

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
Институт математики, информационных технологий и физики
Кафедра алгебры и топологии

Т. М. Банникова, А. К. Кощеева, О. М. Немцова

Множества, отношения, функции

Учебно-методическое пособие



Ижевск
2022

УДК 510(075.8)

ББК 22.12я73

Б232

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ

Рецензент: к.ф.-м.н., М. Ю. Лебедева

Т. М. Банникова, А. К. Кошечева, О. М. Немцова

Б232 Множества, отношения, функции: учеб.-метод. пособие. – Ижевск : Удмуртский университет, 2022. – 84 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров 1-2 курсов направлений подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», 01.03.01 «Математика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», и 44.03.01 «Педагогическое образование», 44.03.05 «Педагогическое образование» с двумя профилями подготовки, изучающих дисциплины «Дискретная математика, математическая логика и их приложения в информатике и компьютерных науках», «Дискретная математика», «Введение в математическую логику и теорию множеств», «Избранные вопросы дискретной математики».

Пособие может быть использовано при организации практических и самостоятельных работ студентов по этим дисциплинам. Учебно-методическое пособие также может быть полезно студентам математических специальностей высших учебных заведений при изучении тем связанных с дискретной математикой. В пособии представлены следующие темы дискретной математики: множества, подмножества, отношения, эквивалентность, порядок, функции, морфизмы и др. Каждый раздел пособия снабжен необходимыми сведениями из теории, подробным решением типовых задач и задачами для самостоятельного решения.

УДК 510(075.8)

ББК 22.12я73

© Банникова Т. М., Кошечева А. К.,
Немцова О. М., 2022

© ФБГОУ ВО «Удмуртский
государственный университет», 2022

Содержание

Введение.....	4
Раздел 1. Множества	8
§1. Понятие множества	8
§2. Способы задания множеств.....	12
§3. Подмножество.....	17
§4. Операции над множествами	19
§5. Мощность конечных множеств.....	25
§6. Формула включений-исключений	28
Раздел 2. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств. Соответствия	35
Раздел 3. Отношения	40
§1. Бинарные отношения	40
§2. Свойства бинарных отношений	45
§3. Отношения эквивалентности и порядка.....	49
Раздел 4. Функции. Алгебры и их морфизмы.....	54
§1. Функции	54
§2. Алгебры и их морфизмы.....	57
§3. Мощность бесконечного множества.....	60
Задачи для контрольных работ.....	73
Литература	84

Введение

Дискретная математика – один из крупных разделов древнейшей науки математики. В наше время его максимально приблизили к информатике, и поскольку знания Дискретной математики и Математической логики лежат в основе любого современного изучения информатики, то естественно Дискретную математику рассматривать как науку, формирующую теоретические основы информатики и программирования.

Современный цифровой компьютер по существу является конечной дискретной системой. Понять, как такая машина работает, можно, если представить машину как дискретную математическую систему.

Одна из главных целей при изучении дискретной математики – приобретение инструментов и техник, необходимых для понимания и проектирования компьютерных систем.

**ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ЗАКЛАДЫВАЕТ
ОСНОВЫ СЛЕДУЮЩИХ РАЗДЕЛОВ:**

- Теория множеств;
- Комбинаторика;
- Теория чисел;
- Алгебра логики;
- Теория алгоритмов;
- Системы обработки и анализа данных;
- Теория графов и сетей;
- Логика предикатов.

Поскольку все это разделы математики, то трудно провести границу, где заканчивается один раздел и начинается другой. В связи с этим информация, полученная в курсе Дискретная математика, будет применяться и расширяться в последующих дисциплинарных курсах.

ДИСКРЕТНАЯ – значит «конечная», «непрерывная». Дискретная математика не рассматривает бесконечность

или предел как элемент. Все объекты изучения измеримы. И это неудивительно: человеческое мышление устроено так, что требуется конкретика во всем, иначе рассмотреть мир как единое целое не получится. Поэтому считается, что мир состоит из частиц – элементов мира. И все эти элементы, в свою очередь, тоже состоят из элементов и т.д. Дискретная математика занимается таким разбиением мира на части – множества с их элементами, имеющими свои элементы и «особенности поведения».

Курс Дискретной математики знакомит с современными средствами моделирования – универсальными моделями и методами формализованного описания (представления) систем, процессов, явлений. В *процессе моделирования* этот класс методов занимает одно из ключевых мест. При этом, процесс моделирования заключается в *уточнении (формализации)* исследуемой ситуации, системы, процесса при использовании каких-либо средств фиксации (представления) имеющихся и выявленных знаний в виде *модели* как результата такой формализации. Модель как описательное уточнение фиксирует то, что известно на данный момент и может быть использовано для решения проблемы. При этом к модели не предъявляются жесткие требования обязательной представимости ее средствами классической (функциональной, вероятностной) математики. Такое представление не всегда необходимо и возможно, например, в силу сложности исследуемого объекта, различия целей исследования, степени «точности» имеющихся знаний и др.

Дискретная математика предлагает:

- универсальные средства (языки) формализованного представления;
- способы корректной переработки информации, представленной на этих языках;

- возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательной ценности моделей.

В этом пособии происходит знакомство с первыми базовыми понятиями Дискретной математики: множества, отношения и функции. Знание этих понятий необходимо для изучения любых дисциплин математического содержания, в информатике и физике.

Дисциплина Дискретная математика адресована бакалаврам первого года обучения. Успешное освоение дисциплины позволяет перейти к изучению таких дисциплин, как Численные методы, Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, Основы компьютерных наук, Теория чисел и других.

Данное пособие учитывает требования Федеральных государственных образовательных стандартов, которые определяют требования к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата в форме обладания выпускником определенными универсальными, общепрофессиональными и профессиональными компетенциями. В данном учебно-методическом пособии представлены задания, определяющие пороговые знания обучающихся, а также задания, предполагающие использование идей дискретной математики для решения практических задач, использования компьютерных технологий в профессиональной деятельности.

Введем обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

- $\forall$ – квантор всеобщности («для каждого»);
- $\exists$ – квантор существования («существует»);
- $!$ – квантор единственности («единственный»);
- $\in$ – знак принадлежности;
- $\notin$ – знак не принадлежности;
- $\wedge, \&$ – конкретный выбор («и»);

$\vee$ – альтернативный выбор («или»);
 $\Rightarrow$ – следствие («если ..., то ...» или «следует»);
 $\Leftrightarrow$ – равносильность («...тогда и только тогда, когда...»).

Раздел 1. Множества

§1. Понятие множества

МНОЖЕСТВО является таким же неопределимым понятием математики, как точка, прямая и плоскость. Мы сталкиваемся с ним при изучении практически всех наук – математики, физики, химии, истории и т.д. Множество можно описать как совокупность некоторых объектов (элементов множества), объединенных по какому-либо признаку.

Примеры.

1) Множество геометрических тел; множество геометрических фигур; алфавит; множество парт в аудитории; множество продуктов в магазине и т.д.

2) $\mathbb{N}=\{1,2,3, \dots\}$; $\mathbb{Z}=\{\dots-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$; в этом примере элементы каждого множества заключены в *фигурные скобки*.

Множество, элементами которого являются другие множества, называется КЛАССОМ или СЕМЕЙСТВОМ.

В классе все элементы имеют различную природу, но у них есть хотя бы одно общее свойство.

Примеры.

1) Семейство АУДИТОРИЯ имеет следующие элементы:

- множество парт;
- множество ламп;
- множество элементов питания;
- множество студентов и т.д.

(Заметим, что элемент «множество студентов» непостоянный. Его может и не быть в данном классе).

2) Множество {белый, красный, зеленый} включает названия красного, белого и зеленого цветов, и только их.

3) Множество {0, 1, 2, 3, 4, 5, 100 345 679 231} включает семь целых чисел.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

- элементы множеств обозначаются строчными латинскими символами с натуральными индексами;
- множества – заглавными печатными латинскими буквами;
- семейства – заглавными «рукописными» латинскими буквами.

В общем, особого значения обозначению класса и множества не придается.

Для описания очень больших, в особенности бесконечных множеств используется или специальное обозначение для этого множества, или специальная запись, например: $\{x \mid \dots x \dots\}$ или $\{x: \dots x \dots\}$ (читается «множество таких элементов, для которых выполняется условие $\dots x \dots$ »). Подробнее об этом мы поговорим в §2.

Примеры.

1) $A = \{x \mid x \text{ – четное число}\}$ – множество A состоит из всех четных чисел.

2) $A = \{x: x \text{ – высокий студент данной группы}\}$.

Для произвольного множества A и произвольного элемента B верно ровно одно из двух высказываний: либо B входит в A , либо B не входит в A .

Если спросить, входит ли некоторый элемент в некоторое множество, ответ будет либо «да», либо «нет».

Входит ли 0 в множество $\{1, 2\}$? – Нет.

Входит ли 0 в множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\}$? – Да.

Входит ли «зеленый» в множество $\{\text{красный, желтый, синий}\}$? – Нет.

Согласно математической терминологии, 0 является элементом множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 100\}$, а «зеленый» не является элементом множества $\{\text{красный, желтый, синий}\}$.

В общем случае, запись $a \in M$ (читаем « a принадлежит M ») означает, что элемент a принадлежит множеству M . Если элемент a не принадлежит множеству M , то пишут: $a \notin M$ (читаем « a не принадлежит M »).

Важно различать 1 и $\{1\}$. Это не одно и то же.

Сама по себе единица является числом, а не множеством, а $\{1\}$ – множество, содержащее элемент 1 .

Точно так же, $\{1\}$ и $\{\{1\}\}$ – не одно и то же: $1 \in \{1\}$, но $\{1\} \notin \{1\}$. Кроме того, $\{1\} \in \{\{1\}\}$, но $1 \notin \{\{1\}\}$. Аналогично, в множество $\{1, 2\}$ входят два элемента – 1 и 2 , но в $\{\{1, 2\}\}$ входит только один элемент – это $\{1, 2\}$.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Для отдельных, часто используемых числовых множеств чисел есть специальные названия.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные, а так же нуль), $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;

- $\mathbb{Q} = \{x = \frac{p}{q} \mid \text{где } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;

- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа, содержащие в своей записи знаки радикалов $\sqrt[n]{m}$, а также числа π и e ; также встречается определение множества действительных чисел как множества всех десятичных дробей), $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Примеры. $0 \notin \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Класс всех рассматриваемых множеств называется *универсальным множеством*, или *универсумом* (обозначается U).

Задачи для самостоятельного решения

1. Придумайте два примера множеств, элементами которых были бы геометрические фигуры.

2. Придумайте два примера множеств, элементами которых были бы математические объекты, изучаемые в курсах алгебры или математического анализа.

3. Запишите множество всех натуральных делителей числа 15 и найдите число его элементов.

4. Задайте различными способами множество всех чисел, являющихся степенями двойки: 2, 4, 8, 16... и не превышающих 300.

5. Задайте различными способами множество натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, ...

6. Пусть $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n = 3k + 5, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$. Можно ли утверждать, что $23 \in A$?

7. Пусть $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k - 1, \text{ для некоторого } k \geq 1 \text{ и } k \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что $15 \in B$, а $32 \notin B$.

8. Задайте в явном виде (списком) множество всех подмножеств множества U , если $U = \{1, 2, 5, 7\}$.

9. Какие из приведенных определений множеств A , B , C , D являются корректными:

- a) $A = \{1, 2, 3\}$;
- b) $B = \{5, 6, 6, 7\}$;
- c) $C = \{x: x \in A\}$;
- d) $D = \{A, C\}$.

Принадлежит ли число 1 множеству D ?

10. Перечислите элементы множества $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$.

11. Изобразите в декартовой системе координат на плоскости множество, удовлетворяющее заданному характеристическому свойству $B = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$.

§2. Способы задания множеств

С одним из способов задания множеств мы уже познакомились. Это описательный способ. Другой способ задания множества заключается в простом перечислении всех его элементов.

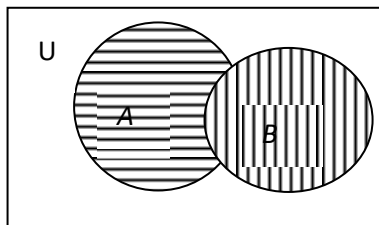
Пример. Пусть множество A состоит из первых трех натуральных чисел. Мы задали это множество, описав все его элементы. Это же множество можно записать следующим образом: $A = \{1, 2, 3\}$.

Способ записи виден из самого примера. Элементы, из которых состоит множество, записываются друг за другом через запятую или через точку с запятой и заключаются в фигурные скобки.

Элементы множества не могут повторяться: запись $A = \{1, 2, 1, 4, 6\}$ не является описанием множества. Возникает вопрос о том, какие еще возможны способы описания (задания) множества.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВА

I. Диаграммы Эйлера-Венна. Это графическое изображение множеств в универсуме. Универсум изображается прямоугольником, внутри которого располагаются множества, иллюстрирующиеся овалами. Результирующее множество выделяется штриховкой.



II. Перечисление элементов. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$.
Списком можно задавать только конечные множества. В данном случае последовательность элементов множества

в произвольном порядке записывается в фигурных скобках. Множество целых чисел от n до m обозначается $A_{n..m}$.

Пример. $D_{-3..3} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

III. Характеристический предикат. $A = \{x | P(x)\}$. Это описание свойств элементов данного множества, где $P(x)$ – некоторое логическое выражение с логическим значением. Если результат $P(x)$ положителен (истинен), то элемент принадлежит множеству.

Пример. $D = \{n \in \mathbb{Z} | -4 < n < 4\}$.

Способ задания множеств с помощью характеристических свойств таит в себе некоторые опасности, которые могут привести к противоречиям, например, таким как *парадокс Бертрانا Рассела*, основанный на одном лишь определении множества.

Множества либо являются элементами самих себя, либо не являются. Так, множество абстрактных понятий само является абстрактным понятием, а множество всех звезд на небе не является звездой. Множество звуков также является звуком. Аналогично, множество всех множеств само есть множество.

Рассмотрим M – множество всех множеств, являющихся элементами самих себя, и N – множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя. К какому же из этих двух множеств отнести множество N ? Иными словами, является ли N элементом самого себя? Если N является элементом себя, т.е. $N \in N$, значит N является элементом M , т.е. $N \in M$, но тогда, по определению множества M , $N \notin N$ т.е. N не является элементом самого себя. Получили противоречие. С другой стороны, если N не является элементом самого себя, то N есть элемент N , а не M , и N является элементом самого себя, что опять является противоречием.

Другие популярные формы парадокса Бертрانا Рассела – это парадокс бородбрея (парикмахера) и парадокс лжеца.

1) **Парадокс бородбрея.** В одной деревне

брадобрей обязуется брить всех тех и только тех жителей, которые не бреются сами. Как быть самому брадобрею: должен ли он брить самого себя? Очевидно, что любой ответ приводит к противоречию.

2) **Парадокс лжеца.** В простейшем варианте парадокса человек произносит всего одну фразу: «Я лгу». Или говорит: «Высказывание, которое я сейчас произношу, является ложным». Или: «Это высказывание ложно». Если высказывание ложно, то говорящий сказал правду, и значит, сказанное им не является ложью. Если же высказывание не является ложным, а говорящий утверждает, что оно ложно, то это его высказывание ложно. Оказывается, таким образом, что если говорящий лжет, он говорит правду, и наоборот.

В средние века распространенной была такая формулировка:

– Сказанное Платоном – ложно, – говорит Сократ.

– То, что сказал Сократ, – истина, – говорит Платон.

Возникает вопрос, кто из них высказывает истину, а кто ложь?

Таким образом, парадокс Рассела показывает, что не всякое свойство приводит к осмысленному заданию множества.

IV. Порождающая процедура. $A = \{x \mid x = F\}$. Здесь F – процедура, при работе которой появляются элементы множества (т.е. она описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов). Здесь элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры.

Пример. $A = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\} = \{n \mid 1 \in A \wedge (n \in A \Rightarrow 2n \in A)\}$.

Такое задание также называется *рекурсивным*. В курсе общей математики способ носит название *математической индукции*.

Если мы хотим, чтобы смысл каждого утверждения в математике всеми понимался одинаково, очень важно использовать точную терминологию. Например, что имеют в виду, когда говорят, что два множества равны?

Определение. Пусть A и B – два множества. Тогда $A = B$ (читаем: A равно B), если элементы множеств A и B одинаковы.

Иначе говоря, множества A и B — *равные*, если состоят из одних и тех же элементов.

Слово *если* приобретает особое значение, когда его употребляют в определениях. В определении сказано, что $A = B$, если у множеств A и B одинаковые элементы. Поскольку в определении фигурирует слово *если*, мы считаем, что $A = B$, как только условие выполняется. Таким образом, « $A = B$ » – просто сокращенная запись для утверждения «элементы множеств A и B одинаковы».

Пример. Найдите более простое описание множеств, перечисляющее их элементы.

(а) $A = \{x: X - \text{целое и } x^2 + 4x = 12\}$;

(б) $B = \{x: X - \text{название дня недели, не содержащее буквы «е»}\}$;

(в) $C = \{n^2: n - \text{целое}\}$.

Решение. (а) Если $x^2 + 4x = 12$, то $x(x + 4) = 12$. Поскольку x – целое число, делящее 12, то оно может быть равно только $d = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ и ± 12 . С другой стороны, $x + 4$ тоже делит 12. Поэтому остается только два значения: $x = -6$ или $x = 2$.

Другой способ решения заключается в отыскании корней квадратного уравнения $x^2 + 4x - 12 = 0$. Он приводит к тому же ответу $x = -6$ или $x = 2$.

Следовательно, $A = \{-6, 2\}$.

(б) $B = \{\text{вторник, пятница, суббота}\}$.

(в) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Является ли описанием множества следующая запись: $A = \{1, 2, 1, 4, 6\}$?

2. Множество $M = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ задано перечислением. Задайте его с помощью характеристического свойства.

3. Задайте множество нечетных чисел $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ с помощью характеристического свойства.

4. Найдите, по крайней мере, два способа заменить многоточие в описании множества $\{2, 4, \dots, 12\}$.

5. Приведите три описания элементов множества $\{2, 5, 8, 11, 14\}$.

6. Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

- | | |
|--------------------|---|
| | a) $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid -5 < x < 2\};$ |
| 1) $x = 2;$ | b) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -7 < x < 0,5\};$ |
| 2) $x = \sqrt{3};$ | c) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid -5 < x < 2\};$ |
| 3) $x = -5;$ | d) $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 2\};$ |
| 4) $x = 0,5.$ | e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 3\};$ |
| | f) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x < 2\}.$ |

7. С помощью характеристического свойства задайте множество всех натуральных двузначных чисел.

8. Прочитайте и разберитесь самостоятельно, какое множество задает следующая запись:

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Задайте множество A описанием.

9. Пусть P – множество всех точек какой-нибудь плоскости. Задайте с помощью характеристического свойства подмножество K всех точек плоскости, удаленных от некоторой фиксированной точки плоскости O на расстояние, не превышающее некоторого фиксированного числа R .

10. Чем отличаются записи множеств $A=\{x \in \mathbb{N} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$, $B=\{x \in \mathbb{Z} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$, $C=\{x \in \mathbb{Q} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$ и $D=\{x \in \mathbb{R} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$? Задайте эти множества другими способами (если это возможно).

11. Пусть $A=\{n: n=2j \text{ для некоторого } j \in \mathbb{N}\}$ и $B=\{n: n=2k+2 \text{ для некоторого } k \geq -1 \text{ и } k \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что $A=B$.

12. Пусть заданы множества $A=\{n \in \mathbb{N}: n=4j^2-3 \text{ для некоторого } j \in \mathbb{N}\}$ и $B=\{n \in \mathbb{N}: n=2k^2-3 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что $A \neq B$.

13. Покажите, что два данных множества $M_1=\{x \mid \sin(x)=1\}$ и $M_2=\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ совпадают.

§3. Подмножество

Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается $A \subseteq B$), если всякий элемент из A является элементом B , то есть: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Если в множестве B найдется хотя бы один элемент, не принадлежащий множеству A , то B не является подмножеством множества A . Это записывается с помощью того же знака включения, но последний зачеркивается: $B \not\subseteq A$, и тогда говорят, что множество B не содержится в множестве A .

Пустое множество $\emptyset$ является подмножеством любого множества ($\emptyset \subseteq A$). Далее любое множество является подмножеством самого себя ($A \subseteq A$). Таким образом, у любого множества A есть два подмножества: пустое $\emptyset$ и оно само. Они называются *несобственными* подмножествами множества A .

Определение. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* подмножеством множества B (обозначается $A \subset B$ (строгое включение), $A \subseteq B$).

Пример. Найдите все собственные подмножества множества $A = \{1, 2\}$.

Решение. $\{1\}, \{2\}$.

Приведем пример соотношения между числовыми множествами с использованием знака включения: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ – это так называемая «цепочка» (или «башня») включений. Каждое множество в этой цепочке, кроме последнего, есть подмножество всех последующих множеств.

Пример. $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ – множество целых чисел не содержится в множестве натуральных чисел, то есть, не является его подмножеством, так как существует целое число, которое не является натуральным числом. Например, нуль – целое, но не относящееся к множеству натуральных чисел.

Пример. Найдите три разных подмножества в множестве $A = \{0, 2, 4, 6\}$.

Решение. $\{0, 2, 4, 6\}, \{0, 4, 6\}, \{2\}$.

Заметим, чтобы доказать, что $A = B$, для множеств A и B необходимо показать, что $A \subset B$ и $B \subset A$, то есть $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \& (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выпишите все подмножества множества $A = \{1, 2, 3\}$. (Не забудьте про пустое подмножество!). Множество всех подмножеств называют *булеаном* множества, или *множеством степеней* (обозначение $\mathfrak{P}(A), 2^A$).

2. Найдите три разных подмножества в множестве слов русского языка.

3. Перечислите подмножества следующих множеств: $A = \{0, 2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5\}, C = \{0, \{2, 4\}, \{6\}\}$.

4. Как вы думаете, является ли предложение, составленное из слов русского языка, подмножеством множества слов русского языка?

5. Как вы думаете, является ли роман Л.Н. Толстого «Война и мир» подмножеством множества предложений русского языка?

6. Пусть A, B, C – произвольные множества, и пусть $A \not\subset B$ и $B \not\subset C$. Верно ли, что $A \not\subset C$?

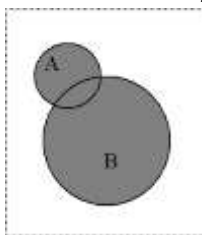
7. Докажите, что если $A \subset B$ и $A \neq B$, то $\exists x \in B$, такой, что $x \notin A$.

8. Укажите множество, имеющее: ровно одно подмножество; ровно два подмножества. Подумайте: может ли множество иметь ровно 3 различных подмножества? Докажите или опровергните свое предположение.

§4. Операции над множествами

Еще одним примером порождающей процедуры, представляющим собой важный факт теории множеств, являются ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. Рассмотрим их.

1. **Объединение множеств.** Это множество, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. Данная операция выполнима и для произвольного количества множеств (в том числе и бесконечного): $\bigcup_{i=1}^k A_i$

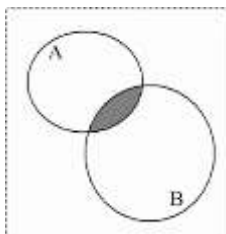


Пример. $A = \{2, 1, 5, 7\}$, $B = \{-6, -7, 0, 1, 5\}$, тогда $A \cup B = \{-7, -6, 0, 1, 2, 5, 7\}$.

2. **Пересечение множеств.** Это множество, элементами которого являются только те элементы, которые присутствуют в каждом из множеств. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

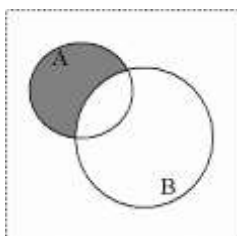
Эта операция также возможна с произвольным количеством

множеств: $\bigcap_{i=1}^k A_i$.



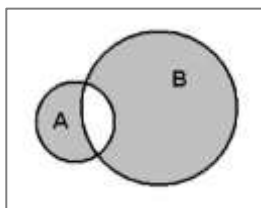
Пример. $A=\{2, 1, 5, 7\}$, $B=\{-6, -7, 0, 1, 5\}$, тогда $A \cap B = \{1, 5\}$.

3. Разность двух множеств. Это множество элементов, принадлежащих первому множеству и не являющихся элементами второго. $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$.



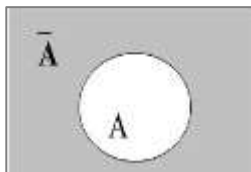
Пример. $A=\{2, 1, 5, 7\}$, $B=\{-6, -7, 0, 1, 5\}$, тогда $A \setminus B = \{2, 7\}$.

4. Симметрическая разность двух множеств. Это разность объединения этих множеств с их пересечением. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{x | (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$.



Пример. $A=\{2, 1, 5, 7\}$, $B=\{-6, -7, 0, 1, 5\}$, тогда $A \Delta B = \{-7, -6, 0, 2, 7\}$.

5. Дополнение. Учитывая, что все множества образуют универсум, то дополнение – это множество элементов универсума, не являющиеся элементами данного множества. $\bar{A} = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$ (иногда можно увидеть запись A'). В данном случае универсум должен быть либо задан, либо понятен из контекста задания.



Пример. $A = \{2, 1, 5, 7\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, тогда $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8, 9\}$.

Операции объединения, пересечения и дополнения называются *булевыми операциями*.

Пример 1. Даны множества $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C = \{12, 13, 15, 16\}$, $D = \{0, 1, 20\}$. Найти $A \cup B$, $C \cup D$, $B \cap C$, $A \cap D$, $A \setminus C$, $D \setminus B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup D \cap C$, $A \cap C \cap D$.

Решение. Будем пользоваться определениями соответствующих операций и учтем, что сначала должна выполняться операция пересечения множеств, а затем уже объединение или разность. Получим:

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 13, 15, 16\}$, $C \cup D = \{0, 1, 12, 13, 15, 16, 20\}$, $B \cap C = \{16\}$, $A \cap D = \emptyset$, $A \setminus C = \{2, 3, 5, 8\}$, $D \setminus B = \{0, 20\}$, $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 15, 16\}$, $A \cap B \cap C = \emptyset$, $B \cup D \cap C = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $A \cap C \cap D = \{13, 15\}$.

Пример 2. Выберите один вариант ответа. Если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то равенство $A \cap B = A \dots$

Варианты ответа: 1) является возможным для любых множеств A и B ; 2) возможно, если $A \subset B$; 3) возможно, если $B \subset A$; 4) равенство невозможно.

Решение. Равенство $A \cap B = A$ выполняется, если элементы множества A будут являться элементами множества B , т.е. $A \subset B$.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МНОЖЕСТВАМИ

- 1) Идемпотентность: $A \cup A = A$ и $A \cap A = A$.
- 2) Коммутативность: $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$.
- 3) Ассоциативность: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
и $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- 4) Дистрибутивность: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
и $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- 5) Поглощение: $(A \cap B) \cup A = A$ и $(A \cup B) \cap A = A$.
- 6) Свойства нуля: $A \cup \emptyset = A$ и $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- 7) Свойства единицы: $A \cup U = U$ и $A \cap U = A$.
- 8) Законы де Моргана: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- 9) Инволютивность: $\overline{\overline{A}} = A$.
- 10) Свойства дополнения: $A \cup \overline{A} = U$ и $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- 11) Выражение разностей: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ и
 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$ (симметрическая разность).

Пример 1. Найдите формулу, эквивалентную данной:
 $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

Решение. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ (используем закон дистрибутивности относительно операции объединения) $= A \cap (B \cup \overline{B}) =$ (используем закон поглощения относительно операции объединения) $= A \cap U =$ (используем свойство операции пересечения с универсальным множеством) $= A$.

Пример 2. Опираясь на законы алгебры множеств, докажите, что произвольные множества A и B удовлетворяют свойству:

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

Решение. Напомним определение симметрической разности множеств:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Согласно законам алгебры множеств, имеем:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (\text{з. де Моргана})$$

$$= (A \cup B) \cap \overline{A} \cup \overline{B} = (\text{закон дистрибутивности})$$

$$= ((A \cup B) \cap \overline{A}) \cup ((A \cup B) \cap \overline{B}) =$$

$$(\text{закон коммутативности})$$

$$= (\overline{A} \cap (A \cup B)) \cap (\overline{B} \cap (A \cup B)) =$$

$$(\text{закон дистрибутивности})$$

$$((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)) \cup ((\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)) =$$

$$(\text{закон коммутативности})$$

$$= ((\overline{A} \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)) \cup ((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B)) =$$

$$(\text{закон дополнения})$$

$$= (\emptyset \cup (\overline{B} \cap A)) \cup ((\overline{A} \cap B) \cup \emptyset) = (\text{закон}$$

коммутативности и тождества)

$$= (\overline{B} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Следовательно, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$, как и утверждалось.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$. Возможно ли следующее равенство: $A \cap B = A$?

2. Пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите $A \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus C$ и $B \Delta C$.

3. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ и $A = [-2, 5)$, $B = (0, 8]$. Чему равно множество $B \setminus A$?

4. Убедитесь в справедливости равенства $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ на примере следующих множеств: $A = \{x: 1 \leq x \leq 12 \text{ и } x - \text{четное целое число}\}$, $B = \{x: 1 \leq x \leq 12 \text{ и } x - \text{целое число, кратное } 3\}$.

5. Докажите, что для любых множеств A и B имеет место соотношение: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

6. Докажите включения $A \cap B \subset B$ и $A \cap B \subset A \cup B$, не используя диаграммы Венна.

7. Докажите следующие утверждения, не используя диаграммы Венна:

а) если $A \subset B$, то $A \cap B = A$ и $A \cup B = B$;

б) если $A \cap B = A$, то $A \subset B$;

в) если $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

8. Пусть $A = \{a; b\}$, $B = \{b; c\}$, $C = \{a; c\}$. Найдите множества

а) $A \cup B, A \cup C, B \cup C, A \cup B \cup C$;

б) $A \cap B, A \cap C, B \cap C, A \cap B \cap C, (A \cup B) \cap C$.

9. Докажите, что если $A \subset A \cap B$ и $B \subset A \cap B$, то $A = B$.

10. Изобразите множества A, B, C пересекающимися друг с другом кругами Венна и заштрихуйте множество $A \cap (B \cup C)$. Прodelайте то же самое с множеством $A \cup (B \cap C)$.

11. Докажите равенство множеств (закон дистрибутивности пересечения относительно объединения): $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Сначала используйте диаграммы Венна, а затем докажите равенство, не используя их.

12. Докажите, что если $A \cup B = \emptyset$, то $A = B = \emptyset$. Останется ли верным это утверждение, если заменить знак объединения на знак пересечения?

13. Пусть $A = [1; 4]$, $B = [2; 6]$ – отрезки числовой прямой. Найдите:

$A \setminus B$, $B \setminus A$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

14. Пусть $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Найдите $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \cap B$. Найдите дополнения множеств A , B и $B \setminus A$ в универсуме $\mathbb{N}$.

15. Пусть U – универсум. Найдите множества: $\overline{U}$, $\overline{\emptyset}$, $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$.

16. Пусть $A, B \in \mathbb{R}$ и $A = [-\frac{4}{5}; \frac{10}{3}]$, $B = (-\frac{3}{4}, 5]$. Чему равно множество $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ и $B \Delta C$?

17. $A = \{(x, y): x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$ и $B = \{(x, y): x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$. Найдите $A \cap B$.

18. Существуют ли множества A, B, X такие, что выполняется набор условий: $\overline{A \cup B} = \emptyset$, $X \Delta A = \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$?

§5. Мощность конечных множеств

Понятие мощности множеств связано с оценкой числа элементов в нем. В конечном множестве количество элементов можно пересчитать.

Множества могут быть конечными (состоящими из конечного числа элементов) и бесконечными. Количество элементов в конечном множестве называется его *мощностью* и обозначается $|A|$ или $m(A)$.

Например, если $A = \{a, b, c\}$ то $|A| = 3$.

О мощности бесконечного множества мы поговорим позднее.

Множество нулевой мощности, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$. Оно введено для удобства: лучше сказать, что множество пусто, чем объявить его несуществующим. Так множество студентов в аудитории может быть пустым.

Множества, имеющие одинаковое количество элементов, называются *равномощными*: $|A| = |B|$.

Подсчёт количества элементов в конечных множествах относят к *комбинаторике*. Некоторые начальные сведения из комбинаторики приведены дальше в качестве задач. Сейчас нас в первую очередь интересует следующий принцип: если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое число

элементов (взаимная однозначность означает, что каждому элементу первого множества соответствует ровно один элемент второго и наоборот).

Пример 1. На окружности выбраны 1000 белых точек и одна чёрная. Чего больше – треугольников с вершинами в белых точках или четырёхугольников, у которых одна вершина чёрная, а остальные три белые?

Решение. Их поровну, поскольку каждому четырёхугольнику соответствует треугольник, образованный тремя его белыми вершинами.

Пример 2. Докажите, что последовательностей, состоящих из нулей и единиц, длины n , в которых число единиц равно k , равно числу k -элементных подмножеств n -элементного множества.

Решение. Количество мест для размещения единиц в последовательности соответствует количеству k -элементных подмножеств n -элементного множества $\{1, 2, 3 \dots n\}$.

Это число называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается в русскоязычной литературе C_n^k ; в иностранных источниках обычно используется обозначение $\binom{n}{k}$.

Легко доказать свойства сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

С сочетаниями связана формула *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Равномощны ли множества X и Y , если:
 - а) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{6, 7, 8, 9\}$;
 - б) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$;
 - в) $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

2. Приведите примеры трех множеств, равномоощных множеству $A = \{a, b, c, d\}$. Есть ли среди них множество, которое равно A ?

3. Пусть A – множество различных букв в слове «математика», а B – множество различных букв в слове «стереометрия». Найдите пересечение и объединение множеств A и B . Определите мощность всех множеств.

4. Найдите мощность множества A , если $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid -4 < n < 4\}$.

5. Найдите $|A|$, если $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x > -\frac{1}{2}) \& (x < \frac{19}{2})\}$.

6. $A = \{2, 1, 5, 7\}$, $B = \{-6, -7, 0, 1, 5\}$, найдите $|A \cap B|$.

7. $A = \{2, 1, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, найдите $|A \setminus B|$.

8. Даны множества $A = \{a, b, c, d, e, f, k\}$ и $B = \{a, c, e, k, m, p\}$. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Найдите мощности всех множеств.

9. Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 57 или мощности 43? (Указание: $57 + 43 = 100$.)

10. Образуйте все подмножества множества букв в слове «крот». Сколько подмножеств получилось? Определите мощность Булеана.

11. Докажите, что для конечного множества A количество элементов в булеане $\mathfrak{P}(A)$ равно $2^{|A|}$.

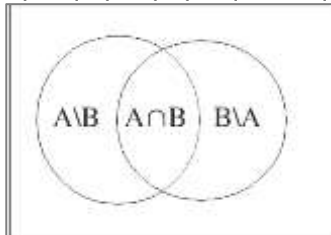
12. Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

§6. Формула включений-исключений

Формула включений и исключений для двух множеств.

Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

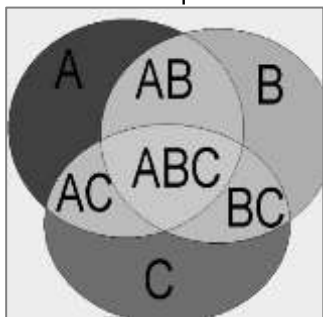


Доказательство: в сумме $|A| + |B|$ пересечение $A \cap B$ учтено дважды, поэтому для компенсации мы вычитаем $|A \cap B|$.

Формула включений и исключений для трех множеств.

Для любых конечных множеств A , B и C справедливо равенство:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Поясним кратко, откуда берутся слагаемые справа. Назовём двукратными элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и трёхкратными — элементы, входящие

в пересечение трёх множеств. Сложив мощности A , B и C мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но при этом трижды вычли трехкратные элементы, которые теперь оказались полностью неучтёнными. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Пример 1. Двенадцать малышей вышли во двор играть в песочнице. Каждый, кто принес ведёрко, принес и совочек. Забыли дома ведёрко девять малышей, забыли дома совочек двое. На сколько меньше малышей, которые принесли ведёрко, чем тех, которые принесли совочек, но забыли ведёрко?

Решение. 3 малыша принесли ведёрко, а значит и совочек. 10 малышей принесли совочек. Значит, 7 малышей принесли совочек без ведёрка. $7 - 3 = 4$.

Ответ: на 4.

Пример 2. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

Подсказка. Рассмотрите людей, являющихся математиками и философами одновременно.

Решение 1. Например, число всех людей – 63. 1) $63/7=9$; 2) $63/9=7$.

В итоге больше философов.

Решение 2. Обозначим через x число людей, являющихся математиками и философами одновременно. Тогда число математиков равно $7x$, а число философов — $9x$.

Если $x \neq 0$, то философов больше. А что значит, что $x = 0$? Это значит, что ни тех, ни других нет вообще, то есть их "поровну". Это правильный ответ, формально удовлетворяющий условию задачи. И те, кто его указал, вдвойне молодцы! Хотя решение засчитывалось и тем, кто разобрал только случай, когда математики всё-таки есть.

Ответ. Если есть хотя бы один философ или математик, то философов больше.

Пример 3. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

Решение. Обозначим:

U – универсальное множество, т.е. множество всех туристов,

A – множество туристов, знающих английский язык,

B – множество туристов, знающих французский язык.

Тогда по условию задачи: $m(U) = 100$ (чел.);

$$m(A) = 70 \text{ (чел.)}; m(B) = 45 \text{ (чел.)};$$

$$m(A \cap B) = 23 \text{ (чел.)}$$

$$\text{Найти: } m(D) = m(U) - m(A \cup B) - ?$$

Находим количество туристов, знающих хотя бы один язык:

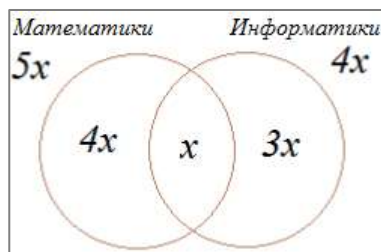
$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B) = 70 + 45 - 23 = 92 \Rightarrow \text{количество туристов, не знающих ни одного языка:}$$
$$m(D) = m(U) - m(A \cup B) = 100 - 92 = 8 \text{ (чел.)}$$

Ответ: 8 чел.

Пример 4. По данным опроса, проведенного в 7 «И» классе, выяснилось, что 20 % учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и информатикой, а 25 % учеников, интересующихся информатикой, интересуются также и математикой. И только Васе с Сережей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «И», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Решение. Количество человек в 7 «И» без учета Васи и Сережи более 18 и менее 28, то есть от 19 до 27. Пусть x учеников интересуются одновременно и математикой, и информатикой. Тогда всего математикой интересуются $5x$, а информатикой – $4x$ учеников. Значит, математикой или информатикой интересуются $5x + 4x - x = 4x + x + 3x = 8x$

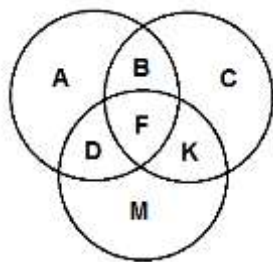
учеников (см. рис.). В указанных границах есть только одно число, кратное восьми, – число 24. Следовательно, $8x = 24$, а всего в классе 26 учеников.



Ответ: 26 человек.

Пример 5. В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников. Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?

Решение.



$$m(A \cup B \cup C \cup K \cup M \cup D \cup F) =$$

$$m(E) = 35$$

$$m(F) = 6$$

$$m(B \cup F) = 15$$

$$m(D \cup F) = 13$$

$$m(K \cup F) = 9$$

Найти $m(A \cup C \cup M)$

$$m(B) = m(B \cup F) - m(F) = 15 - 6 = 9$$

$$m(D) = m(D \cup F) - m(F) = 13 - 6 = 7$$

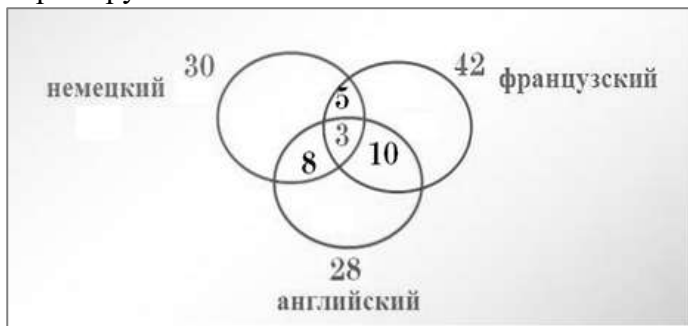
$$m(A \cup C \cup M) = m(E) - m(B \cup D \cup (F \cup K)) = 35 - (9 + 7 + 9) = 10$$

Ответ: Только одним видом транспорта пользуется 10 учеников.

Пример 6. Из 90 туристов, отправляющихся в путешествие, немецким языком владеют 30 человек,

английским – 28 чел, французским – 42 чел. Английским и немецким одновременно владеют 8 человек, английским и французским – 10 чел, немецким и французским – 5 чел, всеми тремя языками – 3 чел. Сколько туристов не владеют ни одним языком?

Решение: Покажем условие задачи графически – с помощью трёх кругов.



Обозначим искомое множество за x . Используем формулу включений-исключений для решения задачи: $90 = 30 + 42 + 28 - 8 - 5 - 10 + 3 + x$. Откуда $x = 10$.

Ответ: 10 человек.

Пример 7. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 2000, которые: а) делятся на 3? б) на 5? в) на 15? г) не делятся ни на 3, ни на 5?

Решение. Введем обозначения:

A – множество чисел, не превосходящих 2000, делящихся на 3;

B – множество чисел, не превосходящих 2000, делящихся на 5;

C – множество чисел, не превосходящих 2000, которые не делятся ни на 3, ни на 5.

Через $[a]$ будем обозначать целую часть числа a .

Заметим, что $A \cap B \cap C = A \cap C = B \cap C = \emptyset$.

а) Делится на 3 каждое третье: $m(A) = [2000:3] = 666$, $(2000 = 3 \cdot 666 + 2)$.

б) Делится на 5 каждое пятое: $m(B)=2000:5 = 400$.

в) Количество чисел, которые делятся на 15, равно $m(A \cap B)=[2000:15]=133$, $(2000=15 \cdot 133+5)$.

г) Используем формулу включений-исключений:

$2000 = m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - 666 + 400 + m(C) - 133 + 0$. Тогда $m(C) = 2000 - 933 = 1067$ чисел.

Ответ: 1067.

Задачи для самостоятельного решения

1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

2. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 – на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на коньках, и на лыжах?

3. Каждый ученик в классе играет либо в футбол, либо в шахматы. Половина учеников играет в футбол, две трети учеников играют в шахматы, а пять учеников играют и в футбол, и в шахматы. Сколько учеников в классе?

4. Класс из 30 учеников писал контрольную работу по математике, состоящую из трех задач. 15 учеников решили не более двух задач, 27 – не менее двух задач. Сколько учеников решили ровно две задачи?

5. Художник Худобеднов за месяц работы написал 42 картины. На 17 из них есть лес, на 29 – река, а на 13 – и то, и другое; на остальных картинах – не пойми что. Сколько картин изображают «не пойми что»?

6. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42 человека, с сыром и колбасой – 28 человек, с колбасой и ветчиной – 31 человек, а с сыром и ветчиной – 26 человек. 25 человек взяли с собой все три вида бутербродов, а несколько человек вместо бутербродов взяли

пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

7. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5, ни на 9?

8. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

9. Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10 – в Италии, 6 – в Англии. В Англии и Италии – пятеро, в Англии и Франции – 6, во всех трёх странах – 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работает 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?

10. Шестиклассники заполняли анкету с вопросами об их любимых мультфильмах. Оказалось, что большинству из них нравятся «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны» и «Волк и теленок». В классе 38 учеников. «Белоснежка и семь гномов» нравится 21 ученику. Причем трем среди них нравятся еще и «Волк и теленок», шестерым – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один ребенок одинаково любит все три мультфильма. У «Волка и теленка» 13 фанатов, пятеро из которых назвали в анкете два мультфильма. Надо определить, скольким же шестиклассникам нравится «Губка Боб Квадратные Штаны».

11. Вася и Петя разрезали два одинаковых прямоугольника. У Васи получились два прямоугольника, каждый периметром 40 см, а у Пети – два прямоугольника, каждый периметром 50 см. Какой периметр имели первоначальные прямоугольники?

12. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот»,

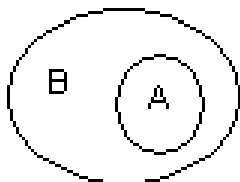
а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно? Ответ обоснуйте.

13. Докажите, что если из $2n$ последовательных натуральных чисел выбрать любым способом $n + 1$ число, то среди выбранных чисел найдутся по крайней мере два взаимно простых числа. (Указание: докажите, что, если A — конечное множество, то пересечение двух его подмножеств не пусто, если каждое из этих подмножеств содержит больше половины элементов множества A).

Раздел 2. Алгебра множеств. Декартово произведение множеств. Соответствия

Мы уже знаем, что множество A называется *подмножеством* множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B .

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$.



Множество B называется *покрывающим* множество A .

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A — *собственное* подмножество ($A \subset B$).

Множества A и B равны, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Ясно, что $A=B \Rightarrow |A|=|B|$; $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$; $A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$.

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Множество является универсумом для всех своих подмножеств. В таком случае можно задать все элементы этого универсума.

Множество всех подмножеств множества A называется *булеан* и обозначается 2^A или $\mathfrak{P}(A)$.

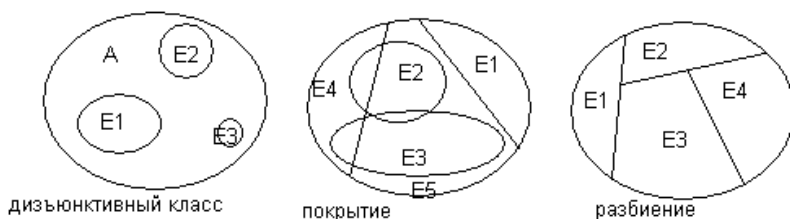
$$\mathfrak{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}.$$

Ясно, что $\forall A (\emptyset \subset A, A \subseteq A)$, и для конечных множеств выполняется равенство $|\mathfrak{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Семейство подмножеств $\{E_i\}$ некоторого множества A называется *дизъюнктивным*, если элементы этого класса попарно не пересекаются и в множестве A есть элементы, не входящие ни в одно из этих подмножеств.

Семейство подмножеств $\{E_i\}$ некоторого множества A называется *покрытием*, если каждый элемент множества A лежит хотя бы в одном из элементов данного семейства.

Семейство подмножеств $\{E_i\}$ некоторого множества A называется *разбиением*, если каждый элемент множества A лежит строго в одном из элементов семейства.



ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Рассмотрим два элемента a и b . Если соблюдать порядок расположения этих элементов, то пару (a, b) называют *упорядоченной парой*. То есть $(a, b) \neq (b, a)$.

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар, в которых первая координата взята из первого множества, а вторая из второго.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Если в декартовом произведении более двух множеств, то множество строится из упорядоченных n -ой длины, равной числу множеств.

Если перемножаемые множества равны, то речь идет о степени множества: $A \times A = A^2$.

Теорема. Мощность прямого произведения множеств равна произведению мощностей перемножаемых множеств.

Доказательство: результатом прямого произведения множеств будет множество векторов, первые элементы которых можно выбрать $|A_1|$ способами, вторые координаты – $|A_2|$ и т.д., где $|A_i|$ - мощность i -того множества. Таким образом мы имеем $|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$ векторов в полученном множестве.

Следствие. $|A^n| = |A|^n$.

Примеры.

1) Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, где элементы множеств A и B – обычные натуральные числа. Рассмотрим упорядоченные пары $(3, 4)$ и $(4, 3)$. Пара $(3, 4) \in A \times B$, но $(3, 4) \notin B \times A$. Следовательно, $A \times B \neq B \times A$.

Далее, обе пары $(1, 2)$ и $(2, 1)$ являются элементами обоих декартовых произведений $A \times B$ и $B \times A$, но не удовлетворяют определению равенства упорядоченных пар: $(1, 2) \neq (2, 1)$, так как $1 \neq 2$.

2) Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ – множество первых восьми букв латинского алфавита. $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ – множество первых восьми натуральных чисел. Тогда декартово произведение множества A на множество B есть множество $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), \dots, (h; 8)\}$. Для удобства все элементы этого множества можно записывать проще: $a1, a2, \dots, e4, \dots, h8$, и мы получаем обозначение всех 64 клеток шахматной доски.

3) Пусть $A = \{1, 2\}$. Тогда $A^2 = \{(1,1), (1, 2), (2,1), (2, 2)\}$.

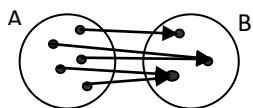
4) Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех действительных чисел. Тогда $\mathbb{R}^2$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел. Это множество можно

интерпретировать как множество точек координатной плоскости. Отождествление упорядоченной пары с точкой плоскости стало возможным благодаря введению понятия координат точки плоскости. Первая компонента пары есть абсцисса точки, вторая – её ордината. Собственно говоря, от этого примера и произошло название декартова произведения множеств. Аналогично, $\mathbb{R}^3$ – декартов куб множества $\mathbb{R}$ есть множество всех упорядоченных троек действительных чисел (множество точек координатного пространства).

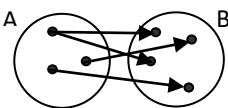
СООТВЕТСТВИЯ

Подмножество прямого произведения множеств называется *соответствием*: $G \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

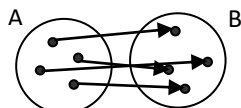
Элементы первых $n-1$ множеств задают *область определения соответствия* (прообразы), последнего множества – *область значений соответствия* (образы). Говорят, что каждому вектору прообразов соответствует образ. Если область определения состоит из всех элементов образующих его множеств, то соответствие *всюду определенное* (инъективное), иначе *частичное*. Если область значений состоит из всего последнего множества соответствия, то соответствие *сюръективное*.



Инъективное



Сюръективное



Взаимно однозначное

Соответствие называется *функциональным*, если оно всюду определено, сюръективно и любой прообраз имеет единственный образ. Если в функциональном соответствии каждому образу соответствует единственный прообраз, то это *взаимно однозначное соответствие*.

Теорема. Если между конечными множествами установлено взаимно однозначное соответствие, то множества равномощны.

Доказательство: пусть даны два конечных множества A и B , между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие. Допустим, что $|A| \neq |B|$, если $|A| < |B|$ - это значит дано сюръективное соответствие, которое при этом не инъективно, т.е. в множестве B есть два элемента, имеющие один и тот же прообраз.

$|A| > |B|$ - значит дано инъективное соответствие, которое при этом не сюръективно, т.е. в множестве A есть два элемента, имеющие один и тот же образ.

В любом случае мы не получаем взаимно однозначности соответствия, что приводит к неверности предположения.

Итак, конечные множества равномощны, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Для бесконечных множеств данное утверждение является определением равномощности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что множества $A = \{2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ удовлетворяют соотношению $A \subseteq B$.

2. Пусть $A = \{n: n = 2k + 5 \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{n: n = 2j + 1 \text{ для некоторого } j \in \mathbb{N}\}$. Верно ли, что $A \subseteq B$?

3. Перечислите все элементы декартова квадрата множества $A = \{0, 1, 2\}$.

4. Перечислите все элементы декартова куба множества $A = \{1, 2\}$.

5. Методом математической индукции докажите формулу числа элементов n -й декартовой степени конечного множества.

6. Подумайте, какое получится декартово произведение $A \times B$, если $B = \{0\}$?

7. Подумайте, какое получится декартово произведение $A \times B$, если $B = \emptyset$?

Раздел 3. Отношения

§1. Бинарные отношения

Подмножество n -ой степени множества называется n -местным отношением на этом множестве и обозначается $R \subseteq A^n$. Запись $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ означает, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоят в отношении R .

Таким образом, любое подмножество декартового квадрата произвольного множества A называется бинарным отношением на множестве A : $S \subset A \times A = A^2$.

ВИДЫ ОТНОШЕНИЙ:

1-местное – подмножество;

2-местное – бинарное отношение;

3- местное – тернарное отношение;

и т. д.

n -местное – n -арное отношение.

Показатель степени множества называется *арностью отношения*.

Для записи отношения обычно применяется инфиксная запись: aRb .

ТИПЫ ОТНОШЕНИЙ:

обратное отношение:

$$R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\};$$

дополнение отношения:

$$R^c = \{(a, b) | (a, b) \notin R\};$$

тождественное отношение:

$$I = \{(a, a) | a \in A\};$$

универсальное отношение:

$$U = \{(a, b) | a, b \in A\}.$$

Можно сказать, что $(R^{-1})^{-1} = R$.

Для отношений справедливы операции с множествами, определяющиеся аналогично.

Для любого подмножества A_1 множества A можно определить понятие *сужения отношения R на множество A_1* .

Оно получается удалением из R всех пар, содержащих элементы, не входящие в A_1 .

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

Поскольку отношение является подмножеством, то для его задания подходят все способы задания множеств (см. выше).

Если отношение задано на конечном множестве, то можно использовать также матричный способ задания:

$$\boxed{R} = R[i,j] = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j \\ 0, & \text{если } a_i \not R a_j \end{cases}. \quad (\text{нарисовать матрицу})$$

Ясно, что единичная матрица E задает отношение равенства.

Так же к отношениям можно применить все операции с множествами.

Кроме того, отношения могут задать новое отношение, называемое *композицией*.

$$R_1 \circ R_2 = R = \{(a,b,c) | (a,b) \in R_1 \text{ и } c \in A \text{ и } a R_1 b R_2 c\}$$

Последовательная композиция отношения с самим собой называется *степенью* отношения: $R \circ R \circ R \circ \dots \circ R = R^n$.

Примеры.

1) Отношения «меньше», «больше», «меньше или равно», («не больше»), «больше или равно» («не меньше») являются примерами бинарных отношений на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$:

$$x < y, x \leq y, x > y, x \geq y.$$

Например, отношение «меньше». Это множество упорядоченных пар действительных чисел. Наглядно, геометрически это множество можно задать на координатной плоскости $\mathbb{R}^n$ как множество точек (x,y) , лежащих на координатной плоскости выше прямой $y = x$. Если обозначить это множество буквой M , то $(x, y) \in M \Leftrightarrow xMy \Leftrightarrow x < y$.

2) На любом множестве A можно определить отношение равенства: $E = \{(x, x) | x \in A\}$.

Соотношение $x \in E y$ означает по определению, что $x = y$. Таким образом, отношение E имеет собственное имя: «равенство» и специальное обозначение – знак равенства: « $=$ ».

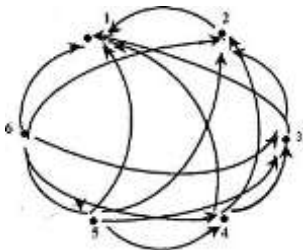
3) Определим на множестве натуральных чисел отношение делимости: $D = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N}: y = xz\}$.

Если число x находится в отношении D с числом y , то говорят, что число x делит число y или y делится на x , и обозначается $x \mid y \Leftrightarrow x D y$.

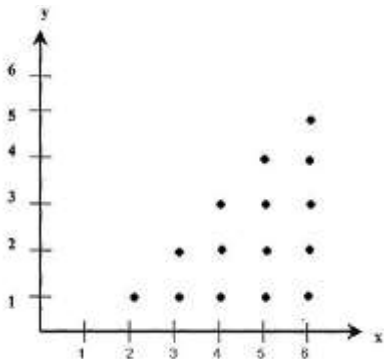
Можно задавать отношение в виде таблицы соответствий, иногда называемой графиком отношения, или графа отношений. Посмотрим эти задания на примерах.

Пример 1. Дано множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset \mathbb{N}$. На нем задано бинарное отношение R «больше», т. е. $(x, y) \in R \Leftrightarrow x > y$. Построить граф и график этого отношения.

Решение. 1) Граф указанного отношения:

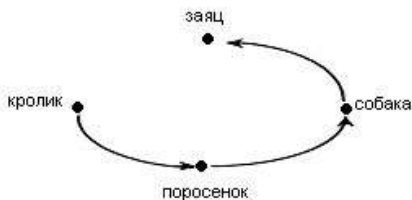


2) Строим график этого отношения:



Пример 2. Построить граф отношения «легче, чем» на множестве $A = \{\text{кролик, заяц, собака, поросёнок}\}$, если известно, что заяц тяжелее собаки, кролик легче поросёнка, а собака тяжелее поросёнка. Кто из животных самый легкий, кто – самый тяжелый?

Решение. Строим граф указанного отношения:



Итог: кролик – самый легкий, заяц – самый тяжелый.

Задачи для самостоятельного решения

1. Формализуйте по своему выбору пару отношений на множестве людей (дочь, сын, мать, отец и т.п.).

2. Постройте цепочку слов, каждое из которых имеет длину 4 и является нарицательным существительным в единственном числе именительного падежа, причем каждое слово в цепочке толерантно соседним. Начинается цепочка со слова «муха», а заканчивается словом «слон».

3. Расширим понятие толерантности на множестве слов русского языка. Обозначим через $A(x)$ множество букв, из которых составлено слово x . Назовем слово x *толерантным* слову y и будем писать $x \sim y$, если множества $A(x)$ и $A(y)$ либо равны, либо отличаются (как множества) друг от друга не более одной буквой. Постройте цепочку толерантных слов от «ухи» к «борщу». Используйте только нарицательные существительные в именительном падеже в единственном числе.

4. На множестве $A = \{3, 5, 7, 9, 11\} \in \mathbb{N}$ задано отношение $x > y$. Выпишите все пары элементов, находящиеся в этом отношении. Задайте граф и график отношения.

5. Постройте граф отношения $R: xRy \Leftrightarrow x=y+2$ на множестве $\{-3, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

6. На множестве $Y = \{y \mid y \in \mathbb{Z}, -13 \leq y \leq -2\}$ задано отношение $R: xRy \Leftrightarrow x=2y$. Какие из следующих записей верны:

а) $(-6, -3) \in R$; б) $(-3, -6) \in R$; в) $(-4, -2) \in R$; г) $(-8, 4) \notin R$.

7. Множество M членов семьи Смирновых состоит из отца (Ивана Михайловича), матери (Елены Андреевны) и четырёх детей: Миши, Тани, Васи и Оли. Между членами семьи существуют отношения родства, которые можно выразить словами: «быть мужем», «быть братом» и т. д.

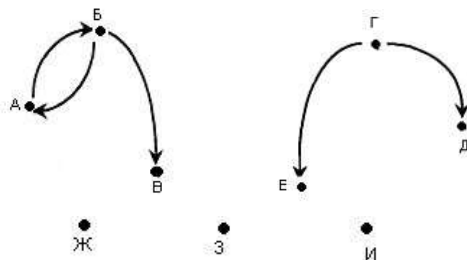
а) укажите все возможные отношения на множестве M ;

б) запишите отношения «быть дочерью» с указанием всех его элементов и постройте граф этого отношения;

в) постройте графы отношений «быть братом», «быть матерью».

8. Класс выставил на соревнования по плаванию команду мальчиков. В нее входили: Витя, Коля, Андрей и Саша. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саши, Андрей затратил на ту же дистанцию времени больше, чем Витя, который плавал медленнее Коли. Как распределились места на соревнованиях? (Задачу решите с помощью построения графа соответствующего бинарного отношения).

9. На рисунке изображен граф отношения « a брат b » на множестве детей нашего двора $\{A, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И\}$. Кто из них является мальчиком? Кто девочкой? О ком нельзя по этому графу ничего сказать?



§2. Свойства бинарных отношений

Рассмотрим свойства, которыми могут обладать бинарные отношения.

1. **Рефлексивность.** Для любого элемента a из A выполняется отношение aRa . $(\forall a \in A) aRa$.

Главная диагональ такого отношения содержит только единицы.

2. **Антирефлексивность.** Для любого a из A отношение не выполняется. $(\forall a \in A) \neg(aRa)$. Главная диагональ его матрицы содержит только нули.

3. **Симметричность.** Для любой пары отношение либо выполняется в обе стороны, либо вообще не выполняется. $(\forall a, b \in A) (aRb \Rightarrow bRa)$. Матрица симметрична относительно главной диагонали.

4. **Антисимметричность.** Для любой пары отношение выполняется в обе стороны только в том случае, когда элементы пары равны:

$$(\forall a, b \in A) (aRb = bRa \Rightarrow a = b).$$

5. **Транзитивность.** Для любых двух пар (a, b) и (b, c) выполнимость отношения для них говорит о выполнимости отношения для пары (a, c) :

$$(\forall a, b, c \in A) (aRb \ \& \ bRc \Rightarrow aRc).$$

6. **Полнота (линейность).** Любые два элемента из множества A вступают в отношение хотя бы в одну сторону. $(\forall a, b \in A) (a \neq b \Rightarrow aRb \vee bRa)$.

При этом, отношения, обладающие некоторым набором свойств, имеют свои названия. Перечислим их.

Определение 1. Бинарное отношение называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Определение 2. Бинарное отношение называется отношением толерантности, если оно рефлексивно и симметрично.

Определение 3. Бинарное отношение называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Определение 4. Бинарное отношение называется отношением строгого порядка, если оно транзитивно, антирефлексивно и асимметрично.

Выясним, какими свойствами обладают бинарные отношения, рассмотренные в качестве примеров в предыдущем параграфе.

Примеры.

1) Отношение «меньше или равно» на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Легко проверяется, что это есть бинарное отношение порядка, как и отношение «больше или равно», в то время как отношения «меньше» и «больше» являются отношениями строгого порядка.

2) Отношение равенства на любом множестве, очевидно, есть отношение эквивалентности.

3) Отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Очевидно, оно обладает свойством рефлексивности: $x | x$ для всех натуральных чисел; транзитивности: $(x | y) \& (y | z) \Rightarrow x | z$. Понятно, что оно антисимметрично: $(x | y) \& (y | x) \Rightarrow x = y$. Таким образом, отношение делимости на множестве натуральных чисел является отношением порядка.

4) Отношение толерантности, введенное на множестве слов русского языка, действительно является отношением толерантности, то есть, как это следует из определений, обладает свойствами рефлексивности и симметричности, но не обладает свойством транзитивности (для доказательства последнего достаточно привести контрпример).

5) Отношение равномощности на множестве слов русского языка, очевидно, является отношением эквивалентности.

6). Отношение «быть мужем» на множестве людей, очевидно, антирефлексивно и асимметрично, и оставшимися четырьмя свойствами не обладает.

Представление отношений в ЭВМ

Понятно, что в ЭВМ можно представить только конечные множества. По этой причине задать в ЭВМ можно только отношения, заданные на конечных множествах. Удобнее всего использовать матрицу отношения. О матрицах отношений существует две важные теоремы.

Теорема 1. Матрица композиции двух отношений равна произведению матриц этих отношений.

$$\boxed{R_1 \circ R_2} = \boxed{R_1} \cdot \boxed{R_2}$$

Доказательство: $(a,b) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow \exists c \in A \mid a R_1 c \& c R_2 b \Rightarrow R_1[a,c]=1 \& R_2[c,b]=1 \Rightarrow (R_1[a,c] \& R_2[c,b]) = 1 \Rightarrow R_1 R_2[a,b]=1.$

$(a,b) \notin R_1 \circ R_2 \Rightarrow \text{not } \exists c \in A \mid a R_1 c \& c R_2 b \Rightarrow \forall c \in A \text{ not } (a R_1 c \& c R_2 b) \Rightarrow R_1[a,c]=0 \text{ or } R_2[c,b]=0 \Rightarrow (R_1[a,c] \& R_2[c,b]) = 0 \Rightarrow R_1 R_2[a,b]=0.$

В итоге имеем доказанное условие теоремы.

Теорема 2. Элементы матрицы объединения отношений совпадают с элементами одной из матриц этих отношений.

$$\boxed{R_1 \cup R_2} = \boxed{R_1} \vee \boxed{R_2} ,$$

где $R_1 \vee R_2[i,j] = R_1[i,j] \vee R_2[i,j].$

Доказательство:

$(a,b) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow a R_1 b \vee a R_2 b \Rightarrow R_1[a,b]=1 \vee R_2[a,b]=1 \Rightarrow (R_1[a,b] \vee R_2[a,b]) = 1 \Rightarrow (R_1 \vee R_2)[a,b]=1.$

$(a,b) \notin R_1 \cup R_2 \Rightarrow \text{not } (a R_1 b) \& \text{not } (a R_2 b) \Rightarrow R_1[a,b]=0 \vee R_2[a,b]=0 \Rightarrow (R_1[a,b] \vee R_2[a,b])=0 \Rightarrow (R_1 \vee R_2)[a,b]=0.$

ЗАМЫКАНИЕ

Рассмотрим отношение R на множестве A , обладающее свойством C . Отношение R' называется *замыканием отношения R относительно свойства C* , если:

- R' обладает свойством C ;
- $R \subseteq R'$, т.е. R' является надмножеством R ;
- R' является наименьшим из всех надмножеств.

Замыкание рефлексивно, если $R' = R \cup I$.

Замыкание симметрично, если $R' = R \cup R^{-1}$, т.е. $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R'$ и $(b, a) \in R$.

Отношение R' является транзитивным замыканием отношения R , если $R' = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$, т.е. $(a, b) \in R \Rightarrow \exists a_1 = a, a_2, a_3, \dots, a_n = b \mid a_1 R a_2 R \dots R a_n$

Если отношение R транзитивно, то $R = R'$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определим на множестве людей отношение «быть родственником». Мы будем говорить, что человек x является родственником человеку y , если генеалогические древа обоих людей, содержащих не более четырех поколений, имеют непустое пересечение. (Если более четырех, то можно ввести отношение «быть дальним родственником».) Какими свойствами обладает это бинарное отношение?

2. Для каждого из шести свойств бинарных отношений (рефлексивность, симметричность и т.д.) найдите по одному примеру бинарного отношения, обладающего данным свойством. Поищите такие примеры среди бинарных отношений, определенных на множестве людей.

3. Найдите все пары чисел, связанных отношением для каждого из следующих отношений, заданных на множестве $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \subseteq \mathbb{N}$, и укажите, какими свойствами оно обладает:

1) $a R b \Leftrightarrow a - b = 8$;

2) $a R b \Leftrightarrow b = a \cdot 2$;

$$3) aRb \Leftrightarrow a \cdot b = 12;$$

$$4) aRb \Leftrightarrow b > a \cdot 2.$$

4. M – множество озер Канады. На M задано бинарное отношение «иметь одинаковый объем воды». Какими свойствами обладает данное отношение?

5. Дано отношение $R: xRy \Leftrightarrow x=y+2$ на множестве $\{-3, -1, 1, 2, 3, 4\}$. Какими свойствами оно обладает?

6. На множестве $Y=\{y \mid y \in \mathbb{Z}, -13 \leq y \leq -2\}$ задано отношение $R: xRy \Leftrightarrow x=2y$. Какими свойствами оно обладает?

7. Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$. Опишите отношение на множестве A , которое: а) рефлексивно, но не является ни симметричным, ни транзитивным; б) симметрично, но не является ни рефлексивным, ни транзитивным; в) транзитивно, но не является ни рефлексивным, ни симметричным.

§3. Отношения эквивалентности и порядка

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.

Для отношений эквивалентности чаще всего применяется один и тот же символ: $\sim$. Если на множестве M определено отношение эквивалентности $\sim$, то это обозначают так: $(M, \sim)$.

Если элемент x находится в отношении эквивалентности с элементом y , то пишут $x \sim y$ и говорят, что элемент x эквивалентен элементу y . Если соотношение $x \sim y$ неверное, то пишут $x \not\sim y$.

Примеры.

1) Отношение равенства. Это минимальное отношение эквивалентности, т.к. при удалении хотя бы одной единицы из матрицы отношения рефлексивность отношения теряется.

2) $(a+c)(a-c)=a^2-c^2$ или любая другая формула, содержащая знак равенства. Обычно такое отношение называют *равносильностью*, которая отличается от равенства

тем, что знак равенства относится не к выражениям (формулам), а к процессам (функциям), которые они описывают. Такое равенство называется *графическим*.

3) Пусть P – множество точек плоскости, O – фиксированная точка. Для двух точек плоскости $A, B \in P$ положим по определению: $A \sim B \Leftrightarrow OA = OB$, где OA , как обычно, расстояние от точки O до точки A .

Пусть $\sim$ – эквивалентность на A , тогда $(\forall a \in A) \exists A_1 \subseteq A | A_1 = \{y | y \in A, y \sim a\}$. Множество A_1 называется *классом эквивалентности для элемента a* и обозначается $[a]_{\sim}$.

ЛЕММА 1. $(\forall a \in A) [a]_{\sim} \neq \emptyset$.

Доказательство : $a \sim a \Rightarrow a \in [a]_{\sim}$

ЛЕММА 2. $a \sim b \Rightarrow [a]_{\sim} = [b]_{\sim}$

Доказательство: пусть $a \sim b$, тогда

$(x \in [a]_{\sim} \Rightarrow x \sim a) \& a \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]_{\sim}$

$b \sim a \Rightarrow (x \in [b]_{\sim} \Rightarrow x \sim b) \& b \sim a \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a]_{\sim}$

ЛЕММА 3. $a \not\sim b \Rightarrow [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} = \emptyset$.

Доказательство: от противного. $[a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in [a]_{\sim} \cap [b]_{\sim} \Rightarrow c \in [a]_{\sim} \& c \in [b]_{\sim} \Rightarrow c \sim a \& c \sim b \Rightarrow a \sim c \& c \sim b \Rightarrow a \sim b$.

Всякое отношение эквивалентности на множестве A определяет разбиение множества A , причем среди элементов разбиения нет пустых. Верно и обратное: всякое разбиение множества A , не содержащее пустых элементов, определяет отношение эквивалентности на множестве A .

Множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством* множества A по эквивалентности R и обозначается $A/R = \{[x]_R | x \in A\}$. Фактор-множество есть подмножество булеана.

ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

Рефлексивное и транзитивное отношение называется *отношением порядка*.

Отношение порядка позволяет сравнивать между собой различные элементы одного множества.

Рефлексивное отношение порядка называется *нестрогим порядком*.

Антирефлексивное отношение порядка называется *строгим порядком*.

Полное отношение порядка называется *линейным порядком*.

Не являющееся полным отношение порядка называется *частичным порядком*.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$.

Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется *частично упорядоченным*.

Множество, на котором задано отношение полного порядка, называется *вполне (полностью) упорядоченным*.

Элемент a из множества A с заданным отношением порядка называется *минимальным*, если в множестве A нет элементов, меньших a по заданному отношению: $\nexists b \in A \mid b \leq a \text{ и } b \neq a$.

Вполне упорядоченное конечное множество содержит единственный минимальный элемент, а произвольное упорядоченное конечное множество может содержать их несколько.

Примеры.

1) Иерархия на предприятии – строгий частичный порядок.

2) Алфавит – строгий полный порядок.

3) Список слов, расположенный по алфавиту – лексикографический порядок.

Следует заметить, что лексикографический и числовой порядок различны:

$A = \{2, 4, 69, 12, 1, 3, 45, 6\}$.

Числовой порядок – 1, 2, 3, 4, 6, 12, 45, 69

Лексикографический порядок – 1, 12, 2, 3, 4, 45, 6, 69.

Теорема. Пусть R -бинарное отношение на множестве A , тогда:

1. R рефлексивно $\Leftrightarrow I \subseteq R$.
2. R симметрично $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.
3. R транзитивно $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$.
4. R антисимметрично $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I$.
5. R антирефлексивно $R \cap I = \emptyset$.
6. R полно $\Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$.

Доказательство:

1) Необходимость: $\forall a \in A aRa \Rightarrow \forall a \in A (a, a) \in R \Rightarrow I \subseteq R$.

Достаточность: $I \subseteq R \Rightarrow \forall a \in A (a, a) \in R \Rightarrow \forall a \in A aRa$.

2) Необходимость: $\forall a, b \in A aRb = bRa \Rightarrow [(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R]$.

Т.к. $\forall a, b \in A aRb \Rightarrow (b, a) \in R^{-1}$, то $R = R^{-1}$.

Достаточность: $R = R^{-1} \Rightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (b, a) \in R$.

3) Необходимость: $\forall a, b, c \in A aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb$ –

транзитивность.

$aR \circ Rb = \exists c \in A | aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb$, т.е. $R \circ R \subseteq R$.

Достаточность:

$R \circ R \subseteq R \Rightarrow \forall a, b \in A (a, b) \in R \circ R \Rightarrow (a, b) \in R \Rightarrow (aRc \wedge cRb \Rightarrow aRb)$ – транзитивность.

4) Необходимость: (от противного). $R \cap R^{-1} \not\subseteq I \Rightarrow \exists a! = b | aRb \wedge aR^{-1}b \Rightarrow \exists a! = b | aRb \wedge bRa$, приходим к симметричности.

Достаточность: $R \cap R^{-1} \subseteq I \Rightarrow (aRb \wedge aR^{-1}b \Rightarrow a = b) \Rightarrow (aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b)$.

5) Необходимость: (от противного) $R \cap I = \emptyset \Rightarrow [\exists a \in A | aRa \wedge aIa] \Rightarrow aRa$, т.е. R -рефлексивно – противоречие.

Достаточность: $R \cap I = \emptyset \Rightarrow \neg \exists a \in A | aRa \Rightarrow \forall a \in A \text{ not}(aRa)$.

6) Необходимость: $\forall a, b \in A a! = b \Rightarrow aRb \vee bRa$ – полнота, $\Rightarrow (a, b) \in R \cup R^{-1}$, $a = b \Rightarrow (a, b) \in I$, т.е. $(a, b) \in R \cup I \cup R^{-1}$, а по определению универсального отношения имеем, что $U = R \cup I \cup R^{-1}$.

Достаточность: $U=R \cup I \cup R^{-1} \Rightarrow (a=b \wedge (a,b) \in I \vee a!=b \wedge (a,b) \in R \cup R^{-1}) \Rightarrow (a=b \wedge (a,b) \in I \vee a!=b \wedge (a,b) \in R^{-1} \wedge (a,b) \in R) \Rightarrow (a!=b \Rightarrow aRb \vee bRa)$ – полнота.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что любое конечное множество из n элементов можно упорядочить $n!$ способами.

2. Пусть $U = \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{P}(U)$ – множество всех подмножеств множества U . Выпишите цепочки элементов множества $\mathfrak{P}(U)$, которые образуют вполне упорядоченные (относительно включения) подмножества множества $\mathfrak{P}(U)$.

3. Множество слов русского языка является вполне упорядоченным множеством относительно лексикографического порядка, принятого в словарях. Проверьте, что лексикографический порядок является бинарным отношением порядка на множестве слов русского языка (то есть обладает свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности). Выпишите в лексикографическом порядке все слова длины не более трех в алфавите из трех букв: $\{a, b, c\}$. Сколько всего слов будет содержать такой словарь?

4. На множестве всех людей введем отношение «быть знакомым». Будет ли это отношение отношением эквивалентности?

5. На множестве всех числовых функций, область определения и множество значений которых суть подмножества множества $\mathbb{R}$, определим отношение «совместимости». Будем говорить, что функция f совместима с функцией g , если определена их композиция $f \circ g$. Обладает ли это отношение хотя бы одним из 6 основных свойств? На каком множестве функций это отношение рефлексивно?

6. Докажите, что отношение сравнимости по модулю есть отношение эквивалентности.

7. Докажите, что отношение подобия треугольников является отношением эквивалентности. (Для доказательства используйте какой-нибудь признак подобия).

8. На декартовом квадрате множества натуральных чисел определим бинарное отношение: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$ положим по определению $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Докажите, что это отношение есть отношение эквивалентности.

9. Назовем два действительных числа эквивалентными, если их разность является целым числом. Докажите, что тем самым мы определяем отношение эквивалентности на множестве действительных чисел.

10. Докажите, что отношение делимости на множестве натуральных чисел является отношением частичного порядка. Приведите пример подмножества множества натуральных чисел, которое будет вполне упорядоченным относительно отношения делимости.

11. Докажите, что любое непустое подмножество вполне упорядоченного множества является вполне упорядоченным множеством.

12. Докажите, что множество натуральных чисел является вполне упорядоченным множеством, а множество целых чисел – нет.

Раздел 4. Функции. Алгебры и их морфизмы

§1. Функции

Определение. Функциональное соответствие, при котором каждому прообразу соответствует единственный образ, называется *функцией*.

Прообразы называются *аргументами*, образы – *значениями функции*.

Область определения функции (f_A) – множество A , область значений функции (f_B) – множество B . Говорят, что всюду определенная функция *отображает множество A в (на) множество B* .

ОБОЗНАЧЕНИЕ. $f: A \rightarrow B$ или $f(A)=B$.

Функция, областью определения которой является прямое произведение n множеств, называется n -местной:
 $f: A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n \rightarrow B$.

Мы будем рассматривать одноместные функции, т.к. n -местные функции имеют те же самые свойства, что и одноместные.

Итак, пусть $f: A \rightarrow B$, тогда:

f – инъекция, если у каждого значения функции единственный аргумент (всюду определенное соответствие);

f – сюръекция, если у каждого аргумента имеется свое значение функции (сюръективное соответствие);

f – биекция, если у каждого значения функции единственный аргумент и у каждого аргумента единственное значение функции (взаимно-однозначное соответствие).

Множество A называется *эквивалентным множеству* B , если существует биекция $\xi: A \rightarrow B$.

Если $|B|=1$, то это *функция-константа*.

Отображение типа $A \rightarrow A$ часто называют *преобразованием* множества A .

Две функции f и g равны, если $f_A = g_A$ и $\forall a \in A f(a) = g(a)$.

Примеры.

1) Нумерация элементов счетного множества есть отображение этого множества на $\mathbb{N}$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$. Данная функция частично определена, если имеет тип $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, но полностью определена, если ее тип $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$.

2) Множество студентов вуза **на** множество фамилий вуза (сюръекция);

Множество студентов группы **в** множество фамилий вуза (инъекция).

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$. Если $f(A)=B$ и $g(B)=A$, то функция g называется *обратной к функции* f и

обозначается как f^{-1} . Понятно, что область значений f совпадает с областью определения g и наоборот. Отсюда ясно, что обратную функцию может иметь только биективная функция.

Поскольку функция – это частный случай соответствия, то для нее можно сформулировать определение композиции (подстановки значения одной функции в другую, в математике это понятие сложной функции).

Из двух функций $f:A \rightarrow B$ и $g:B \rightarrow C$ можно построить композицию $f \circ g : A \rightarrow C$ так, что $h(x) = f \circ g(x) = g(f(x))$.

Пример. $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = \ln(x)$;

$$h_1(x) = (g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = \cos(\ln(x));$$

$$h_2(x) = (f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(\cos(x)) = \ln(\cos(x)).$$

Для многоместных функций возможны различные варианты подстановки f в g , дающие функции различных типов.

Функция, полученная из системы функций $f_1, \dots, f_n$ некоторой композицией и переименованием аргументов, называется *суперпозицией* $f_1, \dots, f_n$. Выражение, описывающее суперпозицию, называется *формулой*.

Также всякая функция, будучи подмножеством прямого произведения (так же, как и отношение), имеет ядро.

$$\text{Ker} f = f \circ f^{-1}.$$

Ядро функции является отношением эквивалентности.

Т.е. оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ:

- таблицы (конечные списки);
- формула (процедура последовательного выполнения каждой функции, входящей в суперпозицию);
- описание (без способа вычисления) ($\text{sgn}(x)$, $\text{abs}(x)$);
- графически.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задать тип функции $y = |x - 2|$, чтобы она была:
 - a) инъективной, но не сюръективной;
 - b) сюръективной, но не инъективной;
 - c) биективной.
2. Задать тип функции $y = \cos x$, чтобы она была:
 - a) инъективной, но не сюръективной;
 - b) сюръективной, но не инъективной;
 - c) биективной.
3. Задать несколько возможных типов для функции $f(x) = 2^n$. Для каждого типа определить:
 - a) свойства функции f ;
 - b) является ли f отображением и, если является, то каким?
4. Найти композицию функций $f \circ g$, $g \circ f$, если $f(x) = x^5 - 1$, $g(x) = \log_2(2x + 1)$. Каковы области определения функций и их композиций?
5. Записать в функциональной форме $x + y + z^3$.
6. Записать в функциональной форме $x + y^2 + z^2$.

§2. Алгебры и их морфизмы

Функция $\varphi: A^n \rightarrow A$ называется n -арной операцией на множестве A , где n – это *арность* («местность») операции.

Множество A вместе с заданными на нем операциями $\Sigma = \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \}$, где $\varphi_i: A^{n_i} \rightarrow A$, называется *алгебраической структурой* (универсальной алгеброй, просто алгеброй).

A – основа, основание, несущее множество, носитель;

Вектор арностей $(n_1 n_2 \dots n_m)$ – тип алгебры;

$\Sigma = \{ \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \}$ – сигнатура.

ОБОЗНАЧЕНИЕ: $\langle A, \Sigma \rangle$ или $\langle A, \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \rangle$.

Сигнатура обязательно конечна, а носитель может быть и бесконечным, но не пустым.

В качестве основы может быть семейство, тогда алгебра будет *многоосновной*.

Если в качестве операции в алгебре присутствует хотя бы одно отношение, тогда алгебра называется *моделью*.

Подмножество A' замкнуто относительно операции φ , если результат применения этой операции на элементах A' лежит в A' .

$\forall x_1, \dots, x_n \in A' \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) \in A'$. Если множество замкнуто относительно всех операций сигнатуры, то оно называется *подалгеброй* алгебры $\langle A, \Sigma \rangle$.

Пример. $\langle \mathbb{R}, +, * \rangle$ - алгебра; $\langle \mathbb{Q}, +, * \rangle$ - её подалгебра.

СВОЙСТВА БИНАРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ.

Пусть $\diamond$ и $\square$ - операции на множестве A , являющемся носителем алгебры $\langle A, \diamond, \square \rangle$, тогда $\forall a, b, c \in A$ справедливы свойства:

1. ассоциативность: $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$;
2. коммутативность: $a \diamond b = b \diamond a$;
3. дистрибутивность слева: $a \diamond (b \square c) = (a \diamond b) \square (a \diamond c)$;
4. дистрибутивность справа: $(a \diamond b) \square c = (a \square c) \diamond (b \square c)$;
5. поглощение: $(a \diamond b) \square a = a$;
6. идемпотентность: $a \diamond a = a$.

Следует заметить, что не для всех операций эти свойства выполняются.

Пример. «+» - ассоциативно, коммутативно, не дистрибутивно относительно умножения, не идемпотентно;

«*» - ассоциативно, коммутативно, дистрибутивно относительно сложения, не идемпотентно;

$\cap$ - идемпотентно и поглощаемо относительно объединения.

Алгебры с разными типами имеют разное строение. Это понятно и так. Если же алгебры имеют одинаковый тип, то встает вопрос об их сходствах, которые называются *морфизмы*.

Определение. Пусть $A = \langle A, \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n \rangle$ и $B = \langle B, \psi_1, \dots, \psi_n \rangle$ – две алгебры. Если существует функция:

$f: A \rightarrow B$, такая, что $\forall i=1, 2, \dots, n f(\varphi_i(A_1, \dots, A_n)) = \psi_i(f(A_1) \dots f(A_n))$, то эта функция называется *гомоморфизм из алгебры A в B*.

Иными словами, условие гомоморфизма можно представить как композиции $\varphi \circ f = f \circ \psi$.

Примеры:

1) Отображение участков местности на карту гомоморфно, т.к. на местности задано отношение «быть выше», а на карте «быть темнее». Более высокому участку местности соответствует более темная точка карты. Участки одинаковой высоты имеют одинаковый цвет.

2) $\langle N, + \rangle; \langle N_{10}, +_{10} \rangle$ проверим условие гомоморфизма.

Пусть $n = 10a_1 + b_1$, $m = 10a_2 + b_2$, тогда $f(n+m) = f(10a_1 + b_1 + 10a_2 + b_2) = f(b_1 + b_2) = b_1 +_{10} b_2 = f(n) +_{10} f(m)$.

ВИДЫ ГОМОМОРФИЗМОВ:

- гомоморфизм на инъективном соответствии – *мономорфизм*;
- на сюръективном соответствии – *эпиморфизм*;
- на взаимно-однозначном соответствии – *изоморфизм*.

Отсюда понятно, что если бинарная функция – изоморфизм, то и обратная ей тоже изоморфизм.

Теорема. Отношение изоморфизма на множестве однотипных алгебр является эквивалентностью:

- рефлексивность: если $f=I$, то $A \equiv A$;
- симметричность: $f: A \equiv B \Rightarrow f^{-1}: B \equiv A$;
- транзитивность: $f: A \equiv B$ и $g: B \equiv C \Rightarrow f \circ g: A \equiv C$.

Алгебры принято рассматривать с точностью до изоморфизма.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть Z_n - множество всех целых чисел, Z_{2n} - множество всех четных целых чисел. Изоморфны ли следующие алгебры:

а) $A=(Z_n; +)$ и $B=(Z_{2n}; +)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2n$;

б) $A=(Z_n; +)$ и $B=(Z_n; +)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow -n$;

в) $A=(Z_n; \times)$ и $B=(Z_n; \times)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow -n$;

г) $A=(Z_n; \times)$ и $B=(Z_{2n}; \times)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2n$;

д) $A=(Z_n; +, \times)$ и $B=(Z_{2n}; +, \times)$ при отображении

$\Gamma: n \rightarrow 2n$, где $+$, $\times$ - операции арифметического сложения и умножения соответственно?

2. Пусть M_{2^n} - множество степеней двойки, M_{2n} - множество всех четных чисел, $n \in \mathbb{N}$. Гомоморфны (изоморфны) ли следующие алгебры A и B , если:

а) $A=(\mathbb{N}; +)$ и $B=(M_{2^n}; +)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2^n$;

б) $A=(\mathbb{N}; +)$ и $B=(M_{2^n}; \times)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2^n$;

в) $A=(\mathbb{N}; +)$ и $B=(M_{2^n}; +)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2n$;

г) $A=(\mathbb{N}; \times)$ и $B=(M_{2^n}; \times)$ при отображении $\Gamma: n \rightarrow 2n$;

д) $A=(\mathbb{N}; +, \times)$ и $B=(M_{2^n}; +, \times)$ при отображении

$\Gamma: n \rightarrow 2n$, где $+$, $\times$ - операции арифметического сложения и умножения соответственно?

§3. Мощность бесконечного множества

Два множества называют *равномощными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого.

Например, отрезки $[0,1]$ и $[0,2]$ равномощны, поскольку отображение $x \mapsto 2x$ осуществляет искомое соответствие.

Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое число элементов, но определение имеет смысл и для бесконечных множеств.

Определение: множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются *счетными*.

Объединение конечного числа счетных множеств счетно.

Множество всех действительных чисел из отрезка $[0,1]$ несчетно (теорема Кантора). Мощность несчетного множества называется *континуум*. Булеан счетного множества континуален, поскольку его можно сопоставить во взаимно однозначное соответствие с отрезком $[0, 1]$.

Например, для множества четных натуральных чисел, которое можно представить в виде списка: $\{2, 4, 6, \dots\}$, последовательность $(1, 2, 3, \dots)$ будет нумерацией этого списка. Следовательно, множество всех четных натуральных чисел эквивалентно множеству всех натуральных чисел, т.е. четных чисел ровно столько же, сколько всех натуральных чисел. Но, с другой стороны, множество натуральных чисел можно разбить на два подмножества четных и нечетных чисел, т.е. четных чисел ровно половина из всех натуральных чисел! Получаем, что в некотором смысле часть равна целому. И это действительно так. Этот факт, заключающийся в том, что между бесконечной совокупностью и ее собственной частью можно установить взаимно однозначное соответствие, отмечался еще Плутархом и другими древними учеными. В 1638 году Галилей отметил, что между целыми положительными числами и их квадратами существует взаимно однозначное соответствие, и назвал «Парадоксом» свое наблюдение, поскольку ЭТОТ факт вступает в противоречие с евклидовой аксиомой, согласно которой целое больше любой ИЗ СВОИХ собственных частей, т.е. частей, не совпадающих со всем целым.

Несколько более сложна такая задача: доказать, что интервал $(0, 1)$ и луч $(0, +\infty)$ равномощны. Это делается так. Заметим, что отображение $x \mapsto \frac{1}{x}$ является взаимно однозначным соответствием между $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$, а $x \mapsto (x - 1)$ - взаимно однозначным соответствием между $(1, +\infty)$ и $(0, +\infty)$, поэтому их композиция $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ является

искомым взаимно однозначным соответствием между $(0, 1)$ и $(0, +\infty)$.

Вообще, как говорят, отношение равноможности есть *отношение эквивалентности*. Это означает, что оно *рефлексивно* (каждое множество равноможно самому себе), *симметрично* (если A равноможно B , то и B равноможно A) и *транзитивно* (если A равноможно B и B равноможно C , то A равноможно C). Свойством транзитивности мы только что воспользовались, взяв луч $(1, +\infty)$ в качестве промежуточного множества.

Ещё несколько примеров:

- множество бесконечных последовательностей нулей и единиц равноможно множеству всех подмножеств натурального ряда (в самом деле, сопоставим с каждой последовательностью множеств номеров мест, на которых стоят единицы: например, последовательность из одних нулей соответствует пустому множеству, из одних единиц — натуральному ряду, а последовательность 10101010 ... — множеству чётных чисел);

- множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равноможно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 (в самом деле, можно закодировать цифры 0, 1, 2, 3 группами 00, 01, 10, 11. Обратное преобразование разбивает последовательность нулей и единиц на пары, после чего каждая пара заменяется на цифру от 0 до 3);

- множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2 равноможно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1 (можно было бы пытаться рассуждать так: это множество заключено между двумя множествами одной и той же мощности, и потому равноможно каждому из них. Этот ход мыслей правилен, как показывает теорема Кантора - Бернштейна из раздела 1.5. Но здесь можно обойтись и без этой теоремы, если закодировать цифры 0, 1 и 2 последовательностями 0, 10 и 11: легко

сообразить, что всякая последовательность нулей и единиц однозначно разбивается на такие блоки слева направо. Такой способ кодирования называют «префиксным кодом»);

- пример с последовательностями нулей и единиц можно обобщить: множество подмножеств любого множества U (оно обычно обозначается $P(U)$ и по-английски называется powerset) равномощно множеству всех функций, которые ставят в соответствие каждому элементу $x \in U$ одно из чисел 0 и 1 (в самом деле, каждому множеству $X \subset U$ соответствует его характеристическая функция). Множество таких функций обычно обозначают 2^U .

Счётные множества

Множество называется счётным, если оно равномощно (эквивалентно) множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то есть если его можно представить в виде $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ (здесь x_i - элемент, соответствующий числу i ; соответствие взаимно однозначно, так что все x_i различны).

Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счётно, так как целые числа можно расположить в последовательность 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

Теорема. (а) Подмножество счётного множества конечно или счётно.

(б) Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

(в) Объединение конечного или счётного числа конечных или счётных множеств конечно или счётно.

Доказательство: (а) Пусть B – подмножество счётного множества $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Выбросим из последовательности $a_0, a_1, \dots$ те члены, которые не принадлежат B (сохраняя порядок оставшихся). Тогда оставшиеся члены образуют либо

конечную последовательность (и тогда B конечно), либо бесконечную (и тогда B счётно).

(б) Пусть A бесконечно. Тогда оно непусто и содержит некоторый элемент b_0 . Будучи бесконечным, множество A не исчерпывается элементом b_0 - возьмём какой-нибудь другой элемент b_1 , и т.д. Получится последовательность $b_0, b_1, \dots$; построение не прервётся ни на каком шаге, поскольку A бесконечно. Теперь множество $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ и будет искомым счётным подмножеством. (Заметим, что B вовсе не обязано совпадать с A , даже если A счётно.)

(в) Пусть имеется счётное число счётных множеств $A_1, A_2, \dots$. Расположив элементы каждого из них слева направо в последовательность ($A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \dots\}$) и поместив эти последовательности друг под другом, получим таблицу:

$a_{00} \ a_{01} \ a_{02} \ a_{03} \ \dots$

$a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots$

$a_{20} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots$

$a_{30} \ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ \dots$

$\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots$

Теперь эту таблицу можно развернуть в последовательность, например, проходя по очереди диагонали:

$a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30}, \dots$

Если множества A_i не пересекались, то мы получили искомое представление для их объединения. Если пересекались, то из построенной последовательности надо выбросить повторения.

Если множеств конечное число или какие-то из множеств конечны, то в этой конструкции части членов не будет – и останется либо конечное, либо счётное множество.

Замечание. В доказательстве утверждения (б) теоремы есть тонкий момент: на каждом шаге мы должны выбрать один из оставшихся элементов множества A ; такие элементы есть, но у нас нет никакого правила, позволяющего такой выбор описать. При более формальном построении теории множеств тут нужно сослаться на специальную аксиому, называемую *аксиомой выбора*. Законность этой аксиомы вызывала большие споры в начале 20-го века, но постепенно к ней привыкли, и эти споры сейчас почти не воспринимаются. В середине века великий логик Курт Гёдель доказал, что аксиому выбора нельзя опровергнуть, пользуясь остальными аксиомами теории множеств, а в 1960-е годы американский математик Пол Дж. Козн доказал, что её нельзя и вывести из остальных аксиом. (Конечно, понимание этих утверждений требует подробного изложения теории множеств как аксиоматической теории.)

Такой же тонкий момент (хотя и менее очевидный) есть и в доказательстве утверждения (в). Можете ли вы догадаться, где он?

Ещё примеры счётных множеств:

1. Множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел является счетным.

В самом деле, рациональные числа представляются несократимыми дробями с целым числителем и знаменателем. Множество дробей с данным знаменателем счётно, поэтому представимо в виде объединения счётного числа счётных множеств. Забегая вперёд, отметим, что множество всех действительных чисел несчётно.

2. Множество всех конечных последовательностей натуральных чисел счётно.

В самом деле, множество всех последовательностей данной длины счётно (как мы только что увидели), так что интересующее нас множество разбивается на счётное число счётных множеств.

В предыдущем примере не обязательно говорить о натуральных числах – можно взять любое счётное (или конечное) множество. Например, множество всех текстов, использующих русский алфавит (такой текст можно считать конечной последовательностью букв, пробелов, знаков препинания и т.п.), счётно; то же самое можно сказать о множестве (всех мыслимых) компьютерных программ и т.д.

Число называют *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с целыми коэффициентами. Множество алгебраических чисел счётно, так как многочленов счётное число (многочлен задаётся конечной последовательностью целых чисел – его коэффициентов), а каждый многочлен имеет конечное число корней (не более n для многочленов степени n).

Множество периодических дробей счётно. В самом деле, такая дробь может быть записана как конечная последовательность символов из конечного множества (запятая, цифры, скобки); например, дробь $0,16666\dots$ можно записать как $0,1(6)$. А таких последовательностей счётное множество.

Теорема. Если A и B – счетные множества, то и множество $C = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ является счетным.

Теорема. Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счётно, то объединение $A \cup B$ равномощно A .

Доказательство: можно считать, что B не пересекается с A (пересечение можно выбросить из B , останется по-прежнему конечное или счётное множество).

Выделим в A счётное подмножество P ; остаток обозначим через Q . Тогда нам надо доказать, что $B+P$ и $P+Q$ равномощно $P+Q$ (знак $+$ символизирует объединение непересекающихся множеств.) Поскольку $B+P$ и P оба счётны, между ними существуют взаимно однозначное соответствие. Его легко продолжить до соответствия между $B+P+Q$ и $P+Q$ (каждый элемент множества Q соответствует сам себе).

Теорема показывает, что добавление счётного множества к бесконечному не меняет его мощности. Можно ли сказать то же самое про удаление? Докажите, что если A бесконечно и не является счётным, а B конечно или счётно, то $A \setminus B$ равномощно B .

Немецкий математик Р. Дедекинд предложил такое определение бесконечного множества: множество бесконечно, если оно равномощно некоторому своему подмножеству, не совпадающему со всем множеством. Покажите, что указанное Дедекиндом свойство действительно определяет бесконечные множества.

Добавляя конечные или счетные множества, легко понять, что прямая, все промежутки на прямой (отрезки, интервалы, полуинтервалы), лучи, их конечные или счётные объединения и т.п. равномощны друг другу.

Теорема. Отрезок $[0,1]$ равномощен множеству всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

Доказательство: в самом деле, каждое число $x \in [0,1]$ записывается в виде бесконечной двоичной дроби и равен 0 или 1 в зависимости от того, попадет ли число x в левую или правую половину отрезка. Чтобы определить следующий знак, надо выбранную половину поделить снова пополам и посмотреть, куда попадет x и т.д.

Это же соответствие можно описать в другую сторону: последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots$ соответствует число, являющееся суммой ряда

$$\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} + \dots$$

(В этом построении мы используем некоторые факты из математического анализа, что неудивительно — нас интересуют свойства действительных чисел.)

Описанное соответствие пока что не совсем взаимно однозначно: двоично-рациональные числа (дроби вида $m/2^n$) имеют два представления. Например, число $3/8$ можно записать как в виде $0,011000\dots$, так и в виде $0,010111\dots$

Соответствие станет взаимно однозначным, если отбросить дроби с единицей в периоде (кроме дроби $0,1111\dots$, которую надо оставить). Но таких дробей счётное число, поэтому на мощность это не повлияет.

В этом доказательстве можно было бы использовать более привычные десятичные дроби вместо двоичных. Получилось бы, что отрезок $[0,1]$ равномошен множеству всех бесконечных последовательностей цифр $0,1,\dots,9$. Чтобы перейти отсюда к последовательностям нулей и единиц, можно воспользоваться приемом, описанным на с. 13.

Теперь все готово для доказательства следующего удивительного факта.

Теорема. Квадрат (со внутренностью) равномошен отрезку.

Доказательство: квадрат равномошен множеству $[0,1] \times [0,1]$ пар действительных чисел, каждое из которых лежит на отрезке $[0,1]$ (метод координат). Мы уже знаем, что вместо чисел на отрезке можно говорить о последовательностях нулей и единиц. Осталось заметить, что паре последовательностей нулей и единиц $(x_0x_1x_2\dots, y_0y_1y_2\dots)$ можно поставить в соответствие последовательность — смесь $x_0y_0x_1y_1x_2y_2\dots$ и что это соответствие будет взаимно однозначным.

Этот результат был получен в 1877 году немецким математиком Георгом Кантором и удивил его самого, поскольку противоречил интуитивному ощущению «размерности» (квадрат двумерен, поэтому вроде бы должен содержать больше точек, чем одномерный отрезок). Вот что Кантор писал Дедекинду (20 июня 1877 года), обсуждая вопрос о равномощности пространств разного числа измерений: «Как мне кажется, на этот вопрос следует ответить утвердительно, хотя на протяжении ряда лет я придерживался противоположного мнения».

В одном из ответных писем Дедекинд отмечает, что результат Кантора не лишает смысла понятие размерности,

поскольку можно рассматривать лишь непрерывные в обе стороны соответствия, и тогда пространства разной размерности можно будет различить. Эта гипотеза оказалась верной, хотя не такой простой: первые попытки ее доказать, в том числе одна из статей Кантора, содержали ошибки, и только спустя тридцать лет голландский математик Л. Брауэр дал правильное доказательство. Впрочем, отсутствие непрерывного в обе стороны соответствия между отрезком и квадратом доказать несложно: трудности начинаются в больших размерностях. (Заметим также, что существует непрерывное отображение отрезка в квадрат, которое проходит через любую точку квадрата. Оно называется «кривой Пеано».)

Из теоремы легко получить много других утверждений про равномощность геометрических объектов: круг равномошен окружности, прямая равномощна плоскости и т.п.

Можно также заметить, что пространство (точки которого задаются тремя координатами (x,y,z)) равномощно плоскости (надо закодировать пару (x,y) одним числом) и, следовательно, прямой. То же самое можно проделать и для пространств большей размерности.

Отметим, что мы пока не умеем доказывать, что множество действительных чисел (или множество бесконечных последовательностей нулей и единиц) несчётно.

Мощность множества действительных чисел называют *мощностью континуума* (от латинского слова, означающего «непрерывный»; имеется в виду, что точка на отрезке может непрерывно двигаться от одного конца к другому).

Теорема Кантора-Бернштейна

Определение равномощности уточняет интуитивную идею о множествах «одинокого размера».

А как формально определить, когда одно множество «больше» другого?

Говорят, что множество A *по мощности не больше* множества B , если оно равномощно некоторому подмножеству множества B (возможно, самому B).

Некто предложил такое определение: множество A имеет строго меньшую мощность, чем множество B , не совпадающей со всем B . Почему это определение неудачно? (Указание. Популярные рассказы о теории множеств часто начинаются с такого парадокса, восходящего к Галилею.)

Каких чисел больше – всех натуральных чисел или точных квадратов? С одной стороны, точные квадраты составляют лишь небольшую часть натуральных чисел; с другой стороны их можно поставить во взаимно однозначное соответствие со всеми натуральными числами.)

Отношение «иметь не большую мощность» обладает многими естественными свойствами:

- если A и B равномощны, то A имеет не большую мощность, чем B (очевидно);

- если A имеет не большую мощность, чем B , а B имеет не большую мощность, чем C , то A имеет не большую мощность, чем C . (Тоже несложно. Пусть A находится во взаимно однозначном соответствии с $B' \subset B$, а B находится во взаимно однозначном соответствии с $C' \subset C$. Тогда при втором соответствии B' соответствует некоторому множеству $C'' \subset C' \subset C$, как показано на рис. 1, и потому A равномощно C'');

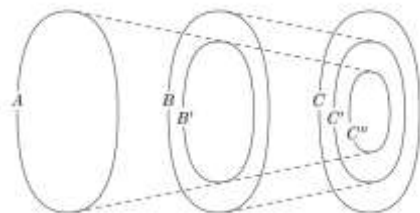


Рис. 1. Транзитивность сравнения мощностей

- если A имеет не большую мощность, чем B , а B имеет не большую мощность, чем A , то они равномощны. (Это вовсе не очевидное утверждение составляет содержание теоремы Кантора-Бернштейна);

- для любых множеств A и B верно (хотя бы) одно из двух: либо A имеет не большую мощность, чем B , либо B имеет не большую мощность, чем A .

Теорема. (Кантора-Бернштейна). Если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B , а B равномощно некоторому подмножеству множества A , то множества A и B равномощны.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из множества N выделили два подмножества: A – подмножество натуральных чисел, кратных 3, и B – подмножество натуральных чисел, кратных 5. Постройте круги Эйлера для множеств N , A , B ; укажите мощность этих множеств.

2. Установите равномощность множества всех натуральных чисел, четных чисел, нечетных чисел, степеней 10, простых чисел.

3. Установите равномощность отрезка $[0, 1]$ и отрезка $[0, 10]$.

4. Постройте биекцию между окружностью единичного радиуса и отрезком $(0, 1]$.

5. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют целые координаты?

6. Какова мощность множества всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел?

7. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, не содержащих число 7?

8. Докажите, что любое множество непересекающихся восьмерок на плоскости конечно или счётно (восьмерка – объединение двух касающихся окружностей любых размеров). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для букв «Т».

9. Докажите, что множество точек строгого локального максимума любой функции действительного аргумента конечно или счётно.

10. Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно.

11. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$.

12. Если множество A эквивалентно множеству B , то множество $\hat{A}$ всех подмножеств множества A эквивалентно множеству $\hat{B}$ всех подмножеств множества B .

13. Пусть A, B, C, D – такие множества, что A эквивалентно C , а B эквивалентно D . Если $A \cap B = \emptyset$ и $C \cap D = \emptyset$, то множества $A \cup B$ и $C \cup D$ являются эквивалентными.

14. Если $\{A_1, \dots, A_n\}$ – конечная совокупность счетных множеств, то множество $B = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{ для } 1 \leq i \leq n\}$ является счетным.

15. Множество всех конечных последовательностей из натуральных чисел является счетным.

16. Множество всех последовательностей $(k_1, k_2, \dots)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ и для которых $\{i | k_i = 0\}$ – конечное множество, является счетным множеством.

17. Множество всех последовательностей $(k_1, k_2, \dots)$, где $k_i \in \{0, 1\}$ и для которых $\{i | k_i = 1\}$ - конечное множество, является счетным множеством.

18. Если A - счетное множество, n - натуральное число и $B_n = \{C \subseteq A | C \text{ содержит точно } n \text{ элементов}\}$, то B_n является счетным множеством.

19. Если A - счетное множество и $\tilde{A}$ - совокупность всех его конечных подмножеств, то $\tilde{A}$ является счетным множеством.

Задачи для контрольных работ

Задачи для домашней контрольной работы (15 вариантов)

ЗАДАНИЕ 1

Изобразить на диаграмме Эйлера-Венна следующие множества, считая, что $A \cap B \neq \emptyset$:

1. $A \cup \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B}$.
3. $\overline{A \cap B}$.
4. $\overline{\overline{A \cup B}}$.
5. $\overline{A \cap B}$.
6. $\overline{A \cup B}$.
7. $\overline{A \cap B}$.
8. $\overline{A \cup B}$.
9. $\overline{A \cup B}$.
10. $\overline{A \cap B}$.
11. $\overline{A \cap B}$.
12. $\overline{A \cup B}$.
13. $A \setminus B$.
14. $A \setminus \overline{B}$.
15. $\overline{A \setminus B}$.

ЗАДАНИЕ 2

Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

1. $A = (4; 5; 9]$, $B = [5; 6; 5]$.
2. $A = \{x : x - 4 < 0\}$, $B = \{x : \frac{x+3}{x-2} \geq 0\}$.
3. $A = \{x : x^2 - 9 < 0\}$, $B = \{x : x(x-4)(x+2) > 0\}$.
4. $A = \{x : x^2 + 6 \geq 0\}$, $B = \{x : \frac{(x-3)(x+4)}{x} \leq 0\}$.
5. $A = \{x : 2^x < 4\}$, $B = \{x : \frac{x^2(x-1)}{x+1} > 0\}$.
6. $A = \{x : 5^{x^2-11} < 1\}$, $B = \{x : \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3} < 2\}$.
7. $A = \left\{x : 3^{x^2-4x} > \frac{1}{27}\right\}$,
 $B = \{x : x^2(2x-1)(x^2+7x-8) < 0\}$.
8. $A = \{x : \log_3(x+3) > 2\}$, $B = \{x : 3^{x^2+3} > 81\}$.
9. $A = \left\{x : \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq 3\right\}$, $B = \left\{x : \frac{(x+2)(x^2+x+1)}{(x-4)^3} < 0\right\}$.
10. $A = \{x : \sqrt{(x+1)} \geq 2x\}$, $B = \left\{x : \frac{(x-2)(x-3)}{x^2} < 0\right\}$.
11. $A = \{x : \sqrt{x+7} < x\}$, $B = \{x : 2^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 4\}$.
12. $A = \{x : \sqrt{x} < x-2\}$, $B = \{x : (x-7)(3-x) < 0\}$.
13. $A = \{x : |2x+1| \geq 1\}$, $B = \left\{x : \frac{x^2+7x-8}{(x-4)(x+1)} < 0\right\}$.
14. $A = \{x : x(x^2+1) > 0\}$, $B = \left\{x : \left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2 \geq 0\right\}$.
15. $A = \{x : (x+2)(x+3)(x-3)^2 \geq 0\}$,
 $B = \{x : 2|x+1| \geq x-1\}$.

ЗАДАНИЕ 3

Пусть $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 15\}$, $B = \{1, 3, 4, 8, 16\}$, $C = \{12, 13, 15, 16\}$, $D = \{0, 1, 17\}$. Найти мощность множества:

1. $|A \cup B|$.
2. $|C \cup D|$.
3. $|B \cap C|$.
4. $|A \cap D|$.
5. $|A \setminus C|$.
6. $|D \setminus B|$.

7. $|A \cup B \cup C|$.
8. $|A \cap B \cap C|$.
9. $|B \cup D \cap C|$.
10. $|A \cap C \cap D|$.
11. $|A \setminus (B \cap C)|$.
12. $|A \setminus (B \cap C)|$.
13. $|A \setminus (C \cap B)|$.
14. $|A \setminus (B \cap D)|$.
15. $|A \setminus (C \cap D)|$.

ЗАДАНИЕ 4

Решить задачу:

1. В спортивном классе обучаются 24 человека. Каждый учащийся занимается хотя бы одним видом спорта (баскетболом или волейболом), из них баскетболом и волейболом занимаются 12 человек. Сколько человек занимается только волейболом, если их в 3 раза больше, чем тех, кто занимается только баскетболом?

2. В детском лагере отдыхают 70 ребят. Из них 20 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов, а 3 спортсмена посещают и драмкружок, и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

3. Группа ребят отправилась в поход. Семеро из них взяли с собой бутерброды, шестеро – фрукты, пятеро – печенье. Четверо ребят взяли с собой бутерброды и фрукты, трое – бутерброды и печенье, двое – фрукты и печенье, а один – и бутерброды, и фрукты, и печенье. Сколько ребят пошли в поход?

4. В классе английский язык изучают 25 человек, а немецкий – 27 человек, причем 18 человек изучают одновременно английский и немецкий языки. Сколько всего

человек в классе изучают эти иностранные языки? Сколько человек изучают только английский язык? Только немецкий язык?

5. Староста класса, в котором 40 человек, подводил итоги по успеваемости группы за I полугодие. Получилась следующая картина: из 40 учащихся не имеют троек по русскому языку 25 человек, по математике — 28 человек, по русскому языку и математике — 16 человек, по физике — 31 человек, по физике и математике — 22 человека, по физике и русскому языку 16 человек. Кроме того, 12 человек учатся без троек по всем трем предметам. Классный руководитель, просмотрев результаты, сказал: «В твоих расчетах есть ошибка». Составьте диаграмму Эйлера–Венна и объясните, почему это так.

6. В лаборатории института работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 7 человек знают английский, 7 — немецкий, 8 — французский, 5 знают английский и немецкий, 4 — немецкий и французский, 3 — французский и английский, 2 человека знают все три языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает только французский язык? Сколько человек знает ровно 1 язык?

7. Сколько целых чисел от 0 до 999 не делятся ни на 5, ни на 7, ни на 11?

8. Сколько существует целых чисел от 1 до 16500, которые не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 11?

9. Дима провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Дима узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врет ли управдом?

10. В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кустов. Витя полил половину всех кустов, и Аня полила половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно пять кустов, самых красивых, были политы и Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остались неполитыми?

11. В 5«А» классе есть 19 танцоров, 8 музыкантов и 11 художников. Известно, что каждый ученик занимается либо одним видом искусства, либо всеми тремя. Известно, что тремя видами занимается 5 человек. Сколько в классе учеников?

12. В классе 25 школьников. 18 из них на уроках рисуют цветными фломастерами на партах, 10 — делают из бумаги самолётики, а 3 — прилежно занимаются. Сколько учеников этого класса одновременно рисуют и делают самолётики? (Заниматься и при этом рисовать на парте или делать самолётик никто не умеет).

13. В артели «Эффективный менеджмент» работает 56 человек и каждый — либо умен, либо трудолюбив, либо начальник (а возможно, обладает сразу несколькими из этих качеств). Умных людей в артели 22, из них 9 — начальники. Трудолюбивых — 25, среди них 10 начальников, а из этих десяти — двое еще и умны. Шесть человек — и умны и трудолюбивы. Сколько в артели начальников?

14. По данным опроса, проведенного в 7 «Е» классе, выяснилось, что 20% учеников, интересующихся математикой, интересуются еще и физикой, а 25% учеников, интересующихся физикой, интересуются также и математикой. И только Пете с Васей не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек в 7 «Е», если известно, что их больше 20, но меньше 30?

15. Аня рассказывает: «В нашем классе N человек, из них 15 человек имеют карие глаза, у 16 — темные волосы, 17 человек весят более 40 кг и 18 ростом выше 160 см». Таня ответила: «Тогда я точно скажу, что как минимум четверо

школьников из вашего класса имеют все четыре признака». Чему может быть равно наибольшее возможное значение N ?

ЗАДАНИЕ 5

На множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ задано отношение R . Выписать все пары aRb . Проверить свойства отношений:

1. $aRb \Leftrightarrow \{(a+1) - \text{делитель } (a+b)\}$.
2. $aRb \Leftrightarrow \{(a-b) - \text{четное}\}$.
3. $aRb \Leftrightarrow \{(a+b) - \text{четное}\}$.
4. $aRb \Leftrightarrow \{a - \text{делитель } (a+b), a \neq 1\}$.
5. $aRb \Leftrightarrow \{a+1 - \text{делитель } (a+b)\}$.
6. $aRb \Leftrightarrow \{b - \text{делитель } (a+b), b \neq 1\}$.
7. $aRb \Leftrightarrow \{(a+2) - \text{делитель } (a+b)\}$.
8. $aRb \Leftrightarrow \{(a+1) - \text{делитель } (a-b)\}$.
9. $aRb \Leftrightarrow \{(A-1) - \text{делитель } (a+b), a > 1\}$.
10. $aRb \Leftrightarrow \{(a+1-b) - \text{четное}\}$.
11. $aRb \Leftrightarrow \{(a+1-b) - \text{нечетное}\}$.
12. $aRb \Leftrightarrow \{(2a+b) - \text{четное}\}$.
13. $aRb \Leftrightarrow \{(2a-b) - \text{четное}\}$.
14. $aRb \Leftrightarrow \{(2a+b) - \text{нечетное}\}$.
15. $aRb \Leftrightarrow \{(2a+b) - \text{нечетное}\}$.

ЗАДАНИЕ 6

1. На множестве N для каждого из следующих отношений R найдите область определения и область значений и укажите, какими свойствами оно обладает:

1. $xRy \Leftrightarrow \text{НОД}(x; y) = 1$.
2. $xRy \Leftrightarrow y < 2x$.
3. $xRy \Leftrightarrow x = 2y$.
4. $xRy \Leftrightarrow x \leq y$.
5. $xRy \Leftrightarrow y - x = 12$.
6. $xRy \Leftrightarrow |y - x| = 12$.

7. $xRy \Leftrightarrow (x - y) : 3$.
8. $xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 30$.
9. $xRy \Leftrightarrow x < y + 1$.
10. $xRy \Leftrightarrow y = 2x + 1$.
11. $xRy \Leftrightarrow y - x = 10$.
12. $xRy \Leftrightarrow |y - x| = 10$.
13. $xRy \Leftrightarrow (x - y) : 4$.
14. $xRy \Leftrightarrow x \cdot y = 15$.
15. $xRy \Leftrightarrow x < y - 1$.

ЗАДАНИЕ 7

Будет ли заданное отношение эквивалентностью на указанном множестве:

1. «иметь одинаковую высоту» (на множестве гор в Европе);
2. «находиться на одинаковой высоте над уровнем моря» (для всех населенных пунктов Тибета);
3. «иметь одинаковую протяженность» (для всех рек России);
4. «иметь одинаковую загрязненность санитарной зоны предприятия» (для всех предприятий Смоленска);
5. «иметь численность населения не менее 5000 человек» (для всех населенных пунктов Подмосковья);
6. «иметь одинаковую степень риска извержения» (для всех вулканов Земли);
7. «иметь общую границу» (для всех государств Европы);
8. «иметь одинаковую глубину» (для всех ущелий Кавказа);
9. «быть равноудаленными от Москвы» (на множестве городов России);
10. «иметь одинаковую высоту» (на множестве гор в Америке);
11. «находиться на одинаковой высоте над уровнем моря» (для всех населенных пунктов России);
12. «иметь одинаковую протяженность» (для всех рек России);
13. «иметь общую границу» (для всех государств Азии);

14. «иметь одинаковую глубину» (для всех рек Кавказа);
15. «быть равноудалёнными от Лондона» (на множестве городов Англии).

ЗАДАНИЕ 8

1. Докажите, что любые два интервала (A, B) и (C, D) на прямой равномощны.

2. Докажите, что любые две окружности на плоскости равномощны. Докажите, что любые два круга на плоскости равномощны.

3. Докажите, что полуинтервал $[0,1)$ равномощен полуинтервалу $(0,1]$.

4. Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно. (Указание: в каждом интервале найдётся рациональная точка.)

5. Примените конструкцию теоремы параграфа и явно укажите соответствие между отрезком $[0,1]$ и полуинтервалом $[0,1)$.

6. Укажите взаимно однозначное соответствие между множеством $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \dots$ и отрезком $[0,1]$.

7. Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости. (Указание: и точки, и прямые задаются парами чисел – за небольшими исключениями.)

8. Докажите, что полуплоскость (точки плоскости, лежащие по одну сторону от некоторой прямой) равномощна плоскости. (Это верно в независимости от того, включаем мы граничную прямую в полуплоскость или нет.)

9. Докажите, что множество всех конечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$ (множеству всех действительных чисел).

10. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел равномощно $\mathbb{R}$.

11. Если A - счетное множество и $f: A \rightarrow B$ - сюръективное отображение, то B является конечным или счетным множеством.

12. Если A - счетное множество и $f: B \rightarrow A$ - инъективное отображение, то B является конечным или счетным множеством.

13. Если множество A эквивалентно множеству B , а множество B эквивалентно множеству C , то множество A эквивалентно множеству C .

14. Если множество A эквивалентно множеству B , то множество B эквивалентно множеству A .

15. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами является счетным множеством.

Тест по теме «Множества»

Задание 1. Множеством, удовлетворяющим заданному характеристическому свойству $B = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, является: см. рис. 2.

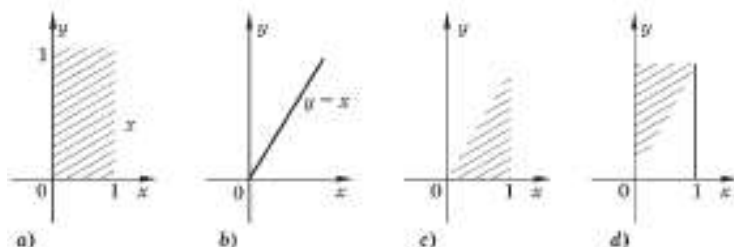


Рис. 2

Задание 2. Множеством, состоящим из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному множеству A , B и C , является:

- 1) $A \cap B \cap C$;
- 2) $A \cup B \cup C$;
- 3) $(A \cap B) \cup C$;
- 4) $A \cup (B \cap C)$.

Задание 3. Результатом операции $A \cap A$ над множеством A является:

- 1) $2A$;
- 2) A ;
- 3) A^2 ;
- 4) операция не имеет смысла.

Задание 4. Если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$, то равенство $A \cap B = A$:

- 1) является возможным для любых множеств A и B ;
- 2) возможно, если $A \subset B$;
- 3) возможно, если $B \subset A$;
- 4) равенство невозможно.

Задание 5. Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

1) $x = 2$; 2) $x = \sqrt{3}$; 3) $x = -5$; 4) $x = 0,5$.

a) $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid -5 < x < 2\}$;

b) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -7 < x < 0,5\}$;

c) $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid -5 < x < 2\}$;

d) $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 2\}$;

e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 3\}$;

f) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x < 2\}$.

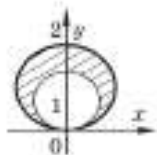
Задание 6. Даны множества $A = \{-2; -1,5; 0,5; 2; 4\}$ и $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел. Тогда $A \cap \mathbb{Z}$ есть множество:

- 1) $\{-1,5; 0,5\}$;
- 2) $\{-2; 2; 4\}$;
- 3) $\{-2; 2\}$;
- 4) $\{2; 4\}$.

Задание 7. Если A и B — множества действительных чисел: $A = [-2, 5)$, $B = (0, 8]$, то множество $B \setminus A$ равно:

- 1) $[-2, 0]$;
- 2) $(5, 8]$;
- 3) $[-2, 0]$;
- 4) $[5, 8]$.

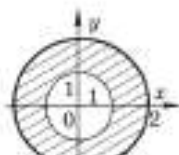
Задание 8. Для множеств $A = \{(x, y): x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$ и $B = \{(x, y): x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$ $A \cap B$ есть множество:



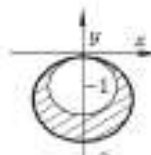
а)



б)



в)



г)

Литература

1. Абрамов, А.М. Избранные вопросы математики. Факультативный курс / А.М. Абрамов, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев. – М.: Просвещение. 1980. – 192 с.
2. Артамонов, В.А. Сборник задач по алгебре / В.А. Артамонов, Ю.А. Бахтурин, Э.Б. Винберг ;под ред. А.И. Кострикина. – М.: Наука, 1987. – 351 с.
3. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия :кн. для учащихся 10–11-х кл. общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, Л.П. Шибасов, З.Ф. Шибасова. – М.: Просвещение, 1996. – 320с.
4. Винберг, Э. Б. Курс алгебры / Э. Б. Винберг.– М.: Факториал Пресс, 2002. – 544 с.
5. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М.:Физматлит, 2004. – 272 с.
6. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. – 431 с.
7. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры. 18 изд. Стереотип. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 431 с.
8. Москинова, Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджеров в примерах и упражнениях: учеб. пособие / Г.И. Москинова. – М.: ИК Логос. 2000. – 240с.
9. Окунев, Л.Я. Высшая алгебра / Л.Я. Окунев. – М., Лань, 2009. – 208 с.
10. Солодовников, А.С. Задачник-практикум по алгебре. Ч. IV: учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А.С. Солодовников, М.А. Родина. –М.: Просвещение, 1985. – 127 с.
11. Таран, Т.А. Основы дискретной математики / Т.А. Таран. – К.:Просвіта, 2003 – 288 с.
12. Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
13. Фаддеев, Д.К. Сборник задач по высшей алгебре / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. – СПб.: Лань, Физматкнига, 2007. – 288 с.

Учебное издание

Банникова Татьяна Михайловна
Кошечева Анна Константиновна
Немцова Ольга Михайловна

МНОЖЕСТВА, ОТНОШЕНИЯ, ФУНКЦИИ

Учебно-методическое пособие

Авторская редакция

Подписано в печать 31.05.2022. Формат 60х84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 4,94. Уч. изд. л. 4,34.
Тираж 34 экз. Заказ № 956.

Издательский центр «Удмуртский университет»
426004, Ижевск, Ломоносова, 4Б, каб. 021
Тел.: + 7 (3412) 916-364, E-mail: editorial@udsu.ru

Типография Издательского центра
«Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 2.
Тел. 68-57-18