МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО «УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт экономики и управления
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра математического анализа

# Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

## Сборник задач.

Ижевск 2022

УДК 512+514 (075.8)
ББК 22.151.511я73+22.151.54я73
В 269

*Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ*

Рецензент: **Лашкарев А.Н.**, к.э.н., доцент кафедры управления социально-экономическими системами ИЭиУ ФГБОУ ВО УдГУ

Составители: **Бадаш Е.Х., Сметанин Ю.М.**

**В 269** Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник задач / Сост. Е.Х. Бадаш, Ю.М. Сметанин. – Ижевск: Изд-во института экономики и управления ФГБОУ ВО УдГУ, 2022. – 51 с.

Сборник содержит систематизированную подборку задач, для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов. Задачи снабжены ответами.

Сборник задач предназначен для студентов очной, заочной и очно-заочной форм обучения ИЭиУ, а также для студентов других институтов, изучающих раздел векторная алгебра и аналитическая геометрия в курсе высшей математики.

**УДК 512+514 (075.8)**
**ББК 22.151.511я73+22.151.54я73**

## Содержание

# Введение

Векторная алгебра и аналитическая геометрия являются одним из разделов, изучаемым в курсе высшей математики (математики).

Настоящий сборник представляет собой систематизированную подборку задач по векторной алгебре и аналитической геометрии. Предложенные задачи предполагается использовать как для проведения практических занятий, так и для самостоятельной работы студентов. Сборник задач состоит из 9 разделов. Вначале каждого раздела приведены основные формулы и примеры подробного решения задач.

Целью освоения раздела «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» является овладение основами алгебры и геометрии, приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов этого раздела при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных экономических закономерностей и процессов, описании динамики социально-экономических систем и прогнозировании развития экономики.

Достижение этих целей позволяет сформировать следующие компетенции обучающегося:

**УК -** Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

**ПК** - Способен участвовать в формулировке и решении управленческих задач и разработке стратегии организации в условиях конкурентной среды.

Указанные компетенции способствуют социальной мобильности будущего выпускника, его устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (стратегическое планирование, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

Сборник задач предназначен для студентов института экономики и управления, изучающих векторную алгебру и аналитическую геометрию в курсе математики. Но он также может быть использовано при проведении практических занятий на тех направлениях подготовки, где дисциплины «Высшая математика» или «Математика» включены в учебный план.

## 1. Линейные операции над векторами

Направленный отрезок принято называть вектором. Вектор считается заданным, если заданы его начало и конец. Вектор с началом в точке А и с концом в точке В обозначается $\overrightarrow{AB}$. Число, равное длине вектора, называется его модулем. Модуль вектора $\vec{a}$ обозначается символом $|\vec{a}|$. Будем считать векторы равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые направления и равные модули.

Для задания вектора при известном базисе достаточно записать тройку (двойку) чисел – его координаты в этом базисе. При этом следует помнить, что это тройка чисел упорядоченная. Так вектор в координатной форме может быть представлен в виде

$\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$. Если даны две точки $\mathrm{M}_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\mathrm{M}_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, являющиеся соответственно началом и концом вектора $\vec{a}$, то его координаты $a_1;\ a_2;\ a_3$ определяются по формулам $a_1 = x_2 - x_1;\ a_2 = y_2 - y_1;\ \ a_3 = z_2 - z_1$.

Если два вектора расположены так, что конец одного из них служит началом второго (рис. 1), то их суммой является вектор, началом которого служит начало первого слагаемого, а концом – конец второго слагаемого.

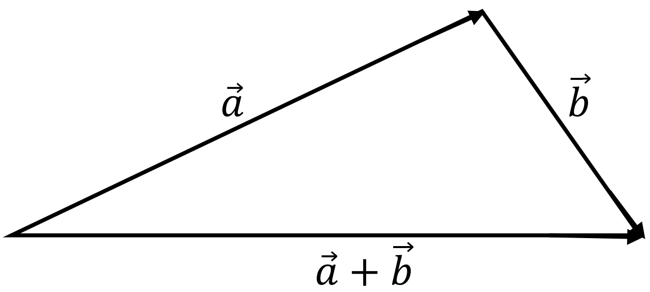


Рис. 1

Пусть заданы координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в некотором базисе: $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\ \vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3) \text{ и}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3).$$

Если $\alpha$ – любое число, то справедливо равенство $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1;\ \alpha \cdot a_2;\ \alpha \cdot a_3)$.

Условие коллинеарности в координатной форме можно сформулировать в следующем виде: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ .

**П р и м е р.** Дан треугольник АВС (рис. 2), в котором $\overrightarrow{AB} = \vec{p}, \overrightarrow{BC} = \vec{q}$. Выразить векторы $\overrightarrow{AK},\ \overrightarrow{BL},\ \overrightarrow{CM}$, где *K*,*L*,*M* – основания медиан, через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

**Решение.**

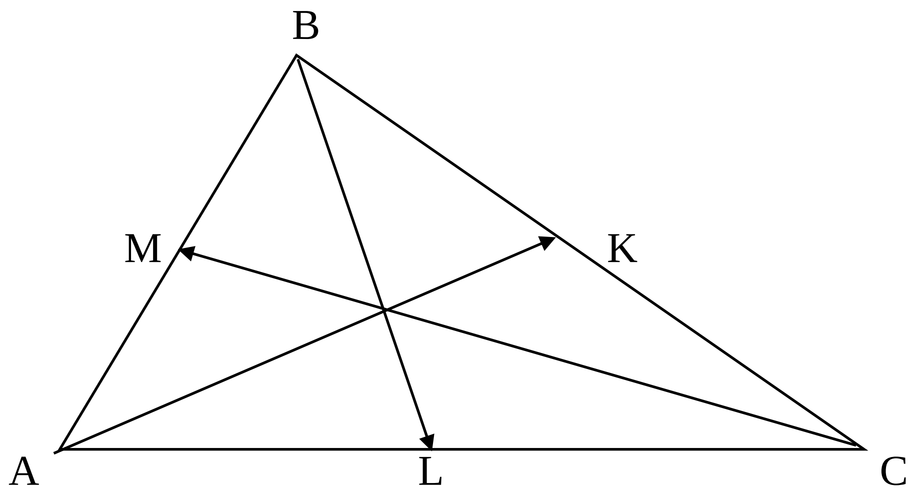


Рис. 2

Пользуясь определением суммы двух векторов, получаем $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$. Так как $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (это следует из определения медианы: $K$ – основание медианы), $\overrightarrow{AB} = \vec{p},\ \overrightarrow{BC} = \vec{q}$, то $\overrightarrow{AK} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$. Далее, $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CL},\ \overrightarrow{CL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (векторы $\overrightarrow{CL}$ и $\overrightarrow{AC}$ противоположно направлены), $\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$, поэтому $\overrightarrow{BL} = \vec{q} - \frac{1}{2}(\vec{p} + \vec{q}) = \frac{1}{2}(\vec{q} - \vec{p})$. Аналогично находим, что $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{p},\ \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\vec{p} + \vec{q})$, тогда $\overrightarrow{CM} = -(\vec{p} + \vec{q}) + \frac{1}{2}\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{q}$.

1.1 По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

1.2 Даны $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=19$ и $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.3 Даны $|\vec{a}|=11, |\vec{b}|=23$ и $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$.

1.4 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=12$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.5 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^{\circ}$, причем $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=8$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.6 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=120^{\circ}$, причем $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=5$. Определить $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.7 По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

1.8 В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов: 1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$; 4) $-\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$.

1.9 В правильном пятиугольнике ABCDE заданы векторы, совпадающие с его сторонами: $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$ и $\overrightarrow{EA}=\vec{r}$. Построить векторы: 1) $\vec{m}-\vec{n}+\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; 2) $\vec{m}+2\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{r}$; 3) $2\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}-3\vec{p}-\vec{q}+2\vec{r}$.

1.10 В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$ и вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{q}$. Точка $N$ – середина медианы $AM$. Выразить вектор $\overrightarrow{CN}$ через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

1.11 В треугольнике ABC угол B прямой, т.е. $\widehat{\mathrm{B}}=90°$. Вектор $\vec{p}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и имеет с ним одинаковое направление ($\vec{p}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$), а вектор $\vec{q}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AC}$ и имеет с ним одинаковое направление ($\vec{q}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$). Длины векторов равны:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3, \left|\overrightarrow{AC}\right| = 4, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 1$. Выразить вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

1.12 В равнобочной трапеции ABCD вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$ и вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Угол $\hat{A} = 60°$ (или угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°). Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1.13 Даны две координаты вектора $\vec{a}$: $a_1 = 4$, $a_2 = -12$. Определить его третью координату $a_3$ при условии, что $|\vec{a}| = 13$.

1.14 Даны два вектора $\vec{a} = (3; -2; 6)$ и $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Определить координаты следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$; 4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

1.15 Проверить коллинеарность векторов $\vec{a} = (2; -1; 3)$ и $\vec{b} = (-6; 3; -9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

1.16 Определить при каких значениях $\alpha$ и $\beta$ векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

1.17 Проверить, что четыре точки $A$(3; -1; 2), $B$(1; 2; -1), $C$(-1; 1; -3), $D$(3; -5; 3) служат вершинами трапеции.

1.18 Даны точки $A$(-1;5;-10), $B$(5;-7;8), $C$(2;2;-7) и $D$(5;-4;2). Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну или в противоположные стороны.

1.19 Найти орт вектора $\vec{a} = (6; -2; -3)$.

1.20 Найти орт вектора $\vec{a} = (3; 4; -12)$.

1.21 Определить модули суммы и разности векторов $\vec{a} = (3; -5; 8)$ и $\vec{b} = (-1; 1; -4)$.

1.22 Дано разложение вектора $\vec{c}$ по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Определить разложение по этому же базису вектора $\vec{d}$, параллельного вектору $\vec{c}$ и противоположного с ним направления, при условии, что $\left|\vec{d}\right| = 75$.

1.23 Два вектора $\vec{a} = (2; -3; 6)$ и $\vec{b} = (-1; 2; -2)$ приложены к одной точке. Определить координаты вектора $\vec{c}$, направленного по биссектрисе угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, при условии, что $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

1.24 Векторы $\overrightarrow{AB} = (2; 6; -4)$ и $\overrightarrow{AC} = (4; 2; -2)$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающие с его медианами AM, BN, CP.

1.25 На плоскости даны два вектора $\vec{p} = (2; -3)$, $\vec{q} = (1; 2)$. Найти разложение вектора $\vec{a} = (9; 4)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

1.26 Даны три вектора $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Определить разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$.

1.27 На плоскости даны четыре точки $A$(1;-2), $B$(2;1), $C$(3;2) и $D$(-2;3). Определить разложение векторов $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}$, принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.28 Даны три вектора $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (-1; 1; -2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$. Найти разложение вектора $\vec{c} = (11; -6; 5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$.

1.29 Даны четыре вектора $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$ и $\vec{d} = (3; 7; -7)$. Определить разложение каждого из этих четырех векторов, принимая в качестве базиса три остальных.

## Ответы

1.2 $|\vec{a} - \vec{b}| = 22.$

1.3 $|\vec{a} + \vec{b}| = 20.$

1.4 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 13.$

1.5 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}, \ |\vec{a} - \vec{b}| = 7.$

1.6 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}, \ |\vec{a} - \vec{b}| = 7.$

1.13 $a_3 = \pm 3$.

1.14 1) (1; -1; 6); 2) (5; -3; 6); 3) (6; -4; 12); 4) (1; -0,5; 0);

5) (0; -1; 12); 6) (3; -$\frac{5}{3}$; 2).

1.15 $|\vec{b}| = 3|\vec{a}|,\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1.16 $\alpha = 4, \beta = -1$.

1.18 $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{CD}|,\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

1.19 $\overrightarrow{a^\circ} = (\frac{6}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7})$.

1.20 $\overrightarrow{a^\circ} = (\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ -\frac{12}{13})$.

1.21 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6,\ |\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

1.22 $\vec{d} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$.

1.23 $\vec{c} = (-3; 15; 12)$.

1.24 $\overrightarrow{AM} = (3; 4;\ -3),\ \overrightarrow{BN} = (0;\ -5;\ 3),\ \overrightarrow{CP} = (-3; 1; 0)$.

1.25 $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

1.26 $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

1.27 $\overrightarrow{AD} = 11\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD} = 10\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CD} = 11\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 32\overrightarrow{AB} - 22\overrightarrow{AC}$.

1.28 $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

1.29 $\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d},\ \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}$,

$\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d},\ \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ .

## 2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение будем обозначать $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Таким образом, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\mathrm{\vec{b}}|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

Скалярное произведение двух равных векторов $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и может обозначаться символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2}$**.**

Для того, чтобы скалярное произведение было равно нулю $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, необходимо и достаточно, чтобы вектора – сомножители были перпендикулярны, т.е. $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 90°$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно вычислить по формуле

$$cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

**П р и м е р 1.** Найти вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (1; 2; -3)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = 28$.

**Решение.** Обозначим координаты вектора $\vec{b}$ неизвестными $x$,$y$ и $z$, т.е. $\vec{b} = (x; y; z)$. Так как вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то их соответствующие координаты пропорциональны

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} = \lambda,$$

где $\lambda$ - пока неизвестный коэффициент. Тогда координаты вектора $\vec{b}$ могут быть записаны $x = \lambda;\ y = 2\lambda;\ z = -3\lambda$ или

$\vec{b} = (\lambda;\ 2\lambda;\ -3\lambda)$.
Воспользуемся формулой скалярного произведения в координатной форме для нахождения $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \lambda + 2 \cdot 2\lambda + (-3) \cdot (-3\lambda) = 14\lambda.$$

По условию задачи это скалярное произведение равно 28, т.е. $14\lambda = 28$, откуда $\lambda = 2$. Следовательно, $\vec{b} = (2; 4; -6)$.

**П р и м е р 2.** Даны три вектора $\vec{a} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 10\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c}$, $\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

**Решение.** Для нахождения проекций вначале найдем координаты векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $2\vec{a} - 3\vec{c}$. Запишем вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в координатной форме $\vec{a} = (1; -2;\ 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -2)$, $\vec{c} = (10; 4; 2)$. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \big(1 + 2;\ -2 + 1; 2 + (-2)\big) = (3;\ -1; 0)$$

$2\vec{a} = (2 \cdot 1; 2 \cdot (-2); 2 \cdot 2) = (2; -4; 4)$, $3\vec{c} = (3 \cdot 10; 3 \cdot 4; 3 \cdot 2) = (30; 12; 6)$

$$2\vec{a} - 3\vec{c} = (2 - 30;\ -4 - 12; 4 - 6) = (-28;\ -16;\ -2)$$

Формула для нахождения первой проекции имеет вид

$$\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c} = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}}{\left|\vec{a} + \vec{b}\right|}\ .$$

Вычислим скалярное произведение в координатной форме:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 3 \cdot 10 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 26\,.$$

Найдем длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ , в итоге

$$\text{пр}_{(\vec{a}+\vec{b})}\vec{c} = \frac{26}{\sqrt{10}}\,.$$

Запишем формулу для вычисления второй проекции

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{c}) = \frac{(2\vec{a} - 3\vec{c}) \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\ .$$

Найдем скалярное произведение:

$$(2\vec{a}-3\vec{c})\cdot\vec{b} = -28\cdot 2 + (-16)\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) = -68$$

и длину вектора $\vec{b}$: $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ .

Окончательный результат

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a}-3\vec{c}) = -\frac{68}{3}.$$

2.1 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}\cdot\vec{a}$; 3) $\vec{b}\cdot\vec{b}$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

2.2 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образуют с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$ ; зная, что, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: 1) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$; 2) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$; 3) $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

2.3 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен $60^\circ$. Зная, что, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

2.4 Дано, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определить, при каком значении $\alpha$ векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}, \vec{a}-\alpha\vec{b}$ , будут взаимно перпендикулярны.

2.5 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$; зная, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, вычислить угол $\alpha$ между векторами $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a}-\vec{b}$.

2.6 Упростить выражение $\vec{a}\cdot\vec{a} + 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 2(\vec{b}\cdot\vec{c}) + 1$, если $\vec{a} = 4\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{c} = 2\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 1$ и угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\frac{\pi}{2}$.

2.7 Вычислить скалярное произведение двух векторов $\vec{p}\cdot\vec{q}$, зная их разложение по трём единичным взаимно перпендикулярным векторам $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{p} = 3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$;

$\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} - 5\vec{c}$.

2.8 Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, зная, что $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

2.9 Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $(\widehat{\vec{p}\vec{q}}) = \frac{\pi}{4}$.

2.10 Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2.11 Зная векторы, образующие треугольник: $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} - 6\vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a} + 7\vec{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -3\vec{a} - \vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные орты, определить углы этого треугольника.

2.12 Зная разложение вектора $\vec{Q} = 6\vec{m} - 2\vec{n} + 3\vec{p}$ по трём взаимно перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\vec{Q}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\vec{m}, \vec{n}$ и $\vec{p}$.

2.13 Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$, определить, при каком значении коэффициента $\alpha$ векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся перпендикулярными.

2.14 Какой угол образуют единичные векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если известно, что векторы $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ и $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ взаимно перпендикулярны.

2.15 Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{BC} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$. Вычислить длины медиан треугольника ABC.

2.16 Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 3) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 4) $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

2.17 Даны точки $A$(-1;3;-7), $B$(2;-1;5) и $C$(0;1;-5). Вычислить: 1) $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) \cdot (2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$; 2) найти координаты векторов $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC})$.

2.18 Даны вершины четырехугольника $A$(1;-2;2), $B$(1;4;0), $C$(-4;1;1) и $D$(-5;-5;3). Доказать, что диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

2.19 Определить при каком значении $\alpha$ векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

2.20 Даны вершины треугольника $A$(-1;-2;4), $B$(-4;-2;0) и $C$(3;-2;1). Определить его внутренний угол при вершине B.

2.21 Вычислив внутренние углы треугольника с вершинами $A$(1;2;1), $B$(3;-1;7), $C$(7;4;-2), убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

2.22 Вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (6; -8; -7{,}5)$, образует острый угол с осью $Oz$. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его координаты.

2.23 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

2.24 Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$, образует с осью $Oy$ тупой угол. Найти его координаты, зная, что $|\vec{x}| = 14$.

2.25 Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2; 3; -1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot \vec{c} = -6$, где $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2.26 Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; 5)$ и $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Найти вектор $\vec{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси $Oz$ и удовлетворяет условиям $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

2.27 Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий условиям $\vec{x} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 20$.

2.28 Найти проекцию вектора $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ – взаимно перпендикулярные орты.

2.29 Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = (5; 2; 5)$ на ось вектора $\vec{b} = (2; -1; 2)$.

2.30 Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить пр$_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

2.31 Даны векторы $\vec{a} = (1; -3; 4)$, $\vec{b} = (3; -4; 2)$ и $\vec{c} = (-1; 1; 4)$. Вычислить пр$_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

2.32 Даны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$ и $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Вычислить пр$_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

## Ответы

2.1 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37); 7) 73.

2.2 1) –62; 2) 162; 3) 373.

2.3 $|\vec{p}| = 10$.

2.4 $\alpha = \pm 0{,}6$.

2.5 $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2.6 104.

2.7 $\vec{p} \cdot \vec{q} = 9$.

2.8 $|\vec{a}| = 5$.

2.9 $|\vec{a} + \vec{b}| = 15, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$.

2.10 $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

2.11 $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ; $\hat{B} = arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ; $\hat{C} = arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

2.12 $|\vec{Q}| = 7; \cos\left(\widehat{\vec{Q}\vec{m}}\right) = \frac{6}{7}$ ; $\cos\left(\widehat{\vec{Q}\vec{n}}\right) = -\frac{2}{7}$ ; $\cos\left(\widehat{\vec{Q}\vec{p}}\right) = \frac{3}{7}$ .

2.13 $\alpha = 40$.

2.14 $\left(\widehat{\vec{s}\vec{t}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

2.15 $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 6.$

2.16 1) 22; 2) 129; 3) -200; 4) 41.

2.17 1) -524; 2) $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}$= (-70; 70; -350);

$\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$=(-78; 104; -312).

2.19 $\alpha = -6.$

2.20 $45°.$

2.22 $\vec{x} = (-24; 32; 30).$

2.23 $\vec{x} = (1; 0{,}5; -0{,}5).$

2.24 $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}.$

2.25 $\vec{x} = (-3; 3; 3).$

2.26 $\vec{x} = (2; -3; 0).$

2.27 $\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$

2.28 $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = 2.$

2.29 6.

2.30 −4.

2.31 5.

2.32 -11.

## 3. Векторное произведение векторов

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, обладающий следующими свойствами:

а) вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку;

б) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

в) модуль вектора $\vec{c}$ равен произведению длин векторов – сомножителей на синус угла между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Векторное произведение принято обозначать $\vec{a} \times \vec{b}$.

При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

Для того, чтобы векторное произведение было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы векторы – сомножители были коллинеарны. В частности, $\boldsymbol{\vec{a}} \times \boldsymbol{\vec{a}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы в координатной форме $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3), \vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$. Векторное произведение в координатной форме имеет вид

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Полученную формулу можно представить в виде символического определителя $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$,

который раскрывается по элементам первой строки согласно теореме разложения, с учетом соответствующих действий над векторами.

**П р и м е р 1.** Упростить выражение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b})$.

**Решение.** Воспользуемся свойствами векторного произведения

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a} \times \vec{a} + 15\vec{a} \times \vec{b} - 4\vec{b} \times \vec{a} - 10\vec{b} \times \vec{b}.$$

Так как $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$ и $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$, получим

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (2\vec{a} + 5\vec{b}) = 15\vec{a} \times \vec{b} + 4\vec{a} \times \vec{b} = 19\vec{a} \times \vec{b}.$$

**П р и м е р 2.** Даны точки $A(1; -2; 0)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(0; 3; 1)$. Найти площадь параллелограмма ABCD, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ как на сторонах (рис.3).


Рис. 3

**Решение.** Площадь параллелограмма ABCD, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, равна $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = (1; 3;\ -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 5;\ 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 8\vec{i} - 0\vec{j} + 8\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8; 0; 8)$. Тогда $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8^2 + 0^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$.
Следовательно, площадь параллелограмма ABCD равна S=$8\sqrt{2}$.

3.1 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $\left|\vec{b}\right| = 5$, вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

3.2 Даны $|\vec{a}| = 10$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Вычислить $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

3.3 Даны $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 26$ и $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = 72$. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

3.4 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 4$, вычислить:
1) $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\right|$; 2) $\left|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})\right|$.

3.5 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить:

1) $\left|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\right|$; 2) $\left|(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\overrightarrow{3a} - \vec{b})\right|$.

3.6 При каком значении коэффициента $\alpha$ векторы $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ окажутся коллинеарными, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны?

3.7 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – единичные взаимно перпендикулярные векторы.

3.8 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$ и $(\widehat{\vec{m}\vec{n}}) = \frac{\pi}{6}$.

3.9 Зная две стороны треугольника $\overrightarrow{AB} = 3\vec{p} - 4\vec{q}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{p} + 5\vec{q}$, вычислить длину его высоты $\overrightarrow{CD}$ при условии, что $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – перпендикулярные друг другу орты.

3.10 Разложить вектор $\vec{P} = (3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \times (\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c})$ по взаимно перпендикулярным ортам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, образующим правую тройку.

3.11 Дан вектор $\vec{Q} = (3\vec{m} + 4\vec{n} + 5\vec{p}) \times (\vec{m} + 6\vec{n} + 4\vec{p})$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты, образующие левую тройку. Вычислить его длину.

3.12 Вычислить синус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$, где $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ – взаимно перпендикулярные орты.

3.13 Вычислить проекцию вектора $\vec{A} = 3\vec{p} - 12\vec{q} + 4\vec{r}$ на ось, имеющую направление вектора $\vec{B} = (\vec{p} - 2\vec{r}) \times (\vec{p} + 3\vec{q} - 4\vec{r})$, если $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

3.14 Даны векторы $\vec{a} = (3; -1; -2)$ и $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найти координаты векторных произведений:

1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

3.15 Даны точки $A$(2;-1;2), $B$(1;2;-1) и $C$(3;2;1). Найти координаты векторных произведений:

1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

3.16 Даны точки $A$(1;2;0), $B$(3;0;-3) и $C$(5;2;6). Вычислить площадь треугольника ABC.

3.17 Даны вершины треугольника $A$(1;-1;2), $B$(5;-6;2) и $C$(1;3;-1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

3.18 Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a} = (2; -2; 1)$ и $\vec{b} = (2; 3; 6)$.

3.19 Вектор $\vec{Q}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a} = (4; -2; -3)$ и $\vec{b} = (0; 1; 3)$, образует с осью $Oy$ тупой угол. Зная, что $|\vec{Q}| = 26$, найти его координаты.

3.20 Вектор $\vec{m}$, перпендикулярный к оси $Oz$ и к вектору $\vec{a} = (4; -2; -3)$, образует острый угол с осью $Ox$. Зная, что $|\vec{m}| = 51$, найти его координаты.

3.21 Найти вектор $\vec{Q}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = (2; -3; 1)$ и $\vec{b} = (1; -2; 3)$ и удовлетворяет условию $\vec{Q} \cdot (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}) = 10$.

## Ответы

3.1 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 15$.

3.2 $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$.

3.3 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm 30$.

3.4 1) 24; 2) 60.

3.5 1) $3\sqrt{3}$; 2) $10\sqrt{3}$.

3.6 $\alpha = -15$.

3.7 $|\vec{p} \times \vec{q}| = 11$.

3.8 37,5 кв. ед.

3.9 $|CD| = 3{,}8$.

3.10 $\vec{P} = 3\vec{a} - 17\vec{b} - 4\vec{c}$.

3.11 $|\vec{Q}| = 21$.

3.12 $\sin\varphi = \sqrt{{}^{248}/_{273}}$.

3.13 $\text{пр}_{\vec{B}}\vec{A} = \frac{6}{7}$, если $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ составляют правую тройку,

$\text{пр}_{\vec{B}}\vec{A} = -\frac{6}{7}$, если $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ составляют левую тройку.

3.14 1) (5; 1; 7); 2) (10; 2; 14); 3) (20; 4; 28).

3.15 1) (6; -4; -6); 2) (-12; 8; 12).

3.16 14.

3.17 5.

3.18 $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$.

3.19 (-6; -24; 8).

3.20 $\vec{m} = (45; 24; 0)$.

3.21 $\vec{Q} = (7; 5; 1)$.

## 4. Смешанное произведение трех векторов

Если вектор $\vec{a}$ умножить векторно на вектор $\vec{b}$, а затем полученный результат умножить скалярно на вектор $\vec{c}$, то получится число, которое называется смешанным произведением трех данных векторов. Обозначить смешанное произведение можно $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Смешанное произведение принято коротко записывать в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ , где опущены знаки действий и скобки, поскольку безразлично, какие два из рядом стоящих вектора перемножаются векторно, т.е. $\left(\vec{\mathrm{a}}\times\vec{\mathrm{b}}\right)\cdot\vec{\mathrm{c}}=\vec{\mathrm{a}}\cdot\left(\vec{\mathrm{b}}\times\vec{\mathrm{c}}\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, составленного из координат этих векторов:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**П р и м е р.** Найти объём пирамиды, вершины которой находятся в точках *A*(-1; 0; -2), *B*(2; 2; 1), *C*(3; 0; -1) и D(3; 2; 2).

**Решение.**

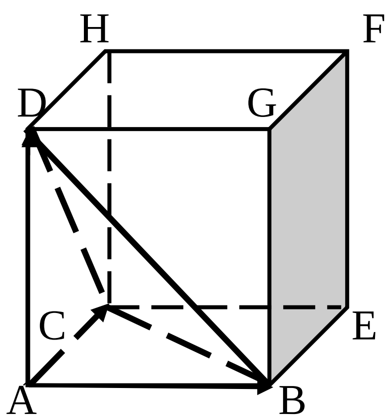


Рис. 4

Объём пирамиды (тетраэдра) равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда ABECDGFH (рис.4), построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Найдем

координаты векторов $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:
$\overrightarrow{AB} = (3;2;\ -1),\ \overrightarrow{AC} = (4;0;\ -3),\ \overrightarrow{AD} = (4;2;0)$.

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}V_{\text{паралл}-\text{да}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right|$$

$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$ Так как смешанное произведение положительно, то модуль этого смешанного произведения равен самому числу, т.е. $\left|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}\right| = 2.$ $V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$.

4.1 Определить, какой является тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (правой или левой), если:
1) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{b} = \vec{\jmath}, \vec{c} = \vec{k}$;
2) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{c} = \vec{\jmath}$;
3) $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}, \vec{c} = \vec{k}$.

4.2 Проверить, компланарны ли данные векторы:
1) $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$; $\vec{r} = 7\vec{a} + 14\vec{b} - 13\vec{c}$;
2) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$; $\vec{q} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$; $\vec{r} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}$,
где $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – взаимно перпендикулярные орты.

4.3 Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4.4 Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4.5 Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{q} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ и $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

4.6 Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах:
1) $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}, \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} + 2\vec{q} + \vec{r}$, где $\vec{p},\vec{q}$ и $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты;

2) $\vec{a} = 3\vec{m} + 5\vec{n},\ \vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n},\ \vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n},$ где $|\vec{m}| = \frac{1}{2},$ $|\vec{n}| = 3,\ (\widehat{\vec{m}\vec{n}}) = 135°.$

4.7 Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на трёх векторах: $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q} - 5\vec{r}, \vec{b} = \vec{p} - \vec{q} + 4\vec{r}$ и $\vec{c} = \vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Кроме того, известно, что $\vec{p}, \vec{q}$ и $\vec{r}$ – взаимно перпендикулярные орты.

4.8 Даны векторы $\vec{a} = (1; -1;\ 3),\ \vec{b} = (-2; 2; 1),\ \vec{c} = (3; -2; 5)$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4.9 Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, если:

1) $\vec{a} = (2; 3; -1),\ \vec{b} = (1; -1; 3),\ \vec{c} = (1; 9; -11);$
2) $\vec{a} = (3; -2; 1),\ \vec{b} = (2; 1; 2),\ \vec{c} = (3; -1; -2);$
3) $\vec{a} = (2; -1; 2),\ \vec{b} = (1; 2; -3),\ \vec{c} = (3; -4; 7).$

4.10 Доказать, что точки $A$(1;2;-1), $B$(0;1;5), $C$(-1;2;1), $D$(2;1;3) лежат в одной плоскости.

4.11 Вычислить объём тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A$(2; -1; 1), $B$(5; 5; 4), $C$(3; 2; -1) и $D$(4; 1; 3).

4.12 Даны вершины тетраэдра $A$(2; 3; 1), $B$(4; 1; -2), $C$(6; 3; 7) и $D$(-5; -4; 8). Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

4.13 Объём тетраэдра V=5, три его вершины находятся в точках $A$(2;1;-1), $B$(3;0;1), $C$(2;-1;3). Найти координаты четвертой вершины $D$, если известно, что она лежит на оси $Oy$.

## Ответы

4.1 1) правая; 2) вектора компланарны; 3) левая.
4.2 1) компланарны; 2) не компланарны.
4.3 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 24.$

4.4 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm 27$; знак плюс в том случае, когда тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая, и минус, когда эта тройка левая.

4.5 $V = 4\left|\vec{c}\vec{b}\vec{a}\right|$.

4.6 1) V=25 куб. ед. 2) V=0.

4.7 $h = \frac{49}{\sqrt{323}}$.

4.8 $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -7$.

4.9 1) компланарны; 2) не компланарны;
3) компланарны.

4.11 V=3.

4.12 h=11.

4.13 $D_1 = (0; 8; 0)$, $D_2 = (0; -7; 0)$.

## 5. Деление отрезка в данном отношении.

Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой, проходящей через две данные точки $A(x_A;\ y_A), B(x_B;\ y_B)$, и дано отношение $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$, в котором точка M делит отрезок [AB], то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda} \qquad (1)$$

Если точка M является серединой отрезка [AB], то её координаты определяются по формулам

$$x = \frac{x_A+x_B}{2},\quad y = \frac{y_A+y_B}{2} \qquad (2)$$

**П р и м е р.** Треугольник задан координатами своих вершин A(3; -2), B(3; 1) и C(4; 0). Найти координаты D – точки пересечения его медиан.

**Решение.**

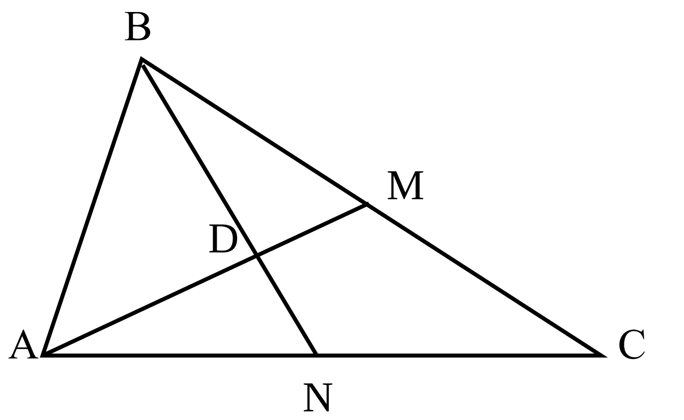


Рис. 5

Обозначим через M($x_0$; $y_0$) середину отрезка BC (рис.5), тогда по формулам (2) $x_0 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$ , $y_0 = \frac{1+0}{2} = 0{,}5$ и M(3,5; 0,5). Точка D делит медиану AM в отношении 2:1, то есть $\frac{|AD|}{|DM|} = 2 = \lambda$.

Применяя формулы (1), находим координаты точки D

$$x = \frac{3+2\cdot 3{,}5}{1+2} = \frac{10}{3},\quad y = \frac{-2+2\cdot 0{,}5}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

И так, искомые координаты равны D $(\frac{10}{3};\ -\frac{1}{3})$.

5.1 Даны вершины треугольника A(1; -3), B(3; -5) и C(-5; 7). Определить координаты середины сторон.

5.2 Даны точки A(3; -1) и B(2; 1). Определить:
1) координаты точки M, симметричной точке A относительно точки B;
2) координаты точки N, симметричной точке B относительно точки A.

5.3 Точки M(2; -1), N(-1; 4) и P(-2; 2) являются серединами сторон треугольника. Определить координаты его вершин.

5.4 Даны три вершины параллелограмма A(3; -5), B(5; -3) и C(-1; 3). Определить четвертую вершину D, противоположную B.

5.5 Даны две смежные вершины параллелограмма A(-3; 5), B(1; 7) и точка пересечения его диагоналей M(1; 1). Определить две другие его вершины.

5.6 Даны вершины треугольника A(1; 4), B(3; -9) и C(-5; 2). Определить длину его медианы, проведенной из вершины B.

5.7 Отрезок, ограниченный точками A(1; -3) и B(4; 3) , разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.

## Ответы

| | |
|---|---|
| 5.1 | (2; -4) – середина стороны AB; |
| | (-1; 1) – середина стороны BC; |
| | (-2; 2) – середина стороны AC. |
| 5.2 | 1) M (1; 3);   2) N (4; -3). |
| 5.3 | (1; -3), (3; 1), (-5; 7). |
| 5.4 | D (-3; 1). |
| 5.5 | (5; -3);   (1; -5). |
| 5.6 | 13. |
| 5.7 | (2; -1);   (3; 1). |

## 6. Уравнения прямой на плоскости

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ (3)
называется общим уравнение прямой. В общем уравнении прямой коэффициенты при переменных $x$ и $y$, т.е. $A$ и $B$ являются координатами нормального вектора $\bar{n}$ и наоборот. Любой ненулевой вектор $\bar{n}$, перпендикулярный прямой $l$, называется нормальным вектором этой прямой.

Любой ненулевой вектор $\vec{s}$, параллельный прямой $l$, называется направляющим вектором этой прямой. Уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \qquad (4)$$

называется каноническим уравнением прямой, или уравнением прямой, проходящей через данную точку параллельно заданному вектору $\vec{s}$.

При $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$ уравнение $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. (5)
называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.

Если две прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то условие параллельности двух прямых имеет вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

**П р и м е р 1.** Даны уравнения двух сторон прямоугольника $2x - 3y + 5 = 0$, $3x + 2y - 7 = 0$ и одна из его вершин $A(2; -3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

**Решение.** Проверим лежит ли точка $A$ на заданных сторонах прямоугольника. Подставим в уравнение $2x - 3y + 5 = 0$ вместо $x$ и $y$ координаты точки $A$, получим $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 5 = 18 \neq 0$, т.е. координаты точки $A$ не удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, точка $A$ не лежит на данной прямой. Подставим координаты точки $A$ в уравнение второй стороны $3x + 2y - 7 = 0$: $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 7 = -7 \neq 0$, т.е. точка $A$ не лежит на данной стороне.

Обозначим уравнение стороны $2x-3y+5=0$ – $l_1$, а стороны $3x+2y-7=0$ – $l_2$. Нормальный вектор прямой $l_1$ равен $\bar{n}_1=(2;-3)$, а прямой $l_2$ – $\bar{n}_2=(3;2)$. Т.к. эти вектора не коллинеарны и $\bar{n}_1 \neq \bar{n}_2$, то прямые $l_1$ и $l_2$ не параллельны. Исходя из предыдущих рассуждений рисунок 6, соответствующий условию задачи имеет вид.

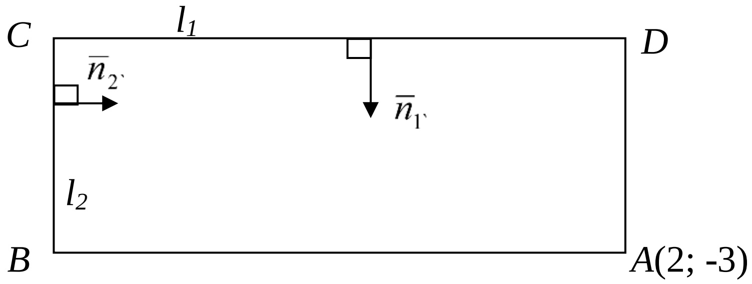


Рис. 6

Найдем уравнение прямой $AD$. Эта прямая проходит через точку $A$. Т.к. прямая $(AD)$ параллельна прямой $(CB)$, то их нормальные вектора могут быть равными. Поэтому за нормальный вектор прямой $(AD)$ можно взять вектор $\bar{n}_2=(3;2)$ – нормальный вектор прямой $l_2$, совпадающей со стороной $CB$. Итак, для прямой $(AD)$ известен нормальный вектор $\bar{n}_{AD}=\bar{n}_2=(3;2)$ и точка $A$, через которую прямая проходит. Следовательно, можно воспользоваться общим уравнением прямой (3) $Ax+By+C=0$, где коэффициенты $A$ и $B$ это координаты нормального вектора, т.е. $A=3$, $B=2$:
$3x+2y+C=0.$

Для того, чтобы найти свободный член $C$, подставим координаты точки в записанное уравнение вместо $x$ и $y$, получим $3\cdot 2+2\cdot(-3)+C=0$. Отсюда $C=0$, следовательно, уравнение прямой $(AD)$ имеет вид $3x+2y=0$.

Найдем уравнение прямой $(BA)$. Т.к. эта прямая параллельна прямой $l_1$, совпадающей со стороной $CD$, то в качестве нормального вектора прямой $(BA)$ можно взять вектор $\bar{n}_1=(2;-3)$ – нормальный вектор прямой $l_1$. Т.е. нормальный вектор прямой $(BA)$ имеет вид $\bar{n}_{BA}=\bar{n}_1=(2;-3)$. Воспользовавшись общим уравнением прямой (3) для прямой $(BA)$ получим $2x-3y+C=0$. Т.к. данная прямая проходит

через точку $A$, то для нахождения величины $C$ подставим в полученное уравнение вместо $x$ и $y$ координаты точки $A(2;-3)$:
$2\cdot 2-3\cdot(-3)+C=0.$

Отсюда $13+C=0 \Rightarrow C=-13$. Тогда уравнение прямой $(BA)$ имеет вид $2x-3y-13=0$.

Ответ: $AD: 3x+2y=0,\quad BA: 2x-3y-13=0.$

**П р и м е р 2**. Дан треугольник $ABC$ с вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$ и $C(5;4)$. Составить уравнение высоты $CD$ (рис. 7).

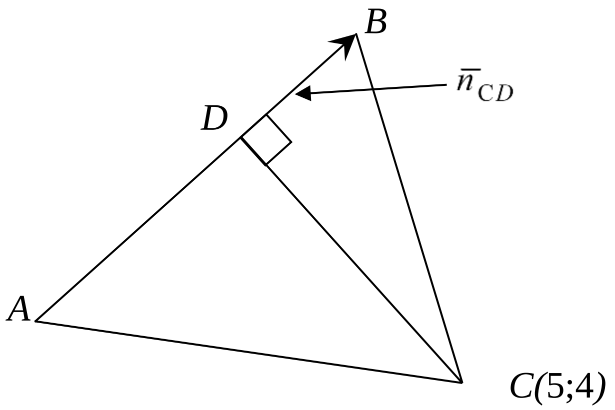


Рис. 7

**Решение.** Так как $CD$ является высотой треугольника, то она перпендикулярна стороне $AB$. Следовательно, в качестве вектора перпендикулярного прямой $(CD)$ можно выбрать вектор $\overline{AB}$. То есть $\bar{n}_{CD} = \overline{AB} = (-6; 9)$. Так как известен нормальный вектор прямой, то можно воспользоваться общим уравнением прямой $Ax+By+C=0$, где коэффициенты $A$ и $B$ являются координатами нормального вектора $\bar{n}_{CD}$, т.е. $-6x+9y+C=0$. Для того, чтобы найти свободный член $C$, подставим координаты точки $C(5;4)$ в искомое уравнение вместо $x$ и $y$ соответственно, получим $-6\cdot 5+9\cdot 4+C=0 \Rightarrow 6+C=0 \Rightarrow C=-6$. Уравнение прямой $(CD)$ примет вид $-6x+9y-6=0$. Разделим коэффициенты левой и правой части уравнения на $(-3)$, в итоге получим $2x-3y+2=0$.

Ответ: $CD: 2x - 3y + 2 = 0.$

**П р и м е р 3**. Дан треугольник с вершинами $A(-1; -2)$, $B(2; -2)$ и $C(1; 3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину $C$ параллельно стороне $AB$.

**Решение.** Из условия задачи следует, что прямая $l$ параллельна стороне $AB$ (рис. 8). Поэтому вектор, лежащий на прямой $AB$ будет параллелен прямой $l$, или являться для нее направляющим вектором. В качестве такого вектора можно выбрать вектор $\overline{AB} = (3; 0)$, т.е. $\bar{s}_l = (3; 0)$. Т.к. известен направляющий вектор прямой, то для нахождения уравнения прямой $l$ можно воспользоваться каноническим уравнением прямой (4): $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, где $m$ и $n$ –.

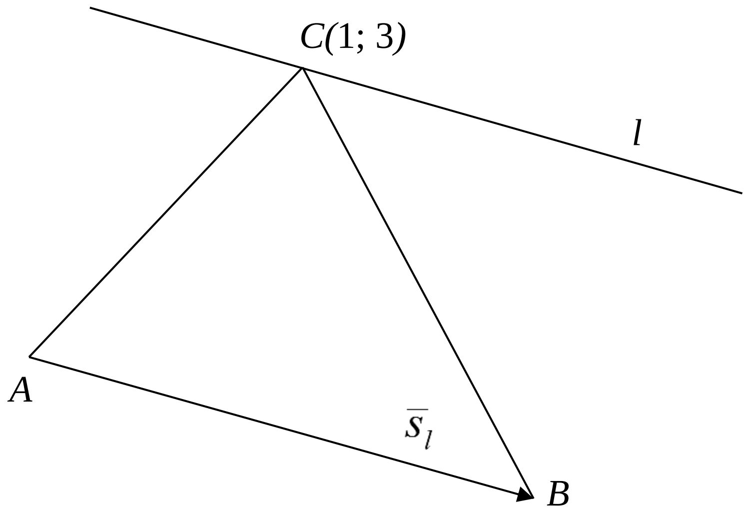


Рис. 8

координаты направляющего вектора прямой. Напоминаю, что направляющий вектор – вектор параллельный прямой или лежащий на прямой.

Таким образом, в данной задаче $\bar{s}_l = \overline{AB} = (3; 0)$, т.е. $m = 3$, $n = 0$. Уравнение прямой $l$ имеет вид: $\frac{x - x_0}{3} = \frac{y - y_0}{0}$. В данном уравнении $(x_0; y_0)$ – координаты точки, через которую проходит прямая. Т.к. по условию задачи прямая $l$ проходит через точку $C$, то $x_0 = 1$, $y_0 = 3$. Уравнение прямой запишется так: $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 3}{0}$.

Используя правило работы с пропорциями, из последнего равенства получим: $0\cdot(x-1)=3\cdot(y-3)$ или $3\cdot(y-3)=0$. Окончательно уравнение прямой привет вид $y=3$.

Ответ: $l: y=3.$

**П р и м е р 4.** Даны две вершины $A(3;-1)$ и $B(5;7)$ треугольника $ABC$ и точка $N(4;-1)$ пересечения его высот. Составить уравнения сторон этого треугольника.

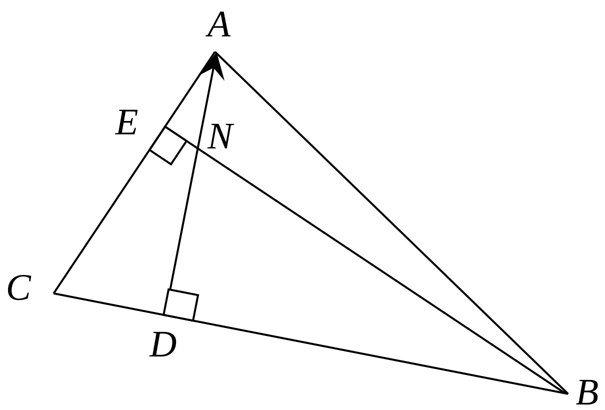


Рис. 9

**Решение.** Так как известны координаты точек $A$ и $B$, то для того чтобы записать уравнение прямой $(AB)$ можно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставим в это уравнение вместо $x_1$ и $y_1$ координаты точки $A$, а вместо $x_2$ и $y_2$ – координаты точки $B$, получим $\dfrac{x-3}{5-3}=\dfrac{y-(-1)}{7-(-1)}$. Тогда $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{8}$, отсюда получим $8\cdot(x-3)=2\cdot(y+1) \Rightarrow 8x-2y-26=0$. Разделим левую и правую части уравнения на 2, получим общее уравнение прямой $AB: 4x-y-13=0$.

Найдем уравнение прямой $BC$. По условию задачи известны координаты точки $B(5;7)$, через которую эта прямая проходит. Рассмотрим высоту $AD$, которая перпендикулярна прямой $BC$. Так как точка $N$ – точка пересечения высот, то вектор $\overline{NA}$ лежит на высоте

$AD$, и, следовательно, этот вектор перпендикулярен прямой $BC$. Таким образом в качестве нормального вектора прямой $BC$ может быть взят вектор $\overline{NA}$, т.е. $\overline{n}_{BC} = \overline{NA}$. Найдем координаты вектора $\overline{NA}$: $\overline{NA} = (3-4; -1-(-1)) = (-1; 0)$, таким образом $\overline{n}_{BC} = (-1; 0)$. Поскольку известен нормальный вектор прямой $(BC)$, то можно воспользоваться общим уравнением прямой $Ax + By + C = 0$.

Еще раз напоминаю, что $A$ и $B$ в уравнении прямой – это координаты нормального вектора, т.е. $A = -1$, $B = 0$. Итак, уравнение прямой $(BC)$ пока имеет вид $-x + 0 \cdot y + C = 0$ или $-x + C = 0$. Чтобы найти свободный член $C$, подставим в это уравнение вместо $x$ координату $x$ точки $B$, т.к. данная прямая проходит через точку $B$. Таким образом, $-5 + C = 0 \Rightarrow C = 5$. Итак, уравнение прямой $(BC)$ имеет вид $-x + 5 = 0$ или $x - 5 = 0$.

Уравнение прямой $(AC)$ строится аналогичным образом, как и прямая $(BC)$. Предлагаю это Вам проделать самостоятельно. Чтобы проверить правильность Вашего решения выпишу ответ для уравнения прямой $AC$ $x + 8y + 5 = 0$.

Ответ: $AB: 4x - y - 13 = 0, \quad BC: x - 5 = 0, \quad AC: x + 8y + 5 = 0.$

6.1 Дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(2; 1)$:
1) параллельно данной прямой;
2) перпендикулярно к данной прямой.

6.2 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника

6.3 Найти проекцию точки Р (-6; 4) на прямую $4x - 5y + 3 = 0$.

6.4 Найти точку Q, симметричную точке Р (-5; 13) относительно прямой $2x - 3y - 3 = 0$.

6.5 Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника А (5; -4), В (-1; 3), С (-3; -2) параллельно противоположным сторонам.

6.6 Даны середины сторон треугольника $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ и $M_3(3;-4)$. Составить уравнение его сторон.

6.7 Даны две точки P (2; 3) и Q (-1; 0). Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно к отрезку [PQ].

6.8 Составить уравнение прямой, если точка P (2; 3) служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

6.9 Даны вершины треугольника A (2; 1), B (-1; -1) и C (3; 2). Составить уравнения его высот.

6.10 Стороны треугольника даны уравнениями $4x - y - 7 = 0$, $x + 3y - 31 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$. Определить точку пересечения его высот.

6.11 Даны вершины треугольника $A(1;-1)$, $B(-2;1)$ и $C(3;5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ на медиану, проведенную из вершины $B$.

6.12 Даны вершины треугольника $A(2;-2)$, $B(3;-5)$ и $C(5;7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины $C$ на биссектрису внутреннего угла при вершине $A$.

6.13 Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами A (3; 2), B (5; -2), C (1; 0).

6.14 Даны последовательные вершины выпуклого четырехугольника $A(-3;1)$, $B(3;9)$, $C(7;6)$ и $D(-2;-6)$. Определить точку пересечения его диагоналей.

6.15 Даны две смежные вершины $A(-3;-1)$ и $B(2;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3;0)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

6.16 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ и уравнение его диагонали $3x + 7y - 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон и второй диагонали этого прямоугольника.

6.17 Даны вершины треугольника $A(1;-2)$, $B(5;4)$ и $C(-2;0)$. Составить уравнения биссектрисы внутреннего угла при вершине $A$.

6.18 Найти точку $M_1$, симметричную точке $M_2(8,-9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3,-4)$ и $B(-1,-2)$.

6.19 Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2,1)$ под углом $45°$ к данной прямой.

6.20 Точка $A(-4;5)$ является вершиной квадрата, диагональ которого лежит на прямой $7x-y+8=0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата

6.21 Даны две противоположные вершины квадрата A (-1; 3) и C (6; 2). Составить уравнения его сторон.

6.22 Даны две вершины треугольника A (-10; 2) и B (6; 4); его высоты пересекаются в точке N (5; 2). Определить координаты третьей вершины C.

6.23 В треугольнике ABC даны: уравнения сторон AB: $5x-3y+2=0$, уравнения высот AM: $4x-3y+1=0$ и BN: $7x+2y-22=0$. Составить уравнения двух других сторон и третьей высоты этого треугольника.

6.24 Составить уравнения сторон треугольника ABC, если дана одна из его вершин A (1; 3) и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$ и $y-1=0$.

6.25 Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин B (-4; -5) и уравнения двух высот $5x+3y-4=0$ и $3x+8y+13=0$.

6.26 Составить уравнения сторон треугольника, зная его вершину $C(4;-1)$, а также уравнения высоты $2x-3y+12=0$ и медианы $2x+3y=0$, проведенных из одной вершины.

6.27 Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2;-7)$, а также уравнение высоты $3x+y+11=0$ и медианы $x+2y+7=0$, проведенные из различных вершин.

6.28 Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $B(2;\ 6)$, а также уравнение высоты $x-7y+15=0$ и биссектрисы $7x+y+5=0$, проведенных из одной вершины.

6.29 Даны уравнения двух сторон прямоугольника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ и одна из его вершин $A(-2;1)$. Вычислить площадь этого прямоугольника.

6.30 Даны вершины треугольника $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ и $C(2;1)$. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на медиану, проведенную из вершины С.

6.31 Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:

1) $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$;

2) $x-2y-3=0$, $2x+4y+7=0$.

6.32 Даны уравнения двух сторон квадрата $4x-3y+3=0$, $4x-3y-17=0$ и одна из его вершин $A(2;-3)$. Составить уравнения двух других сторон этого квадрата.

6.33 Даны уравнения двух сторон квадрата $5x+12y-10=0$, $5x+12y+29=0$. Составить уравнения двух других его сторон при условии, что точка $M_1(-3;5)$ лежит на стороне этого квадрата.

## Ответы

| | |
|---|---|
| 6.1 | 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. |
| 6.2 | (2; 1), (4; 2), (-1;7), (1; 8). |
| 6.3 | (-2; -1). |
| 6.4 | Q (11; -11). |
| 6.5 | $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$. |
| 6.6 | $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. |
| 6.7 | $x+y+1=0$. |
| 6.8 | $2x+3y-13=0$. |
| 6.9 | $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$. |
| 6.10 | (3; 4). |

6.11 $4x + y - 3 = 0.$

6.12 $x - 5 = 0.$

6.13 Уравнения сторон: AB: $2x + y - 8 = 0;$
BC: $x + 2y - 1 = 0;$ CA: $x - y - 1 = 0.$
Уравнения медиан проведенных:
из вершины A: $x - 3 = 0;$ из вершины B: $x + y - 3 = 0;$
из вершины C: $y = 0.$

6.14 (1; 3).

6.15 $3x - 5y + 4 = 0, x + 7y - 16 = 0,$
$3x - 5y - 22 = 0, x + 7y + 10 = 0.$

6.16 Уравнения сторон прямоугольника:
$2x - 5y + 3 = 0, 2x - 5y - 26 = 0;$
уравнение его диагонали: $7x - 3y - 33 = 0.$

6.17 $AL$: 5x+y-3=0.

6.18 $M_1(10;\ -5).$

6.19 $x - 5y + 3 = 0$ или $5x + y - 11 = 0.$

6.20 Уравнения сторон квадрата: $4x + 3y + 1 = 0,$
$3x - 4y + 32 = 0, 4x + 3y - 24 = 0, 3x - 4y + 7 = 0;$
уравнение его второй диагонали: $x + 7y - 31 = 0.$

6.21 $3x - 4y + 15 = 0,\ 4x + 3y - 30 = 0,$
$3x - 4y - 10 = 0,\ 4x + 3y - 5 = 0.$

6.22 C (6; -6).

6.23 BC: $3x + 4y - 22 = 0,$ CA: $2x - 7y - 5 = 0,$
CN: $3x + 5y - 23 = 0.$

6.24 $x + 2y - 7 = 0,\ x - 4y - 1 = 0,\ x - y + 2 = 0.$

6.25 $3x - 5y - 13 = 0,\ 8x - 3y + 17 = 0,$
$5x + 2y - 1 = 0.$

6.26 $3x + 7y - 5 = 0, 3x + 2y - 10 = 0, 9x + 11y + 5 = 0.$

6.27 $BC$: $x - 3y - 23 = 0,$ $AB$: $4x + 3y + 13 = 0,$
$AC$: $7x + 9y + 19 = 0.$

6.28 $4x - 3y + 10 = 0,\ 7x + y - 20 = 0,$
$3x + 4y - 5 = 0.$

6.29 6.

6.30 4.

6.31 1) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x + 2y - 7 = 0$;

2) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$.

6.32 $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$ или $3x + 4y + 6 = 0$, $3x + 4y + 26 = 0$.

6.33 $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 22 = 0$ или $12x - 5y + 61 = 0$, $12x - 5y + 100 = 0$.

# 7. Уравнение плоскости

Всякий (не равный нулю) вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется её нормальным вектором. Уравнение

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (6)

определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n}=(A;B;C)$. Раскрывая в уравнении (6) скобки и обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D, представим его в виде $Ax+By+Cz+D=0$. Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

**П р и м е р.** Написать уравнение плоскости $\beta$, проходящей через заданные точки $M(1;-2;1)$ и $N(2;1;1)$ перпендикулярно заданной плоскости $\alpha$: $x-y+3z+1=0$.

**Решение.** Выпишем координаты нормального вектора плоскости $\alpha$: $\vec{n}_\alpha=(1;\ -1;3)$. Так как плоскости $\alpha$ и $\beta$ перпендикулярны, то их нормальные вектора тоже перпендикулярны: $\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta$. Плоскость $\beta$ проходит через точки $M$ и $N$, поэтому вектор $\overrightarrow{MN}=(1;3;0)$ целиком лежит в плоскости $\beta$. А так как нормальный вектор плоскости $\beta$ перпендикулярен самой плоскости, то $\overrightarrow{n_\beta}\perp\overrightarrow{MN}$. Вектор $\overrightarrow{n_\beta}$ перпендикулярен двум векторам одновременно, поэтому его координаты могут быть найдены по формуле $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\times\overrightarrow{MN}$:

$\overrightarrow{n_\beta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-9)-\vec{j}\cdot(-3)+\vec{k}\cdot 4=(-9;3;4)$. Выберем одну из двух точек, заданных в условии задачи, пусть это будет точка $M(1;-2;1)$. Её координаты будут соответствовать координатам $x_0;\ y_0;\ z_0$ в уравнении (6). Подставляя координаты нормального вектора $\overrightarrow{n_\beta}$ и координаты точки $M$ в уравнение (6), получим

$-9(x-1)+3(y+2)+4(z-1)=0\Rightarrow 9x-3y-4z-11=0.$

И так, уравнение плоскости $\beta$ имеет вид $9x-3y-4z-11=0$.

7.1 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку М (2; 1; -1) и перпендикулярна вектору $\vec{n}=(1;\ -2;3)$.

7.2 Даны точки $M(3;\ -1;2)$ и $N(4;\ -2;\ -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{MN}$.

7.3 Даны две точки A (1; 3; -2) и B (7; -4; 4). Через точку B провести плоскость, перпендикулярную к отрезку [AB].

7.4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (3; 4; -5) параллельно векторам $\vec{a} = (3;1;-1)$ и $\vec{b} = (1;\ -2;1)$.

7.5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{M}_1(2;-1;3)$ и $\mathrm{M}_2(3;1;2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3;-1;4)$.

7.6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $\mathrm{M}_1(3;-1;2)$, $\mathrm{M}_2(4;-1;-1)$ и $\mathrm{M}_3(2;0;2)$.

7.7 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $\mathrm{M}_1(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$.

7.8 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathrm{A}(-2;7;3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$.

7.9 Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 2y + z = 0$.

7.10 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку M (2; -1; 1) перпендикулярно к двум плоскостям $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$.

7.11 Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $\mathrm{M}_1(1;-1;-2)$ и $\mathrm{M}_2(3;1;1)$ перпендикулярно к плоскости $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

7.12 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

7.13 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через две точки A (3; -2; 1) и B (1; 4; 0).

7.14 Известны координаты вершин тетраэдра: A (0; 0; 2), B (3; 0; 5), C (1; 1; 0) и D (4; 1; 2). Составить уравнения его граней.

## Ответ

7.1 $x-2y+3z+3=0.$
7.2 $x-y-3z+2=0.$
7.3 $6x-7y+6z-94=0.$
7.4 $x+4y+7z+16=0.$
7.5 $x-y-z=0.$
7.6 $3x+3y+z-8=0.$
7.7 $2x-3z-27=0.$
7.8 $x-4y+5z+15=0.$
7.9 $7x-y-5z=0.$
7.10 $x+2z-4=0.$
7.11 $4x-y-2z-9=0.$
7.12 $2x-y-z=0.$
7.13 $4x-y-14z=0.$
7.14 (ABC): $x-3y-z+2=0$, (ABD): $x-4y-z+2=0$, (ACD): $2x-8y-3z+6=0$, (BCD): $2x-11y-3z+9=0.$

## 8. Уравнения прямой в пространстве

Прямая линия может быть определена как пересечение двух плоскостей; поэтому она изображается совокупностью двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором этой прямой. Направляющий вектор произвольной прямой обозначается $\vec{s}$, его координаты – $m, n, p$: $\vec{s} = (m; n; p)$.

Если известна одна точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ прямой и направляющий вектор $\vec{s} = (m; n; p)$, то прямая может быть определена уравнениями вида

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}. \qquad (8)$$

Уравнения (8) называются каноническими уравнениями прямой.

Канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (9)$$

Обозначим t каждое из равных отношений в канонических уравнениях (8), получим $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t.$

Отсюда $\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \\ z = z_0 + p \cdot t. \end{cases}$ (10)

Уравнения (10) – параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (m; n; p)$. В уравнениях (10) $t$ рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, $x, y, z$ – как функции от $t$; при изменении $t$ переменные $x, y, z$ меняются так, что точка М $(x; y; z)$ движется по данной прямой.

**П р и м е р.** Составить уравнение прямой $l$, которая проходит через точку М (2; -4; 3) и параллельна прямой $\begin{cases} x = -5t + 4, \\ y = 2t, \\ z = 8t - 5. \end{cases}$

**Решение.** Запишем параметрическое уравнение прямой в каноническом виде: $\frac{x-4}{-5} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{8}$. Числа, находящиеся в знаменателях данных равенств, являются координатами направляющего вектора прямой, то есть $\vec{s} = (-5; 2; 8)$. Обозначим через $\overrightarrow{s_l}$ направляющий вектор искомой прямой $l$. Так как искомая прямая согласно условию задачи параллельна заданной прямой, то их направляющие вектора коллинеарны: $\vec{s} \parallel \overrightarrow{s_l}$. Поэтому направляющим вектором искомой прямой $l$ может служить известный вектор $\vec{s}$: $\overrightarrow{s_l} = \vec{s} = (-5; 2; 8)$. Тогда по формуле (8) получаем каноническое уравнение $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{8}$.

8.1 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку М (2; 0; -3) параллельно:
1) вектору $\vec{s} = (2; -3; 5)$;
2) прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

8.2 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через данные точки: 1) (1; -2; 1), (3; 1; -1); 2) (3; -1; 0), (1; 0; -3).

8.3 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку М (1; -1; -3) параллельно:
1) вектору $\vec{s} = (2; -3; 4)$; 2) прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$.

8.4 Даны вершины треугольника А (3; 6; -7), В ( -5; 2; 3) и С (4; -7; -2). Составить параметрические уравнения его медианы, проведенной из вершины С.

8.5 Даны вершины треугольника А (3; -1; -1), В (1; 2; -7) и С (-5; 14; -3). Составить канонические уравнения биссектрисы его внутреннего угла при вершине С.

8.6 Даны вершины треугольника A (1; -2; -4), B (3; 1; -3) и C (5; 1; -7). Составить параметрические уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

8.7 Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

8.8 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M (2; 3; -5) параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0, \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

8.9 Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

8.10 Доказать параллельность прямых:

1) $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

8.11 Доказать перпендикулярность прямых:

1) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1; \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

8.12 Определить косинус угла между прямыми

$\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

8.13 Даны прямые $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$, $\frac{x-3}{l}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$; при каком значении $l$ они пересекаются?

## Ответы

8.1 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ .

8.2 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$; 2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ .

8.3 1) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t-1, \\ z=4t-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=4t-1, \\ z=-3. \end{cases}$

8.4 $\begin{cases} x=5t+4, \\ y=-11t-7, \\ z=-2. \end{cases}$

8.5 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$ .

8.6 $\begin{cases} x=3t+3, \\ y=15t+1, \\ z=19t-3. \end{cases}$

8.7 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$ , 2) $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$ .

8.8 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$ .

8.9 1) $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-7t, \\ z=-19t-3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=-t+1, \\ y=3t+2, \\ z=5t-1. \end{cases}$

8.12 $\cos\varphi=\pm 4/21$.

8.13 $l=3$.

## 9. Уравнения прямой и плоскости в пространстве.

**Пример.** Найти координаты точки пересечения прямой (L), заданной уравнением $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ и плоскости:

$$2x-y+3z-4=0.$$

**Решение.** Перепишем уравнение прямой (L) в параметрическом виде $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-t-2, \\ z=2t+3. \end{cases}$ Подставим выражения для переменных $x, y$ и $z$ как функции от параметра $t$ в уравнение плоскости. Получим:

$$2\cdot(2t+1)-(-t-2)+3\cdot(2t+3)-4=0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем уравнение $11t=-9$, из которого находим значение параметра, при котором происходит пересечение прямой (L) и плоскости: $t=-\frac{9}{11}$.

Найденное значение параметра $t$ подставим в параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x=2\cdot\left(-\frac{9}{11}\right)+1=-\frac{7}{11}, \\ y=-\left(-\frac{9}{11}\right)-2=-\frac{13}{11}, \\ z=2\cdot\left(-\frac{9}{11}\right)+3=\frac{15}{11}. \end{cases}$ Таким образом, прямая (L) пересекает заданную плоскость в точке с координатами $\left(-\frac{7}{11};\ -\frac{13}{11};\ \frac{15}{11}\right)$.

9.1 Доказать, что прямая $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=-4t+1, \\ z=4t-5 \end{cases}$ параллельна плоскости $4x-3y-6z-5=0$.

9.2 Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0, \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

9.3 Найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $\qquad 2x+3y+z-1=0$;

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $\quad x-2y+z-15=0$ ;

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $\quad x+2y-2z+6=0$ .

9.4 Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (2; -3; -5) перпендикулярно к плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

9.5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; -1; -1) перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{4}$ .

9.6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; -2; 1) перпендикулярно к прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

9.7 При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

9.8 При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$?

9.9 Найти проекцию точки P (2; -1; 3) на прямую $\begin{cases} x=3t, \\ y=5t-7, \\ z=2t+2. \end{cases}$

9.10 Найти точку Q, симметричную точке P (4; 1; 6) относительно прямой $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

9.11 Найти точку Q, симметричную точке P (2; -5; 7) относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5;4;6)$ и $M_2(-2;-17;-8)$.

9.12 Найти проекцию точки P (5; 2; -1) на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

9.13 Найти точку Q, симметричную точке P (1; 3; -4) относительно плоскости $3x+y-2z=0$.

9.14 Вычислить расстояние *d* точки P (1; -1; -2) от прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$ .

9.15 Вычислить расстояние *d* от точки P (2; 3; -1) до следующих прямых:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$ ; 2) $\begin{cases} x=t+1, \\ y=t+2, \\ z=4t+13; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

9.16 Убедившись, что прямые $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0; \end{cases}$ и

$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ параллельны, вычислить расстояние $d$ между ними.

9.17 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1; 2; -3) параллельно прямым $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-7}{3}$ , $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$.

9.18 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=-3t+2, \\ z=2t-3 \end{cases}$ и точку M (2; -2; 1).

9.19 Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ ; $\begin{cases} x=3t+7, \\ y=2t+2, \\ z=-2t+1 \end{cases}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости.

9.20 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ , $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ .

9.21 Найти проекцию точки C (3; -4; -2) на плоскость, проходящую через две параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$ , $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$ .

9.22 Найти точку Q, симметричную точке P (3; -4; -6) относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6;1;-5), M_2(7;-2;-1)$ и $M_3(10;-7;1)$.

9.23 Найти точку Q, симметричную точке P (-3; 2; 5) относительно плоскости, проходящей через прямые $\begin{cases} x-2y+3z-5=0, \\ x-2y-4z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+y+3z+7=0, \\ 5x-3y+2z+5=0. \end{cases}$

9.24 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=2t+3, \\ z=-t-2 \end{cases}$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0. \end{cases}$

9.25 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$ перпендикулярно к плоскости $3x+2y-z-5=0$.

## Ответы

9.3 1) (2; -3; 6); 2) прямая параллельна плоскости; 3) прямая лежит на плоскости.

9.4 $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}$.

9.5 $2x-3y+4z-1=0$.

9.6 $x+2y+3z=0$.

9.7 m = -3.

9.8 C = -6.

9.9 (3; -2; 4).

9.10 Q (2; -3; 2).

9.11 Q (4; 1; -3).

9.12 (1; 4; -7).

9.13 Q (-5; 1; 0).

9.14 $d$=7.

9.15 1) 21; 2) 6; 3) 15.

9.16 $d$=25.

9.17 $9x+11y+5z-16=0$.

9.18 $4x+6y+5z-1=0$.

9.19 $2x-16y-13z+31=0$.

9.20 $6x-20y-11z+1=0$.

9.21 (2; -3; -5).

9.22 Q (1; -2; 2).

9.23 Q (1; -6; 3).

9.24 $13x-14y+11z+51=0$.

9.25 $x-8y-13z+9=0$.

## Список литературы


1. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Уч. пособие для втузов. – 17-е изд. – СПб., Изд-во «Профессия», 2016. – 200 с., ил.
2. Основы векторной алгебры: метод. пособие / М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО "Удмуртский государственный университет", Ин-т экономики и упр., Каф. мат. анализа; сост. Е. Х. Бадаш. - Ижевск: Удмуртский университет, 2017. - 31 с., ил. - Библиогр.: с. 31.
3. Сборник задач по аналитической геометрии и векторной алгебре (уравнение прямой на плоскости) / ГОУВПО "Удмуртский государственный университет", Ин-т экономики и упр., Каф. высш. математики и информатики; сост. Е. Х. Бадаш. - Ижевск, 2010. - 35 с. - Библиогр.: с. 37.
4. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 31-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 336 с., ил.

**Бадаш Елена Хаимовна**
**Сметанин Юрий Михайлович**

# Векторная алгебра и аналитическая геометрия.

**Сборник задач.**

Подготовка к изданию: М.Д. Кононыхиной.

Подписано к печати 20.05.2022. Формат 60×84 1/16.
Отпечатано на ризографе.
Усл. печ. л. _____. Уч. – изд. л. _____.
Заказ № _____. Тираж 20 экз.

Издательство Института экономики и управления ФГБОУ ВО «УдГУ»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп.4.