МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №4 (833)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

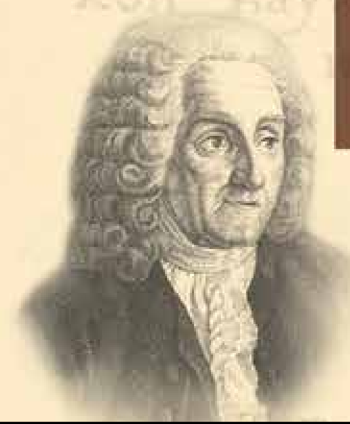
1728

Я. ГЕРМАН, Ж. ДЕЛИЛЬ

СОКРАЩЕНІЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
ко употребленію
ЕГО ВЕЛИЧЕСТВА
ІМПЕРАТОРА
всея россіи.
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.
Содержащая
Аріѳметику, Геометрію, и Тригонометрію.

ВЪ САНКТПЕТЕРБУРГѢ

въ Типографіи Академіи наукъ 1728 года.



«Математика заключает в себе многия части, из них же суть некие, которые единому токмо умствованию подлежат, но оныя приличны вместо основания прочим частем...»

XVIII ВЕК

1728

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

РЕДАКЦИЯ:
Главный редактор: Л. РОСЛОВА
Ответственный секретарь:
Т. ЧЕРКАВСКАЯ
Редакторы: П. КАМАЕВ,
О. МАКАРОВА
Корректор: Л. ГРОМОВА
Верстка: Л. КУКУШКИНА
Дизайн обложки: Э. ЛУРЬЕ
Дизайн макета: И. ЛУКЬЯНОВ

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
klipartz.com, commons.wikimedia.org
Kraft texture photo created by tirachard - freepik.com
kp.rusneb.ru

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437
от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 30.04.2022
Тираж: 3000 экз.
Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
statgrad.org/#2619
ISSN 2658-4042

Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул Интернациональная. д 100. корп. 8,
тел. +7 (831) 216-40-40.
Номер заказа

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

В. БАРАНОВ,
О. БАРАНОВА,
г. Ижевск

МЕТОД ОТМЕЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Начало см. в № 7 за 2021 г.

В статье «Принцип Дирихле на клетчатых досках» мы рассмотрели способ решения задач на оценку на клетчатых досках. Способ заключался в том, чтобы разбить множество на более мелкие части, в которых легко удалось бы провести оценку. По сути, мы строили соответствие между этими частями и исследуемыми объектами. В этой статье мы разберем задачи, в которых этот метод практически не работает. Но здесь в решении помогает выделение некоторых частей (раскраска отмеченных множеств), с которыми можно построить соответствие исследуемых объектов. С точки зрения применения принципа Дирихле отмеченные множества — это «клетки» или «метки».

Рассмотрим конкретные примеры. В основном это задачи на поиск минимума, которые традиционно более сложные, чем задачи на поиск максимума.

Задача 1. Какое наименьшее число кораблей 1×1 нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы на поле нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×1 по правилам морского боя? (По правилам морского боя корабли не могут иметь общих точек.)

Ответ: 16.

Решение. В задаче, когда необходимо расставить как можно больше кораблей по правилам морского боя, мы можем разбить всю доску на 25 клеток 2×2, в каждой из которых может находиться не больше одного корабля. В результате можем получить оценку: на доску 10×10 нельзя поставить больше 25 кораблей 1×1 по правилам морского боя. Если мы попытаемся применить метод разбиения на меньшие части в задаче на поиск минимального числа, то придем к следующим рассуждениям: в каждом квадрате 3×3 необходимо поставить хотя бы один корабль 1×1, иначе в этот квадрат можно поставить корабль 1×1 по правилам морского боя. Но поле 10×10 не разбивается на квадраты 3×3, да и в квадрате 6×6 такая оценка окажется очень грубой: четырьмя кораблями никак не обойтись.

Попытки непосредственно расставить быстро приводят к результату в 16 кораблей (рис. 1).

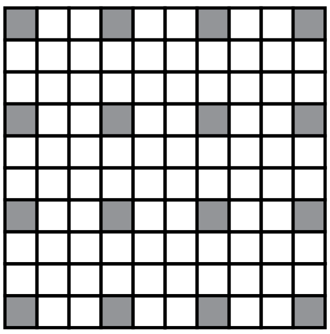


Рис. 1

Но как доказать минимальность? Попробуем использовать картинку, которая получилась в процессе анализа задачи. Пусть на доске 10×10 расставлены корабли 1×1 таким образом, что больше нельзя поставить, по правилам морского боя, ни одного корабля 1×1. Тогда каждой закрашенной клетки должен касаться хотя бы один корабль (иначе в эту закрашенную клетку мы сможем поставить еще один корабль). При этом ни один корабль не может касаться сразу двух закрашенных клеток. Значит, нам понадобится не меньше 16 кораблей.

Обратим внимание, что в доказательстве рисунок — это не расстановка кораблей, а отмеченные множества. Мы строим соответствие между отмеченными множествами и расставленными кораблями.

Переформулируем эти же рассуждения на языке соответствий. Будем говорить, что отмеченному множеству соответствует корабль, если они имеют общую точку. Для того чтобы на доску нельзя было поставить ни одного корабля, каждому отмеченному множеству должен соответствовать корабль (который помешает поставить корабли в это множество), и ни один корабль не может соответствовать сразу двум множествам. Отмеченные множества логично назвать «метками».

Получаем, что каждая «метка» должна быть выдана хотя бы одному кораблю, при этом ни одна «метка» не может достаться больше чем одному кораблю. Значит, кораблей должно быть не меньше, чем меток.

Пример расстановки кораблей в этой задаче совпадает с отмеченными множествами.

Задача 2. Какое наименьшее число кораблей 2×2 нужно расставить на поле 10×10 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 2×2 по правилам морского боя?

Ответ: 4.

Указание. На рисунке 2 отмечены множества. Каждому отмеченному множеству должен соответствовать свой корабль.

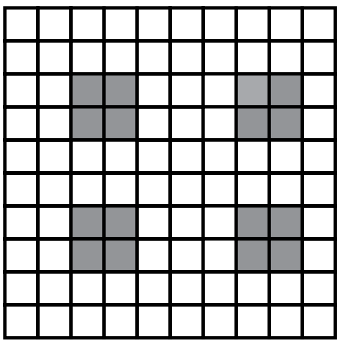


Рис. 2

Задача 3. Какое наименьшее число прямоугольников 2×2 нужно вырезать из доски 8×8 так, чтобы из оставшейся фигуры нельзя было вырезать квадрат 2×2? (В терминах морского боя эту задачу можно сформулировать так: какое наименьшее число залпов в две соседние клетки нужно дать, чтобы гарантированно ранить корабль 1×2?)

Ответ: 9.

Решение. Рассмотрим 9 отмеченных множеств (рис. 3).

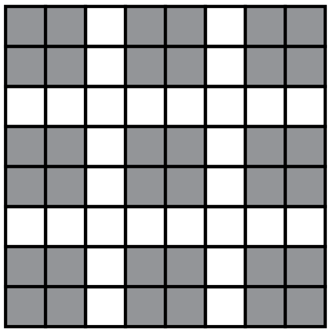


Рис. 3

Здесь мы закрасили как можно больше квадратов 2×2, не имеющих общих точек. Тогда никакой прямоугольник 1×2 не сможет иметь общую клетку сразу с двумя отмеченными множествами. В каждом из 9 отмеченных множеств должна быть вырезана хотя бы одна клетка, то есть каждому отмеченному множеству должен соответствовать хотя бы один прямоугольник 1×2. В этой задаче мы говорим, что прямоугольник 1×2 соответствует отмеченному множеству, если они имеют общую клетку. При этом никакой прямоугольник 1×2 не может иметь общих клеток сразу с двумя отмеченными множествами. Получаем, что вырезанных прямоугольников должно быть не меньше, чем отмеченных множеств. Следовательно, меньше чем 9 вырезанными прямоугольниками нам не обойтись (рис. 4).

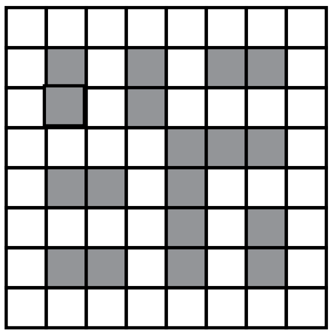


Рис. 4

Задача 4. Какое наибольшее количество кораблей 1×3 можно поставить на доску для морского боя 10×10 так, чтобы они стояли по правилам, то есть не имели общих точек?

Ответ: 12.

Решение. Рассмотрим крупную шахматную раскраску доски (рис. 5).

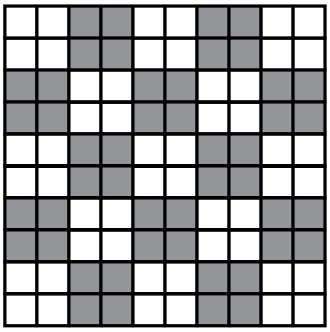


Рис. 5

Заметим, что каждый корабль 1×3 накрывает одну или две клетки ровно одного черного квадрата. То есть мы можем поставить в соответствие каждому кораблю свой черный квадрат-«метку», а именно черный квадрат соответствует кораблю, если у них имеется общая клетка.

При этом если один квадрат соответствует двум кораблям, то корабли будут стоять не по правилам морского боя, то есть иметь общую точку (так как любые две клетки квадрата 2×2 имеют общую точку). Значит, кораблей не больше, чем черных квадратов, то есть 12.

Задача 5. Какое наименьшее число слонов нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все клетки доски оказались под боем? (Слон, стоящий в клетке, бьет ее.)

Ответ: 8.

Решение. Будем обращать внимание только на 28 граничных клеток. Заметим, что каждый слон бьет не больше 4 граничных клеток того же цвета, на котором стоит. Граничных клеток ровно 28, из них 14 черных и 14 белых. Значит, чтобы под боем оказались граничные клетки, необходимо не меньше 4 слонов, стоящих на черных клетках, и 4 слонов, стоящих на белых клетках. В этой задаче мы ставим в соответствие слонов и граничные клетки. Говорим, что клетка соответствует слону, если она находится под его боем.

Пример на 8 слонов, бьющих всю доску, строится несложно.

Задача 6. Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске так, чтобы все клетки доски оказались под боем? (Конь, стоящий в клетке, бьет ее.)

Ответ: 12.

Решение. Отметим 12 клеток так, чтобы один конь не мог бить сразу две отмеченные клетки (рис. 6).

О	О						О
	О					О	О
О	О					О	
О						О	О

Рис. 6

Так как каждая клетка доски должна оказаться под боем одного из коней, при этом конь не может бить больше одной клетки, то коней должно быть не меньше 12 (рис. 7).

О	О						О
	О				К	О	О
	К	К		К	К		
		К					
					К		
		К	К		К	К	
О	О	К				О	
О						О	О

Рис. 7

Задача 7. На доску 11×11 положили несколько квадратов 2×2 так, что стороны квадратов идут по линиям сетки и никакие два квадрата не перекрываются больше чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могло быть?

Ответ: 50.

Решение. Отметим 25 клеток при помощи раскраски «горох» (рис. 8).

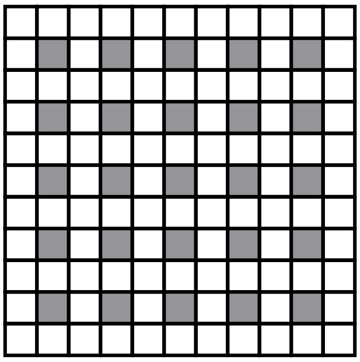


Рис. 8

Мы выбрали эту раскраску, так как каждый квадрат 2×2 содержит ровно одну отмеченную клетку. Будем говорить, что отмеченному множеству соответствует квадрат 2×2, если квадрат содержит отмеченную клетку. Заметим, что каждая «метка» соответствует не более чем двум квадратам. Действительно, если три квадрата содержат общую клетку, то два из них пересекаются более чем по одной клетке. Получаем, что каждому квадрату соответствует ровно одно отмеченное множество, а каждому отмеченному множеству соответствует не больше двух квадратов 2×2. Значит, 25 отмеченным множествам соответствует не больше 50 квадратов.

Чтобы расположить 50 квадратов, нужно выложить их слоями (рис. 9). В каждом следующем слое квадраты имеют не более чем по одной общей клетке с любым квадратом из предыдущего слоя. Всего получится 10 слоев по 5 квадратов.

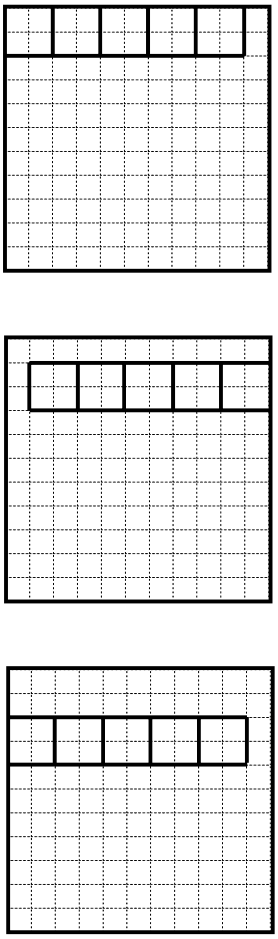


Рис. 9

Задача 8. Какое наименьшее число кораблей 1×2 нужно расставить на поле 10×10 по правилам морского боя, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×2 по правилам морского боя?

Ответ: 9.

Решение. Рассмотрим раскраску «крупный горох» (рис. 10).

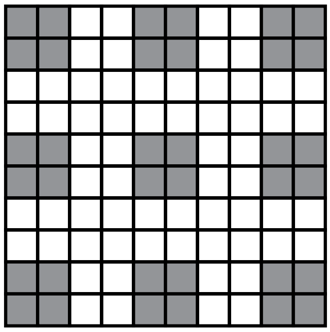


Рис. 10

Получилось 9 отмеченных множеств. Будем говорить, что корабль касается отмеченного множества, если они имеют хотя бы одну общую точку, но не имеют общих клеток. Один корабль 1×2 может касаться сразу двух отмеченных множеств.

Все корабли, выставленные на доску, делятся на два типа: первый — корабль имеет общую точку с отмеченным множеством, второй — корабль касается одного или двух отмеченных множеств.

Отмеченные множества также разделим на два типа: первый — отмеченное множество имеет общую клетку с одним из кораблей, второй — отмеченное множество не имеет общих клеток ни с одним из кораблей. Если отмеченное множество не является ни множеством первого типа, ни множеством второго типа, то в этом множестве можно разместить еще один корабль 1×2.

Пусть мы расставили корабли 1×2 согласно условию задачи. Тогда все множества являются либо множествами первого типа, либо второго. Корабль первого типа имеет общую клетку ровно с одним множеством первого типа. Значит, кораблей первого типа не меньше, чем отмеченных множеств первого типа.

Рассмотрим множества и корабли второго типа. Каждого множества второго типа должно касаться не меньше двух кораблей, иначе в этом отмеченном множестве можно будет расположить еще один корабль по правилам морского боя. Проверяется это несложным перебором. Так как корабль может касаться не больше двух отмеченных множеств, то кораблей второго типа должно быть не меньше, чем отмеченных множеств второго типа.

Из этих двух оценок следует, что кораблей должно быть не меньше, чем отмеченных множеств (рис. 11).

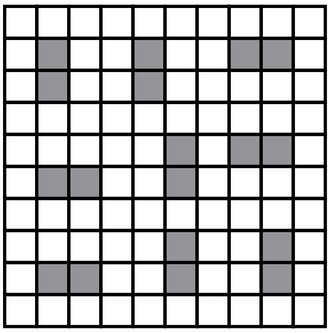


Рис. 11

Задача 9. Какое наименьшее число кораблей 1×3 нужно расставить на поле 8×8 так, чтобы нельзя было поставить больше ни одного корабля 1×3 по правилам морского боя?

Ответ: 4.

Решение. Решение практически дословно повторяет предыдущее доказательство, если придумать подходящую раскраску доски. Рассмотрим отмеченные множества (рис. 12).

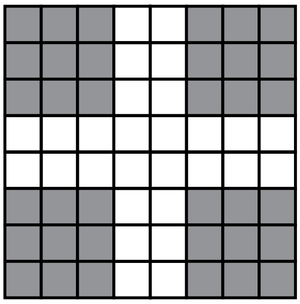


Рис. 12

Корабли 1×3 делятся на два типа: те, которые содержат центральную клетку отмеченного множества, и те, которые не содержат центральную клетку отмеченного множества. Аналогично на два типа делятся и отмеченные множества: первый — отмеченное множество имеет общую центральную клетку с одним из кораблей, второй — отмеченное множество не имеет общей центральной клетки ни с одним из кораблей. Кораблей первого типа не меньше, чем отмеченных множеств первого типа.

Любого множества второго типа должно касаться не меньше двух кораблей. Так как каждый корабль может касаться не больше двух отмеченных множеств, то кораблей второго типа должно быть не меньше, чем отмеченных множеств второго типа.

Получаем, что кораблей 1×3 должно быть не меньше, чем отмеченных множеств (рис. 13).

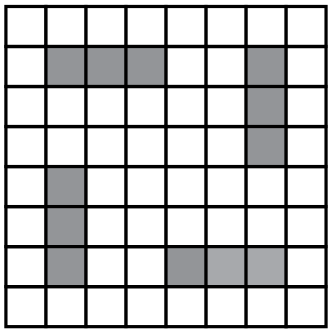


Рис. 13

Задача 10. В каждой клетке доски 9×9 стоит фишка. Одновременно все фишки сдвигаются в соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее количество клеток может оказаться пустыми?

Ответ: 56.

Решение. Раскрасим доску в шахматную раскраску. Заметим, что все фишки из черных клеток окажутся в белых клетках и наоборот.

Обратим внимание на связь со следующей задачей:

Какое наибольшее количество белых (черных) клеток можно отметить на доске так, чтобы у каждой черной (белой) клетки было не больше одной соседней по стороне отмеченной клетки?

Действительно, фишки из клеток, отмеченных таким образом, не могут переместиться в одну клетку. Максимальность дает точную оценку.

Отметим 13 белых и 12 черных клеток так, чтобы никакие две фишки из отмеченных клеток не могли переместиться в одну клетку (рис. 14).

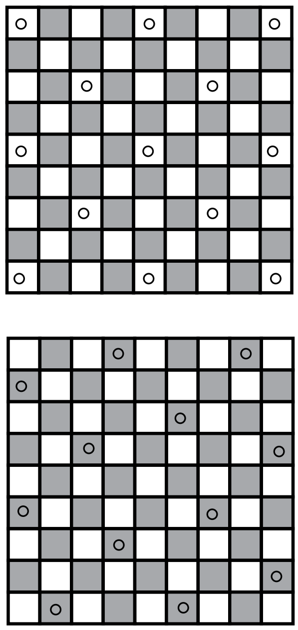


Рис. 14

Получаем, что каждой из 13 фишек, стоящих в 13 отмеченных белых клетках, будет соответствовать черная клетка, где фишка окажется после перемещения. При этом все 13 клеток будут различными. Следовательно, не меньше 13 черных клеток окажутся занятыми. Аналогично не меньше 12 белых клеток окажутся занятыми. Значит, после перемещения фишек не меньше 25 клеток на доске окажутся заняты-ми, а свободными будут не больше $81 - 25 = 56$ клеток.

Пример перемещения фишек представлен на рисунке 15.

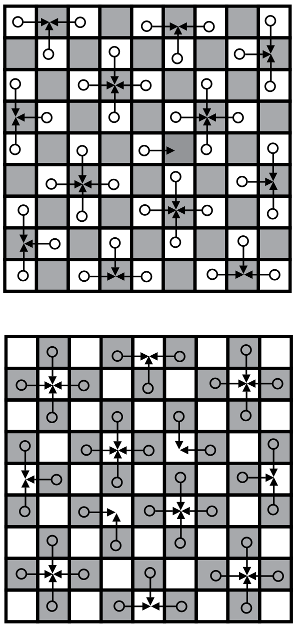


Рис. 15

Задача 11. Докажите, что полный комплект кораблей: один корабль — 1×4, два — 1×3, три — 1×2, четыре корабля — 1×1, всегда можно расставить на поле 10×10 по правилам морского боя, если расставлять их, начиная с самого большого из размеров.

Доказательство. Ясно, что первый корабль всегда можно поставить. Далее отметим четыре трехклеточных области (рис. 16).

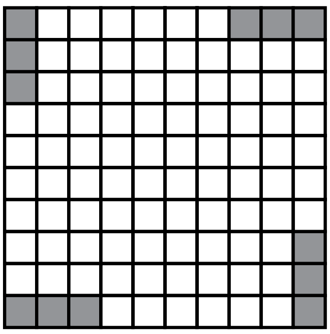


Рис. 16

Заметим, что поставленный четырехклеточный корабль может касаться не больше одной области. Значит, в двух из оставшихся трех областей мы сможем разместить два трехклеточных корабля.

Пусть теперь как-то расположены три корабля: четырехклеточный и два трехклеточных. Рассмотрим 12 отмеченных множеств (рис. 17).

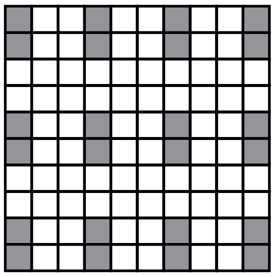


Рис. 17

Один четырехклеточный и два трехклеточных корабля касаются не больше шести областей. Мы сможем разместить еще три двухклеточных корабля в оставшихся отмеченных множествах.

Докажем, что после размещения одного четырехклеточного, двух трехклеточных и трех двухклеточных кораблей мы сможем разместить четыре одноклеточных корабля.

Рассмотрим 16 отмеченных множеств (рис. 18).

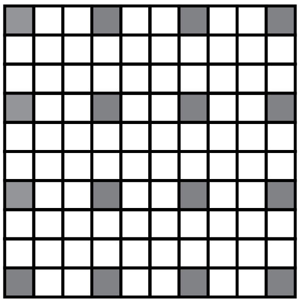


Рис. 18

Один четырехклеточный, два трехклеточных и три двухклеточных корабля касаются не больше 12 отмеченных областей. Значит, мы можем поставить четыре одноклеточных корабля. Таким образом, мы можем поставить весь набор кораблей по правилам морского боя, независимо от способа расстановки, если начнем выставлять с самого большого корабля в порядке убывания размеров.

12. Решите самостоятельно. Докажите, что все корабли, кроме самого большого, можно поставить, начиная с самых маленьких, независимо от способа расстановки.

Замечание. Заметим, что если расставлять корабли, начиная с самых маленьких, то расстановка может и не получиться (рис. 19). При такой расстановке корабль 1×4 поставить по правилам уже не удастся.

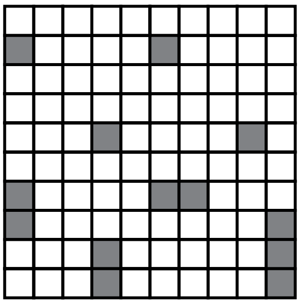


Рис. 19

Задача 13. Какое минимальное количество коней нужно поставить на шахматную доску, чтобы они били все белые клетки?

Ответ: 5.

Решение. Отметим на доске 2 черные и 10 серых областей (все на белых полях) (рис. 20).

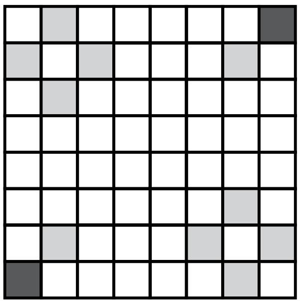


Рис. 20

Заметим, что никакой конь не может быть сразу черную и серую клетки, две черных клетки или три серых клетки. Это проверяется несложным перебором. Тогда нужно не меньше двух коней, чтобы под бой попали две черные клетки, и не меньше 5 коней, чтобы под бой попали все белые клетки, то есть 7 коней. Пример расстановки коней предложен на рисунке 21.

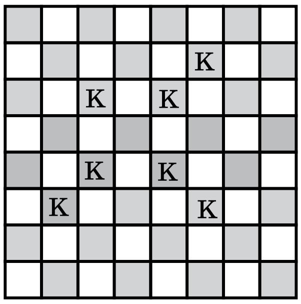


Рис. 21

Обратим внимание, что в задаче 6 мы расставили 12 коней, по 6 в белые и черные клетки, так, что под боем оказались все клетки доски. В этой задаче нам понадобилось 7 коней, чтобы побить все белые клетки. Это связано с тем, что клетки, в которых стоят фигуры, считаются находящимися под боем, поэтому нам надо было бить большее количество клеток.

В заключение отметим, что придумывание отмеченных множеств, помогающих решать конкретную задачу, сродни методу дополнительных построений в геометрии, то есть занятие творческое, требующее воображения и изобретательности. Иногда помогают общеизвестные и часто применяемые раскраски, иногда требуется изрядно потрудиться, чтобы их придумать. В задачах 8, 9 и 13 нам пришлось разбивать отмеченные множества на два типа, а в задаче 11 применять несколько типов отмеченных множеств. Как и в любом виде деятельности, умение приходит, если приложить определенное количество усилий.