q = 1, q = 2$

Таким образом, задача (64) может быть сведена к задаче с однородными граничными условиями с помощью как минимум двух подстановок: построенной без учета источника, см. (65), или с учетом источника, см. (72). В первом случае, в отличие от второго, задача остается неоднородной по источнику.

Задачи

Найти решение следующих краевых задач и построить графики решения в различные моменты времени, считая все коэффициенты постоянными.

$$8.28. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, & T(0, t) = 0, \quad T'(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$8.29. \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, & T(0, t) = T_1, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases}$$

$$8.30. \begin{cases} \dot{T} = T'' + q\delta(x - 1/2), & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, & T'(0, t) = 0, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
8.31. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' - hT, & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_1, \quad T'(1, t) = q. \end{cases} \\
8.32. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0 \sin \pi x, \quad T(0, t) = T_1, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases} \\
8.33. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' + q \sin \pi x, & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = T_1, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases} \\
8.34. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' + q \sin \pi x, & x \in [-1, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \quad T(-1, t) = 0, \quad T(1, t) = T_2. \end{cases} \\
8.35. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'' + q \cos \pi x, & x \in [-1, 1], \\ T(x, 0) = 0, \quad T'(-1, t) = Q, \quad T(1, t) = 0. \end{cases} \\
8.36. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0 \delta(x - 1/2), \quad T'(0, t) = q, \quad T(1, t) = T_1. \end{cases} \\
8.37. \quad & \begin{cases} \dot{T} = T'', & x \in [0, 1], \\ T(x, 0) = T_0, \quad T(0, t) = 0, \quad T'(1, t) - hT(1, t) = q. \end{cases} \\
8.38. \quad & \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), & x \in [-1, 1], \\ T(-1, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, \quad T(x, 0) = T_0, \\ a(x) = \begin{cases} a_1, & \text{при } x < 0, \\ a_2, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

8.39. Найти решение краевой задачи и построить графики решения в различные моменты времени для тонкого однородного кольца единичного радиуса, на поверхности которого происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру. Рассмотреть случаи, когда кольцо в начальный момент было:

- равномерно нагрето до температуры T_0 ;
- равномерно нагрето до температуры T_0 , а в точке $\varphi = 0$ выделилось Q единиц тепла;
- нагрето до температуры $T(\varphi) = T_0 \cos(4\varphi)$.

8.4. Разделение переменных

Обратимся к решению уравнения теплопроводности в случае нескольких пространственных переменных. Чтобы как и прежде воспользоваться общим решением (22), необходимо найти решение уравнения на собственные значения

$$\Delta\psi_n(\vec{r}) = -\lambda_n^2\psi_n(\vec{r}), \quad (73)$$

с определенными однородными условиями на границе. Но теперь уравнение (73) само по себе является уравнением в частных производных, поэтому вычисление собственных функций является достаточно проблематичным делом. Ситуация упрощается, если оператор Лапласа Δ коммутирует с некоторым *полным набором* операторов. Напомним, что полный набор образован взаимнокоммутирующими операторами. Такой набор операторов будет иметь общую систему собственных векторов, и любой собственный вектор оператора Лапласа может быть представлен в виде разложения по данной полной системе. Для получения базиса достаточно существенным является тот факт, что в полный набор должны включаться операторы наиболее простого вида, позволяющие достаточно легко построить их собственные функции. Тогда собственные функции исходного оператора можно построить, взяв произведение собственных функций каждого из операторов, входящих в полный набор.

Действительно, рассмотрим наиболее употребительные системы координат в трехмерном пространстве: декартову, цилиндрическую и сферическую (см. приложение П.3). Для этих случаев соответствующий скалярный оператор Лапласа будет иметь вид:

$$\Delta(x, y, z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$
$$\Delta(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\Delta(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Из этих выражений видно, что полный набор операторов, коммутирующих с оператором Лапласа в декартовой системе координат, образован частными производными $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, поэтому собственная функция оператора Лапласа в декартовой системе координат может быть представлена в виде произведения функций

$$\Psi_{knm}(x, y, z) = \phi_k(x) \psi_n(y) \xi_m(z),$$

которые являются собственными функциями операторов

$$\hat{p}_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = -i \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = -i \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\hat{p}_x \phi_k(x) = \lambda_k \phi_k(x), \quad \hat{p}_y \psi_n(y) = \mu_n \psi_n(y), \quad \hat{p}_z \xi_m(z) = \nu_m \xi_m(z).$$

Аналогично, для оператора Лапласа в цилиндрических координатах можно последовательно выделить операторы

$$\hat{M}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \hat{p}_z = -i \frac{\partial}{\partial z},$$

которые коммутируют между собой и с оператором Лапласа, поэтому полный набор образован операторами $\hat{p}_z$, $\hat{M}_z$, $\hat{\Delta}$. Используя их собственные функции

$$\hat{M}_z \psi_n(\varphi) = \mu_n \psi_n(\varphi), \quad \hat{p}_z \xi_m(z) = \nu_m \xi_m(z),$$

выберем собственные функции оператора Лапласа в виде

$$\Psi_{knm}(\rho, \varphi, z) = \phi_k(\rho) \psi_n(\varphi) \xi_m(z). \quad (74)$$

Подстановка (74) в (73) приводит к уравнению на собственные значения для той части оператора Лапласа, которая зависит только от координаты ρ

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \phi_k(\rho) - \frac{\mu_n^2}{\rho^2} \phi_k(\rho) - \nu_m^2 \phi_k(\rho) = -\lambda_k^2 \phi_k(\rho). \quad (75)$$

Масштабным преобразованием такое уравнение в общем случае сводится к уравнению Бесселя (см. приложение П.1.3).

Для оператора Лапласа в сферической системе координат полный набор операторов — это $\hat{M}_z$, $\hat{M}^2 = \hat{\Delta}_{\theta\varphi}$, $\hat{\Delta}$. Поэтому выделяя сначала оператор по φ , затем по θ , и наконец по r , приходим к тому, что решение задачи на собственные значения можно искать в виде:

$$\Psi_{knm}(r, \theta, \varphi) = \phi_k(r) \psi_n(\theta) \xi_m(\varphi).$$

где $\phi_k(r)$, $\psi_n(\theta)$, $\xi_m(\varphi)$ определяются из решения следующих задач на собственные значения:

$$\hat{M}_z \xi_m(\varphi) = \nu_m \xi_m(\varphi), \quad (76)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi_n(\theta) - \frac{\nu_m^2}{\sin^2 \theta} \psi_n(\theta) = -\mu_n^2 \psi_n(\theta), \quad (77)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi_k(r) - \frac{\mu_n^2}{r^2} \phi_k(r) = -\lambda_k^2 \phi_k(r). \quad (78)$$

Уравнение (77) заменой переменных $x = \cos \theta$ сводится к присоединенному уравнению Лежандра (приложение П.1.2), а уравнение (78) — с помощью масштабного преобразования — к сферическому уравнению Бесселя [12]. Эти задачи на собственные значения возникают следующим образом: сначала выделяем самый простой оператор, который входит в выражение для лапласиана в сферической системе координат. Очевидно, это оператор, зависящий от φ . Находя для него собственные функции, с помощью решения уравнения (76), и подставляя разложение по ним в уравнение на собственные значения для всего оператора Лапласа, найдем вид оператора, зависящего от θ . Решая для него уравнение на собственные значения (77), и снова разлагая решение по полученным собственным функциям, придем к уравнению (78).

Таким образом, выбирая полный набор операторов, коммутирующих с оператором Лапласа, мы получаем полный набор ортонормированных функций, который позволяет воспользоваться для решения уравнения теплопроводности соотношением (22).

К сожалению, существование полного набора коммутирующих операторов является лишь необходимым условием разделения переменных. Роль достаточного условия выполняет вид заданной области, в которой ищется решение. Общее требование можно сформулировать так: если по каждому пространственному направлению область Ω ограничена не более, чем двумя координатными плоскостями $x_k = \text{const}$, то уравнение теплопроводности будет допускать в области Ω разделение переменных в координатах x_k .

Пример 1. Найти изменение распределения температуры с течением времени в цилиндре радиусом R и высотой H . Начальная температура цилиндра равна нулю. При $t = 0$ в центре цилиндра мгновенно выделилось Q единиц тепла. Боковые поверхности теплоизолированы, а торцы находятся при температурах T_1 и T_2 соответственно.

Решение. Поскольку границы области совпадают с координатными поверхностями в цилиндрической системе координат, то запишем уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат. Чтобы учесть мгновенно выделившееся тепло, запишем начальные условия в виде

$$T(\vec{r}, 0) = T_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv (T_0/2\pi\rho) \delta(\rho) \delta(z - H/2),$$

где $T_0 = Q/C\rho$, а $\vec{r}_0$ — соответствует середине цилиндрической области. При этом сразу учтем, что в задаче имеется симметрия относительно поворота на угол φ , поэтому можно утверждать, что решение должно иметь вид: $T \equiv T(\rho, z, t)$. В качестве масштаба по координате выберем R , тогда безразмерные переменные будут равны $r = \rho/R \in [0, 1]$ и $y = z/R \in [0, H/R]$. Соответствующее уравнение теплопроводности запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} T + \frac{\partial^2}{\partial y^2} T, \quad \Omega = \{r \in [0, 1], y \in [0, H/R]\}. \quad (79)$$

Соответствующие краевые условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} T(r, y, 0) &= (T_0 R / 2\pi r) \delta(r) \delta(y - H/2R), \quad (r, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial r} T(1, y) &= 0, \quad T(r, 0) = T_1, \quad T(r, H/R) = T_2. \end{aligned} \quad (80)$$

Однородные граничные условия по y можно получить с помощью замены

$$T(r, y, t) = T_1 + y(T_2 - T_1)R/H + u(r, y, t). \quad (81)$$

Краевая задача для функции $u(r, y, t)$ может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u, & \Omega = \{r \in [0, 1], y \in [0, H/R]\}, \\ u(r, y, 0) = (T_0 R / 2\pi r) \delta(r) \delta(y - H/2R) - T_1 - y(T_2 - T_1)R/H, \\ \frac{\partial}{\partial r} u(1, y) = 0, & u(r, 0) = 0, \quad u(r, H/R) = 0. \end{cases}$$

Тогда из уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \xi_m(y) = -\nu_m^2 \xi_m(y), \quad \xi_m(0) = 0, \quad \xi_m(H/R) = 0,$$

находим нормированные базисные функции и собственные значения

$$\xi_m(y) = \sqrt{\frac{2R}{H}} \sin(\pi m y R/H), \quad \nu_m^2 = -(\pi m R/H)^2, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Соответствующее уравнение (75) сводится к выражению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \phi(r) - \nu_m^2 \phi(r) = -\lambda_k^2 \phi(r),$$

которое после замены $x = r \sqrt{\lambda_k^2 - \nu_m^2}$ сводится к уравнению

$$\phi''(x) + \frac{1}{r} \phi'(x) + \phi(x) = 0,$$

которое совпадает с уравнением Бесселя при $l = 0$ (см. приложение П.1.3). Решения уравнения Бесселя при $l = 0$ приведены на рис. 19.

Выбирая решение, регулярное в окрестности $x = 0$, находим, что

$$\phi(x) = C J_0(x),$$

где C — нормировочная константа. Поскольку при $r = 1$ производная базисной функции должна обращаться в ноль (80), обозначим значения экстремумов функции Бесселя J_0 как $x_k^{(1)}$, поскольку с учетом соотношения (П.9) приложения 1.3 из

$$J'_0(x_k^{(1)}) = -J_1(x_k^{(1)}) = 0$$

следует, что $x_k^{(1)}$ должны быть корнями функции Бесселя J_1 . Тогда собственные значения равны

$$\lambda_k^2 = \nu_m^2 + \left(x_k^{(1)}\right)^2.$$

Таким образом, решение задачи (79)–(80) можно записать в виде

$$T(\rho, z, t) = T_1 + z(T_2 - T_1)/H + \\ + \sum_{k,m=1}^{\infty} C_{k,m} e^{-\lambda_k^2 t} J_0\left(\rho x_k^{(1)}/R\right) \sin(\pi m z/H),$$

где коэффициенты $C_{k,m}$ получаются из разложения функции $u(r, y, 0)$, определенной соотношением (81). Используя формулы (П.10) и (П.9) приложения 1.3, находим, что

$$\|J_0\|^2 = \int_0^1 r dr J_0^2\left(r x_k^{(1)}\right) = \frac{1}{2} r^2 J_0^2\left(r x_k^{(1)}\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} J_0^2\left(x_k^{(1)}\right), \quad (82)$$

$$\int_0^1 r dr J_0\left(r x_k^{(1)}\right) = \frac{r}{x_k^{(1)}} J_0^2\left(r x_k^{(1)}\right) \Big|_0^1 = 0. \quad (83)$$

Тогда находим, что коэффициенты $C_{k,m}$ равны

$$C_{k,m} = 2 \left\langle J_0 \left(r x_k^{(1)} \right) \sin \left(\pi m z / H \right) \middle| u(r, z/R, 0) \right\rangle / \|J_0\|^2, \quad (84)$$

где под скалярным произведением $\langle \phi | \psi \rangle$ понимается

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_0^1 r dr \int_0^H dz \phi^*(r, z) \psi(r, z).$$

Подставляя (82) и (83) в (84), находим

$$C_{k,m} = \frac{4T_0 \sin(\pi m/2)}{H J_0^2 \left(x_k^{(1)} \right)},$$

что приводит к ответу

$$\begin{aligned} T(\rho, z, t) = & T_1 + z(T_2 - T_1)/H + \\ & + \frac{2T_0}{H} \sum_{k,p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{J_0^2 \left(x_k^{(1)} \right)} J_0 \left(\rho x_k^{(1)} / R \right) \sin \left(\pi (2p-1) z / H \right) \times \\ & \times \exp \left\{ - \left[\left(x_k^{(1)} \right)^2 + \left(\frac{\pi R (2p-1)}{H} \right)^2 \right] t \right\}. \end{aligned}$$

Задачи

8.40. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для плоской квадратной пластинки размером $a \times a$, если на границах квадрата заданы следующие условия:

$$T(x, 0, t) = T_0, \quad T(x, a, t) = T_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} T(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} T(a, y, t) = 0,$$

а в начальный момент в центре пластинки выделилось некоторое количество тепла Q . Начальная температура пластинки равна нулю.

8.41. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для круглой плоской пластинки радиуса R , если на границе заданы следующие условия:

$$T(R, \varphi, t) = T_0 \cos 2\varphi.$$

Начальная температура в круге равна нулю.

8.42. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для круглого плоского кольца $r \leq b$ и $r \geq a$, если на границах заданы следующие условия:

$$T(a, \varphi, t) = T_0,$$

$$T(b, \varphi, t) = T_1 \sin 4\varphi.$$

Начальная температура кольца равна нулю.

8.43. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для плоской пластинки в виде сектора

$$0 \leq r \leq R \quad \text{и} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{3}\pi,$$

если на границах заданы следующие условия:

$$T(R, \varphi, t) = T_0, \quad T(r, 0, t) = T(r, \frac{1}{3}\pi, t).$$

Начальная температура пластинки равна нулю.

8.44. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для плоской пластинки в виде неполного сектора

$$a \leq r \leq b \quad \text{и} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{3}\pi,$$

если на границах заданы следующие условия:

$$T(b, \varphi, t) = T_0, \quad T(a, \varphi, t) = T_1,$$

$$T(r, 0, t) = T_1 + (T_0 - T_1)(r - a)/(b - a),$$

$$T(r, \frac{1}{3}\pi, t) = T_1 + (T_0 - T_1)(r - a)/(b - a).$$

Начальная температура пластинки равна нулю.

8.45. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для шара, если в начальный момент в центре шара выделилось некоторое количество тепла Q , начальная температура шара равна нулю, а граница шара поддерживается при температуре

$$T(r, \theta, \varphi) = T_0.$$

8.46. Найти распределение температуры и изобразить его графически в различные моменты времени для стержня в форме усеченного конуса, с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальная температура стержня равна нулю, а его концы поддерживаются при температуре T_0 .

8.47. Тяжелая вертикальная плоскость находится в слое вязкой жидкости, заключенном между двумя неподвижными плоскостями. В момент времени $t = 0$ плоскость начинает падать. Найти ее скорость и скорость частиц вязкой жидкости, если начальные скорости равны нулю и если падающая плоскость равноудалена от граничных плоскостей. Действием поля силы тяжести на жидкость пренебречь.

9. Установившееся решение

Рассмотрим решение уравнения теплопроводности при $t \rightarrow \infty$. Общий характер решений этого уравнения состоит в том, что любое возмущение, заданное при $t = 0$, с течением времени будет затухать. Поэтому возможным типом решения для однородного уравнения со стационарными граничными условиями при $t \rightarrow \infty$ является только стационарное решение, то есть решение, которое получается когда $\dot{T} \rightarrow 0$. В этом случае выполняется условие $T'' = 0$, общее решение которого имеет вид $T(x) = C_1x + C_2$, и мы получаем линейное распределение температуры независимо от того, каковы были начальные условия. Заметим, что если область инфинитна, то решение C_1x не является допустимым и должно быть отброшено (в отличие от случая конечной области). Однако, если уравнение не однородно или неоднородны граничные условия, при $t \rightarrow \infty$ может возникнуть другой тип решения, который принято называть *установившимся* решением. Это решение является следствием некоторого постоянно действующего источника (либо в уравнении, либо в граничных условиях). Если речь идет об установившихся решениях, то для такого решения не нужны начальные условия, поскольку связанная с ними часть решения:

$$u(x, t) = \sum C_k e^{-\lambda_k^2 t} e_k(x),$$

при $t \rightarrow \infty$ обращается в нуль.

Пример 1. Найдем установившееся распределение температуры в области $x \in [0, \infty)$, если на границе действует периодический источник:

$$\begin{cases} \dot{T} = T'', \\ T(0, t) = T_0 \cos(\omega t). \end{cases}$$

Решение. Естественно, что решение, соответствующее периодическому источнику тоже можно искать в виде периодической зависимости, аналогичной источнику $T(x, t) = f(x) \cos(\omega t)$. Но, подставляя это решение в уравнение, получим, что кроме $\cos(\omega t)$

в уравнении появится и $\sin(\omega t)$. Это означает сдвиг фазы по времени в решении и, следовательно, более разумно искать решение в виде:

$$T(x, t) = \operatorname{Re} \left(f(x) e^{i\omega t} \right).$$

Записывая в аналогичном виде граничное условие $T(0, t) = \operatorname{Re}(T_0 e^{i\omega t})$, после подстановки неизвестной функции в уравнение и в граничные условия получаем соотношения:

$$\begin{cases} i\omega f(x) = f''(x), \\ f(0) = T_0. \end{cases}$$

Из уравнения получим:

$$f'' - i\omega f = 0.$$

Отсюда, характеристические числа равны:

$$\lambda = \pm \sqrt{i\omega},$$

а общее решение запишется в виде:

$$f(x) = c_1 e^{\sqrt{i\omega}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\omega}x}.$$

В отсутствие источников на бесконечности, решение должно быть ограничено при $x \rightarrow \infty$:

$$|f_{x \rightarrow \infty}(x)| \leq M.$$

Поскольку $\sqrt{i\omega} = \pm(1+i)\sqrt{\omega/2}$, то решение

$$f(x) = c_1 \exp \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x \right) + c_2 \exp \left(-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x \right)$$

будет ограниченным при $x \rightarrow \infty$, только если положить $c_1 = 0$. Оставшуюся константу находим из условия в точке $x = 0$:

$$f(0) = T_0 = c_2,$$

решение будет иметь вид:

$$f(x) = T_0 \exp \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x \right).$$

Установившееся решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \operatorname{Re} \left(T_0 \exp \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x + i\omega t \right) \right) = \\ &= T_0 \exp \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x \right) \operatorname{Re} \left(\exp \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x + i\omega t \right) \right) = \\ &= T_0 \exp \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x \right) \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{\sqrt{2\omega}} \right) \right). \end{aligned}$$

Чтобы проанализировать решение, зафиксируем фазу аргумента косинуса:

$$t - \frac{x}{\sqrt{2\omega}} = \text{const},$$

откуда следует, что точка с данной фиксированной фазой движется с некоторой постоянной скоростью v , определяемой частотой колебаний источника

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2\omega}. \quad (85)$$

При этом амплитуда решения меняется по закону

$$\exp \left(-\sqrt{\frac{\omega}{2}} x \right) = \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right),$$

где $\delta = \sqrt{2/\omega}$ — определяет характерное расстояние, на котором происходит затухание амплитуды. Чем меньше ω , тем больше δ , следовательно, тем на большее расстояние проходят температурные колебания.

С точки зрения физики, к такой задаче на установление сводится задача о прогреве Земли за счет годовых и суточных колебаний температур. Для годовых колебаний температуры прогрева земной поверхности можно взять величину δ порядка одного

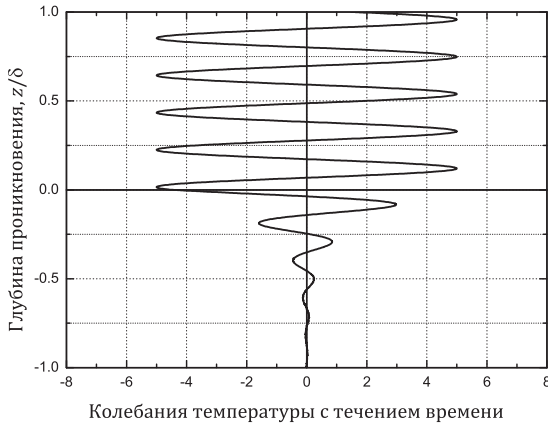


Рис. 14. Затухание колебаний температуры

метра

$$\delta_{year} \sim 1 \text{ м}, \quad \omega_{year} \sim \frac{1}{T_{year}} \sim \frac{1}{400T_{day}} \sim \frac{\omega_{day}}{400},$$

тогда для суточных колебаний температуры (пренебрегая разностью амплитуд колебаний) получим величину глубины прогрева порядка нескольких сантиметров

$$\delta_{day} \sim \frac{1}{\sqrt{\omega_{day}}} \sim \frac{1}{20\sqrt{\omega_{day}}} \sim \frac{1}{20}\delta_{year} \approx 5 \text{ см.}$$

Пример 2. Найдем установившееся распределение температуры в области $x \in (-\infty, \infty)$, если в центре области при $x = 0$ действует периодический источник $Q(x, t) = q\delta(x) \sin(\omega t)$.

Решение. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\dot{T} = T'' + q\delta(x) \sin(\omega t), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (86)$$

Периодический источник может быть представлен в виде

$$Q(x, t) = \text{Im} \left(q\delta(x)e^{i\omega t} \right). \quad (87)$$

Поэтому решение исходной задачи будем искать в аналогичном виде:

$$T(x, t) = \operatorname{Im} \left(f(x) e^{i\omega t} \right). \quad (88)$$

После подстановки (87), (88) в уравнение (86) получим неоднородное ОДУ второго порядка:

$$f''(x) - i\omega f(x) = -q\delta(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \quad (89)$$

Для его решения разделим всю область на две области точкой $x_0 = 0$ (местоположение δ -функции). Обозначим $f_1(x)$ решение при $x < x_0$ и $f_2(x)$ — при $x > x_0$.

В каждой из этих областей уравнение (89) является однородным

$$f''_{1,2} - i\omega f_{1,2} = 0$$

с характеристическими числами

$$\lambda = \pm \sqrt{i\omega},$$

В отсутствие источников на бесконечности, решение должно быть ограничено при $x \rightarrow \pm\infty$, то есть температура в стержне должна убывать при удалении от источника. В этом случае решение однородного уравнения в каждой из областей удобно записать через убывающие экспоненты:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= C_1 \exp(\sqrt{i\omega}x), \quad x \in (-\infty, 0), \\ f_2(x) &= C_2 \exp(-\sqrt{i\omega}x), \quad x \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (90)$$

где C_1, C_2 — пока неизвестные константы, которые можно определить из условий «сшивания»: интегрируя уравнение (89) в малой окрестности точки $x = x_0$, получим конечный скачок производной, при этом сама функция $f(x)$ при $x = x_0$ является непрерывной:

$$f'_2(x_0) - f'_1(x_0) = -q, \quad f_1(x_0) = f_2(x_0).$$

Подставляя (90) в данные условия, находим

$$C_1 = C_2 = \frac{q\sqrt{2}}{4\sqrt{w}}(1 - I).$$

Подставляя найденные константы в (90) и (88), получим установившееся решение исходной задачи в виде

$$T(x, t) = \begin{cases} \operatorname{Im} \left(\frac{q\sqrt{2}}{4\sqrt{w}}(1 - I) \exp(\sqrt{i\omega}x + i\omega t) \right), & x \in (-\infty, 0) \\ \operatorname{Im} \left(\frac{q\sqrt{2}}{4\sqrt{w}}(1 - I) \exp(-\sqrt{i\omega}x + i\omega t) \right), & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Очевидно, что решение представляет собой две волны, исходящие из точки x_0 и распространяющиеся с одинаковой скоростью (85) в противоположные стороны от $x_0 = 0$ (рассуждения аналогичны *Примеру 1* на стр. 96). Для построения решения в разные моменты времени необходимо определить все константы и в явном виде выделить мнимые части из полученного выражения, что является весьма трудозатратной задачей. Использование программы Maple в данном случае значительно этот процесс ускоряет. Далее приведем пример программы, реализующей решение задачи (86).

```
> restart;
```

```
> with(plots):
```

Решение ищем в виде мнимой части от функции

```
> T := (x, t) -> f(x)*exp(I*w*t):
```

И в таком же виде представим выражение для источника:

```
> Q := (x, t) -> q*Dirac(x)*exp(I*w*t):
```

Подставляем в исходное уравнение и получаем неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

```
> eqn := simplify(-(diff(T(x, t),t)-diff(T(x, t),x,x)
-Q(x, t))/exp(I*w*t));
```

$$eqn := -If(x)w + \operatorname{Dirac}(x)q + \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

Находим решение этого уравнения в виде

```
> f1:=x->_C1*exp((1/2+1/2*I)*sqrt(2)*sqrt(w)*x);
    f2:=x->_C2*exp((-1/2-1/2*I)*sqrt(2)*sqrt(w)*x);
```

$$f1 := x \rightarrow {}_C1 e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)\sqrt{2wx}}$$

$$f2 := x \rightarrow {}_C2 e^{-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\right)\sqrt{2wx}}$$

Константы ${}_C1$ и ${}_C2$ находим из условий сшивания на производную и функцию:

```
> _C1 := solve(f1(0)=f2(0), _C1);
    _C2 := solve(subs(x=0,diff(f2(x), x))-
    subs(x=0,diff(f1(x), x))=-q, _C2);
```

$${}_C1 := {}_C2$$

$${}_C2 := \frac{q\sqrt{2}}{4\sqrt{w}}(1 - I)$$

Окончательно функция $f(x)$ задается в виде

```
> f := x-> piecewise(x<0, f1(x), f2(x));
```

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x < 0, f1(x), f2(x))$$

Решение задачи получаем в виде мнимой части от функции $f(x) \exp(iwt)$:

```
> T := (x, t) -> Im(f(x)*exp(I*w*t));
```

$$T := (x, t) \rightarrow \Im(f(x)e^{Iwt})$$

Мнимую часть можно выделить, сделав предположения о действительности переменных x и t и знакоопределенности параметров q и w .

```
> assume(x::real, t::real, q::positive, w::positive);
    T(x, t);
```

Явный вид решения ввиду его громоздкости мы здесь приводить также не будем, приведем лишь графики решения в разные

моменты времени. Для этого зададим значения констант и запишем команду для построения графиков температуры в разные моменты времени (см. рис. 15) и анимации.

```
> w := 1: q := 1:
> plot([T(x,0), T(x,Pi/3), T(x,2*Pi/3)], x=-10..10);
> animate(plot, [T(x,t),x=-10..10], t=0..4*Pi);
```

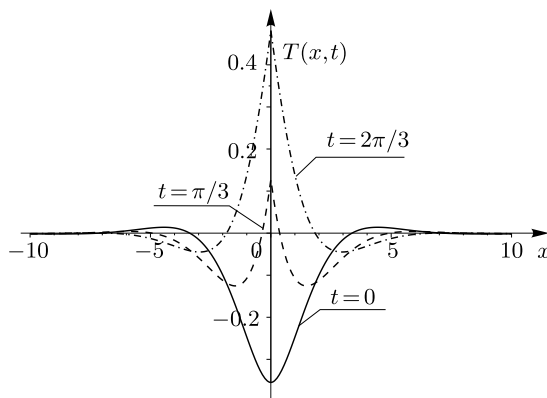


Рис. 15. Установившееся решение тепловой задачи с точечным источником вблизи $x = 0$

Задачи

9.1. Найти установившиеся температурные волны в неограниченном стержне $x \in (-\infty, \infty)$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если имеется точечный нагреватель с периодической интенсивностью.

$$\dot{T} = T'' + q\delta(x) \cos(\omega t), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

9.2. Найти установившиеся температурные волны в полуграниченном стержне $x \in [0, \infty)$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границе стержня заданы условия второго

рода

$$T'(0, t) = A \sin(\omega t).$$

9.3. Найти установившиеся температурные волны в полуграниченном стержне $x \in [0, \infty)$ с теплоотводом через боковую поверхность по закону Ньютона с постоянной теплоотвода H , если на границе стержня заданы условия второго рода

$$T'(0, t) = A \cos(\omega t + \pi/3).$$

9.4. Найти установившиеся температурные волны в полуграниченном стержне $x \in [0, \infty)$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границе стержня заданы условия третьего рода

$$T'(0, t) - hT(0, t) = -A \cos(\omega t), \quad h = \text{const}.$$

9.5. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы неоднородные условия I рода:

$$T(0, t) = T_1, \quad T(1, t) = T_2.$$

9.6. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} T'(0, t) - hT(0, t) &= -A \cos(\omega t), \quad h = \text{const}, \\ T'(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

9.7. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоотводом через боковую поверхность по закону Ньютона, если на границах стержня заданы следующие условия:

$$\begin{aligned} T'(0, t) - hT(0, t) &= -A \sin(\omega t), \quad h = \text{const}, \\ T'(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

9.8. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [-1, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы однородные условия I рода:

$$T(-1, t) = 0, \quad T(1, t) = 0,$$

а в середине стержня действует нагреватель

$$Q(x, t) = Q_0 \delta(x) \sin(\omega t).$$

9.9. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы неоднородные условия I рода:

$$T(0, t) = T_1 \cos(\omega t), \quad T(1, t) = 0.$$

9.10. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы однородные условия I рода, а в центре стержня действует нагреватель:

$$Q(x, t) = T_0 \delta(x - 1/2) \cos(\omega t).$$

9.11. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [0, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы однородные условия II рода, а в центре стержня действует нагреватель:

$$Q(x, t) = T_0 \delta(x - 1/2) \cos(\omega t).$$

9.12. Найти установившиеся температурные волны в ограниченном стержне $x \in [-1, 1]$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на границах стержня заданы однородные условия I рода, а в центре стержня работает источник:

$$Q(x, t) = T_0 \delta(x) \sin(\omega t).$$

Приложение

П.1. Специальные функции

*... К высокому прекрасному стремиться,
Увы, житейские дела мешают нам ...*

Гёте, «Фауст»

П.1.1. Интеграл ошибок

Интегралом ошибок (*error function*) называют специальную функцию, которая может быть представлена в виде

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \quad (\text{П.1})$$

Она не выражается через элементарные функции и своё название получила благодаря тому, что впервые появилась в теории вероятностей при статистической обработке данных (см. [11]). Табулированные значения функции можно найти в справочниках по специальным функциям, например, [12]. Общий характер поведения функции нетрудно понять из соотношения (П.1). Поскольку подынтегральная функция обрезается на характерном расстоянии порядка единицы, то для качественного понимания того, как ведет себя интеграл (П.1), достаточно определить только вид асимптотик при $x \ll 1$ и $x \gg 1$. Соединяя эти асимптотики, в силу монотонности интеграла, получим общий характер зависимости от x .

При $x \ll 1$ аргумент экспоненты будет мал, поэтому подынтегральное выражение в (П.1) можно разложить в ряд Тейлора по степеням переменной x ,

$$\exp(-y^2) = 1 - y^2 + \dots,$$

ограничившись несколькими слагаемыми. Почленно интегрируя полученный сходящийся ряд, получим

$$\operatorname{erf}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

Таким образом, при малых значениях аргумента функция ведет себя так, как изображено на рис. 16.

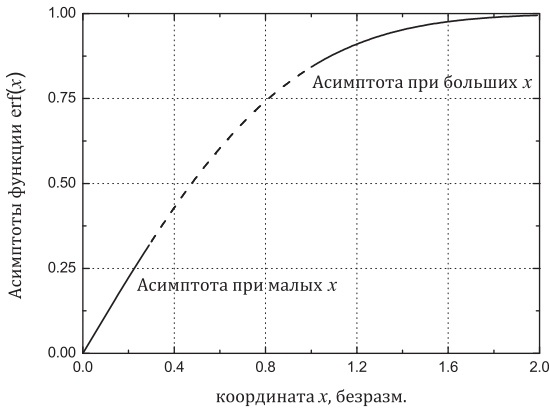


Рис. 16. Асимптотики поведения функции $\operatorname{erf}(x)$ при малых и при больших значениях аргумента

Найдем асимптотику при $x \gg 1$. Для этого представим функцию следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\infty} \exp(-y^2) dy - \int_x^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-y^2) dy = 1 - \operatorname{erfc}(x), \end{aligned}$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ — новая функция, называемая дополнительной к интегралу ошибок. Как нетрудно видеть, при $x \gg 1$ функция

$\operatorname{erfc}(x) \rightarrow 0$. Соответственно функция $\operatorname{erf}(x) \rightarrow 1$, все время оставаясь меньше единицы, рис. 16. Более точно, при $x \rightarrow \infty$ можно записать в виде

$$\sqrt{\pi}x \exp(x^2) \operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} - \dots \quad (\text{П.2})$$

Аналогичным образом можно показать, что при $x \rightarrow -\infty$ функция

$$\operatorname{erfc}(x) \rightarrow 2, \quad \text{а} \quad \operatorname{erf}(x) \rightarrow -1.$$

Объединяя эти асимптотики, можно понять, как ведут себя обе функции при любых значениях аргумента, см. рис. 17. В справочниках по специальным функциям [12], кроме табулированных значений $\operatorname{erf}(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$, можно также найти формулы приближенных вычислений, удобных для программирования собственных функций. Одна из полезных аппроксимаций рациональными функциями имеет вид

$$\operatorname{erfc}(x) = t \exp(-x^2 + P(t)), \quad \text{при} \quad x \geq 0,$$

где

$$t = \frac{1}{1 + 0.5|x|},$$

$$\begin{aligned} P(t) = & -1.26551223 + (1.00002368 + (0.37409196 + (0.09678418 + \\ & (-0.18628806 + (0.27886807 + (-1.13520398 + (1.48851587 + \\ & (-0.82215223 + 0.17087277t)t)t)t)t)t)t)t. \end{aligned}$$

Задачи

Р.1.1. Показать, что для $\operatorname{erf}(x)$ справедливо разложение в ряд

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

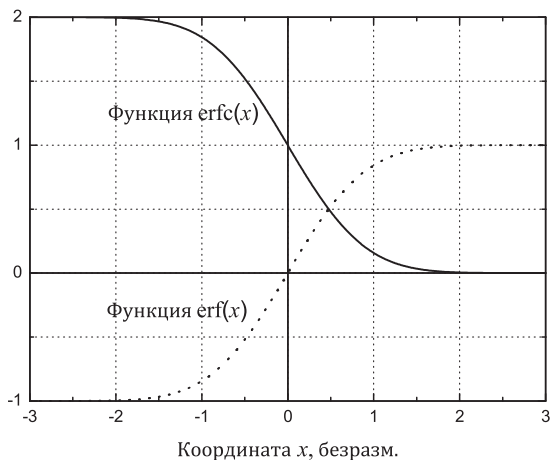


Рис. 17. Качественное поведение интеграла ошибок и дополнительного интеграла ошибок при любом значении аргумента

Р.1.2. Показать, что $\text{erf}(x)$ связана с вырожденной гипергеометрической функцией [12] как

$$\text{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} M\left(1, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Р.1.3. Интегрируя (П.1) по частям, найти асимптотику (П.2) функции $\text{erfc}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ в виде разложения по степеням $1/x$.

Р.1.4. Исходя из асимптотик поведения функции $\text{erfc}(x)$ можно записать равенство

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{2k+1}}.$$

Построить рекуррентные соотношения для коэффициентов этого ряда, дифференцируя последнее соотношение по x и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях.

П.1.2. Функции Лежандра

Дифференциальное уравнение Лежандра может быть записано в виде

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y = 0. \quad (\text{П.3})$$

Квадратично-интегрируемые (полиномиальные) решения этого уравнения на интервале $x \in [0, 1]$ существуют только при $\lambda = n(n + 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Соответствующий полином может быть представлен с помощью формулы Родрига [14]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n).$$

Из этой формулы могут быть получены интегральные представления Шлефли

$$P_n(x) = \frac{2^{-n}}{2\pi i} \oint \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - x)^{n+1}} dt,$$

и Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi \right)^n d\varphi.$$

Из формулы Родрига также может быть получена производящая функция полиномов Лежандра

$$F(x, h) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2hx + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(x).$$

В частности, раскладывая $F(x, h)$ в ряд, находим

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2, & P_3(x) &= -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3, \end{aligned}$$

$$P_4(x) = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{35}{8}x^4, \quad P_5(x) = \frac{15}{8}x - \frac{35}{4}x^3 + \frac{63}{8}x^5, \quad \dots$$

Чтобы получить выражения для остальных полиномов, можно воспользоваться рекуррентными соотношениями, которые следуют из производящей функции $F(x, h)$. Дифференцируя по одному из аргументов, а затем выражая результат снова через производящую функцию, находим

$$\frac{\partial F(x, h)}{\partial h} = -\frac{h - z}{1 - 2hz + h^2} F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} n h^{n-1} P_n(x),$$

и

$$\frac{\partial F(x, h)}{\partial x} = \frac{h}{1 - 2hz + h^2} F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P'_n(x).$$

Из этих соотношений, приравнявая слагаемые с одинаковой степенью h слева и справа, получаем два рекуррентных соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

$$P'_n(x) - 2xP'_{n-1}(x) + P'_{n-2}(x) = P_{n-1}(x).$$

Производящая функция помогает также установить общие свойства полиномов. Например,

$$F(x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(1) = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + \dots,$$

из чего следует, что $P_n(1) = 1$. Аналогично,

$$F(x, -1) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(-1) = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \dots,$$

то есть $P_n(-1) = (-1)^n$. Явный вид некоторых полиномов Лежандра приведен на рис. 18.

Используя представление Родрига, для полиномов Лежандра нетрудно получить соотношения ортогональности в виде

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}. \quad (\text{П.4})$$

Поэтому любую «разумную» функцию на интервале $-1 \leq x \leq 1$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x),$$

где

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx.$$

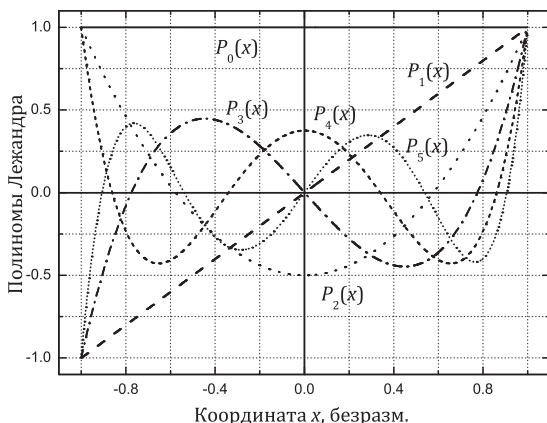


Рис. 18. Графики нескольких первых полиномов Лежандра

Уравнение Лежандра (П.3) является частным случаем так называемого *присоединенного уравнения Лежандра*

$$(1-x^2)\bar{y}''(x) - 2x\bar{y}'(x) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\bar{y} = 0,$$

квадратично-интегрируемые решения которого получаются из полиномов Лежандра с помощью преобразования

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (\text{П.5})$$

и называются *присоединенными функциями Лежандра*.

Присоединенные функции Лежандра удовлетворяют соотношениям ортогональности (при одинаковом m) вида

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (\text{П.6})$$

и при фиксированном m образуют полную систему функций в том смысле, что произвольная функция $f(x)$ на интервале $-1 \leq x \leq 1$ может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n^m(x).$$

На практике, переменная $-1 \leq x \leq 1$ может быть представлена как $x = \cos \theta$. Поэтому функции Лежандра являются удобным средством разложения в ряд функций, зависящих от угловых переменных. Вводя при $m \geq 0$ функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi),$$

и при $m < 0$ функции

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \theta) \exp(im\varphi),$$

называемые *сферическими гармониками*, получим полный

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')$$

и ортонормированный

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

базис на поверхности единичной сферы. Эти свойства следуют из того факта, что сферические гармоники являются собственными функциями угловой части оператора Лапласа в сферической системе координат

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Поэтому достаточно гладкая функция вида $f(\theta, \varphi)$ может быть представлена с помощью разложения в ряд по сферическим гармоникам

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi).$$

Приведем явные выражения для нескольких первых сферических гармоник:

$$\begin{aligned} l=0 \quad m=0 \quad Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ l=1 \quad m=0 \quad Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\ m=\pm 1 \quad Y_{1\pm 1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}, \\ l=2 \quad m=0 \quad Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ m=\pm 1 \quad Y_{2\pm 1} &= \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{\pm i\varphi}, \\ m=\pm 2 \quad Y_{2\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}. \end{aligned}$$

П.1.3. Функции Бесселя

Уравнением Бесселя называется уравнение [12] вида

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{l^2}{x^2}\right)y(x) = 0. \quad (\text{П.7})$$

Решения этого уравнения можно разделить на те, которые регулярны в нуле ($J_l(x)$), и те, у которых в нуле есть особенность ($Y_l(x)$). Регулярное в нуле решение можно получить с помощью ряда

$$J_l(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+2k},$$

а исследовать общие свойства решений с помощью *производящей функции* (см. [12, 10])

$$F(x, h) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(h - \frac{1}{h} \right) \right] = \sum_{l=0}^{\infty} h^l J_l(x). \quad (\text{П.8})$$

Зная производящую функцию, легко получить *интегральное представление Шлефли*

$$J_l(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right]}{t^{l+1}} dt,$$

из которого, после замены $t = \exp(i\theta)$, можно получить представление для функций Бесселя через *интеграл Бесселя*

$$J_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta,$$

часто используемого в различных приложениях.

Дифференцируя соотношение (П.8) по x и сравнивая коэффициенты разложения по h слева и справа, получим одно *рекуррентное соотношение*, а дифференцируя по h — получим другое.

В наиболее удобном виде два этих рекуррентных соотношения можно записать следующим образом:

$$J_{l-1}(x) + J_{l+1}(x) = \frac{2l}{x} J_l(x), \quad J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x) = 2J'_l(x). \quad (\text{П.9})$$

Используя уравнения (П.7) для функций Бесселя $J_l(kx)$ и $J_l(px)$ и комбинируя их так, чтобы сократить вторые производные, нетрудно получить *соотношения ортогональности*

$$\begin{aligned} & \int_a^b J_l(kx) J_l(px) x dx = \\ & = \frac{1}{k^2 - p^2} \left[px J_l(kx) J'_l(px) - kx J_l(px) J'_l(kx) \right] \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Таким образом, функции Бесселя при конкретном значении l и различных собственных значениях образуют полный (поскольку являются собственными функциями эрмитового оператора) и ортонормированный (в силу (П.10)) набор функций, который может быть использован в качестве базиса на интервале $[0, \infty)$.

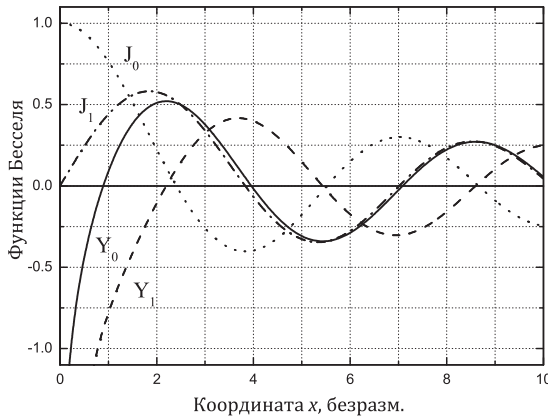


Рис. 19. Функции Бесселя J_l и Y_l при $l = 0.1$

Соотношения ортогональности (П.10) обычно используют для определения коэффициентов разложения функции в ряд

по функциям Бесселя. Для функции $f(x)$, заданной на интервале $0 < x < a$, можно записать

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_l(k_n x),$$

где k_n определены, к примеру, условием $J_l(k_n a) = 0$. Тогда из соотношения

$$\int_0^a J_l(kx) J_l(px) x dx = \frac{1}{2} \delta_{np} a^2 [J_{l+1}(k_p a)]^2$$

нетрудно найти

$$c_n = \int_0^a f(x) J_l(k_n x) x dx \bigg/ \frac{1}{2} a^2 [J_{l+1}(k_n a)]^2.$$

Задачи

Р.1.5. Получите рекуррентные соотношения (П.9).

Р.1.6. Используя рекуррентные соотношения (П.9) покажите, что функции $J_l(x)$ удовлетворяют уравнению Бесселя (П.7).

П.2. Функция Грина G_h на полуограниченном интервале с условиями третьего рода

... Нас мало. Нас, может быть, трое...

Б. Пастернак

Получим из исходного выражения для функции Грина

$$G_h(x, y, t) = \int_x^\infty e^{h(x-z)} \left[\frac{\partial}{\partial y} G_-(z, y, t) + h G_-(z, y, t) \right] dz \quad (\text{П.11})$$

два ее представления:

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \exp \left\{ -h\eta - \frac{(x+y+\eta)^2}{4t} \right\} d\eta, \quad (\text{П.12})$$

и

$$G_h(x, y, t) = G_+(x, y, t) - h e^{h^2 t + h(x+y)} \operatorname{erf} \left\{ h\sqrt{t} + \frac{(x+y)}{2\sqrt{t}} \right\}. \quad (\text{П.13})$$

Для этого используем явный вид функции G_- и учтем, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} G_-(z, y, t) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \exp \left\{ -\frac{(z-y)^2}{4t} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \exp \left\{ -\frac{(z+y)^2}{4t} \right\} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(-\frac{\partial}{\partial z} \exp \left\{ -\frac{(z-y)^2}{4t} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \exp \left\{ -\frac{(z+y)^2}{4t} \right\} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} G_+(z, y, t). \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Подставляя (П.14) в (П.11) и интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned}
 G_h(x, y, t) &= - G_+(z, y, t) e^{h(x-z)} \Big|_x^\infty + \\
 &+ h \int_x^\infty e^{h(x-z)} [G_-(z, y, t) - G_+(z, y, t)] dz = \\
 &= G_+(x, y, t) - \frac{h}{\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{h(x-z)} \exp \left\{ -\frac{(y+z)^2}{4t} \right\} dz.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение после замены переменной интегрирования $z = x + \eta$ переходит в выражение (П.12). Выражение (П.13) получается из (П.12) после интегрирования по η , которое нетрудно выполнить, выделяя полный квадрат в показателе экспоненты.

П.3. Операторы в криволинейных координатах

Ubi materia, ibi geometria.

(Где материя, там геометрия)

Иоганн Кеплер

В произвольной криволинейной системе координат x^i квадрат расстояния между двумя близкими точками может быть представлен в виде

$$dx^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

где коэффициенты g_{ij} образуют тензор второго ранга типа $(0, 2)$, называемый *метрикой*, dx^i — дифференциалы координат, то скалярный оператор Лапласа в общем виде может быть записан как

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\varphi\right), \quad (\text{П.15})$$

где $g = \det g_{ij}$, g^{ij} — тензор, обратный к g_{ij} .

Если выбранная система координат является криволинейной, но ортогональной, в этом случае дифференциальные векторные операции градиента, дивергенции и ротора могут быть достаточно просто записаны через *коэффициенты Ламе* h_k :

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \\ \operatorname{div}\vec{A} &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(A_1h_2h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_2h_3h_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_3h_1h_2)}{\partial x_3}\right), \\ \operatorname{rot}\vec{A} &= \det\begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_3h_1} & \frac{\vec{e}_3}{h_1h_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1h_1 & A_3h_3 & A_2h_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $\vec{e}_k$ — являются базисными векторами криволинейной системы координат, а коэффициенты h_k связаны с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями

$$h_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)^2}.$$

Соответствующая евклидова метрика может быть представлена через коэффициенты Ламе в виде

$$d^2x = \sum_{k=1}^3 h_k^2 dx_k^2.$$

Задачи

Р.3.1. Используя вариационный принцип для функционала

$$\frac{1}{2} \int ((\nabla \varphi)^2 + \lambda \varphi^2) d^n x,$$

и записывая его в произвольной криволинейной системе координат, получите выражение (П.15).

Р.3.2. Запишите выражение для метрики в следующих системах координат:

- цилиндрической;
- сферической;
- параболоидальной (ξ, η, φ) : $\xi \geq 0, 0 \leq \eta < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta);$$

- эллипсоидальной (ξ, η, φ) :

$$1 \leq \xi < \infty, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi,$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{1}{2} \xi \eta.$$

Р.3.3. Используя вид метрики в цилиндрической, сферической, параболоидальной, эллипсоидальной системах координат, запишите

- выражения для скалярного оператора Лапласа;
- коэффициенты Ламе;
- выражения для операций ∇ , div и rot в данных системах координат.

Список литературы

1. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Параболические уравнения: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. — 96 с. ISBN 978-5-904524-99-9.
2. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Уравнения в частных производных: введение: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2014. — 64 с. ISBN 978-5-4312-0272-8.
3. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Методы математической физики. Гиперболические уравнения: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. — 80 с. ISBN 978-5-904524-98-2.
4. Лебедев В. Г., Иванова Т. Б., Васькин В. В. Уравнения теплопереноса: учеб.-метод. пособие. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2018. — 104 с. ISBN 978-5-4312-0638-2.
5. <https://freefem.org/>
6. <https://www.comsol.ru/>
7. <https://www.maplesoft.com/products/Maple/>
8. <https://www.wolfram.com/mathematica/>
9. Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун.-та, 2000. — 608 с.
10. Метьюз В. В., Уокер В. Г. Методы математической физики. — М: Мир, 1972. — 392 с.
11. Агемян Т. А. Теория вероятностей для астрономов и физиков. — М.: Наука, 1974. — 264 с.

12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
13. Будак Б.М., Самарский А.А. Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 688 с.
14. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1984. — 344 с.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: МГУ, Наука, 2004. — 798 с.
16. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — 176 с.

Учебное издание

Лебедев Владимир Геннадьевич,
Иванова Татьяна Борисовна,
Васькин Владимир Васильевич,
Пивоварова Елена Николаевна

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Параболические уравнения

Учебно-методическое пособие
2-е издание, переработанное и дополненное

Авторская редакция

Отпечатано с оригинал-макета заказчика

Подписано в печать 14.03.2022. Формат 60х84 ¹/₁₆.

Усл. печ. л. 7,21. Уч.-изд. л. 6,11.

Тираж 300 экз. Заказ № 568.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел./факс: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18, 91-73-05